

Modélisation mathématique

Tom COMBET Antoine DESANTI Léon VALABREGUE

18 décembre 2019

Table des matières

1	Résumé	2
2	Introduction	3
I	Modélisation	4
II	Discrétisation numérique	6
3	Collisions entre les balles	6
4	Effet épileptique	6
5	Collisions avec l'environnement	6
5.1	Murs solides	6
5.2	Murs invisibles	7
III	Implémentation	8
6	La classe Balle	8
7	L'initialisation	8
8	Actualisation	8
9	L'interface	9
10	Distribution en vitesse	9
IV	Interprétation et analyse des résultats	10
11	Conclusion	12

1 Résumé

L'objectif de ce projet est de simuler sur ordinateur les collisions entre particules d'un gaz parfait. Nous modéliserons en respectant les chocs élastiques. Nous voulons ainsi observer si les vitesses respectent bien la distribution en vitesse de Boltzmann.

2 Introduction

Ce rapport traite de la modélisation d'un collisionneur de particules sur un moteur graphique avec Javascript. Il est visualisable à l'adresse suivante :
<https://leon-valabregue.pagesperso-orange.fr/pong>

L'objectif est de fournir un modèle de collision le plus réaliste possible afin qu'il soit utilisable. Nous respecterons ainsi la conservation de quantité de mouvement et l'énergie cinétique (Partie I). Nous discrétisons ensuite (Partie II) pour l'implémenter sur ordinateur (Partie III). Enfin, nous comparons nos résultats avec les valeurs théoriques de la distribution en vitesse de Boltzmann. (Partie IV).

Première partie

Modélisation

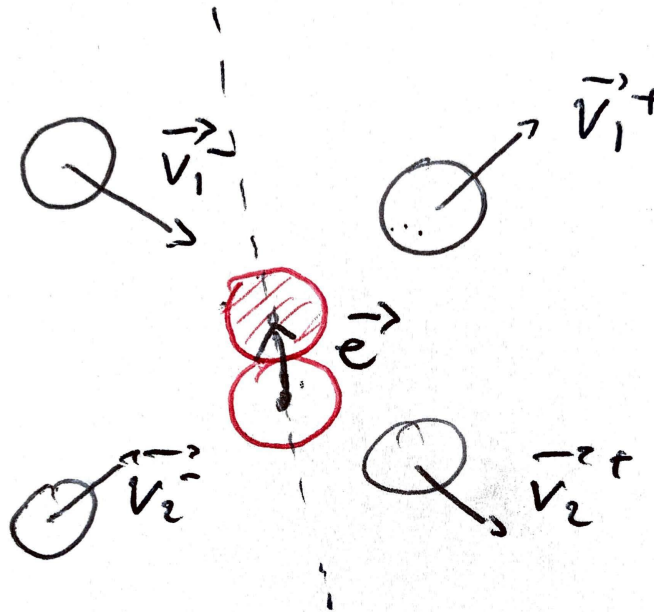


FIGURE 1 – Schéma d'une collision entre 2 particules

Comment calculer les trajectoires de deux balles qui se collisionnent ? Il faut respecter la conservation de 2 lois physique :

- la quantité de mouvement ;
- l'énergie cinétique.

Soit :

- B_1 et B_2 , deux balles qui entrent en collision ;
- V_1^- et V_2^- respectivement les vitesses de B_1 et B_2 avant la collision ;
- V_1^+ et V_2^+ respectivement les vitesses de B_1 et B_2 après la collision ;
- p l'intensité de l'impact ;
- \vec{e} le vecteur directionnelle de B_2 vers B_1 .

On a :

$$\frac{1}{2}m_1\|\vec{V}_1^-\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\vec{V}_2^-\|^2 = \frac{1}{2}m_1\|\vec{V}_1^+\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\vec{V}_2^+\|^2$$

et

$$\begin{cases} m_1(\vec{V}_1^+ - \vec{V}_1^-) = p\vec{e} \\ m_2(\vec{V}_2^+ - \vec{V}_2^-) = -p\vec{e} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_1^+ = \frac{p}{m_1}\vec{e} + \vec{V}_1^- \\ \vec{V}_2^+ = -\frac{p}{m_2}\vec{e} + \vec{V}_2^- \end{cases}$$

Alors :

$$\frac{1}{2}m_1\|\frac{p}{m_1}\vec{e} + \vec{V}_1^-\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|-\frac{p}{m_2}\vec{e} + \vec{V}_2^-\|^2 = \frac{1}{2}m_1\|\vec{V}_1^-\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\vec{V}_2^-\|^2$$

Or :

$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \|\vec{V}\|^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_1(\|\frac{p}{m_1}\vec{e}\|^2 + 2\frac{p}{m_1}\vec{e} \cdot \vec{V}_1^- + \|\vec{V}_1^-\|^2) + \frac{1}{2}m_2(\|-\frac{p}{m_2}\vec{e}\|^2 + 2\frac{-p}{m_2}\vec{e} \cdot \vec{V}_2^- + \|\vec{V}_2^-\|^2) = \frac{1}{2}m_1\|\vec{V}_1^-\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\vec{V}_2^-\|^2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2}m_1(\|\frac{p}{m_1}\vec{e}\|^2 + 2\frac{p}{m_1}\vec{e} \cdot \vec{V}_1^-) + \frac{1}{2}m_1\|\vec{V}_1^-\|^2 + \frac{1}{2}m_2(\|-\frac{p}{m_2}\vec{e}\|^2 + 2\frac{-p}{m_2}\vec{e} \cdot \vec{V}_2^-) + \frac{1}{2}m_2\|\vec{V}_2^-\|^2 \\ & = \frac{1}{2}m_1\|\vec{V}_1^-\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\vec{V}_2^-\|^2 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2}m_1(\|\frac{p}{m_1}\vec{e}\|^2 + 2\frac{p}{m_1}\vec{e} \cdot \vec{V}_1^-) + \frac{1}{2}m_2(\|-\frac{p}{m_2}\vec{e}\|^2 + 2\frac{-p}{m_2}\vec{e} \cdot \vec{V}_2^-) = 0 \\ \Rightarrow & m_1(\|\frac{p}{m_1}\vec{e}\|^2 + 2\frac{p}{m_1}\vec{e} \cdot \vec{V}_1^-) + m_2(\|-\frac{p}{m_2}\vec{e}\|^2 + 2\frac{-p}{m_2}\vec{e} \cdot \vec{V}_2^-) = 0 \\ \Rightarrow & m_1[(\frac{p}{m_1})^2 + 2\frac{p}{m_1}\vec{e} \cdot \vec{V}_1^-] + m_2[(-\frac{p}{m_2})^2 + 2\frac{-p}{m_2}\vec{e} \cdot \vec{V}_2^-] = 0 \\ \Rightarrow & \frac{p^2}{m_1} + 2p\vec{e} \cdot \vec{V}_1^- + \frac{p^2}{m_2} - 2p\vec{e} \cdot \vec{V}_2^- = 0 \\ \Rightarrow & p^2(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) + p(2\vec{e} \cdot \vec{V}_1^- - 2\vec{e} \cdot \vec{V}_2^-) = 0 \\ \Rightarrow & p(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) + 2\vec{e} \cdot (\vec{V}_1^- - \vec{V}_2^-) = 0 \\ \Rightarrow & p = -2\frac{\vec{e} \cdot (\vec{V}_1^- - \vec{V}_2^-)}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \end{aligned}$$

Deuxième partie

Discrétisation numérique

3 Collisions entre les balles

Pour simuler une collision entre deux balles, on calcule une nouvelle direction pour chacune lorsqu'elles se superposent.

Si elles se superposent, on a :

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < r_1 + r_2$$

Avec :

- x_1 et y_1 les coordonnées de la balle 1 ;
- x_2 et y_2 les coordonnées de la balle 2 ;
- r_1 et r_2 respectivement les rayons de la balle 1 et de la balle 2.

4 Effet épileptique

Puisque les calculs sont nombreux, il peut arriver qu'un cas de superposition ne soit pas géré à temps et que les balles se superposent sans changer de direction. Ainsi, si les balles sont superposées davantage qu'on ne l'aurait envisagé, elles peuvent changer de direction en boucle puisqu'elles seront sans doute toujours superposées à la "frame" suivante. Pour éviter ce cas indésirable, il a aussi fallu vérifier si les balles se rapprochent. Car si elles s'éloignent, le calcul des nouvelles directions n'est pas nécessaire.

Si elles se rapprochent, on a :

$$(dx_1 - dx_2)(x_1 - x_2) + (dy_1 - dy_2)(y_1 - y_2) < 0$$

Avec :

- x_1 et y_1 les coordonnées de la balle 1 ;
- x_2 et y_2 les coordonnées de la balle 2 ;
- dx_1 et dy_1 le déplacement de la balle 1 à la prochaine frame ;
- dx_2 et dy_2 le déplacement de la balle 2 à la prochaine frame.

5 Collisions avec l'environnement

5.1 Murs solides

Les balles se déplacent dans un environnement clos, représenté par notre canvas. Lorsqu'une balle entre en collision avec les limites de cet environnement, elle prend une direction inverse :

- selon l'axe des abscisses si elle rebondit sur la limite gauche ou droite ;
- selon l'axe des ordonnées si elle rebondit sur la limite haute ou basse.

5.2 Murs invisibles

Lorsque la case murs invisibles est cochée, les balles ne rebondissent plus dans la fenêtre et réapparaissent à l'opposé en gardant leur direction de déplacement. Cela permet de constater que la quantité de mouvement est conservée dans ce cas.

Troisième partie

Implémentation

6 La classe Balle

Pour représenter chaque objet, la classe Balle est implémentée. Chaque Balle possède :

- Une coordonnée x et une coordonnée y ;
- Une direction sur l'axe x et une direction sur l'axe y ;
- Un rayon pour calculer les collisions et la masse ;
- Une masse ;
- Une couleur pour un meilleur rendu.

7 L'initialisation

Pour démarrer la modélisation, nousinstancions un nombre paramétrable de balles que nous ajoutons à un tableau. Il suffira simplement de parcourir ce dernier pour utiliser les méthodes de collision et d'affichage.

Pour éviter de superposer les balles, nous recalculons les coordonnées de la balle à instancier jusqu'à ce qu'aucune balle ne soit chevauchée par cette dernière.

8 Actualisation

Toutes les ms :

- On efface le canvas ;
- On calcule les nouvelles directions modifiées par les collisions des balles et avec l'environnement ;
- On modifie les coordonnées des balles en fonction de leurs nouvelles directions ;
- On les redessine.

9 L'interface

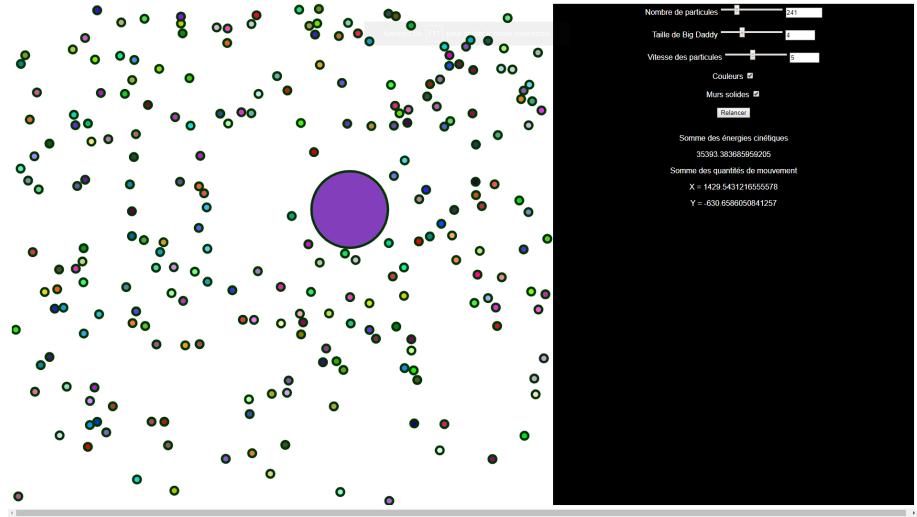


FIGURE 2 – L'interface

À gauche on retrouve un `<canvas>` qui prend 60% de la largeur de la fenêtre. C'est le support sur lequel sont générées les balles. À droite de ce `<canvas>` se trouve une balise `<div>` qui occupe 40% de l'espace et qui comporte différents *sliders* qui permettent de modifier les variables de notre modélisation (voir Figure 3).

On peut notamment modifier le nombre de balles (*particules*), la taille de la balle unique (*Big Daddy*) et la vitesse des particules. Ce panneau de configuration permet également de désactiver le mode couleur, de relancer l'animation et de retirer les murs. Ainsi les balles n'entrent plus en collisions avec les bordures du canvas.

10 Distribution en vitesse

Après un scroll, une page avec un nouveau *canvas* apparaît. Sur celui-ci est affiché un graphe représentant la proportion de balles en fonction de leur vitesse (voir Figure 4). Pour cela la bibliothèque *chart.js* a été employée.

Nombre de particules
 Taille de Big Daddy
 Vitesse des particules
 Couleurs ☒
 Murs solides ☒
 Relancer
 Somme des énergies cinétiques
 71216.42562941505
 Somme des quantités de mouvement
 X = -1011.7021874208465
 Y = 30.349409302967356

FIGURE 3 – Sliders

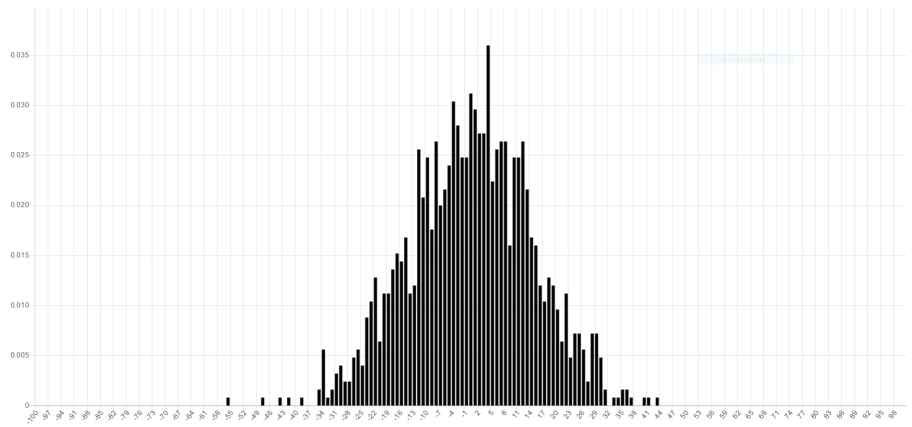


FIGURE 4 – Graphe de la distribution en vitesse

Quatrième partie

Interprétation et analyse des résultats

Le graphe obtenu de la distribution en vitesse (voir Figure 4) suit une gaussienne : il y a beaucoup de particules se déplaçant à des vitesses faibles (autour de 0) et de moins en moins à des vitesses élevées. D'après l'équation de Boltzmann, cette gaussienne est donnée par :

$$p(v_1) = Ae^{-BV_1^2}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sqrt{\frac{m}{2kT\pi}} \\ B = \frac{m}{2kT} \\ kT = \frac{1}{2}mv^2 \end{array} \right.$$

Source : http://fab.cba.mit.edu/classes/864.11/people/dhaval_adjodah/final_project/write_up_boltzmann.pdf

11 Conclusion

Le modèle de collision de particules implémenté est réaliste et utilisable. La simulation sur ordinateur confirme la théorie des particules de Boltzmann. En traçant l'histogramme de la distribution en vitesse, nous obtenons une gaussienne centrée.

Pour améliorer ce projet, il serait judicieux de tracer la courbe théorique de la distribution en vitesse de Boltzmann (comme décrit dans la partie Partie IV) sur notre histogramme (Figure 4).