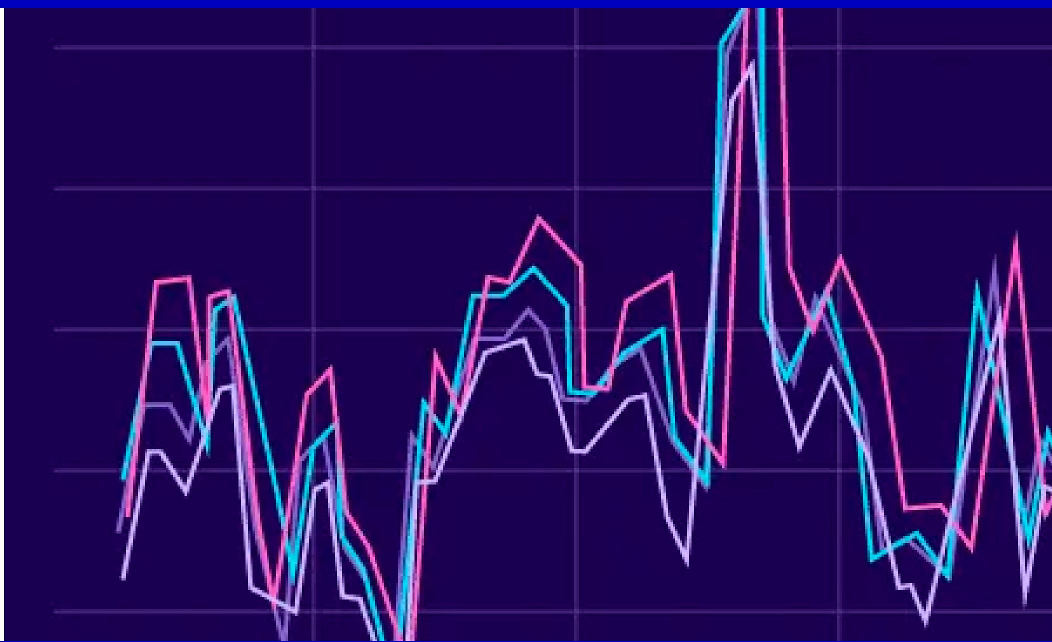
Analisis Deret Waktu
AK2281

MODUL I
KONSEP DASAR DERET WAKTU



Pengajar : Dr. Sandy Vantika, S.Si., M.Si.
Koordinator : Leonardo Valentino Kosasih, S.Aktr.
Kontak : (+62) 823 8599 5958

Modul Praktikum Analisis Deret Waktu - AK2281 terdiri atas 5 buah modul sebagai berikut :

1. Modul 1 : Konsep Dasar Deret Waktu
2. Modul 2 : Model Data Tak Stasioner
3. Modul 3 : Model Musiman
4. Modul 4 : Model Heteroskedastik
5. Modul 5 : Pengayaan

Tim Praktikum AK2281

Koordinator Praktikum : Leonardo V. Kosasih, S.Aktr.

Tim Penyusun Modul Praktikum :

Ang Ditra Alif Pradana	10120046	Matthew Alfarazh	10820021
Feby Yolanda	10819028	Pamella Cathryn	10820033
Ferdinan Gratius Budisatya	10819041	Jeremy	10820034
Jevan Christopher Aryento	10820010	Aloysius Vincent	10820038
Shelly Delfiani	10820014	Kevin Christ Aditya	10820039
Binsar Gunadi Simbolon	10820017	Shafina Aulia Kusuma Putri	10820049

Desain sampul oleh : Matthew Alfarazh - 10820021

Daftar Isi

Daftar Istilah dan Simbol

1. ε_t(baca : epsilon) : galat ke-t;
2. γ_k (baca : gamma) : kovariansi ke-k;
3. ρ_k (baca : rho) : korelasi ke-k;
4. ϕ_{ij} (baca : phi) : korelasi parsial antara i dan j;
5. $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$: Peubah acak X berdistribusi Normal dengan rataan 0 dan variansi σ^2;
6. ACF : *Auto Correlation Function* atau Fungsi Auto korelasi;
7. PACF : *Partial Auto Correlation Function* atau Fungsi Auto Korelasi Parsial;
8. $\mathbb{N}$: Himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, ...\}$;
9. $\mathbb{N}_0$: Himpunan bilangan asli dan 0 $\{0, 1, 2, 3, ...\}$;
10. σ_ε^2 (baca : sigma) : variansi dari ε;
11. $\bar{x}$: rataan dari x;
12. θ (baca : theta);
13. χ^2 (baca : *chi-squared*)
14. $\mathbf{A}$: matriks A ukuran $k \times k$;
15. $\in$: elemen dari suatu himpunan.
16. $\forall$: untuk setiap

Modul 1

Tujuan:

1. Memahami pola data deret waktu,
2. Mengidentifikasi deret waktu stasioner,
3. Menghitung rataan, kovariansi dan korelasi pada deret waktu
4. Mengenal model *random walk*.
5. Mengidentifikasi perilaku ACF dan PACF.

1 Konsep Dasar Deret Waktu

1.1 Stasioneritas

Asumsi yang harus dipenuhi pada pemodelan deret waktu adalah **stasioneritas**. Ide dasar dari kestasioneran adalah perilaku data tidak berubah sepanjang waktu. Ada 2 jenis stasioneritas yaitu **stasioneritas kuat** dan **stasioneritas lemah**. Misal proses $\{Y_t\}$ dengan rataan μ_t. $\{Y_t\}$ dikatakan **stasioner kuat** jika distribusi gabungan dari $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ sama dengan distribusi gabungan $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \ldots, Y_{t_n-k}$ untuk semua waktu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dan lag waktu $k > 0$. Contoh : proses white noise $\{\varepsilon_t\}$ dengan $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ saling bebas dan indentik.
Sedangkan proses stokastik $\{Y_t\}$ dikatakan **stasioner lemah** jika :

1. Rataan konstan sepanjang waktu atau $E[Y_t] = \mu \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$ dan
2. Kovariansi untuk semua waktu t dan lag k konstan atau $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k} = \gamma_k$.

Pada modul ini hanya dibahas tentang sifat kestasioneran lemah.

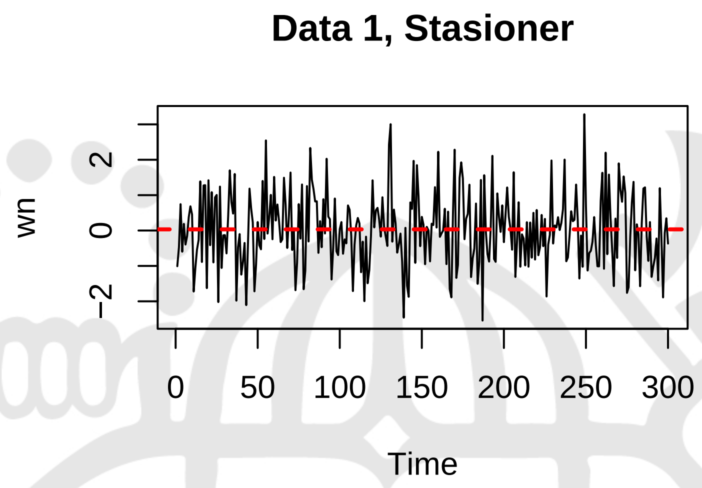
Beberapa contoh pola data dalam deret waktu, diantaranya pola tren, musiman, dan pola stasioner.

1. Pola tren: Terjadi jika terdapat kenaikan atau penurunan sekuler jangka panjang dalam data.
2. Pola musiman: Terjadi jika suatu deret dipengaruhi oleh faktor musiman (misalnya kuartal tahun, bulanan, atau hari-hari pada minggu tertentu).
3. Pola stasioner: Terjadi jika data berfluktuasi di sekitar rata-rata yang konstan.

```r
# Package yang digunakan
library(zoo)
library(forecast)
library(tseries)

# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Contoh data White Noise
wn <- arima.sim(model =list(order = c(0,0,0)),n =300)
plot(wn, main = 'Data 1, Stasioner')
abline(h=mean(wn),col='red',lwd=2,lty = 2)
```

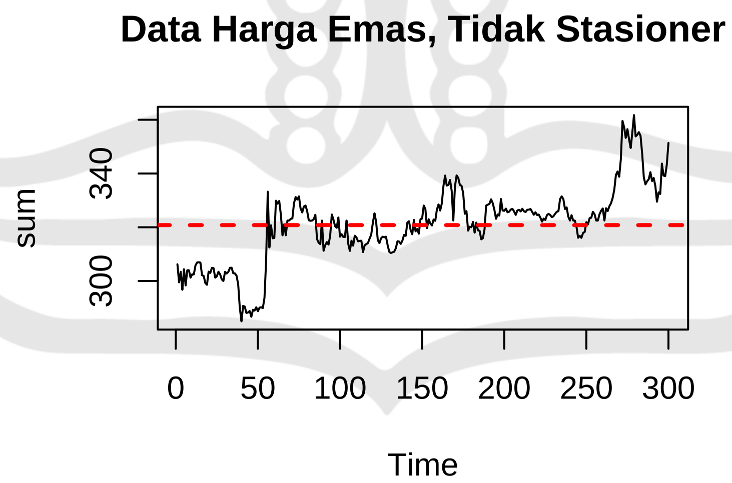


Jurnal Praktikum 1

1. *Berikan interpretasi anda terhadap gambar tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Apakah terdapat pola tren data ?*

```
# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Data Harga Emas
data(gold)
sum <- ts(gold[1:300])
sum <- na.fill(sum,median(sum,na.rm=TRUE))
mean_sum <- mean(sum,na.rm=TRUE)
plot(sum, main = 'Data Harga Emas, Tidak Stasioner')
abline(h=mean_sum,col='red',lwd=2,lty = 2)
```

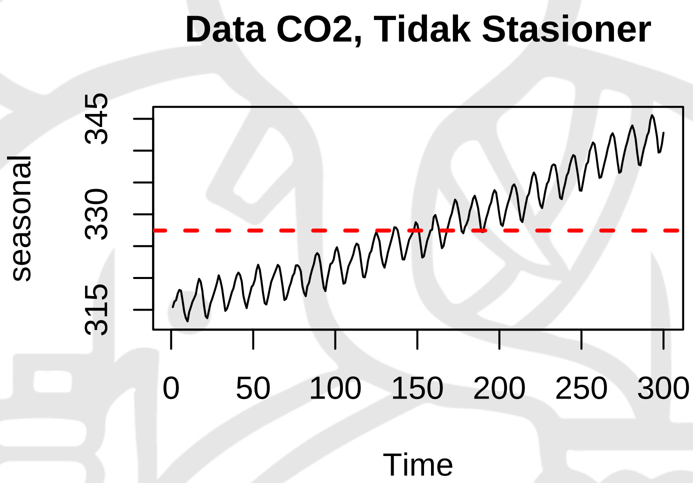


Jurnal Praktikum 2

1. *Berikan interpretasi anda terhadap grafik tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Selidiki variansi dari data ini. Apakah variansinya tetap sama pada semua lag waktu ?*

```r
# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Data CO2
data("co2")
seasonal <- ts(co2[1:300])
plot(seasonal, main = 'Data CO2, Tidak Stasioner')
abline(h=mean(seasonal),col='red',lwd=2,lty = 2)
```

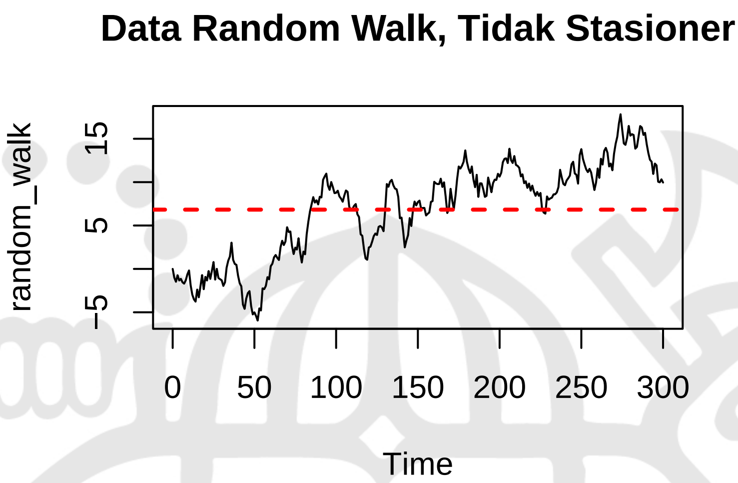


Jurnal Praktikum 3

1. *Berikan interpretasi anda terhadap grafik tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Apakah terdapat pola tren data ?*

```r
# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Membuat data Random Walk
random_walk <- arima.sim(model = list(order=c(0,1,0)),n=300)
plot(random_walk, main = 'Data Random Walk, Tidak Stasioner')
abline(h=mean(random_walk),col='red',lwd=2,lty = 2)
```



Jurnal Praktikum 4

1. *Berikan interpretasi anda terhadap grafik tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Apakah terdapat pola tren data ?*

1.2 Autokorelasi

Misalkan proses $\{Y_t\}$ stasioner maka korelasi antar peubah acak yang terpisah sejauh k lag waktu adalah:

$$\begin{aligned}\rho_k &= \mathrm{Corr}(Y_t, Y_{t-k}) \\ &= \frac{\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_t)\mathrm{Var}(Y_{t-k})}} \\ &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k \in \mathbb{N}_0\end{aligned}$$

Terdapat statistik uji untuk menguji apakah nilai autokorelasi pada suatu lag ke-k signifikan atau tidak. Statistik uji tersebut adalah statistik **uji** t_{ratio} dengan

$$\begin{aligned}H_0 &: \rho_k = 0 \\ H_1 &: \rho_k \neq 0\end{aligned}$$

dengan $k \in \mathbb{N}$. Statistik hitung dari uji ini adalah:

$$t_{\text{ratio}} := \frac{\hat{\rho}_k}{\sqrt{\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\rho}_i\right)/n}} \tag{1}$$

dengan n adalah ukuran sampel.
H_0 akan ditolak jika $|t_{\text{hitung}}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dengan $Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ adalah persentil ke-$(1 - \frac{\alpha}{2})$ dari distribusi normal baku.
Sedangkan statistik uji untuk menguji apakah autokorelasi dari lag pertama hingga lag ke-k signikan

adalah Uji Ljung Box dengan:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$$
$$H_1 : \rho_j \neq 0, \qquad j \in \{1, \dots, k\}$$

dengan $k \in \mathbb{N}$. Statistik hitung dari uji ini adalah:

$$Q(k) := n\,(n+2) \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i} \tag{2}$$

H_0 ditolak jika $Q(k) > \chi^2_{1-\alpha,k}$ dengan $\chi^2_{1-\alpha,k}$ adalah nilai persentil $1-\alpha$ dari distribusi χ^2 dengan derajat kebebasan k.

1.3 Random Walk

Misalkan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ barisan peubah acak yang berdistribusi Normal yang saling bebas dan identik dengan $E[\varepsilon_i] = 0$ dan $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$ untuk semua i. Maka proses *random walk* dapat dikonstruksi dengan persamaan berikut:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \tag{3}$$

yang dapat ditulis secara rekursif seperti berikut:

$$Y_t = Y_{t-1} - \varepsilon_t \tag{4}$$

1.4 Contoh soal :

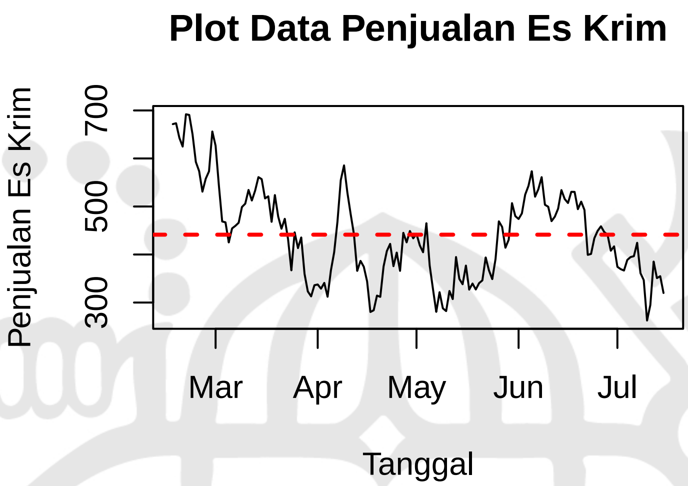
Jurnal Praktikum 5

Klik link ini untuk mendownload data.TEKAN UNTUK MENGUNDUH DATA kemudian buatlah algoritma untuk menghitung :

1. *Rataan dari data*
2. *Kovariansi dari data*
3. *Korelasi dari data*

```
# Membaca data
library(readxl)
df <- read_excel("data.xlsx")

# Membuat plot data
plot(df$Date, df$`Ice Cream Sales`, type = 'line',
     xlab= 'Tanggal', ylab= 'Penjualan Es Krim',
     col = 'black',
     main = 'Plot Data Penjualan Es Krim')
abline(h=mean(df$`Ice Cream Sales`),
       col='red',
       lwd=2,lty = 2)
```




```
# Algoritma menghitung rataan (boleh menggunakan sum)
sum_x <- sum(df$`Ice Cream Sales`)
len <- length(df$`Ice Cream Sales`)
rata_x <- sum_x/len

# Algoritma menghitung kovariansi
maxLag <- 24
kov <- rep(0, maxLag)
for (k in 1: maxLag) {
  x_star <- df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)]-
    mean(df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)])
  y_star <- df$`Ice Cream Sales`[(1+k-1):len]-
    mean(df$`Ice Cream Sales`[(1+k-1):len])
  kov[k]  <-  (x_star)%*%(y_star) /(len)
}
# Algoritma menghitung korelasi
kor <- rep(0, maxLag)
for (k in 1: maxLag) {
  x_star <- df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)]-
    mean(df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)])
  y_star <- df$`Ice Cream Sales`[k:len]-
    mean(df$`Ice Cream Sales`[k:len])
  penyebut <- sqrt((x_star%*%x_star)*(y_star%*%y_star))
  kor[k]  <-  x_star%*%y_star/penyebut
}
```

Penjelasan lebih lanjut : Persamaan kovariansi dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{\gamma}_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{1}{n}(\vec{x}^* \cdot \vec{y}^*) \tag{5}$$

dengan $\vec{x}^* = (x_1 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x})^T$ dan $\vec{y}^* = (y_1 - \bar{y}, \ldots, y_n - \bar{y})^T$.

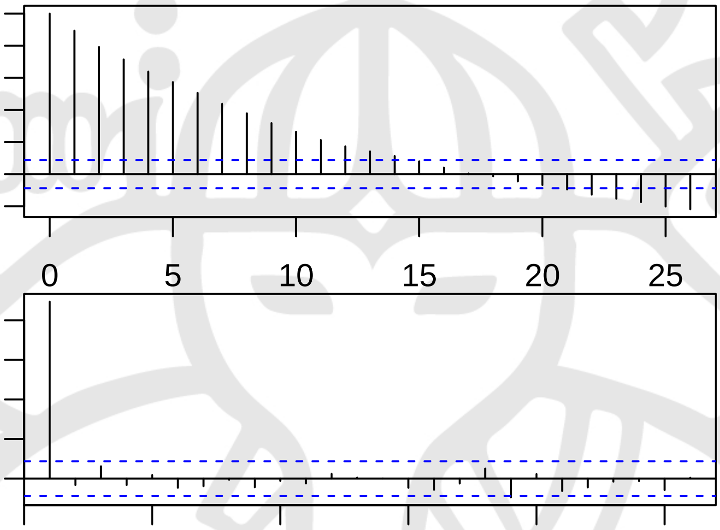
Sedangkan persamaan korelasi dapat ditulis sebagai berikut

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{x}^{*T} \cdot \vec{x}^{*})(\vec{y}^{*T} \cdot \vec{y}^{*})}}(\vec{x}^{*} \cdot \vec{y}^{*}) \tag{6}$$

Catatan : Perhatikan bahwa terdapat kovariansi dan variansi sampel dan populasi. Untuk algoritma menghitung kovariansi sampel dan variansi sampel diserahkan kepada pembaca.

2 Model Deret Waktu Stasioner

Pada bab ini akan dipelajari perilaku umum dari ACF dan PACF untuk menentukan orde pada model deret waktu ARMA yang akan digunakan. Dua jenis perilaku umum yang ditunjukkan adalah **tails off** dan **cuts off**.



Gambar 1: Tails off (gambar atas) dan Cuts Off (gambar bawah)

Berikut adalah persamaan autokorelasi sampel :

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t-\bar{y})(y_{t+k}-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2} \qquad k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Sedangkan untuk persamaan autokorelasi parsial sampel adalah sebagai berikut :

$$\hat{\phi}_{ij} = \begin{cases} \hat{\rho}_1, & i = j = 1 \\ \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}\hat{\phi}_{k-1,j}\hat{\rho}_j}, & k = 2, 3, 4, \ldots \\ \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{k,k}\hat{\phi}_{k-1,k-j}, & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Perilaku umum dari ACF dan PACF untuk model ARMA.

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ACF	*Tails off*	*Cuts off* setelah lag-q	*Tails off*
PACF	*Cuts off* setelah lag p	*Tails off*	*Tails off*

Model deret waktu umum yang sering digunakan adalah model regresi diri (*Autoregressive*), dinotasikan AR, model rataan bergerak (*Moving Average*), dinotasikan MA, dan model campuran regresi diri dan rataan bergerak (*Autoregressive Moving Average*), dinotasikan ARMA.

2.1 Moving Average (MA)

Misalkan $Y_t = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, jika proses $\{Y_t\}$ mengikuti proses MA dengan orde q maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \tag{7}$$

Misalkan Y_t mengikuti proses MA(1) maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \tag{8}$$

Karena $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, maka $E[Y_t] = 0$ dan $\text{Var}(Y_t) = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$ (Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan).
sedangkan untuk kovariansi dari model MA dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2}) \\
&= -\theta_1\text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) \quad \text{(Mengapa?)} \\
&= -\theta_1\sigma_\varepsilon^2
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3}) \\
&= 0 \quad \text{(Mengapa?)}
\end{aligned}$$

Sehingga fungsi autokovariansi untuk model MA(1) adalah

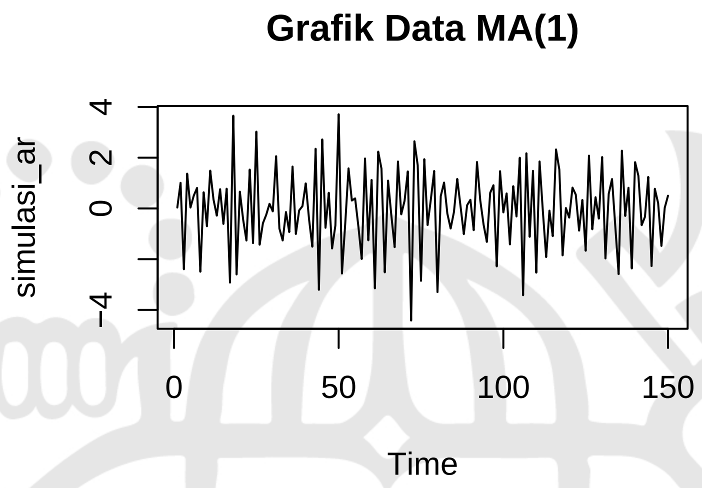
$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ -\theta_1\sigma_\varepsilon^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

dan fungsi autokorelasinya adalah

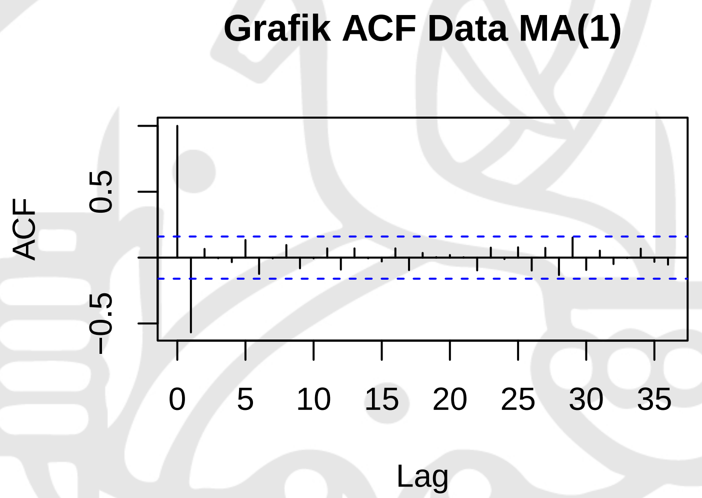
$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

Untuk membuat simulasi model MA(1) dapat menggunakan kode berikut :

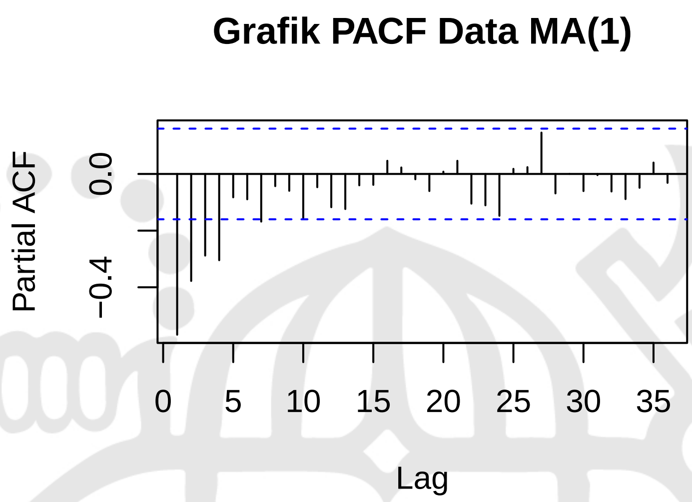
```
n_sim <- 150 # Banyak data
theta <- -0.8 # Nilai dari theta_1
simulasi_ar <- arima.sim(model = list(c(0,0,1), ma = theta),
                         n = n_sim)
plot(simulasi_ar, main = 'Grafik Data MA(1)')
```




```r
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data MA(1)',
    lag.max = 36)
```



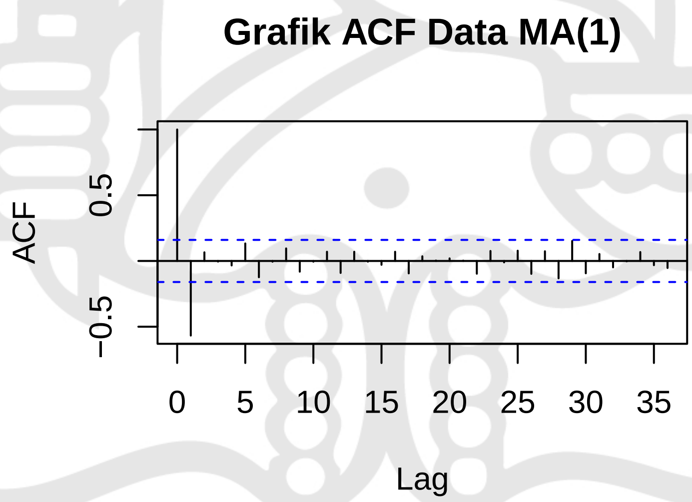

```r
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data MA(1)',
    lag.max = 36)
```



Jurnal Praktikum 6

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Apakah terdapat pola tren data ?*

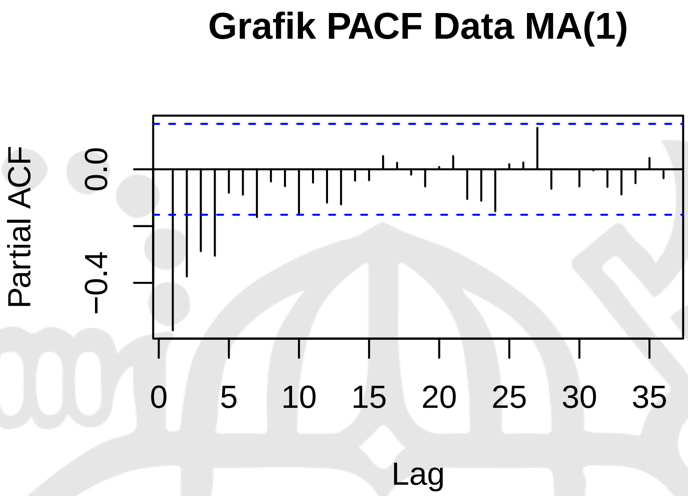
```
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data MA(1)',
    lag.max = 36)
```



Jurnal Praktikum 7

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah ACF berprilaku sesuai dengan model MA ?*
3. *Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model MA(1) ? Berikan alasan anda !*

```
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data MA(1)',
    lag.max = 36)
```



Jurnal Praktikum 8

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah PACF berprilaku sesuai dengan model MA ?*
3. *Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model MA(1) ? Berikan alasan anda !*
4. *Ulangi langkah-langkah di atas dengan mengganti nilai variabel theta dan n_sim!*

Catatan: Nilai variabel theta dibuat negatif karena bahasa pemrograman R mendefinisikan model MA (q) sebagai:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{9}$$

2.2 Autoregressive (AR)

Misalkan $Y_t = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, jika proses $\{Y_t\}$ mengikuti proses Autoregressive (AR) dengan orde p maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{10}$$

Interpretasi dari persamaan di atas adalah : nilai saat ini dari deret waktu Y_t adalah kombinasi linier dari p nilai dirinya di masa lalu ditambah dengan galat, ε_t Misalkan proses $\{Y_t\}$ terpusat, Y_t mengikuti proses AR(1) maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{11}$$

Karena $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, maka $E[Y_t] = 0$ dan $\text{Var}(Y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$ (Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan) sedangkan untuk kovariansinya dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) &= \text{Cov}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1}) \\
&= \phi_1 \text{Cov}(Y_{t-1}, Y_{t-1}) + \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, Y_{t-2}) \\
&= \phi_1 \gamma_0
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) &= \mathrm{Cov}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-2}) \\
&= \mathrm{Cov}(\phi_1(\phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t, Y_{t-2}) \\
&= \mathrm{Cov}(\phi_1^2 Y_{t-2}, Y_{t-2}) + \mathrm{Cov}(\phi_1 \varepsilon_{t-1}), Y_{t-2}) + \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, Y_{t-2}) \\
&= \phi_1^2 \gamma_0
\end{aligned}$$

sehingga fungsi autokovariansi untuk model AR(1) adalah

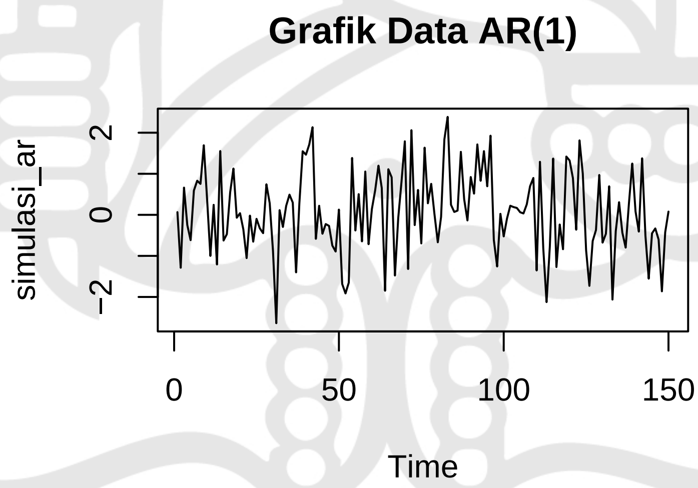
$$\gamma_k = \frac{\phi_1^k \sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}, \quad k \geq 0$$

dan fungsi autokorelasinya adalah

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k \quad k \geq 0$$

Untuk membuat simulasi model AR(1) dapat menggunakan kode berikut :

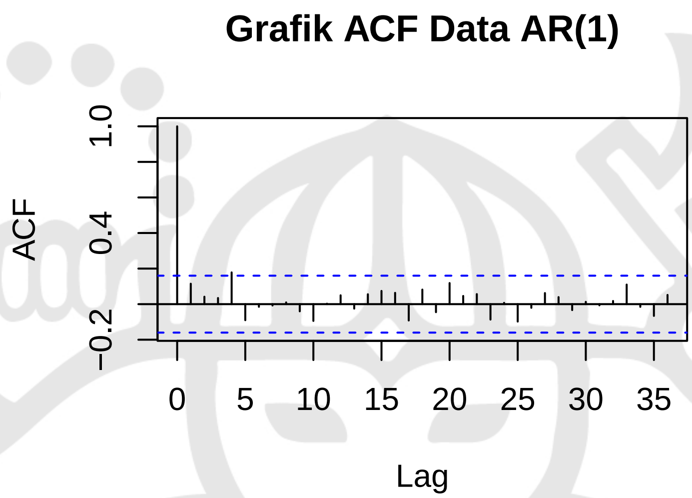
```
n_sim <- 150 # Banyak data
phi <- 0.2 # Nilai dari phi_1
simulasi_ar <- arima.sim(model = list(c(1,0,0), ar = phi),
                         n = n_sim)
plot(simulasi_ar, main = 'Grafik Data AR(1)')
```



Jurnal Praktikum 9

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Apakah terdapat pola tren data ?*

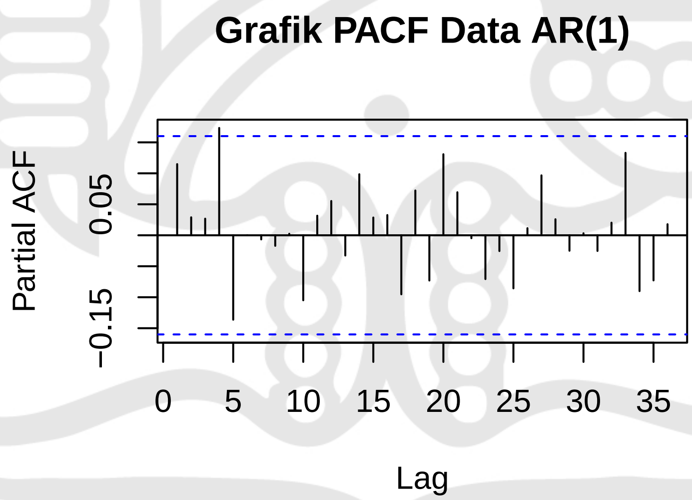
```
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data AR(1)',
    lag.max = 36)
```



Jurnal Praktikum 10

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah ACF berprilaku sesuai dengan model AR (1)?*

```
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data AR(1)',
    lag.max = 36)
```



Interpretasi Gambar :

Jurnal Praktikum 11

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah PACF berprilaku sesuai dengan model AR (1)?*
3. *Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model AR(1) ?*
4. *Ulangi langkah di atas dengan memvariasikan nilai variabel phi dan n_sim !*

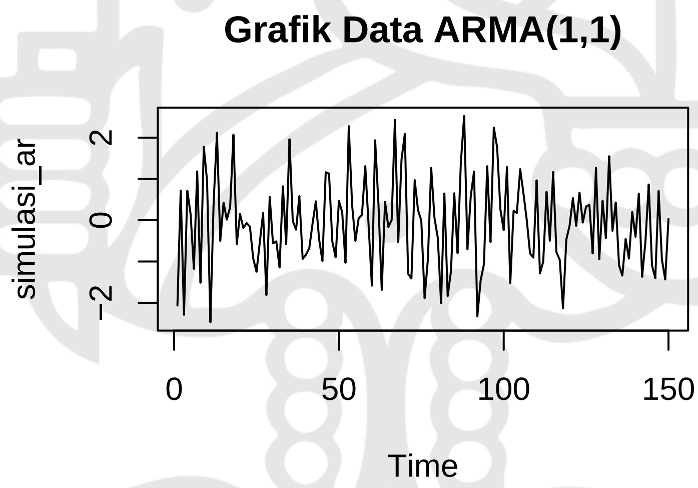
2.3 Autoregressive Moving Average (ARMA)

Misalkan $Y_t = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, jika proses Y_t mengikuti proses ARMA dengan orde (p, q) maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{12}$$

(Persamaan umum untuk $E[Y_t]$ dan $\text{Var}(Y_t)$ dari proses ARMA (1,1) diserahkan kepada pembaca)
Untuk membuat simulasi model ARMA(1,1) dapat menggunakan kode berikut :

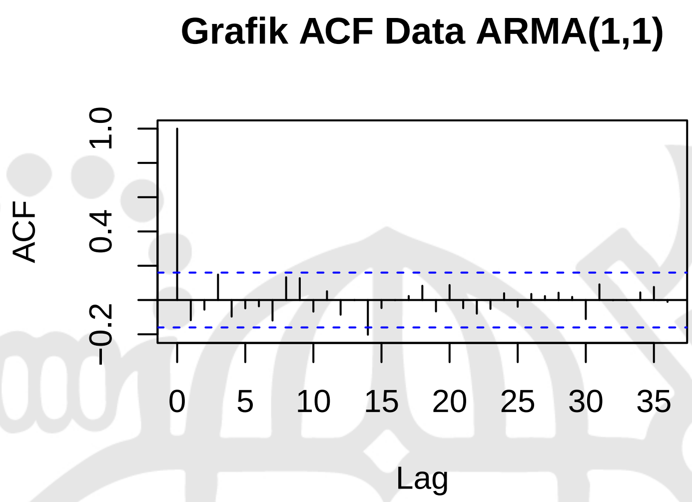
```
n_sim <- 150 # Banyak data
theta <- -0.3 # Nilai dari theta_1
phi <- 0.2 # Nilai dari phi_1
simulasi_ar <- arima.sim(model = list(c(1,0,1), ar = phi, ma = theta),
                         n = n_sim)
plot(simulasi_ar, main = 'Grafik Data ARMA(1,1)')
```



Jurnal Praktikum 12

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Apakah terdapat pola tren data ?*

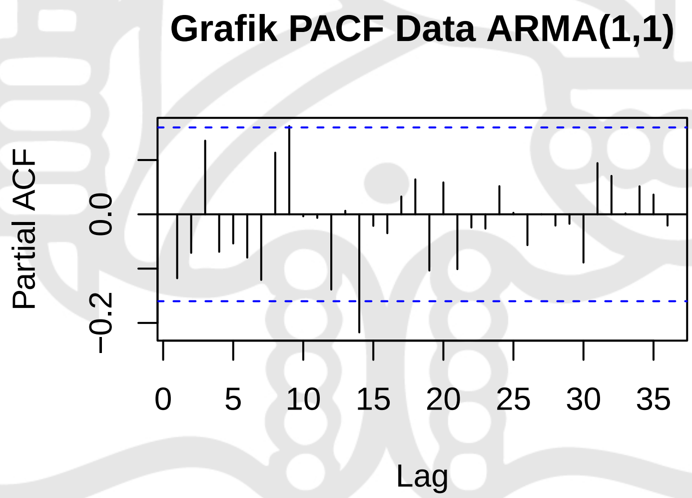
```
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data ARMA(1,1)',
    lag.max = 36)
```



Jurnal Praktikum 13

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah ACF berprilaku sesuai dengan model ARMA (1,1)?*
3. *Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model ARMA(1,1) ?*

```
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data ARMA(1,1)',
    lag.max = 36)
```



Jurnal Praktikum 14

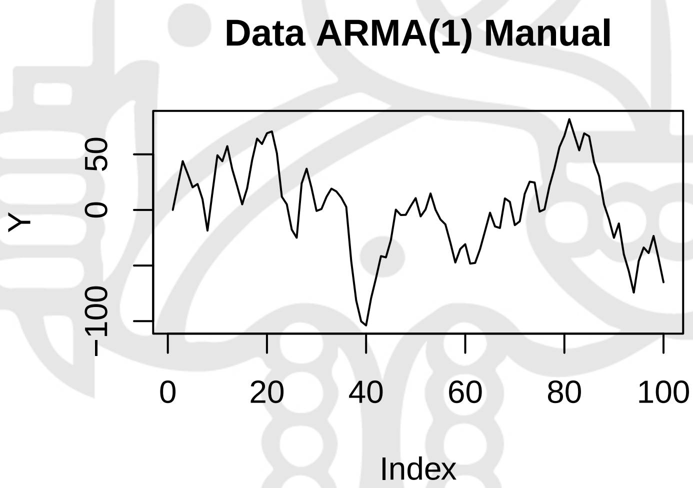
1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah PACF berprilaku sesuai dengan model ARMA (1,1)?*
3. *Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model ARMA(1,1) ?*

2.4 Simulasi Data Manual

Misal proses $\{Y_t\}$ mengikuti model ARMA (1,1) maka persamaannya adalah :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{13}$$

```
n_sim <- 100 # Banyak Data
phi <- 0.8 # Nilai dari phi_1
theta <- -0.5 # Nilai dari theta_1
sig <- 16 # Besar standar deviasi error
Y <- c(rep(0, #Nilai awal
           n_sim)) # Membuat array / vektor data
e <- rnorm(n = n_sim,
           mean = 0,
           sd = sig) # Membuat galat
for(i in 2:n_sim){
  if(i)
  Y[i] <- phi*Y[i-1] + e[i] - theta*e[i-1]
}
plot(Y, type = 'l',
     main = 'Data ARMA(1) Manual')
```



Gambar 2: Grafik Data Manual

Jurnal Praktikum 15

1. *Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !*
2. *Apakah data tersebar pada rataan data ?*
3. *Apakah terdapat pola tren data ?*

Berikutnya akan dicoba menghitung ACF secara manual

```
maxLag <- 25
acf_manual <- rep(1,maxLag)
for(i in 1:maxLag){
  pembilang <- (Y[1:(n_sim-i+1)]-mean(Y))%*%(Y[i:n_sim]-mean(Y))
  penyebut <- sum((Y-mean(Y))^2)
  acf_manual[i]<-sum(pembilang/penyebut)
}
acf_r <- as.vector(acf(Y,lag.max = 24,plot = F)$acf)
galat <- acf_manual - acf_r
sum(galat) # Total Galat
```

```
## [1] -3.365364e-16
```

Terakhir akan dicoba menghitung PACF secara manual. Perhatikan bahwa PACF dapat dituliskan dengan persamaan Yule Walker seperti berikut :

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \phi_{k3}\rho_{j-3} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{14}$$

Secara umum maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\phi_{k1} + \rho_1\phi_{k2} + \rho_2\phi_{k3} + \cdots + \rho_{k-1}\phi_{kk} &= \rho_1 \\
\rho_1\phi_{k1} + \phi_{k2} + \rho_1\phi_{k3} + \cdots + \rho_{k-2}\phi_{kk} &= \rho_2 \\
\rho_2\phi_{k1} + \rho_1\phi_{k2} + \phi_{k3} + \cdots + \rho_{k-3}\phi_{kk} &= \rho_3 \\
&\vdots \\
\rho_{k-1}\phi_{k1} + \rho_{k-2}\phi_{k2} + \rho_{k-3}\phi_{k3} + \cdots + \phi_{kk} &= \rho_k
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan ini dapat ditulis menjadi persamaan matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{15}$$

dengan masing - masing,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

dan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \phi_{k3} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \tag{17}$$

Sehingga untuk menghitung nilai dari $\mathbf{x}$ dapat dilakukan dengan :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \tag{18}$$

Ingat bahwa nilai korelasi parsial yang ingin dihitung adalah ϕ_{kk} sehingga perhitungannya dapat dilakukan iterasi sebagai berikut :

```
library(matrixcalc) # Untuk mencari invers matriks
```

```
## Warning: package 'matrixcalc' was built under R version 4.2.1
```

```
maxLag <- 24 # Ukuran vektor dan matriks
pacf_manual <- rep(0,maxLag)
for (k in 1:maxLag){
  if (k ==1){
    pacf_manual[k] <- acf_r[2] # Hati - hati
  }                    #jika mau mengubah maxLag
  else{
  rho <- acf_r[1:(k+1)] # Vektor y
  phi <- matrix(1, nrow=k,ncol=k) # Matriks A
  for (i in 1:(k)){
    for (j in 1:(k)){
      phi[i,j] <- rho[abs(i-j)+1] # Membuat matriks simetri
    }
  }# vektor x
  pacf_manual[k] <- as.vector(matrix.inverse(phi)%*%rho[2:(k+1)])[k]
  }
}
pacf_r <- as.vector(acf(Y,
                        lag.max = maxLag,
                        type = 'partial',
                        plot = F)$acf)
galat <- pacf_manual - pacf_r
sum(galat) # Total Galat
```

```
## [1] -1.39385e-15
```

3 Daftar Pustaka

Cryer, J., & Chan, K. (2011). Time series analysis. New York: Springer.
Wei, W. W. S. (1990). Time series analysis: Univariate and multivariate methods. Redwood City, Calif: Addison-Wesley Pub.
Tsay, R. S. (2002). Analysis of Financial Time Series. New York: Wiley

—- Selesai —-