

# Modul Analisis Deret Waktu - AK2281

Leonardo V Kosasih, S.Aktr, ASAI

2023-11-18

---

DRAFT

# Daftar Isi

<b>Selamat Datang !</b>	<b>5</b>
Kata Pengantar . . . . .	5
Kontak Penulis . . . . .	5
Penyusun Modul . . . . .	5
Daftar Notasi dan Simbol yang Digunakan . . . . .	6
<b>1 Konsep Dasar Deret Waktu</b>	<b>7</b>
1.1 Tujuan . . . . .	7
1.2 Stasioneritas . . . . .	7
1.3 Autokorelasi . . . . .	12
1.4 Random Walk . . . . .	13
1.5 Contoh soal : . . . . .	14
<b>2 Model Deret Waktu Stasioner</b>	<b>17</b>
2.1 Moving Average (MA) . . . . .	18
2.2 Autoregressive (AR) . . . . .	23
2.3 Autoregressive Moving Average (ARMA) . . . . .	27
2.4 Simulasi Data Manual . . . . .	30

DRAFT

# Selamat Datang !

## Kata Pengantar

Puji dan syukur saya ucapkan kepada Lorem Ipsum

## Kontak Penulis

- Github: leonv1602
- LinkedIn: Leonardo V Kosasih

## Penyusun Modul

### Tim Praktikum AK2281

Koordinator Praktikum : Leonardo V. Kosasih, S.Aktr.

Tim Penyusun Modul Praktikum :

Ang Ditra Alif Pradana	10120046	Matthew Alfarazh	10820021
Feby Yolanda	10819028	Pamella Cathryn	10820033
Ferdinan Gratius Budisatya	10819041	Jeremy	10820034
Jevan Christopher Aryento	10820010	Aloysius Vincent	10820038
Shelly Delfiani	10820014	Kevin Christ Aditya	10820039
Binsar Gunadi Simbolon	10820017	Shafina Aulia Kusuma Putri	10820049
Desain sampul oleh : Matthew Alfarazh - 10820021			

## Daftar Notasi dan Simbol yang Digunakan

### Daftar Istilah dan Simbol

1.  $\varepsilon_t$  (baca : epsilon) : galat ke- $t$ ;
2.  $\gamma_k$  (baca : gamma) : kovariansi ke- $k$ ;
3.  $\rho_k$  (baca : rho) : korelasi ke- $k$ ;
4.  $\phi_{ij}$  (baca : phi) : korelasi parsial antara  $i$  dan  $j$ ;
5.  $X \sim N(0, \sigma^2)$  : Peubah acak  $X$  berdistribusi Normal dengan rataaan 0 dan variansi  $\sigma^2$ ;
6. ACF : *Auto Correlation Function* atau Fungsi Auto korelasi;
7. PACF : *Partial Auto Correlation Function* atau Fungsi Auto Korelasi Parsial;
8.  $\mathbb{N}$  : Himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ;
9.  $\mathbb{N}_0$  : Himpunan bilangan asli dan 0  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;
10.  $\sigma_\varepsilon^2$  (baca : sigma) : variansi dari  $\varepsilon$ ;
11.  $\bar{x}$  : rataaan dari  $x$ ;
12.  $\theta$  (baca : theta);
13.  $\chi^2$  (baca : *chi-squared*)
14.  $\mathbf{A}$  : matriks  $A$  ukuran  $k \times k$ ;
15.  $\in$  : elemen dari suatu himpunan.
16.  $\forall$  : untuk setiap

# Bab 1

## Konsep Dasar Deret Waktu

### 1.1 Tujuan

1. Memahami pola data deret waktu,
2. Mengidentifikasi deret waktu stasioner,
3. Menghitung rata-rata, kovariansi dan korelasi pada deret waktu
4. Mengenal model *random walk*.
5. Mengidentifikasi perilaku ACF dan PACF.

### 1.2 Stasioneritas

Asumsi yang harus dipenuhi pada pemodelan deret waktu adalah **stasioneritas**. Ide dasar dari kestasioneran adalah perilaku data tidak berubah sepanjang waktu. Ada 2 jenis stasioneritas yaitu **stasioneritas kuat** dan **stasioneritas lemah**. Misal proses  $\{Y_t\}$  dengan rata-rata  $\mu_t$ .  $\{Y_t\}$  dikatakan **stasioner kuat** jika distribusi gabungan dari  $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$  sama dengan distribusi gabungan  $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \dots, Y_{t_n-k}$  untuk semua waktu  $t_1, t_2, \dots, t_n$  dan lag waktu  $k > 0$ . Contoh : proses white noise  $\{\varepsilon_t\}$  dengan  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  saling bebas dan identik.

Sedangkan proses stokastik  $\{Y_t\}$  dikatakan **stasioner lemah** jika :

1. Rataan konstan sepanjang waktu atau  $E[Y_t] = \mu \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$  dan
2. Kovariansi untuk semua waktu  $t$  dan lag  $k$  konstan atau  $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k} = \gamma_k$ .

Pada modul ini hanya dibahas tentang sifat kestasioneran lemah.

Beberapa contoh pola data dalam deret waktu, diantaranya pola tren, musiman, dan pola stasioner.

1. Pola tren: Terjadi jika terdapat kenaikan atau penurunan sekuler jangka panjang dalam data.
2. Pola musiman: Terjadi jika suatu deret dipengaruhi oleh faktor musiman (misalnya kuartal tahun, bulanan, atau hari-hari pada minggu tertentu).
3. Pola stasioner: Terjadi jika data berfluktuasi di sekitar rata-rata yang konstan.

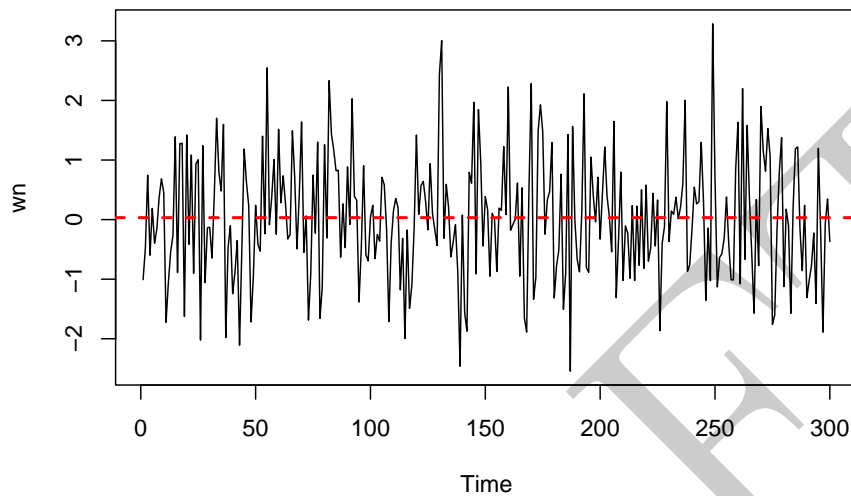
```
# Package yang digunakan
library(zoo)
library(forecast)
library(tseries)

# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Contoh data White Noise
wn <- arima.sim(model = list(order = c(0,0,0)), n = 300)
plot(wn, main = 'Data 1, Stasioner')
abline(h=mean(wn), col='red', lwd=2, lty = 2)
```



Data 1, Stasioner

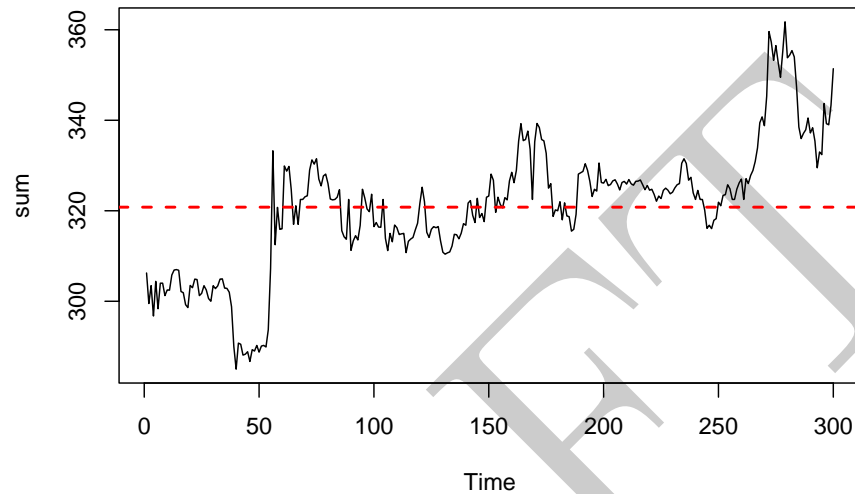
**Jurnal Praktikum 1**

1. Berikan interpretasi anda terhadap gambar tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rata-rata data ?
3. Apakah terdapat pola tren data ?

```
# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Data Harga Emas
data(gold)
sum <- ts(gold[1:300])
sum <- na.fill(sum,median(sum,na.rm=TRUE))
mean_sum <- mean(sum,na.rm=TRUE)
plot(sum, main = 'Data Harga Emas, Tidak Stasioner')
abline(h=mean_sum,col='red',lwd=2,lty = 2)
```

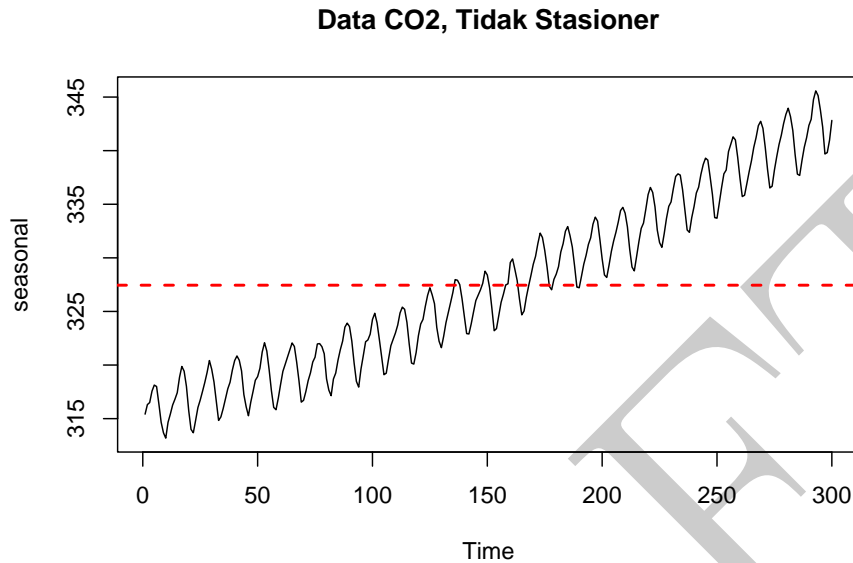
Data Harga Emas, Tidak Stasioner

**Jurnal Praktikum 2**

1. Berikan interpretasi anda terhadap grafik tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rata-rata data ?
3. Selidiki variansi dari data ini. Apakah variansinya tetap sama pada semua lag waktu ?

```
# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Data CO2
data("co2")
seasonal <- ts(co2[1:300])
plot(seasonal, main = 'Data CO2, Tidak Stasioner')
abline(h=mean(seasonal),col='red',lwd=2,lty = 2)
```

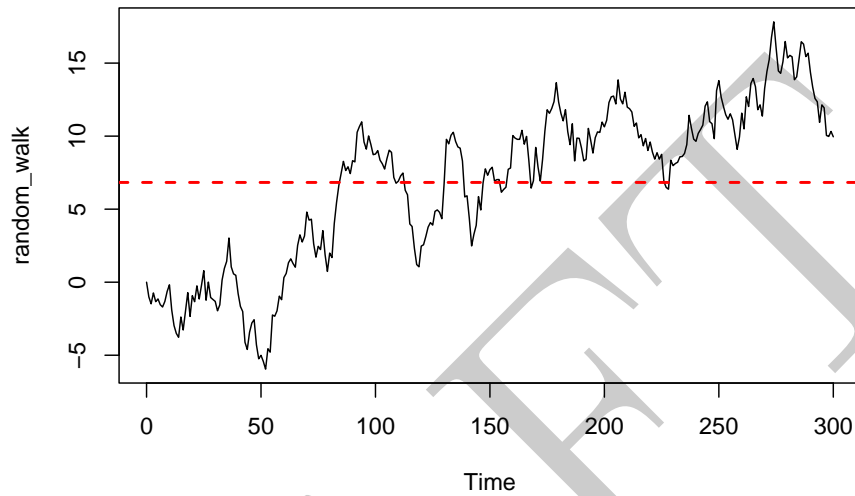


### Jurnal Praktikum 3

1. Berikan interpretasi anda terhadap grafik tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rataaan data ?
3. Apakah terdapat pola tren data ?

```
# Seed agar simulasi tetap sama
set.seed(1602)

# Membuat data Random Walk
random_walk <- arima.sim(model = list(order=c(0,1,0)),n=300)
plot(random_walk, main = 'Data Random Walk, Tidak Stasioner')
abline(h=mean(random_walk),col='red',lwd=2,lty = 2)
```

**Data Random Walk, Tidak Stasioner****Jurnal Praktikum 4**

1. Berikan interpretasi anda terhadap grafik tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rata-rata data ?
3. Apakah terdapat pola tren data ?

**1.3 Autokorelasi**

Misalkan proses  $\{Y_t\}$  stasioner maka korelasi antar peubah acak yang terpisah sejauh  $k$  lag waktu adalah:

$$\begin{aligned}
 \rho_k &= \text{Corr}(Y_t, Y_{t-k}) \\
 &= \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(Y_t)\text{Var}(Y_{t-k})}} \\
 &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

Terdapat statistik uji untuk menguji apakah nilai autokorelasi pada suatu lag ke- $k$  signifikan atau tidak. Statistik uji tersebut adalah statistik **uji**  $t_{ratio}$  dengan

$$\begin{aligned} H_0 : \rho_k &= 0 \\ H_1 : \rho_k &\neq 0 \end{aligned}$$

dengan  $k \in \mathbb{N}$ . Statistik hitung dari uji ini adalah:

$$t_{ratio} := \frac{\hat{\rho}_k}{\sqrt{\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} \hat{\rho}_i\right) / n}} \quad (1.1)$$

dengan  $n$  adalah ukuran sampel.

$H_0$  akan ditolak jika  $|t_{hitung}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  dengan  $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  adalah persentil ke- $(1 - \frac{\alpha}{2})$  dari distribusi normal baku.

Sedangkan statistik uji untuk menguji apakah autokorelasi dari lag pertama hingga lag ke- $k$  signifikan adalah Uji Ljung Box dengan:

$$\begin{aligned} H_0 : \rho_1 &= \rho_2 = \dots = \rho_k = 0 \\ H_1 : \rho_j &\neq 0, \quad j \in \{1, \dots, k\} \end{aligned}$$

dengan  $k \in \mathbb{N}$ . Statistik hitung dari uji ini adalah:

$$Q(k) := n(n+2) \sum_{i=1}^k \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i} \quad (1.2)$$

$H_0$  ditolak jika  $Q(k) > \chi_{1-\alpha, k}^2$  dengan  $\chi_{1-\alpha, k}^2$  adalah nilai persentil  $1 - \alpha$  dari distribusi  $\chi^2$  dengan derajat kebebasan  $k$ .

## 1.4 Random Walk

Misalkan  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  barisan peubah acak yang berdistribusi Normal yang saling bebas dan identik dengan  $E[\varepsilon_i] = 0$  dan  $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$  untuk semua  $i$ . Maka proses *random walk* dapat dikonstruksi dengan persamaan berikut:

$$Y_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i \quad (1.3)$$

yang dapat ditulis secara rekursif seperti berikut:

$$Y_t = Y_{t-1} - \varepsilon_t \quad (1.4)$$

## 1.5 Contoh soal :

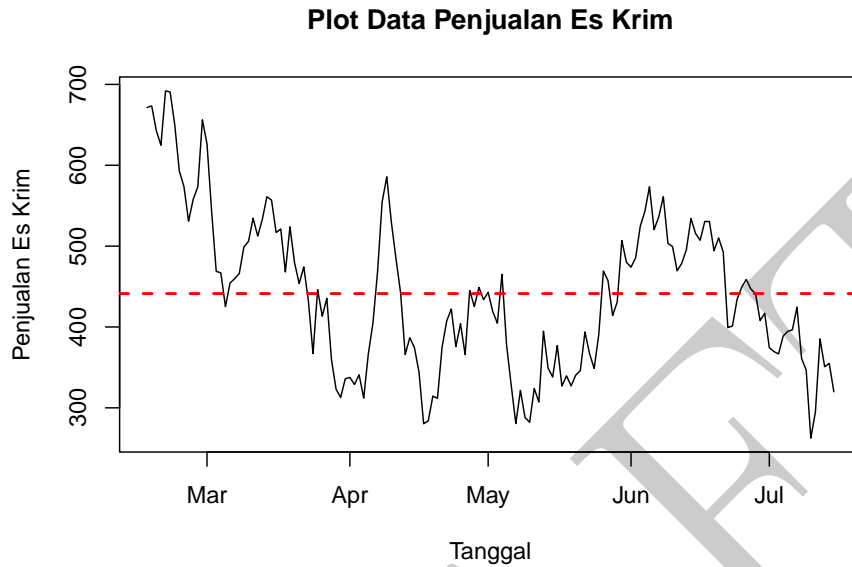
### Jurnal Praktikum 5

Klik link ini untuk mendownload data. [TEKAN UNTUK MENGUNDUH DATA](#) kemudian buatlah algoritma untuk menghitung :

1. Rataan dari data
2. Kovariansi dari data
3. Korelasi dari data

```
# Membaca data
library(readxl)
df <- read_excel("data.xlsx")

# Membuat plot data
plot(df$Date, df$`Ice Cream Sales`, type = 'line',
     xlab= 'Tanggal', ylab= 'Penjualan Es Krim',
     col = 'black',
     main = 'Plot Data Penjualan Es Krim')
abline(h=mean(df$`Ice Cream Sales`),
       col='red',
       lwd=2, lty = 2)
```



```
# Algoritma menghitung rata-rata (boleh menggunakan sum)
sum_x <- sum(df$`Ice Cream Sales`)
len <- length(df$`Ice Cream Sales`)
rata_x <- sum_x/len

# Algoritma menghitung kovariansi
maxLag <- 24
kov <- rep(0, maxLag)
for (k in 1: maxLag) {
  x_star <- df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)] -
    mean(df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)])
  y_star <- df$`Ice Cream Sales`[(1+k-1):len] -
    mean(df$`Ice Cream Sales`[(1+k-1):len])
  kov[k] <- (x_star)%*%(y_star) /(len)
}

# Algoritma menghitung korelasi
kor <- rep(0, maxLag)
for (k in 1: maxLag) {
  x_star <- df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)] -
    mean(df$`Ice Cream Sales`[1:(len-k+1)])
```

```

y_star <- df$`Ice Cream Sales`[k:len] -
  mean(df$`Ice Cream Sales`[k:len])
penyebut <- sqrt((x_star**x_star)*(y_star**y_star))
kor[k] <- x_star**y_star/penyebut
}

```

Penjelasan lebih lanjut : Persamaan kovariansi dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{\gamma}_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{1}{n}(\vec{x}^* \cdot \vec{y}^*) \quad (1.5)$$

dengan  $\vec{x}^* = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})^T$  dan  $\vec{y}^* = (y_1 - \bar{y}, \dots, y_n - \bar{y})^T$ .

Sedangkan persamaan korelasi dapat ditulis sebagai berikut

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{x}^{*T} \cdot \vec{x}^*)(\vec{y}^{*T} \cdot \vec{y}^*)}}(\vec{x}^* \cdot \vec{y}^*) \quad (1.6)$$

Catatan : Perhatikan bahwa terdapat kovariansi dan variansi sampel dan populasi. Untuk algoritma menghitung kovariansi sampel dan variansi sampel diserahkan kepada pembaca.



## Bab 2

# Model Deret Waktu Stasioner

Pada bab ini akan dipelajari perilaku umum dari ACF dan PACF untuk menentukan orde pada model deret waktu ARMA yang akan digunakan. Dua jenis perilaku umum yang ditunjukkan adalah **tails off** dan **cuts off**.

Berikut adalah persamaan autokorelasi sampel :

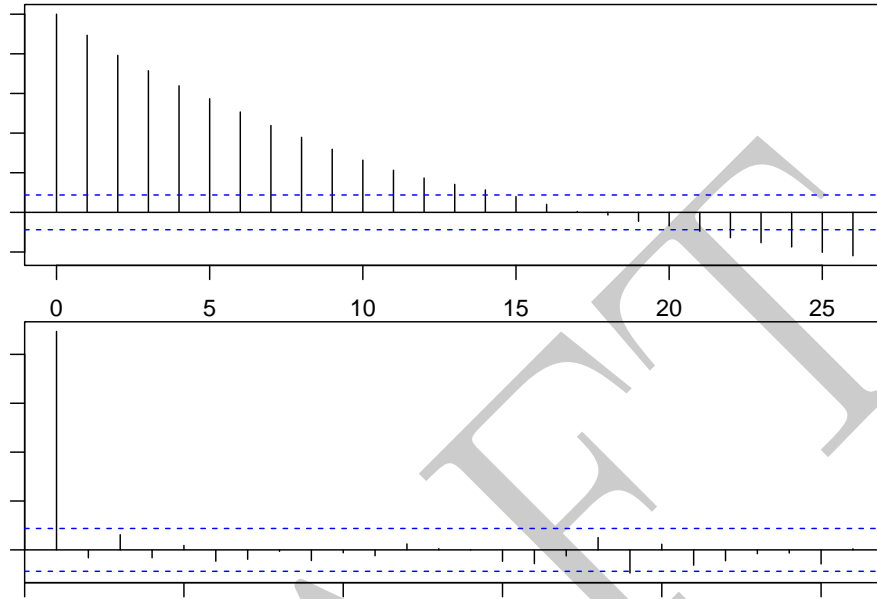
$$\begin{aligned}\hat{\rho}_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2} \quad k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Sedangkan untuk persamaan autokorelasi parsial sampel adalah sebagai berikut :

$$\hat{\phi}_{ij} = \begin{cases} \hat{\rho}_1, & i = j = 1 \\ \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_j}, & k = 2, 3, 4, \dots \\ \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{k,k} \hat{\phi}_{k-1,k-j}, & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Perilaku umum dari ACF dan PACF untuk model ARMA.

## 2.1. MOVING AVERAGE (MA) 2. MODEL DERET WAKTU STASIONER



Gambar 2.1: Tails off (gambar atas) dan Cuts Off (gambar bawah)  
(#fig:Contoh Plot tails dan cut)

	AR( $p$ )	MA( $q$ )	ARMA( $p, q$ )
<b>ACF</b>	<i>Tails off</i>	<i>Cuts off</i> setelah lag- $q$	<i>Tails off</i> setelah lag ke- $q$
<b>PACF</b>	<i>Cuts off</i> setelah lag $p$	<i>Tails off</i>	<i>Tails off</i> setelah lag ke- $p$

Model deret waktu umum yang sering digunakan adalah model regresi diri (*Autoregressive*), dinotasikan AR, model rata-rata bergerak (*Moving Average*), dinotasikan MA, dan model campuran regresi diri dan rata-rata bergerak (*Autoregressive Moving Average*), dinotasikan ARMA.

### 2.1 Moving Average (MA)

Misalkan  $Y_t = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , jika proses  $\{Y_t\}$  mengikuti proses MA dengan orde  $q$  maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.1)$$

## BAB 2. MODEL DERET WAKTU STASIONER MOVING AVERAGE (MA)

Misalkan  $Y_t$  mengikuti proses MA(1) maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.2)$$

Karena  $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , maka  $E[Y_t] = 0$  dan  $\text{Var}(Y_t) = (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2$  (Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan).

sedangkan untuk kovariansi dari model MA dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2}) \\ &= -\theta_1 \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) \quad (\text{Mengapa?}) \\ &= -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3}) \\ &= 0 \quad (\text{Mengapa?}) \end{aligned}$$

Sehingga fungsi autokovariansi untuk model MA(1) adalah

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

dan fungsi autokorelasinya adalah

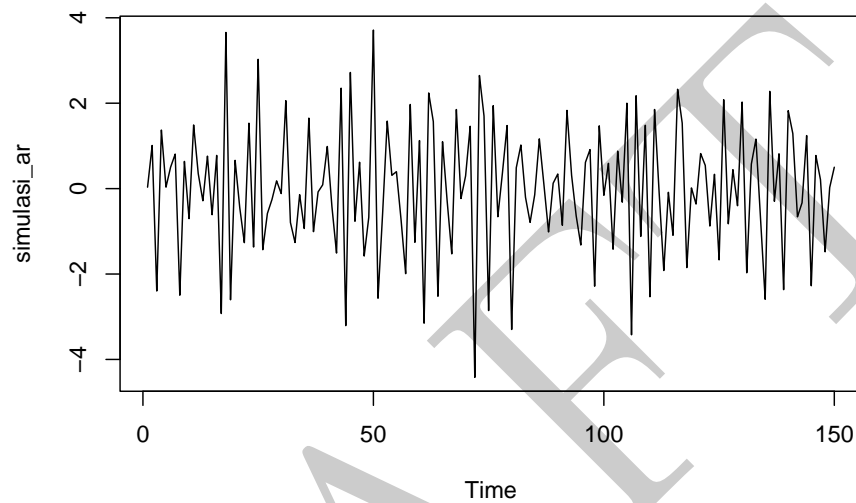
$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

Untuk membuat simulasi model MA(1) dapat menggunakan kode berikut :

```
n_sim <- 150 # Banyak data
theta <- -0.8 # Nilai dari theta_1
simulasi_ar <- arima.sim(model = list(c(0,0,1), ma = theta),
                          n = n_sim)
plot(simulasi_ar, main = 'Grafik Data MA(1)')
```

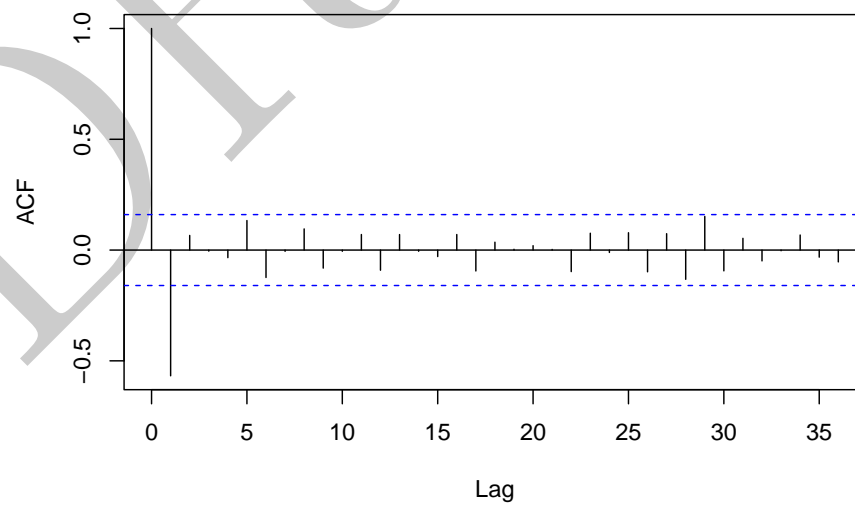
## 2.1. MOVING AVERAGE (MA) 2. MODEL DERET WAKTU STASIONER

**Grafik Data MA(1)**



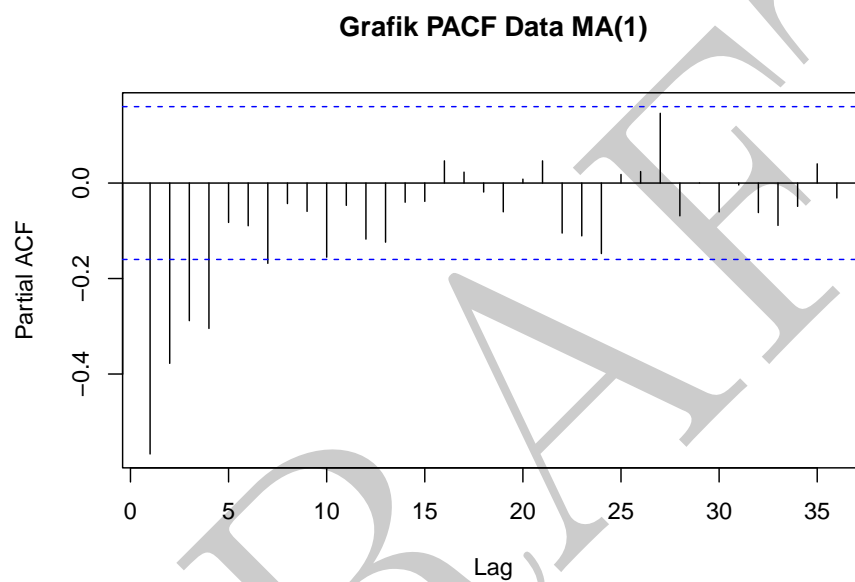
```
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data MA(1)',  
    lag.max = 36)
```

**Grafik ACF Data MA(1)**



## BAB 2. MODEL DERET WAKTU STASIONER MOVING AVERAGE (MA)

```
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data MA(1)',  
      lag.max = 36)
```

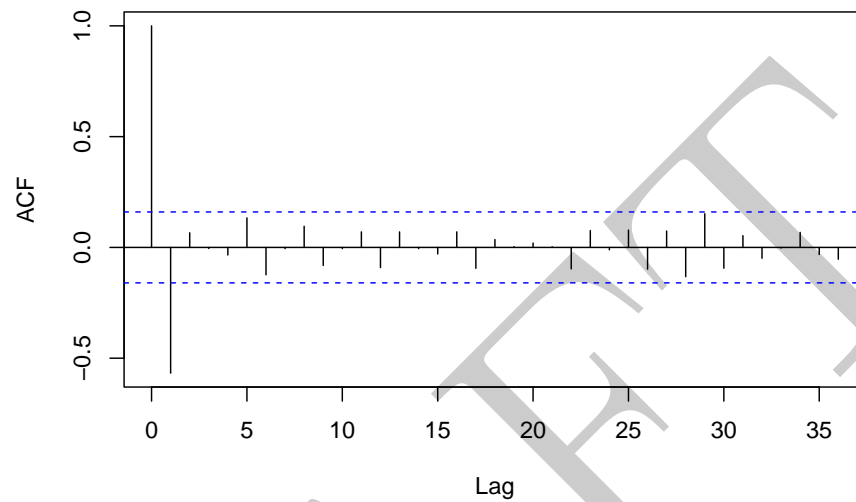


### Jurnal Praktikum 6

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rata-rata data ?
3. Apakah terdapat pola tren data ?

```
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data MA(1)',  
     lag.max = 36)
```

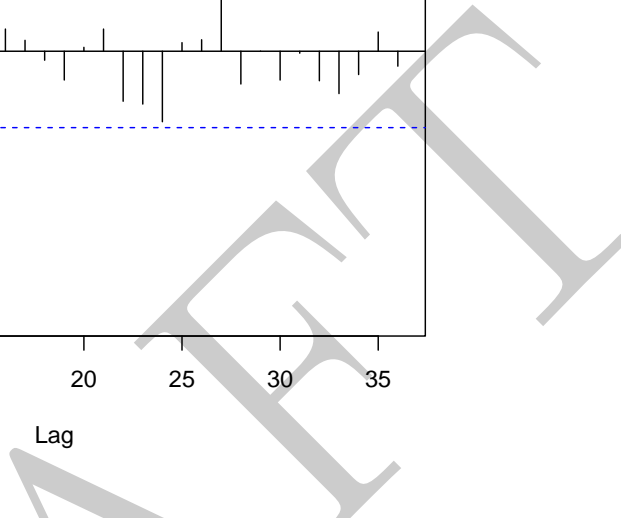
**Grafik ACF Data MA(1)**



#### Jurnal Praktikum 7

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah ACF berperilaku sesuai dengan model MA ?
3. Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model MA(1) ? Berikan alasan anda !

```
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data MA(1)',  
lag.max = 36)
```



## Jurnal Praktikum 8

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah PACF berperilaku sesuai dengan model MA ?
3. Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model MA(1) ? Berikan alasan anda !
4. Ulangi langkah-langkah di atas dengan mengganti nilai variabel theta dan n\_sim!

Catatan: Nilai variabel theta dibuat  
mendefinisikan model MA ( $q$ ) sebagai

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

## 2.2 Autoregressive (AR)

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.3)$$

## 2.2 Autoregressive (AR)

Misalkan  $Y_t = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , jika proses  $\{Y_t\}$  mengikuti proses Autoregressive (AR) dengan orde  $p$  maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

## 2.2. AUTOREGRESSIVE (AR) 2. MODEL DERET WAKTU STASIONER

Interpretasi dari persamaan di atas adalah : nilai saat ini dari deret waktu  $Y_t$  adalah kombinasi linier dari  $p$  nilai dirinya di masa lalu ditambah dengan galat,  $\varepsilon_t$ . Misalkan proses  $\{Y_t\}$  terpusat,  $Y_t$  mengikuti proses AR(1) maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

Karena  $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , maka  $E[Y_t] = 0$  dan  $\text{Var}(Y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}$  (Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan) sedangkan untuk kovariansinya dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) &= \text{Cov}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1}) \\ &= \phi_1 \text{Cov}(Y_{t-1}, Y_{t-1}) + \text{Cov}(\varepsilon_t, Y_{t-1}) \\ &= \phi_1 \gamma_0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) &= \text{Cov}(\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-2}) \\ &= \text{Cov}(\phi_1 (\phi_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t, Y_{t-2}) \\ &= \text{Cov}(\phi_1^2 Y_{t-2}, Y_{t-2}) + \text{Cov}(\phi_1 \varepsilon_{t-1}, Y_{t-2}) + \text{Cov}(\varepsilon_t, Y_{t-2}) \\ &= \phi_1^2 \gamma_0 \end{aligned}$$

sehingga fungsi autokovariansi untuk model AR(1) adalah

$$\gamma_k = \frac{\phi_1^k \sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}, \quad k \geq 0$$

dan fungsi autokorelasinya adalah

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k \quad k \geq 0$$

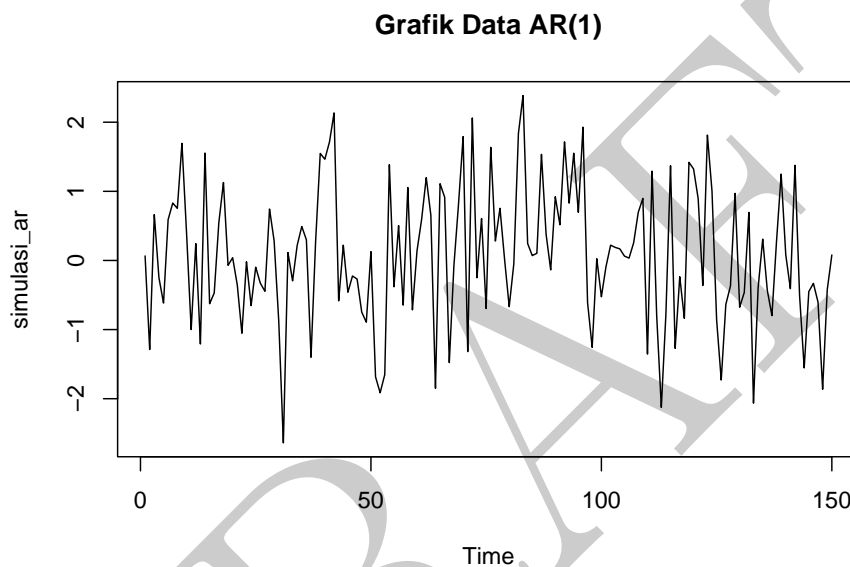
Untuk membuat simulasi model AR(1) dapat menggunakan kode berikut :

```
n_sim <- 150 # Banyak data
phi <- 0.2 # Nilai dari phi_1
simulasi_ar <- arima.sim(model = list(c(1,0,0), ar = phi),
                          n = n_sim)
```



## BAB 2. MODEL DERET WAKTU STASIONER AUTOREGRESSIVE (AR)

```
plot(simulasi_ar, main = 'Grafik Data AR(1)')
```

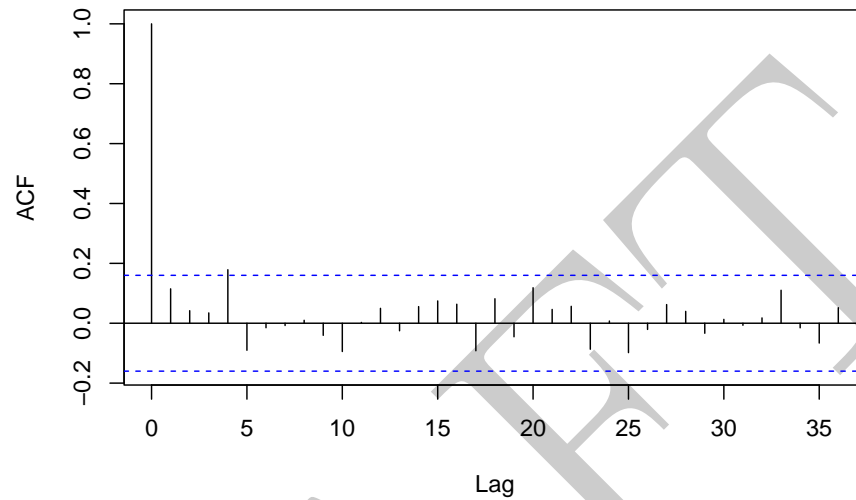


### Jurnal Praktikum 9

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rata-rata data ?
3. Apakah terdapat pola tren data ?

```
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data AR(1)',  
lag.max = 36)
```

Grafik ACF Data AR(1)

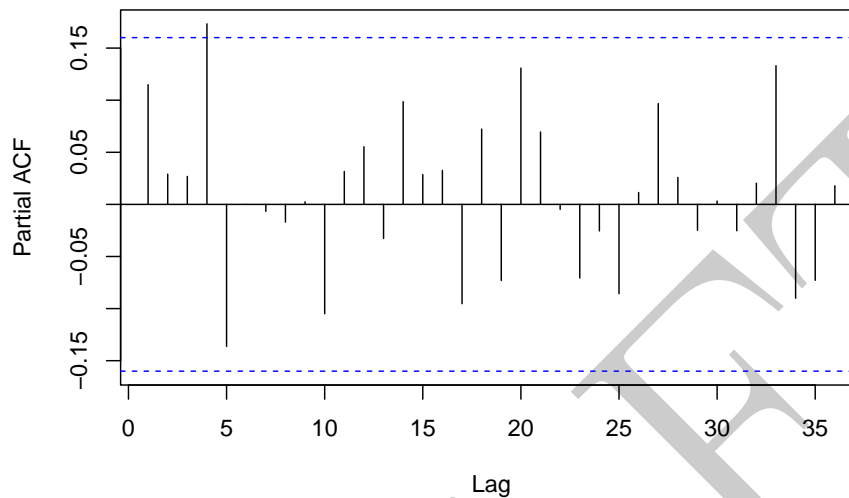


#### Jurnal Praktikum 10

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah ACF berperilaku sesuai dengan model AR (1)?

```
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data AR(1)',  
lag.max = 36)
```

**Grafik PACF Data AR(1)**



Interpretasi Gambar :

**Jurnal Praktikum 11**

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah PACF berperilaku sesuai dengan model AR (1)?
3. Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model AR(1) ?
4. Ulangi langkah di atas dengan memvariasikan nilai variabel phi dan n\_sim !

## 2.3 Autoregressive Moving Average (ARMA)

Misalkan  $Y_t = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , jika proses  $Y_t$  mengikuti proses ARMA dengan orde  $(p, q)$  maka dapat dinyatakan dengan persamaan berikut

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.6)$$

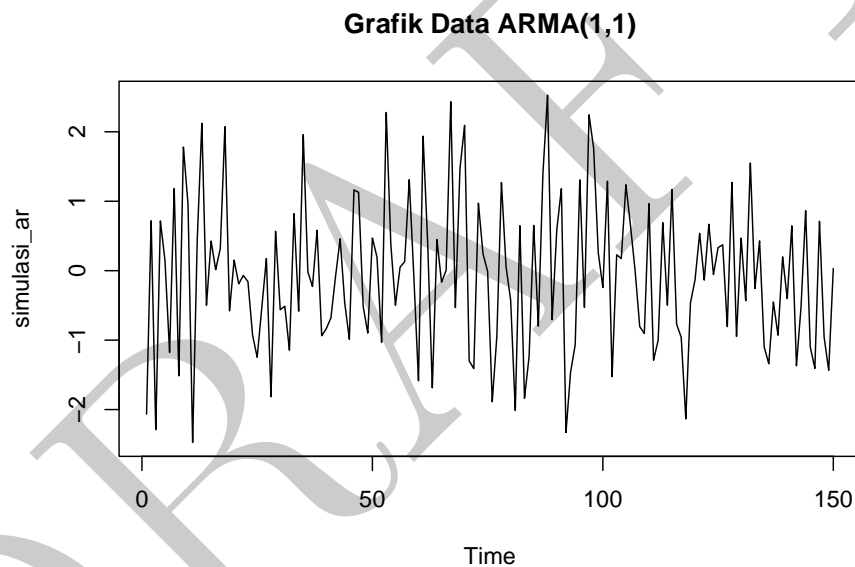
(Persamaan umum untuk  $E[Y_t]$  dan  $\text{Var}(Y_t)$  dari proses ARMA (1,1) diserahkan kepada pembaca)

Untuk membuat simulasi model ARMA(1,1) dapat menggunakan kode berikut

### 2.3. AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE (ARMA) WAKTU STASIONER

:

```
n_sim <- 150 # Banyak data
theta <- -0.3 # Nilai dari theta_1
phi <- 0.2 # Nilai dari phi_1
simulasi_ar <- arima.sim(model = list(c(1,0,1), ar = phi, ma = theta),
                          n = n_sim)
plot(simulasi_ar, main = 'Grafik Data ARMA(1,1)')
```

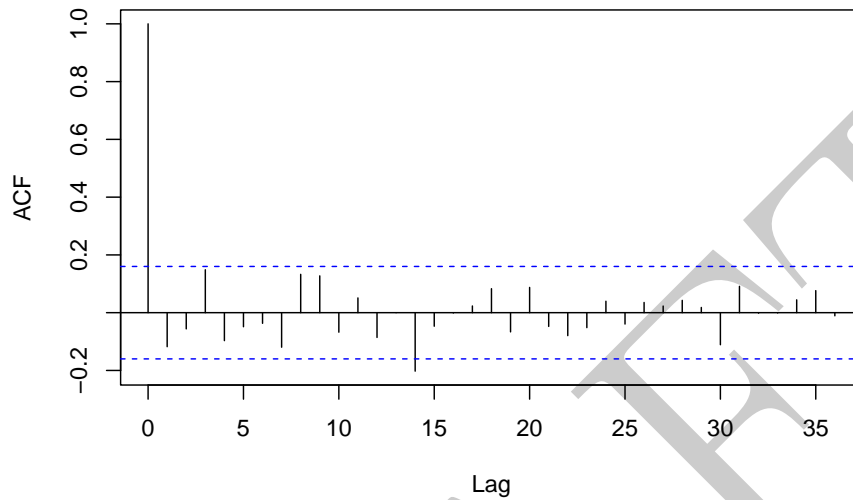


#### Jurnal Praktikum 12

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rata-rata data ?
3. Apakah terdapat pola tren data ?

```
acf(simulasi_ar, main = 'Grafik ACF Data ARMA(1,1)',
    lag.max = 36)
```

Grafik ACF Data ARMA(1,1)

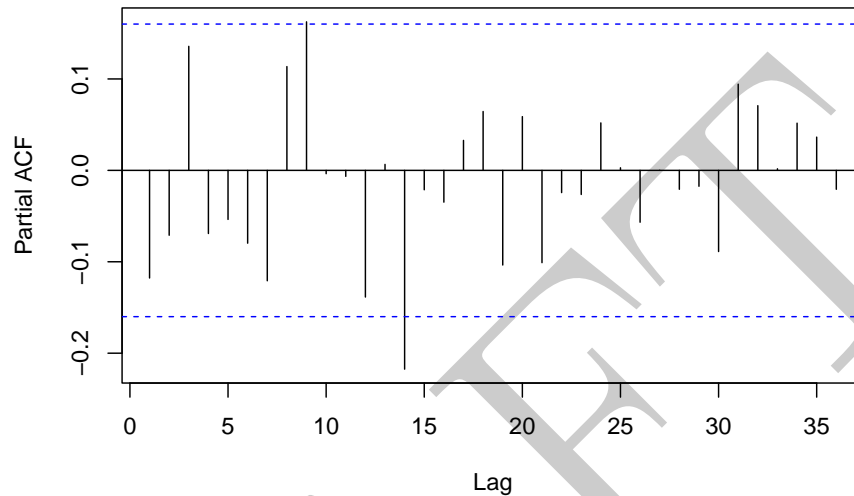


#### Jurnal Praktikum 13

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah ACF berperilaku sesuai dengan model ARMA (1,1)?
3. Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model AR-MA(1,1) ?

```
pacf(simulasi_ar, main = 'Grafik PACF Data ARMA(1,1)',  
lag.max = 36)
```

**Grafik PACF Data ARMA(1,1)**



#### Jurnal Praktikum 14

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah PACF berperilaku sesuai dengan model ARMA (1,1)?
3. Apakah data tersebut masih cocok dimodelkan dengan model AR-MA(1,1) ?

## 2.4 Simulasi Data Manual

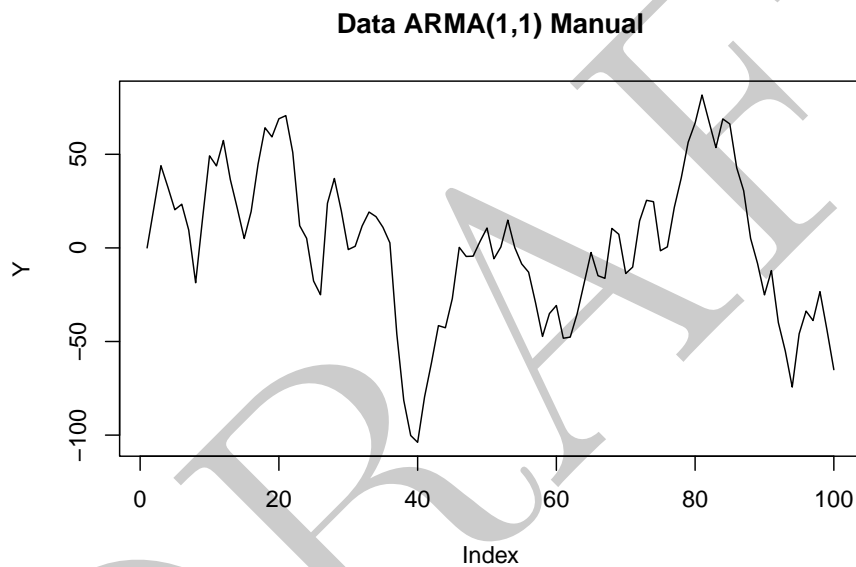
Misal proses  $\{Y_t\}$  mengikuti model ARMA (1,1) maka persamaannya adalah :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.7)$$

```
n_sim <- 100 # Banyak Data
phi <- 0.8 # Nilai dari phi_1
theta <- -0.5 # Nilai dari theta_1
sig <- 16 # Besar standar deviasi error
Y <- c(rep(0, #Nilai awal
        n_sim)) # Membuat array / vektor data
e <- rnorm(n = n_sim,
```

## BAB 2. MODEL DERET WAKTU STASIONER SIMULASI DATA MANUAL

```
mean = 0,
sd = sig) # Membuat galat
for(i in 2:n_sim){
  if(i)
  Y[i] <- phi*Y[i-1] + e[i] - theta*e[i-1]
}
plot(Y, type = 'l',
     main = 'Data ARMA(1,1) Manual')
```



Gambar 2.2: Grafik Data Manual  
(#fig:Membuat Data)

### Jurnal Praktikum 15

1. Berikan interpretasi anda mengenai grafik tersebut !
2. Apakah data tersebar pada rata-rata data ?
3. Apakah terdapat pola tren data ?

Berikutnya akan dicoba menghitung ACF secara manual

## 2.4. SIMULASI DATA MAJALIS. MODEL DERET WAKTU STASIONER

```

maxLag <- 25
acf_manual <- rep(1,maxLag)
for(i in 1:maxLag){
  pembilang <- (Y[1:(n_sim-i+1)]-mean(Y))%*%(Y[i:n_sim]-mean(Y))
  penyebut <- sum((Y-mean(Y))^2)
  acf_manual[i]<-sum(pembilang/penyebut)
}
acf_r <- as.vector(acf(Y,lag.max = 24,plot = F)$acf)
galat <- acf_manual - acf_r
sum(galat) # Total Galat

```

```
## [1] -3.365364e-16
```

Terakhir akan dicoba menghitung PACF secara manual. Perhatikan bahwa PACF dapat dituliskan dengan persamaan Yule Walker seperti berikut :

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \phi_{k3}\rho_{j-3} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

Secara umum maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \phi_{k1} + \rho_1\phi_{k2} + \rho_2\phi_{k3} + \dots + \rho_{k-1}\phi_{kk} &= \rho_1 \\
 \rho_1\phi_{k1} + \phi_{k2} + \rho_1\phi_{k3} + \dots + \rho_{k-2}\phi_{kk} &= \rho_2 \\
 \rho_2\phi_{k1} + \rho_1\phi_{k2} + \phi_{k3} + \dots + \rho_{k-3}\phi_{kk} &= \rho_3 \\
 &\vdots \\
 \rho_{k-1}\phi_{k1} + \rho_{k-2}\phi_{k2} + \rho_{k-3}\phi_{k3} + \dots + \phi_{kk} &= \rho_k
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan ini dapat ditulis menjadi persamaan matriks sebagai berikut :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (2.9)$$

dengan masing - masing,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



dan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \phi_{k3} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Sehingga untuk menghitung nilai dari  $\mathbf{x}$  dapat dilakukan dengan :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \quad (2.12)$$

Ingat bahwa nilai korelasi parsial yang ingin dihitung adalah  $\phi_{kk}$  sehingga perhitungannya dapat dilakukan iterasi sebagai berikut :

```
library(matrixcalc) # Untuk mencari invers matriks

## Warning: package 'matrixcalc' was built under R version 4.2.1
maxLag <- 24 # Ukuran vektor dan matriks
pacf_manual <- rep(0,maxLag)
for (k in 1:maxLag){
  if (k ==1){
    pacf_manual[k] <- acf_r[2] # Hati - hati
  } #jika mau mengubah maxLag
  else{
    rho <- acf_r[1:(k+1)] # Vektor y
    phi <- matrix(1, nrow=k,ncol=k) # Matriks A
    for (i in 1:(k)){
      for (j in 1:(k)){
        phi[i,j] <- rho[abs(i-j)+1] # Membuat matriks simetri
      }
    } # vektor x
    pacf_manual[k] <- as.vector(matrix.inverse(phi)%*%rho[2:(k+1)]) [k]
  }
}

pacf_r <- as.vector(acf(Y,
  lag.max = maxLag,
  type = 'partial',
  plot = F)$acf)
```

#### 2.4. SIMULASI DATA MAJALIS. MODEL DERET WAKTU STASIONER

```
galat <- pacf_manual - pacf_r  
sum(galat) # Total Galat
```

```
## [1] -1.39385e-15
```