

SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA TINGKAT SMP

PART 2

Departemen Matematika - Wardaya College

MMXVIII-XII

TIPE A

1. Andi dan Bobby berlari berlawanan arah dalam suatu lintasan melingkar. Keduanya berawal dari titik-titik yang saling berseberangan pada diameter lingkaran tersebut. Kedua anak tersebut berlari dengan kecepatan yang tetap. Mereka bertemu pertama kali di suatu titik saat Andi telah menempuh 100 meter. Kemudian mereka bertemu lagi saat Bobby telah menempuh 150 meter sesudah titik pertemuan pertama mereka. Berapa meter panjang lintasan tersebut ?

Jawab : 350 meter

2. Diketahui segitiga siku-siku mempunyai panjang sisi 60 cm, 80 cm dan 100 cm. Titik D terletak pada sisi miring. Tentukan panjang AD, agar segitiga ACD dan ABD mempunyai keliling yang sama !

Jawab : $AD = 24\sqrt{5}$ cm

3. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan :

$$(2x+1)(3x+1)(5x+1)(30x+1)=10$$

Jawab : $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{31}}{15}$ dan $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{31}}{15}$

4. T.ABCD adalah limas segiempat beraturan. Panjang rusuk alas = tinggi limas = 6 cm. Tentukan luas permukaan limas tersebut !

Jawab : $(36 + 36\sqrt{5}) \text{ cm}^2$

5. Jika $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$, berapakah $f(x^2 - 1)$?

Jawab : $f(x) = x^4 + x^2 - 3$

6. Berapakah peluang bahwa sebuah faktor positif yang diambil secara acak dari 60 adalah kurang dari 7 ?

Jawab : $\frac{1}{2}$

7. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini :

$$(x^2 + 1)^2 - 7x^2 + 3 < 0$$

Jawab : $-2 < x < -1$ atau $1 < x < 2$

8. Kurva $y = 2x^2 - px - 1$ dan $y = x^2 + px + 5$ berpotongan di titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Jika $x_1 - x_2 = 8$, maka tentukan nilai p .

Jawab : $p = -\sqrt{10}$ atau $p = +\sqrt{10}$

TIPE B

1. Setiap pagi, Pak Joni berangkat kerja dari rumah tepat pada pukul 08.00. Jika kecepatan mengendaranya 40 km/jam, dia terlambat 3 menit tiba di kantor. Jika kecepatan rata-ratanya 60 km/jam, dia akan tiba 3 menit lebih awal. Pada kecepatan berapa km per jam, dia harus mengendarai mobilnya agar tiba tepat waktu ?

Jawab : 48 km/jam

2. Diketahui persegi panjang ABCD dan titik E terletak di dalam persegi panjang tersebut. Jika panjang AE, BE dan CE berturut-turut 3 cm, 4 cm dan 5 cm, tentukan panjang DE !

Jawab : $3\sqrt{2}$ cm

3. Diketahui : x, y, z merupakan bilangan real yang memenuhi persamaan :

$$\begin{cases} \frac{x+y}{1+z} = \frac{1-z+z^2}{x^2-xy+y^2} \\ \frac{x-y}{3-z} = \frac{9+3z+z^2}{x^2+xy+y^2} \end{cases}$$

Tentukanlah nilai x yang memenuhi !

Jawab : $x = \sqrt[3]{14}$

4. Diketahui sebuah persegi dan sebuah segienam beraturan mempunyai panjang sisi yang sama. Jika luas persegi adalah $\sqrt{3}$, maka tentukanlah luas segienam tersebut ?

Jawab : $\frac{9}{2}$

5. Fungsi $f(x) = ax^n$ melalui titik $\left(2\frac{1}{4}, 27\right); (4, 64)$ dan $\left(6\frac{1}{4}, p\right)$

Tentukan nilai p .

Jawab : p = 125

6. Dua buah dadu bersisi delapan masing-masing sisinya dinomori dari 1 sampai 8. Saat kedua dadu digulingkan, setiap sisi memiliki peluang yang sama untuk muncul. Berapakah peluang bahwa hasil kali dari dua angka yang muncul lebih besar daripada jumlahnya ?

Jawab : $\frac{3}{4}$

7. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini :

$$\frac{x-3}{x-4} \leq \frac{x-1}{x-2}$$

Jawab : $2 < x < 4$

8. Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + (2a+6)x + 2a - 2$ menyinggung sumbu X, maka tentukan koordinat titik balik maksimumnya !

Jawab : Koordinat titik balik maksimum : (2,0)

TIPE C

1. Sebuah perusahaan menjual selai nanas dalam kemasan tabung kaleng. Bagian pemasaran menyarankan bahwa jika digunakan kaleng yang lebih lebar akan menaikkan penjualan. Andaikan diameter kaleng ditingkatkan 25 persen tanpa mengubah isinya. Berapa persenkah ketinggian kaleng harus dikurangi ?

Jawab : 36 %

2. Diketahui segitiga ABC dengan panjang AB = 20 cm, BC = 30 cm dan AC = 25 cm. Titik D terletak pada AC sehingga CD = 10 cm sedangkan titik E di tengah-tengah BC. Tentukan panjang DE !

Jawab : 10 cm

3. Tentukanlah nilai x yang memenuhi persamaan :

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

Jawab : $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

4. Diketahui alas limas tegak T.ABCD berbentuk persegi panjang dengan rusuk alas AB = 6 cm, dan BC = 8 cm.

Jika volume limas = $80\sqrt{3} \text{ cm}^3$, tentukan panjang rusuk TA

Jawab : 10 cm

5. Diketahui : $f(x) = 2^{5-x} + 2^x - 12$.

Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka tentukanlah nilai a.b

Jawab : 6

6. Toni melemparkan dadu bersisi delapan beraturan. Kemudian John melemparkan dadu bersisi enam beraturan.

Tentukan peluang bahwa hasil kali angka yang muncul dari kedua pelemparan tersebut adalah bilangan kelipatan 3 ?

Jawab : $\frac{1}{2}$

7. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini :

$$\frac{x}{x-1} < 0 \quad \text{dan} \quad x.(x-1) > 0$$

Jawab : Himpunan kosong / { }

8. Garis $y = a.x + b$ memotong kurva $y = 2.x^2 + 5$ di titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) .
Jika $x_1 + x_2 = 4$ dan $x_1.x_2 = 3$, tentukanlah nilai $a + b$.

Jawab : 7

TIPE D

1. Tom dan Jerry berlari sejauh 10 kilometer. Mereka mulai dari tempat yang sama, berlari 5 kilometer mendaki bukit, dan kembali ke titik awal melalui rute yang sama. Tom mulai 10 menit lebih awal dengan kecepatan 15 km/jam naik dan 20 km/jam turun. Jerry berlari 16 km/jam naik dan 22 km/jam turun. Seberapa jauh dari puncak bukit, saat mereka saling berpapasan ?

Jawab : $\frac{35}{27}$ km

2. Diketahui segitiga ABC sama kaki dengan $AC = BC$.
Titik D terletak pada AC dan E terletak pada BC sehingga $CD = CE$.
 $CE = 2.EB$ dan $CD = 2.AD$.
BD dan AE berpotongan di P.
Jika luas daerah CDPE = 8 cm^2 , tentukan luas segitiga ABC !

Jawab : 15 cm^2

3. Tentukanlah jumlah semua nilai x yang memenuhi persamaan :
 $(x^2 + 3.x + 2)(x^2 - 2.x - 1)(x^2 - 7.x + 12) + 24 = 0$

Jawab : 3

4. Kandang si belang memiliki dasar segi enam beraturan yang setiap sisinya berukuran satu meter. Si belang diikat pada salah satu titik sudut kandang dengan sebuah tali sepanjang dua meter. Berapakah luas daerah di luar kandang yang dapat dicapai si belang ?

Jawab : $3\pi \text{ m}^2$

5. Jika $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, tentukan $f(x)$.

Jawab : $f(x) = x^3 - 3.x$

6. Sebuah titik (x, y) diambil secara acak dari dalam persegi panjang dengan titik sudut $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ dan $(0, 1)$. Tentukan peluang bahwa $x < y$.

Jawab : $\frac{1}{8}$

7. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut ini : $x^3 \geq x^2$

Jawab : $x \geq 1$

8. Fungsi $f(x) = ax^2 + 6x + (a + 1)$ mempunyai sumbu simetri $x = 3$.
Tentukanlah nilai maksimum fungsi tersebut !

Jawab : 9

TIPE E

SOAL 1

Diketahui :

$$\begin{cases} 3.a + 2.b + 4.d = 10 \\ 6.a + 5.b + 4.c + 3.d + 2.e = 8 \\ a + b + 2.c + 5.e = 3 \\ 2.c + 3.d + 3.e = 4 \\ a + 2.b + 3.c + d = 7 \end{cases}$$

Tentukanlah nilai $a + b + c + d + e$

Jawab : 4

SOAL 2

Tiga buah dadu dilempar bersamaan. Berapakah peluang sehingga ketiga angka yang muncul dapat membentuk sebuah segitiga ?

Jawab : $\frac{37}{72}$

SOAL 3

Diketahui bilangan $N = 123456789101112...9899100$

Tentukan sisa pembagian jika N dibagi dengan 3 ?

Jawab : 1

SOAL 4

Diketahui segitiga ABC. Titik D terletak pada sisi BC.

$AB = 3$ cm, $AC = 6$ cm dan $\angle CAD = \angle DAB = 60^\circ$.

Tentukan panjang AD.

Jawab : 2 cm

SOAL 5

Jika n merupakan bilangan bulat positif dan $f(n)$ merupakan jumlah digit-digit dari suatu bilangan. (Contoh : $f(639) = 6 + 3 + 9 = 18$)

Tentukan bilangan bulat positif lebih kecil dari 2000 yang memenuhi persamaan :

$$n + f(n) = 2008$$

Jawab : 1985

SOAL 6

Albert sedang berusaha mencari Betty di hutan yang berkoordinat kartesius.

Jarak Albert dari titik $(0, 0)$ adalah $5\sqrt{2}$ km

Jarak Albert dari titik $(1, 0)$ adalah $\sqrt{41}$ km

Jarak Albert dari titik $(0, 1)$ adalah $\sqrt{61}$ km

Sedangkan jarak Betty dari titik $(0, 0)$ adalah $\sqrt{65}$ km

Jarak Betty dari titik $(1, 0)$ adalah $2\sqrt{13}$ km

Jarak Betty dari titik $(0, 1)$ adalah $\sqrt{58}$ km

Berapa kilometer jarak Albert dengan Betty ?

Jawab : $\sqrt{85}$ km

SOAL 7

Jika x , y dan z merupakan bilangan real sehingga $2x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 4y + 2xz - 5$

Tentukan nilai terbesar dari $x - y + z$

Jawab : 4

SOAL 8

Tentukan angka satuan dari : $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2009^{2009}$

Jawab : 7

SOAL 9

Sebuah koin berbentuk lingkaran dengan jari-jari 1 satuan ingin dilempar pada sebuah bidang berbentuk segienam beraturan dengan panjang sisi 2 satuan.

Berapakah peluang supaya koin tersebut jatuh seluruhnya di dalam segienam ?

Jawab : $1/4$

SOAL 10

Misalkan \clubsuit merupakan suatu operasi pada bilangan real positif yang memenuhi :

$$(x \cdot y^2) \clubsuit y = x (y \clubsuit 1) \text{ dan}$$

$$(x \clubsuit 1) \clubsuit x = 1$$

Jika $1 \clubsuit 1 = 1$, maka tentukan nilai $200 \clubsuit 9$

Jawab : $200/9$

TIPE F

1. Diketahui : a, b dan c merupakan bilangan real dengan :

$$\begin{cases} a + b + c = 8 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6 \end{cases}$$

Tentukan nilai : $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$

Jawab : 45

2. Diketahui x, y dan z adalah tiga buah bilangan real.

Jika $x.y = 24$, $y.z = 15$ dan $x.z = 10$, tentukanlah nilai $x.y.z$

Jawab : 60

3. Jika $x = 2008^{2009} - 2008^{-2009}$ dan $y = 2008^{2009} + 2008^{-2009}$,
maka tentukanlah nilai $x^2 - y^2$

Jawab : - 4

4. Garis $y = 2.x$ memotong fungsi $f(x) = x^2 - 3.x + 6$.
Tentukan koordinat titik potongnya !

Jawab : (2, 4) dan (3, 6)

5. Jika $x + \frac{1}{x} = 3$, maka tentukanlah nilai dari : $x - \frac{1}{x}$

Jawab : $-\sqrt{5}$ atau $\sqrt{5}$

6. Diketahui : $x^2 + x.y + x = 14$ dan $y^2 + x.y + y = 28$
Jika $x + y > 0$, maka tentukan nilai $x + y$

Jawab : 6

7. Jika bilangan prima ke-20 adalah 71, tentukan bilangan prima ke-27 ?

Jawab : 103

8. Diketahui kubus ABCD.EFGH. Tentukan besar sudut antara garis AH dengan HC

Jawab : 60°

9. Jika bilangan bulat a dan b memenuhi :

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{7}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} = a\sqrt{42} + b , \text{ maka tentukanlah nilai a.b}$$

Jawab : - 26

10. Jika garis m dengan persamaan $(x - 2.y) + a(x + y) = a$ sejajar dengan garis n
 $(5y - x) + 3a(x + y) = 2a$, maka tentukanlah nilai a

Jawab : $-\frac{1}{5}$

11. Pada segitiga siku-siku ABC yang berhipotenusa AB, diketahui $AC = 15$ cm. Dibuat garis tinggi CD sehingga $DB = 16$ cm. Tentukan luas segitiga ABC

Jawab : 150 cm^2

12. Jika x dan y merupakan bilangan asli yang memenuhi :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 40 \\ y^2 + \frac{1}{2}xy = 15 \end{cases} \quad \text{maka tentukanlah nilai } x^2 - y^2$$

Jawab : 7

13. Tentukan nilai x yang memenuhi : $(x-5)^2 < -3$

Jawab : Himpunan kosong ATAU tidak ada nilai x yang memenuhi

14. Berapakah angka terakhir dari : $(2008)^{2008}$?

Jawab : 6

15. Jarak kota A dan B adalah 240 km. Sebuah mobil berangkat dari kota A pukul 07.30 dengan kecepatan rata-rata 75 km/jam dan selama perjalanan istirahat selama 40 menit.

Pukul berapa mobil tersebut tiba di kota B ?

Jawab : Pukul 11.22

16. Tentukan banyak cara 8 orang duduk mengelilingi sebuah meja apabila 2 orang tertentu selalu duduk bersama-sama

Jawab : 5040 cara

17. Tentukan jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 40

Jawab : 131

18. Dalam sebuah keranjang terdapat 25 buah apel, dan hanya ada 1 buah yang busuk. Tentukan peluang terambilnya buah apel yang busuk pada pengambilan ke – 12.

Jawab : $\frac{1}{25}$