Kirone Mallick
Arnd Specka
Clément Livache
Pierfrancesco Urbani

Formation préparatoire – Physique – Petite Classe n°1

1 Probabilités

1.1 Désintégration d'une particule radioactive

Nous étudions la désintégration d'une particule radioactive sans en connaître les mécanismes microscopiques sous-jacent. On suppose la particule présente à l'instant initial $t = 0$. On définit l'instant de sa désintégration par une variable aléatoire T évoluant dans $\mathbb{R}^+$. L'objectif est de déterminer sa densité de probabilité $p(t)$, où le terme $p(t)\,dt$ exprime la probabilité que la désintégration survienne durant l'intervalle infinitésimal $[t, t + dt]$:

$$p(t)\,dt = \mathbb{P}(t \leq T \leq t + dt) \tag{1}$$

1. Soit $F(t)$ la fonction de répartition associée à l'instant de désintégration, définie comme la probabilité que cet événement survienne avant ou à l'instant t : $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$. Exprimez cette fonction F sous forme intégrale en utilisant la densité de probabilité $p(t)$.
2. On suppose que si la particule est encore présente à l'instant t, sa probabilité de se désintégrer durant l'intervalle infinitésimal dt suivant est donnée par γdt. Cette constante γ étant indépendante du temps et de l'état passé de la particule, le processus est dit de Markovien (sans mémoire).
   (a) Exprimez la probabilité que l'instant de désintégration T appartienne à l'intervalle $]t, t + dt]$ en fonction de $F(t)$ et γ.
   (b) En déduire que la fonction de répartition F obéit à l'équation différentielle
   $$\frac{dF(t)}{dt} = \gamma(1 - F(t)). \tag{2}$$
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité de probabilité p, puis trouver l'expression de $p(t)$.
4. Vérifier que la densité de probabilité p est normalisée.
5. Calculer la durée de vie moyenne $\langle t \rangle$ de la particule ainsi que l'écart-type Δt.

1.2 Distribution Gaussienne

On considère la densité de probabilité suivante, définie par une fonction gaussienne :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

où x et x_0 sont des nombres réels, et σ est un nombre réel positif.

1. On pose :
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$
Calculer I^2, et en déduire que $I = \sqrt{2\pi}$ (indice : passer en coordonnées polaires).
2. Vérifier que $p(x)$ est bien une densité de probabilité.
3. Calculer la valeur moyenne $\langle x \rangle$.
4. Calculer l'écart quadratique moyen Δx.

2 Interférences quantiques avec des fentes d'Young

En mécanique quantique, l'état d'une particule est décrit par une amplitude de probabilité de présence $\psi(x, y, z, t)$, que l'on appelle la fonction d'onde. La probabilité $dP(x, y, z, t)$ de trouver la particule à un instant t dans un élément de volume $dxdydz$ situé au point (x, y, z) de l'espace s'écrit :
$$dP(x, y, z, t) = |\psi(x, y, z, t)|^2 dxdydz \tag{4}$$
$|\psi(x, y, z, t)|^2$ est donc la densité de probabilité de présence.

1. Rappeler le principe de superposition.

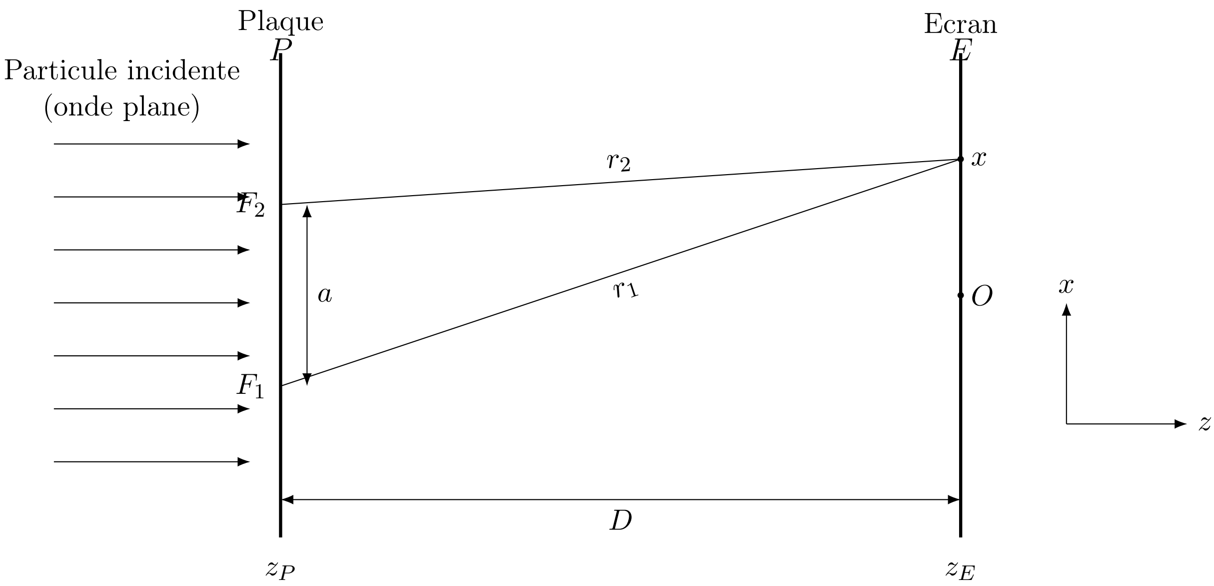

FIGURE 1 – Expérience des fentes d'Young.

On considère une expérience de fentes d'Young dans laquelle une particule quantique se propage vers une plaque P percée de deux fentes fines F_1 et F_2 (voir figure 1). La particule incidente est décrite par une onde plane monochromatique $\psi(x, y, z < z_P, t) \propto e^{i(kz-\omega t)}$ se propageant dans le sens des z positifs. On mesure la position de la particule sur l'écran E situé après la plaque P. La distance entre les deux fentes est notée a, et la distance entre la plaque et l'écran est notée D. On note Ox l'axe vertical sur l'écran, et on se place dans le cas où $D \gg a$.

On ne cherchera pas à calculer la forme précise de l'onde diffractée par les fentes. On supposera que l'onde ψ_1 (respectivement ψ_2) diffractée par F_1 (respectivement F_2) prend la forme d'une onde cylindrique sur l'écran :
$$\psi_i(x, y, z_E, t) \simeq \psi_0 e^{i(kr_i-\omega t)} \tag{5}$$
où $i = 1, 2$, ψ_0 est une constante, $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + D^2}$ est la distance entre le centre de la fente et le point sur l'écran, et $x_1 = -a/2$ et $x_2 = a/2$ correspondent aux positions des centres des fentes.

2. Exprimer la fonction d'onde totale ψ_{total} et la densité de probabilité de présence sur l'écran ($z = z_E$), en fonction de la différence de phase $\Delta\phi = k(r_1 - r_2)$.
3. Calculer $\Delta\phi$ (dans l'approximation $|x - x_i| \ll D$, $i = 1, 2$). En déduire l'interfrange de la figure d'interférence observée sur l'écran, et l'exprimer à l'aide de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.
4. Expliquer qualitativement ce qui est observé sur l'écran. Comment cette observation diffère-t-elle du cas des balles “classiques” et du cas ondulatoire. Quel est le nom donné à ce comportement ?

3 Longueur d'onde de Broglie

Louis de Broglie a associé le nombre d'onde et l'impulsion par la relation célèbre $p = \hbar k$, où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. Dans l'exercice précédent, nous avons observé l'apparition de franges d'interférence aux positions

$$\frac{xa}{D} = n\frac{2\pi}{k} = n\lambda,$$

avec n un nombre entier. Calculez la longueur d'onde de de Broglie λ dans chacun des cas suivants.

1. votre corps quand vous vous déplacez à une vitesse de $v = 50$ m/s.
2. d'un électron avec une énergie cinétique de 50 keV (expérience présentée en amphi).
3. d'un atome d'hélium avec une masse de $m = 4 \times m_n$ et une vitesse de 940 m/s.
4. Disons que dans un cas pratique il faut avoir $x/D > 10^{-5}$ et une distance entre les fentes $a > 100$ nm. Dans quels cas parmi les précédents est-il possible d'observer les franges d'interférences ?

Quelques constantes utiles :
$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ joule seconde ;
$c = 3.00 \times 10^{8}$ meters / second ;
$m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg ;
$m_n = 1.67 \times 10^{-27}$ kg ;
charge élémentaire $e = 1.60 \times 10^{-19}$ Coulomb.