2.3 Simulação de sistemas dinâmicos com o Simulink

Prof. Dr. Sidney Bruce Shiki

E-mail: bruce@ufscar.br

Prof. Dr. Vitor Ramos Franco

e-mail: vrfranco@ufscar.br

UFSCar – Universidade Federal de São Carlos

DEMec – Departamento de Engenharia Mecânica

Conteúdo

- Introdução
- Visão sistêmica e Simulink
- Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos
  - Métodos iterativos
    - Sistemas de 1ª e 2ª ordem
  - Bloco *Transfer Fcn*
- Considerações Finais
- Exercícios

Introdução

- Anteriormente, foi visto como se geram e como se visualizam sinais no Simulink;
- Aqui, uma relação entre esses sinais e o sistema é realizada:
  - <u>Sinal gerado</u>: será considerado como entrada no sistema dinâmico
  - <u>Sistema dinâmico</u>: tem a capacidade de modificar e/ou extrair informações da entrada
  - <u>Sinal de saída</u> (resposta do sistema): representa o efeito da entrada no sistema

Introdução

- Sendo assim, o aluno aprenderá nesta aula a representar o sistema dinâmico no Simulink de, pelo menos, duas formas diferentes.
- É importante mencionar que, nos casos aqui estudados, o sistema LTI (*Linear Time Invariant*) é representado (modelagem matemática) por uma equação diferencial ordinária, cuja única variável independente é o tempo.
  - Desse modo, para se obter a resposta do sistema, basta aplicar a entrada e resolver a EDO.

Visão sistêmica e Simulink

- Nessa seção, será apresentado como um sistema dinâmico é representado no Simulink
  - Novamente, a visão sistêmica se mostra importante.
- Considerando o caso mais simples (SISO) em diagrama de blocos:

$$\mathbf{q_i} \longrightarrow \boxed{\textbf{SISTEMA}} \longrightarrow \mathbf{q_o}$$

  - A entrada $\mathbf{q_i}$ é gerada e aplicada ao sistema, que por sua vez, responde sinal $\mathbf{q_o}$ que é visualada

Mais detalhes na aula da Parte 1.11

Visão sistêmica e Simulink

$$q_i \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow q_o$$

- O sistema é representado pela Função de Transferência – FT (modelo matemático): <u>relação</u>, na <u>forma operacional</u>, <u>entre a saída</u> $\mathbf{q_o}$ <u>e a entrada</u> $\mathbf{q_i}$, considerando 3 condições:
  - Condições iniciais nulas
  - Todas as outras entradas nulas
  - Demais condições constantes

SISTEMA: $G(s) = \dfrac{Q_o}{Q_i}(s)$

Operador de Laplace

$$s = \sigma + i\omega$$

O Modelo na forma de FT é obtido aplicando-se a TL na EDO

Visão sistêmica e Simulink

Entrada: $Q_i(s)$ → Sistema Dinâmico $G(s)$ → Saída: $Q_o(s)$

Modelo: $G(s) = \frac{Q_o}{Q_i}(s)$ ⇨ $\underbrace{Q_o(s) = G(s)Q_i(s)}$

A saída do bloco (sinal visualizado)
é igual a multiplicação
do "bloco" (modelo – FT)
por sua entrada (sinal gerado)

saída=(bloco)x(entrada)

Visão sistêmica e Simulink

- Nessa configuração, o que o Simulink faz é resolver a EDO, equivalente a aplicação de métodos iterativos e/ou aplicação da Transformada de Laplace (TL) inversa.
  - Resolver a EDO nada mais é do que obter a resposta do sistema;
  - A seguir, será apresentada a configuração necessária para a obtenção da resposta de sistemas de 1ª e 2ª ordem

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

- Uma vez que o aluno já está apto a gerar e visualizar sinais com o Simulink, o próximo passo é configurar o bloco que representa o sistema
  - Dois métodos distintos são apresentados para sistemas cujos modelos são representados por EDOs de 1ª e 2ª ordem

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

- Para obter a configuração de sistemas de 1ª ordem, a derivação das equações partem da equação do movimento, ou seja, da EDO:

$$\tau \frac{dq_o(t)}{dt} + q_o(t) = q_i(t)$$

τ é a constante de tempo [s]

- Aplicando a TL em ambos os lados, tem-se:

$$\tau s Q_o(s) + Q_o(s) = Q_i(s)$$

- Isolando o termo que contém a maior derivada,

$$\tau s Q_o(s) = Q_i(s) - Q_o(s)$$

Equação transcedental

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

- Isolando, agora, a saída, tem-se:

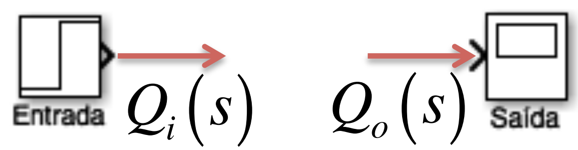
$$Q_o(s) = +\frac{1}{\tau}\frac{1}{s}Q_i(s) - \frac{1}{\tau}\frac{1}{s}Q_o(s)$$

- Note que, esta equação contém:
  - Uma soma;
  - Um ganho (multiplicação) comum
  - Um integrador comum
  - Uma variável que depende da outra (iteratividade)

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

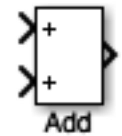
- Uma vez que a saída a ser visualizada é $q_o(t)$, dada a entrada $q_i(t)$, a construção do modelo em diagrama de blocos pode ser iniciada.



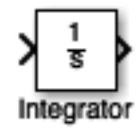
- Exercício 1: Crie um novo modelo em branco e arraste os blocos *Step* (*Toolbox Sources*) e o *Scope* (*Sinks*)

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

- Arraste, também, os outros elementos
  - Bloco *Add* (*Math Operations*); 

  - Bloco *Gain* (*Math Operations*); 

  - Bloco *Integrator* (*Continuous*). 

- O próximo passo é organizar o fluxo de sinais de forma a representar a equação do movimento (EDO).

$$Q_o(s) = +\frac{1}{\tau}\frac{1}{s}Q_i(s) - \frac{1}{\tau}\frac{1}{s}Q_o(s)$$

  - Por onde começar?

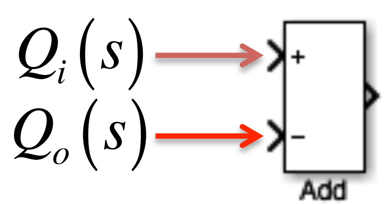
Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

- Para facilitar o entendimento, pode-se rearranjar a equação de forma a <u>evidenciar as operações envolvidas</u>, da seguinte forma:

$$Q_o(s) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{s}\left[+Q_i(s) - Q_o(s)\right]$$

  - Fica evidente as entradas do bloco *Add*

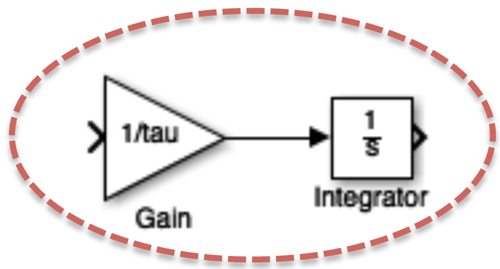


Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

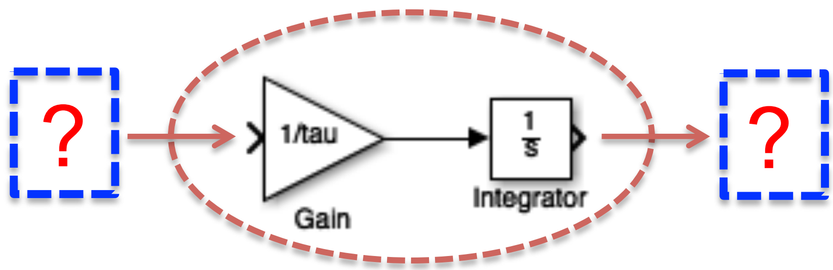
Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

$$Q_o(s) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{s}\left[+Q_i(s) - Q_o(s)\right]$$

- Ficam evidentes as multiplicações envolvendo o ganho e o integrador



- Qual a entrada e saída dessa operação?



para cada bloco, utiliza-se o conceito de entrada no bloco e saída no bloco.

saída=(bloco)x(entrada)

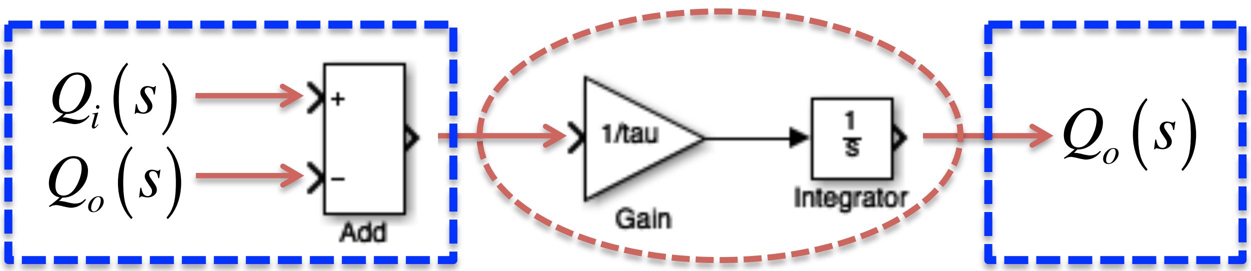
Lembrando: cada bloco é visto como um “sistema independente”

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

$$\underbrace{Q_o(s)}_{\text{saída}} = \underbrace{\frac{1}{\tau}\frac{1}{s}}_{\text{bloco}} \underbrace{\left[+Q_i(s)-Q_o(s)\right]}_{\text{entrada}}$$

- Resultando em:

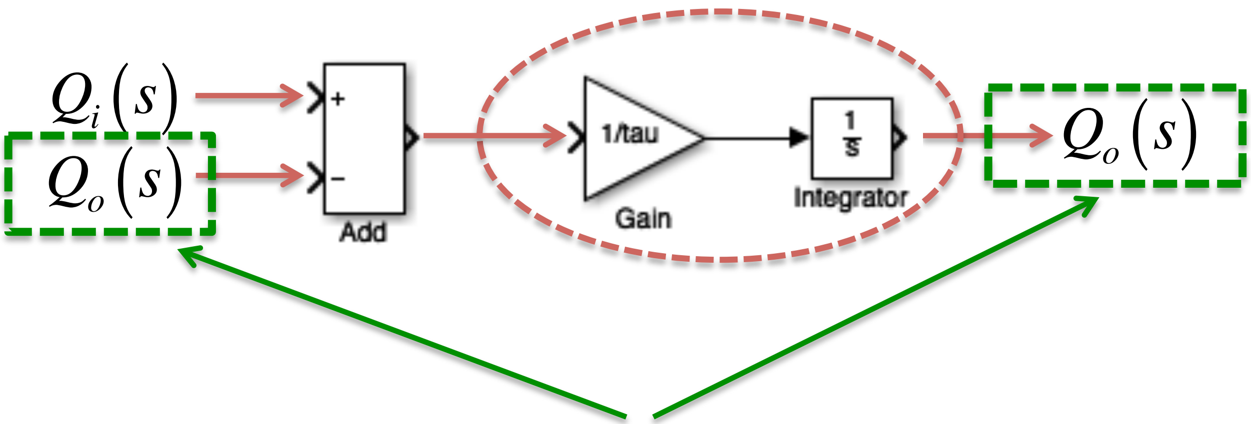


entrada saída

- O que é necessário para finalizar o processo?

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

- Basta, ligar os blocos, respeitando sempre o fluxo de sinais e as variáveis “repetidas”, que dão origem ao processo iterativo.

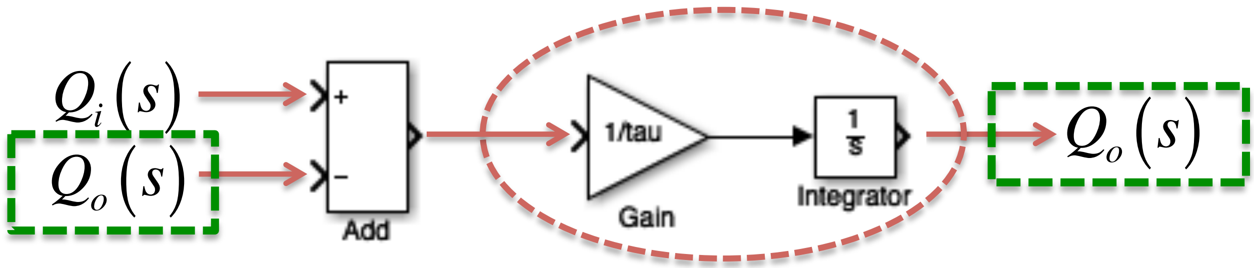


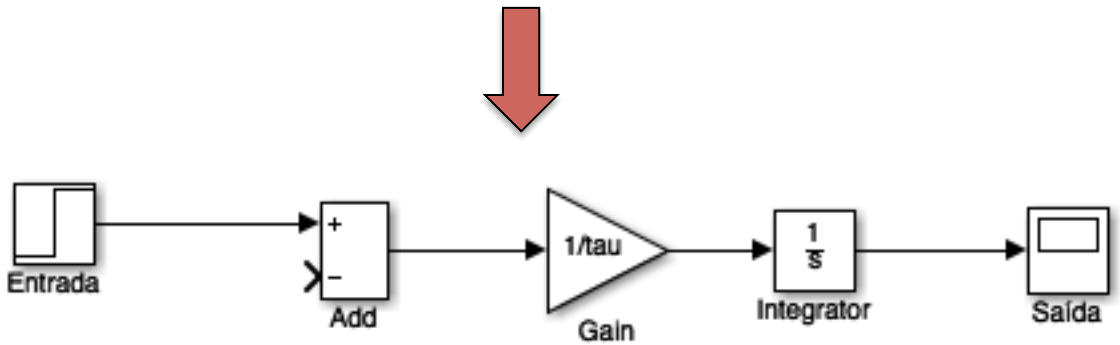
Mesma variável!

Mesma conexão!

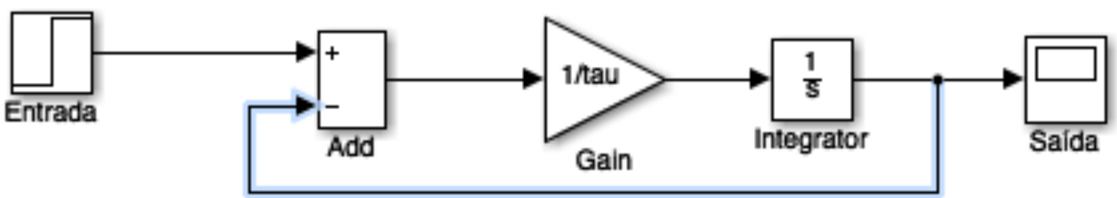
Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem





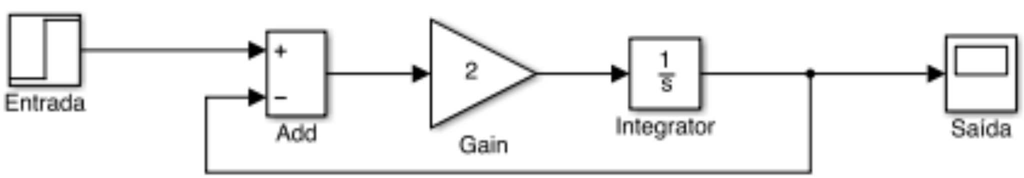
- Finalizando (conectando a "mesma variável"):

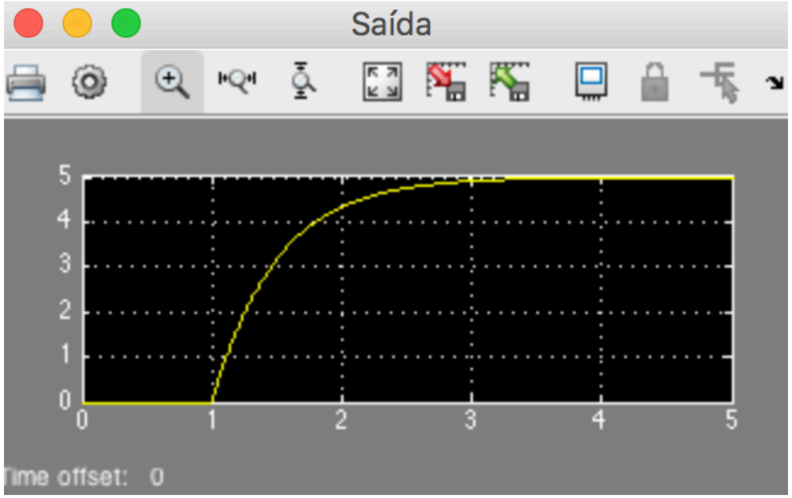


O "ciclo" representa a iteração entre as variáveis

Métodos iterativos – sistemas de 1ª ordem

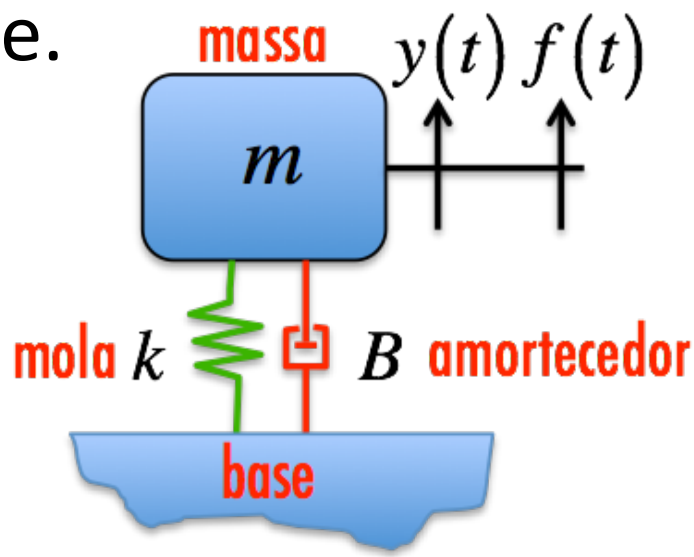
- Exercício 2: Usando o método iterativo, obtenha a resposta de um sistema elétrico de 1ª ordem com constante de tempo igual a 0,5s submetido a uma entrada que configura uma variação brusca de 5V, aplicada depois de 1 segundo de simulação.





Métodos iterativos – sistemas de 2ª ordem

- Para obter a configuração de sistemas de 2ª ordem, a derivação equação do movimento, ou seja, da EDO, será baseada na modelagem matemática de um sistema mecânico Massa-Mola-Amortecedor de 1GDL já apresentado anteriormente.



- E equação do movimento para esse sistema é dada pela seguinte EDO:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=f(t)$$

- Aplicando a TL em ambos os lados, tem-se:

$$ms^2Y(s)+BsY(s)+kY(s)=F(s)$$

- Isolando o termo que contém a maior derivada,

$$ms^2Y(s)=+F(s)-BsY(s)-kY(s)$$

Equação transcedental

- Rearranjando:

$$Y(s) = \frac{1}{m}\frac{1}{s}\frac{1}{s}\left[+F(s) - BsY(s) - kY(s)\right]$$

- Ficam evidentes então,
  - a multiplicação entre um ganho e dois integradores e
  - a soma (3 termos, sendo um positivo e dois negativos)
  - dois lações de iteratividade (tomar cuidado com o derivador s multiplicando $BY(s)$).

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

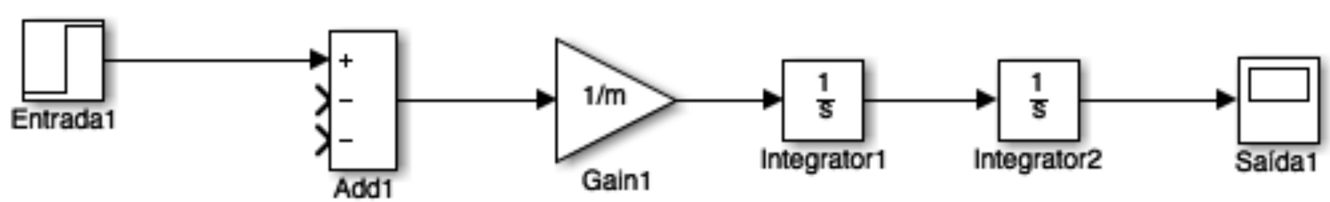
Métodos iterativos – sistemas de 2ª ordem

- Dada essa equação, quais os blocos necessários para construção do diagrama?

$$Y(s)=\frac{1}{m}\frac{1}{s}\frac{1}{s}\left[+F(s)-BsY(s)-kY(s)\right]$$

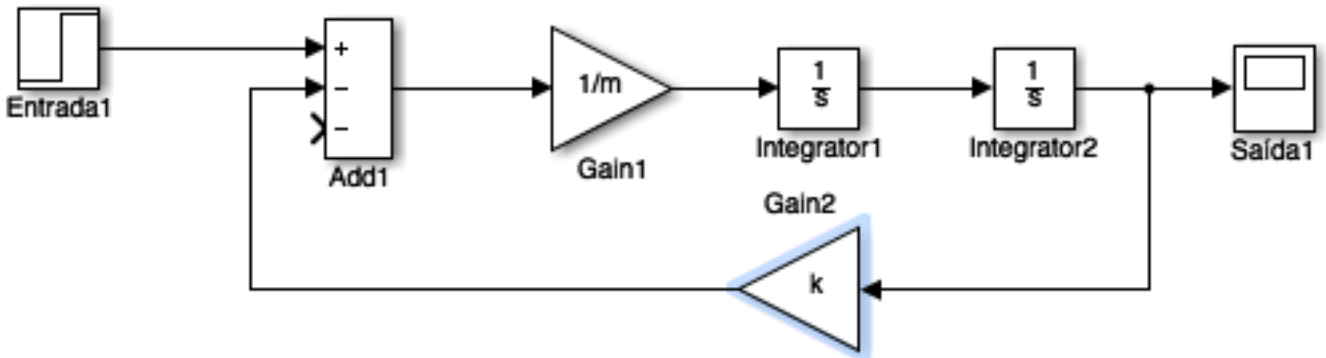
  - Os mesmos, mas com quantidades e parâmetros diferentes.

- Exercício 3: monte o diagrama em Simulink para o sistema MMA apresentado.

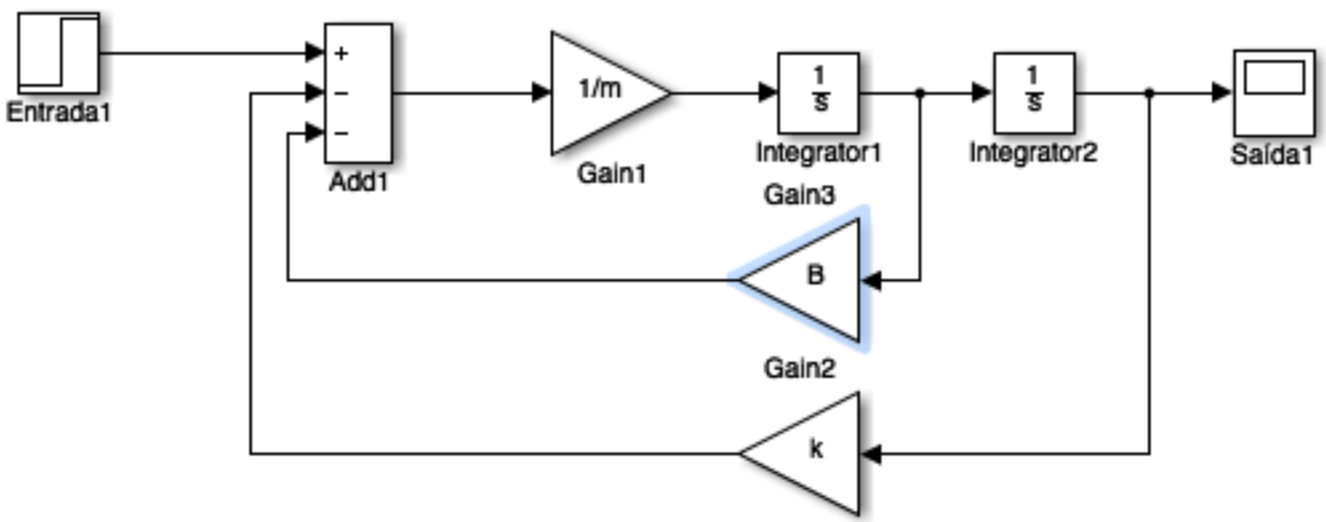


Métodos iterativos – sistemas de 2ª ordem

- Adicionando o primeiro laço de iteração:



- Adicionando o segundo laço de iteração:



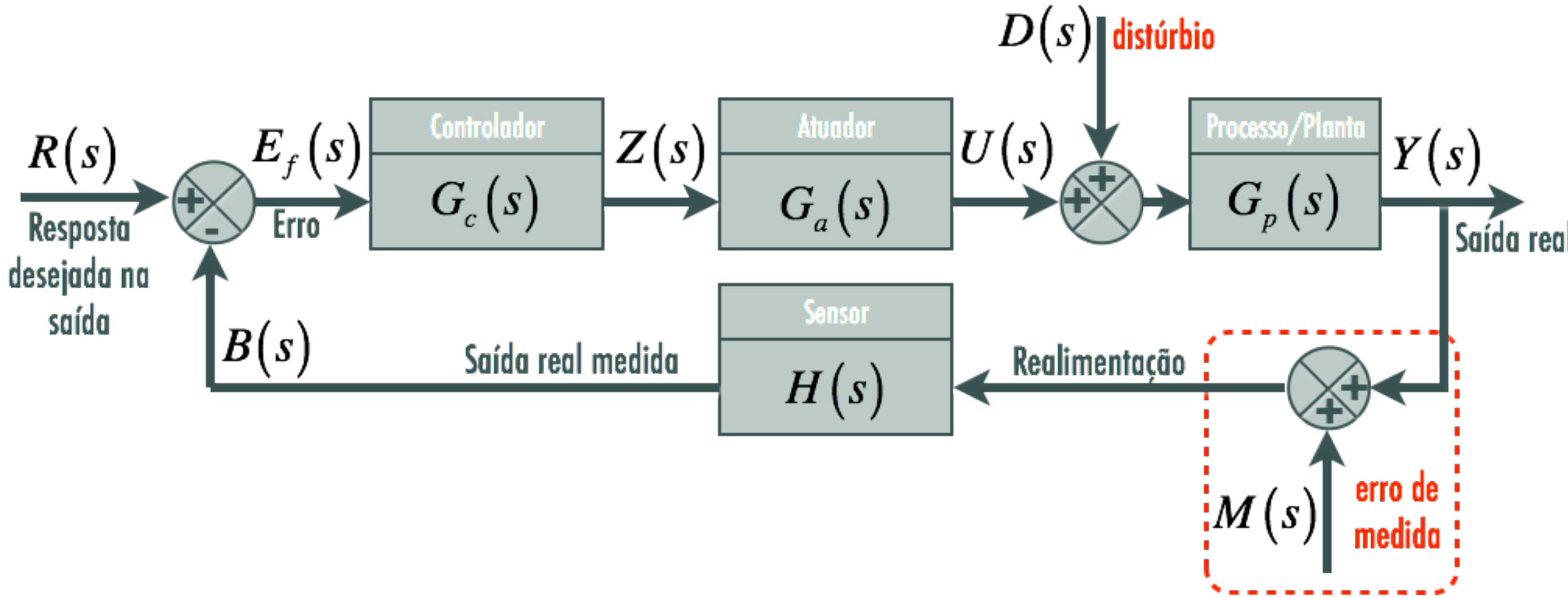
Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

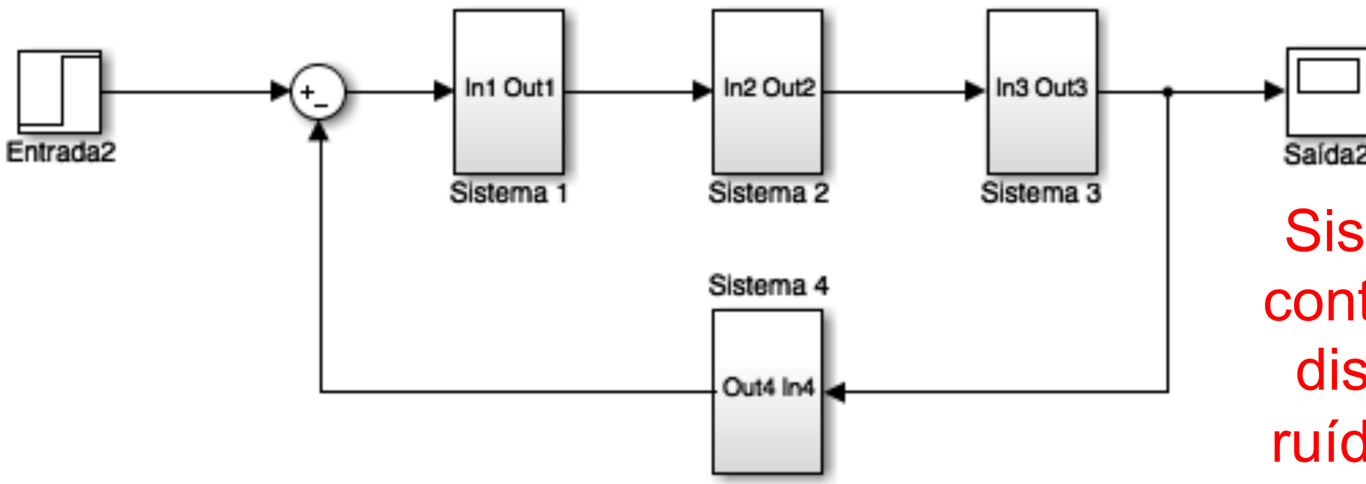
Bloco *Transfer Fcn*

- Como a obtenção da resposta de sistemas dinâmicos (seja de 1ª ordem, 2ª ordem ou superiores) é amplamente consolidada na literatura, o bloco *Transfer Fcn* é utilizado com o intuito de facilitar:
  - a criação do sistema em si (modelo);
  - a visualização do modelo completo, eliminando laços de retroação, e deixando-o mais visualmente limpo.
  - a iteração entre diversos sistemas (e.g. sistemas de controle)

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Bloco *Transfer Fcn*





Sistema de controle com distúrbio e ruídos nulos

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Bloco *Transfer Fcn*

- É importante mencionar/lembrar que um sistema dinâmico genérico `sys` pode ser criado no MATLAB com a utilização do seguinte comando:

```
sys = tf(num,den)
```

em que:

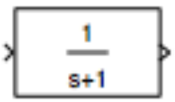
- `sys` é o sistema que se deseja criar, representado por seu modelo, ou seja, por sua Função de Transferência (assume, no workspace, a classe *tf*);

- `num` é um vetor contendo os coeficientes do polinômio do numerador da FT e

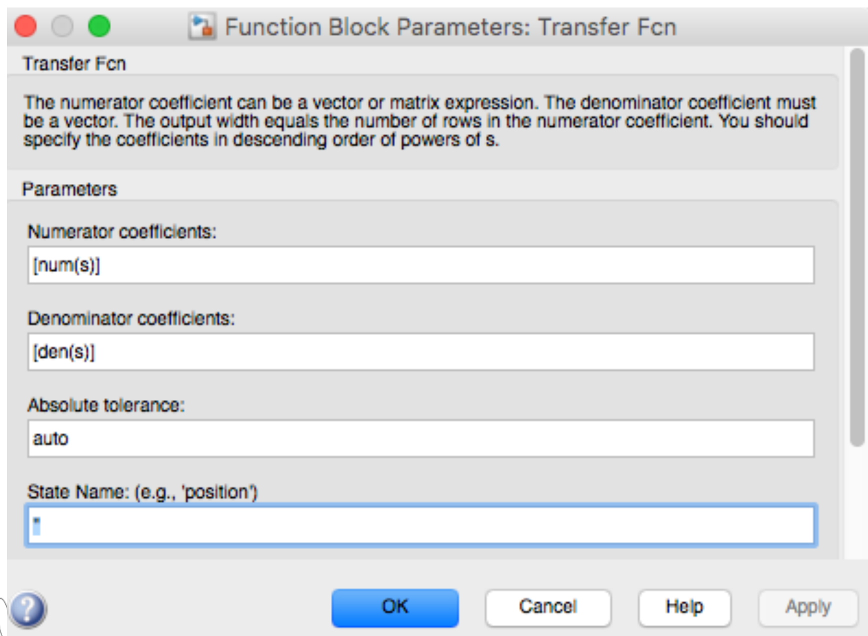
- `den` é um vetor contendo os coeficientes do polinômio do denominador da FT .

Bloco *Transfer Fcn*

- O bloco *Transfer Fcn* é encontrado no toolbox *Continuous*



- Representa um sistema dinâmico usando a Função de Transferência (FT) no domínio de Laplace.


Function Block Parameters: Transfer Fcn

Transfer Fcn

The numerator coefficient can be a vector or matrix expression. The denominator coefficient must be a vector. The output width equals the number of rows in the numerator coefficient. You should specify the coefficients in descending order of powers of s.

Parameters

Numerator coefficients:

[num(s)]

Denominator coefficients:

[den(s)]

Absolute tolerance:

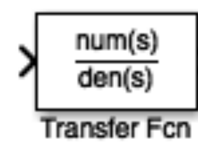
auto

State Name: (e.g., 'position')

''

OK Cancel Help Apply

A parametrização desse bloco é realizada indicando-se os coeficientes (vetor) dos polinômios do numerador e denominador da FT do sistema



Bloco *Transfer Fcn*

- Exercício 4. Considere um sistema dinâmico representado pela seguinte EDO.

$$\tau \frac{dq_o(t)}{dt} + q_o(t) = q_i(t)$$

em que τ = 0,5s

- Usando o bloco *Transfer Fcn*, obtenha a resposta do sistema $q_o(t)$ quando submetido a uma entrada degrau de amplitude 5V (aplicado depois de 1s de simulação);

Bloco *Transfer Fcn*

- Aplicando a TL em ambos os lados, tem-se:

$$\tau s Q_o(s) + Q_o(s) = Q_i(s)$$

- Rearranjando para colocar na forma de FT:

$$(\tau s + 1) Q_o(s) = Q_i(s)$$

- A FT torna-se então:

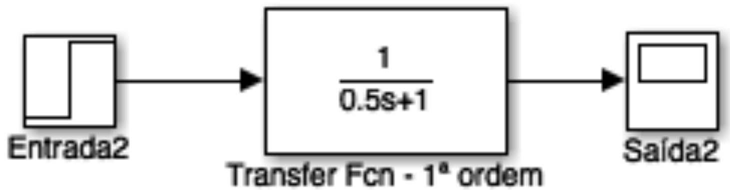
$$\frac{Q_o}{Q_i}(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)}$$

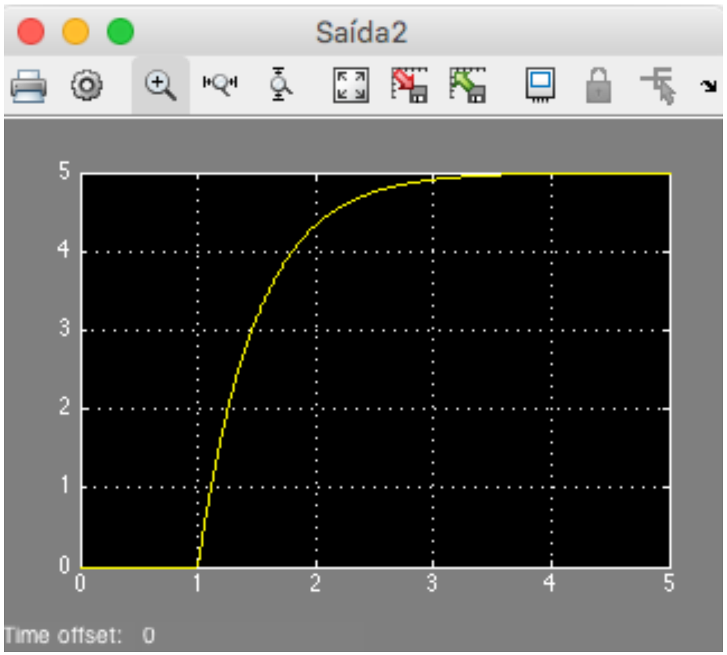
- num = [1]
- den = [tau 1]

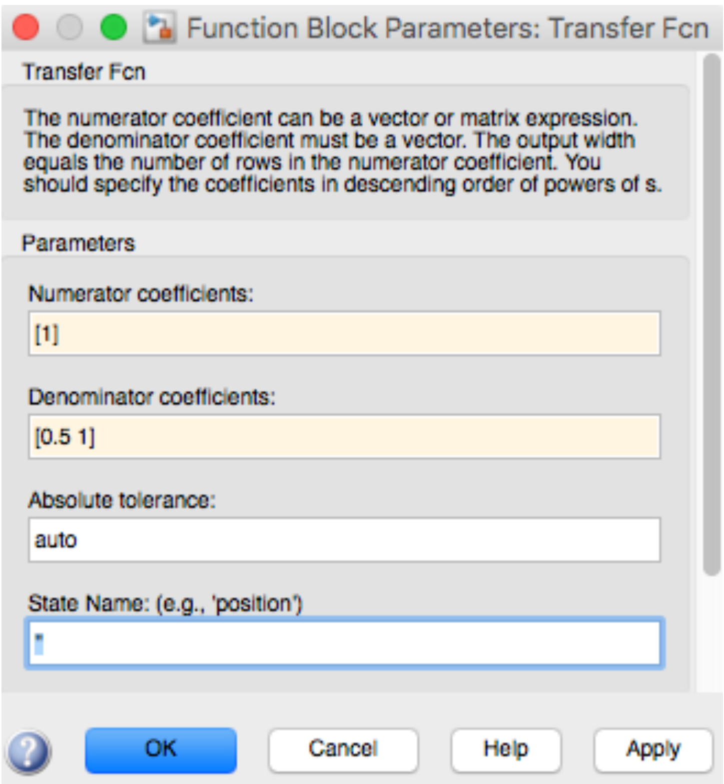
- Resposta...

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Bloco *Transfer Fcn*

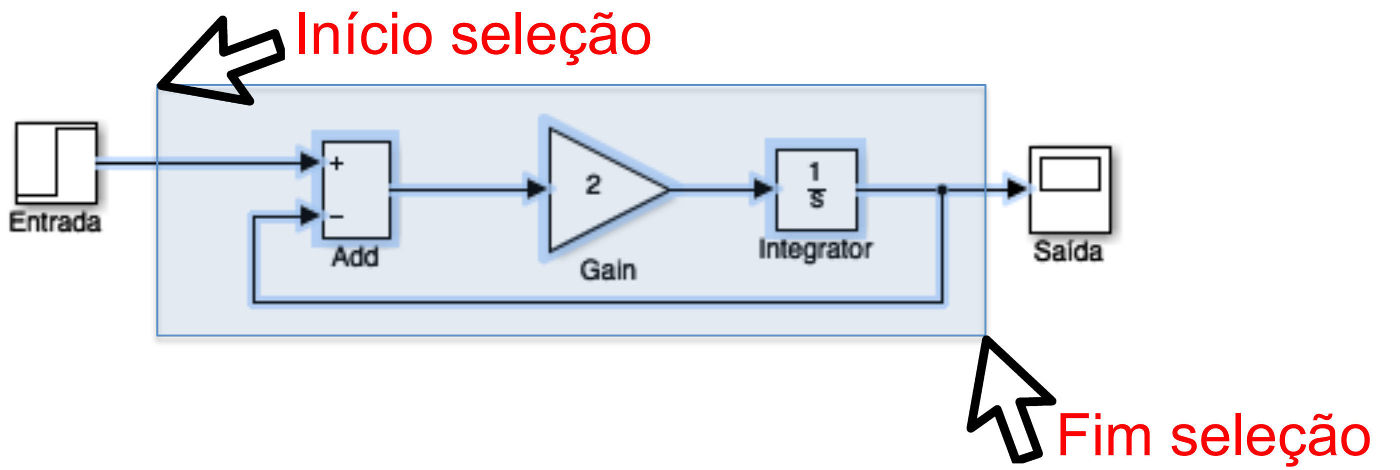






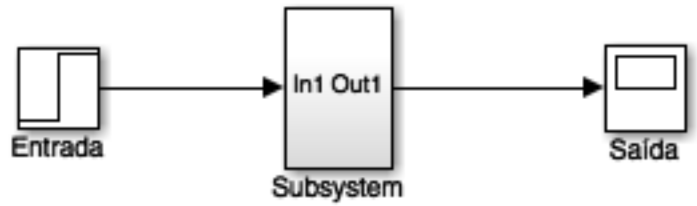
Bloco *Transfer Fcn*

- Em seguida, compare os resultados dessa análise com os resultados obtidos usando o método iterativo (do exercício 2).
  - Para facilitar a comparação, primeiramente, realize a seleção dos blocos na modelagem via método iterativo.



Bloco *Transfer Fcn*

- Então, clique com o botão direito e em seguida em: *Create Subsystem from Selection*, gerando a seguinte configuração:

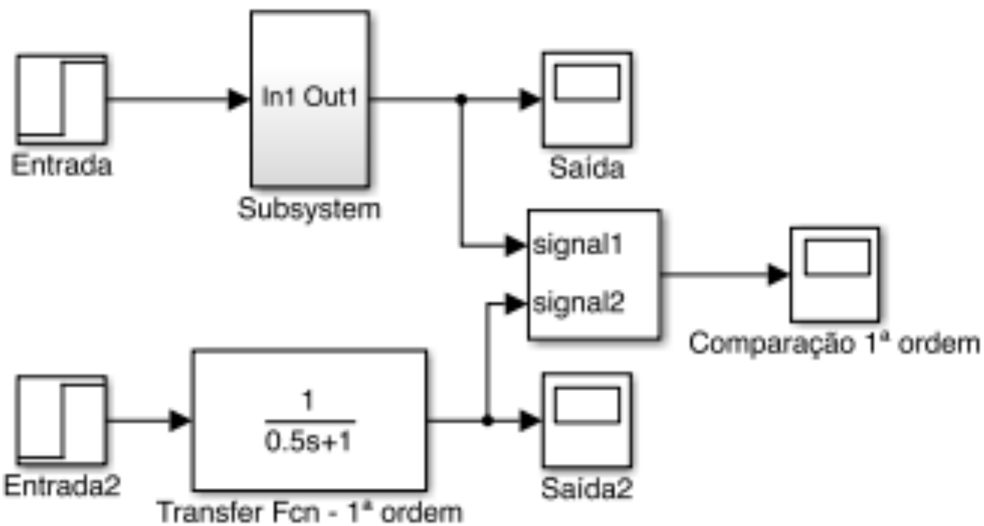


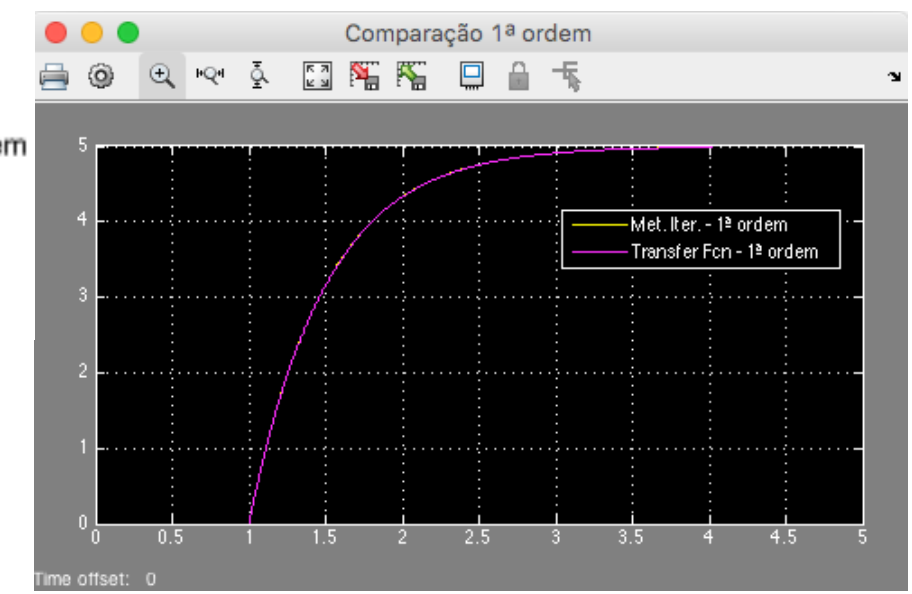
- Note que, agora, ambas metodologias estão parecidas visualmente.
- Dê dois cliques no bloco *Subsystem* e note que a configuração via método iterativo está formada no interior do bloco.

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Bloco *Transfer Fcn*

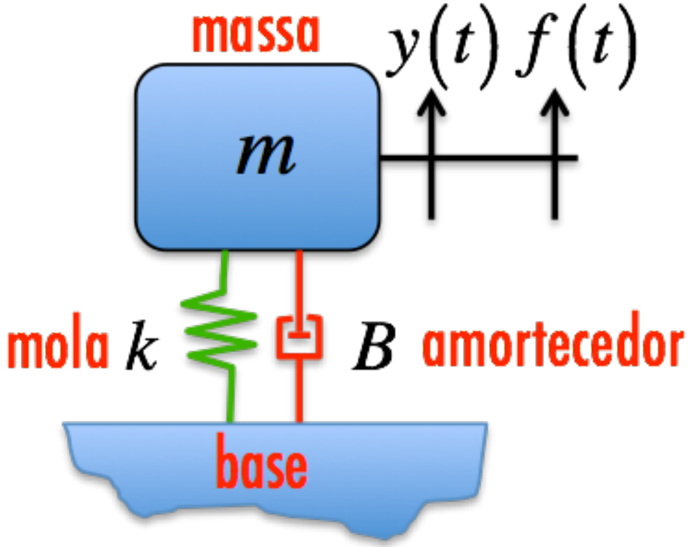
- Para realizar a comparação, então, utilize um multiplexador (Mux) de <u>sinais</u>.
- Resposta...





Bloco *Transfer Fcn*

- Exercício 5. Realize o mesmo procedimento do Exercício 4 para o sistema mecânico a seguir.



$$m = 1 \text{ ton}$$

$$B = 2 \text{ kNs/m}$$

$$k = 10 \text{ kN/m}$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$$

Bloco *Transfer Fcn*

- Aplicando a TL em ambos os lados, tem-se:

$$ms^2Y(s)+BsY(s)+kY(s)=F(s)$$

- Rearranjando para colocar na forma de FT:

$$\left(ms^2+Bs+k\right)Y(s)=F(s)$$

- A FT torna-se então:

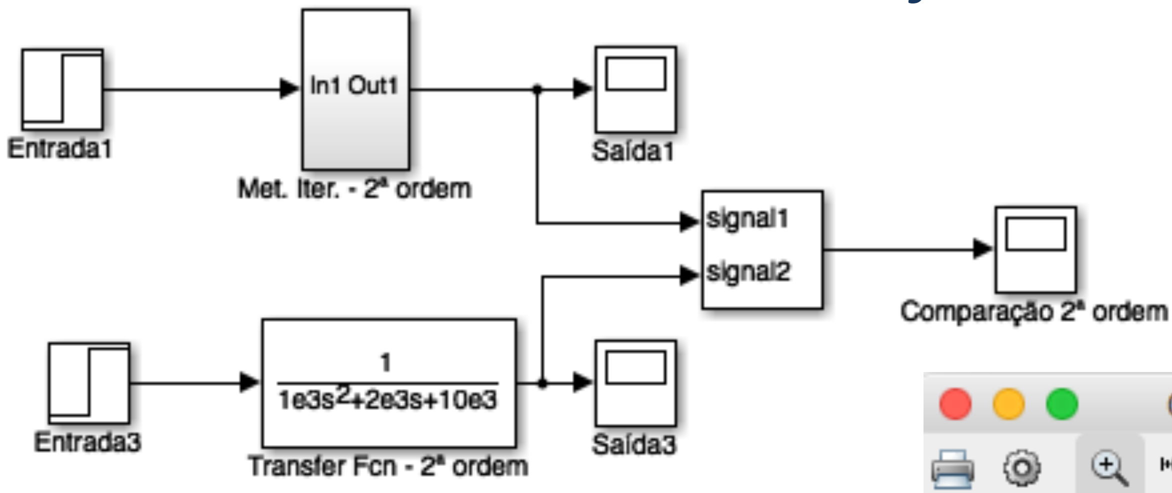
$$\frac{Y}{F}(s)=\frac{1}{\left(ms^2+Bs+k\right)}$$

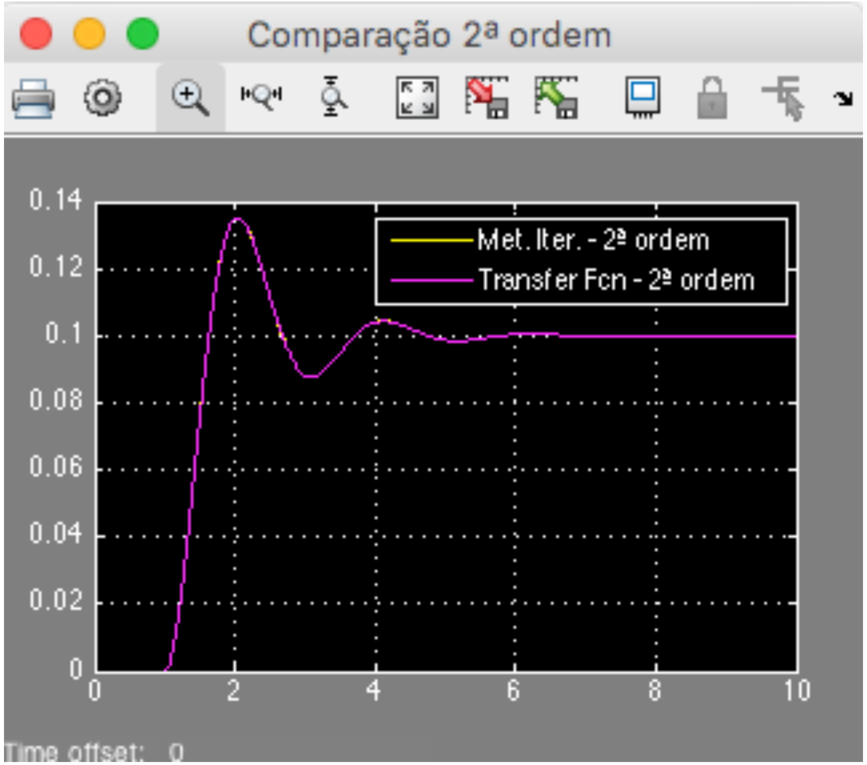
- num = [1]
- den = [m B k]

- Resposta...

Obtenção da resposta de sistemas dinâmicos

Bloco *Transfer Fcn*





Considerações Finais

- As configurações finais vão de encontro com a resposta da seguinte pergunta: Quando usa-se o método iterativo ao invés do bloco *Transfer Fcn*?
- Os seguintes pontos podem ser considerados:
  - Por mais fácil que seja, para se utilizar o bloco *Transfer Fcn*, é necessário (obrigatório) calcular a FT e obter, na forma de vetor, o numerador e denominador.

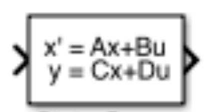
Considerações Finais

- Isso pode ser complicado, ou mais trabalhoso, no caso de sistemas de mais de 1 grau de liberdade (aplicação da regra de Cramer e/ou outros métodos);
- Em contrapartida, apesar de ser mais trabalhoso de se construir, o método iterativo permite, de forma mais fácil e rápida, realizar o acoplamento entre os graus de liberdade.

Considerações Finais

- O método iterativo é melhor visualizado na representação em Espaço de Estados

- Essa representação também configura uma modelagem de um sistema, no qual as matrizes respectivas (A,B,C,D) podem ser utilizadas como parâmetros para o bloco *State-Space (toolbox Continuous).*



State-Space

Perguntas ?