Самостоятельная работа к ЛР№8

① Разложение в ряд функции e^x. Нахождение рек. зависимости.

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

| Замена $\frac{x^k}{k!}$ на U_k

Нахождение рек-й зависимости:

$$M = \frac{U_k}{U_{k-1}} \Rightarrow U_k = M \cdot U_{k-1}$$

Найдем M при $\underline{k! = (k-1)! \cdot k}$; $\underline{x^k = x^{k-1} \cdot x}$:

$$M = \frac{U_k}{U_{k-1}} = \frac{\frac{x^k}{k!}}{\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}} = \frac{x^k \cdot (k-1)!}{k! \cdot x^{k-1}} = \frac{\cancel{x^{k-1}} \cdot x \cdot \cancel{(k-1)!}}{\cancel{(k-1)!} \cdot k \cdot \cancel{x^{k-1}}} = \underline{\underline{\frac{x}{k}}}$$

Сумма членов ряда равна:

$$S_k = S_{k-1} + U_k$$

Р-м нач. усл.:

при $k=0 \rightarrow U_0 = \frac{x^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow S_0 = 0 + U_0 = 0 + 1 = 1$

② Разложение в ряд функции sin(x). Нахождение рек-ой зав-ти.

$$\sin(x) \approx (-1)^0 \cdot \frac{x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} + (-1)^1 \frac{x^{2\cdot 1+1}}{(2\cdot 1+1)!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

| Замена: $(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ на U_k

Нахождение рек. зав-ти:

$$M = \frac{U_k}{U_{k-1}} \Rightarrow U_k = M \cdot U_{k-1}$$

Найдем M при $\underline{(2k+1)! = (2k-1)! \cdot 2k \cdot (2k+1)}$ $\quad$ $\underline{(-1)^k = (-1)^{k-1} \cdot (-1)}$

$\underline{x^{2k+1} = x^{2k-1} \cdot x^2}$

$$M = \frac{U_k}{U_{k-1}} = \frac{\frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\frac{(-1)^{k-1} \cdot x^{2(k-1)+1}}{(2(k-1)+1)!}} = \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1} \cdot (2k-1)!}{(2k+1)! \cdot (-1)^{k-1} \cdot x^{2k-1}} =$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^{k-1}} \cdot (-1) \cdot \cancel{x^{2k-1}} \cdot x^2 \cdot \cancel{(2k-1)!}}{\cancel{(2k-1)!} \cdot 2k \cdot (2k+1) \cdot \cancel{(-1)^{k-1}} \cdot \cancel{x^{2k-1}}} = (-1) \frac{x^2}{2k \cdot (2k+1)}$$

Сумма членов ряда равна:

$$S_k = S_{k-1} + U_k$$

Р-м. нач. усл.:

при $k = 0 \rightarrow U_0 = \frac{(-1)^0 x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} = \frac{x^1}{1!} = \frac{x}{1} = x \rightarrow S_0 = 0 + U_0 = 0 + x = x.$

③ Разложение в ряд функции cos(x). Нахождение рек-ой зав-ти

$$\cos(x) \approx (-1)^0 \cdot \frac{x^{2\cdot 0}}{2\cdot 0} + (-1)^1 \cdot \frac{x^{2\cdot 1}}{(2\cdot 1)!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \approx \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

| Замена: $(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ на U_k

Нахождение рек-ой зав-ти: $M = \frac{U_k}{U_{k-1}} \Rightarrow U_k = M \cdot U_{k-1}$

Найдем M при $\underline{x^{2k} = x^{2k-2} \cdot x^2}$ $\quad$ $\underline{(-1)^k = (-1)^{k-1} \cdot (-1)}$

$\underline{2k! = (2k-2)! \cdot (2k-1) \cdot 2k}$

$$M = \frac{U_k}{U_{k-1}} = \frac{\frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}}{\frac{(-1)^{k-1} \cdot x^{2k-2}}{(2k-2)!}} = \frac{(-1)^k \cdot x^{2k} \cdot \cancel{(-1)^{k-1} \cdot x^{2k-2}} \, (2k-2)!}{(2k)! \cdot (-1)^{k-1} \cdot x^{2k-2}} =$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^{k-1}} \cdot (-1) \cdot \cancel{x^{2k-2}} \cdot x^2 \cdot \cancel{(2k-2)!}}{\cancel{(2k-2)!} \cdot (2k-1) \cdot 2k \cdot \cancel{(-1)^{k-1}} \cdot \cancel{x^{2k-2}}} = (-1) \cdot \frac{x^2}{(2k-1) \cdot 2k}$$

Сумма членов ряда равна: $S_k = S_{k-1} + U_k$

Р-м нач. усл.:

при $k = 0 \rightarrow U_0 = (-1)^0 \cdot \frac{x^{2\cdot 0}}{(2\cdot 0)!} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow S_0 = 0 + U_0 = 0 + 1 = \underline{1}$