1.8 Computação Simbólica

Prof. Dr. Sidney Bruce Shiki
E-mail: bruce@ufscar.br
Prof. Dr. Vitor Ramos Franco
e-mail: vrfranco@ufscar.br

UFSCar – Universidade Federal de São Carlos
DEMec - Departamento de Engenharia Mecânica

Conteúdo

- Introdução
- Objetos simbólicos
- Expressões simbólicas
  - Manipulação
  - Cálculos
  - Plotagem
- Solução de equações algébricas
- Solução de EDOs
- Derivação e Integração
- Exercícios

Introdução

- Muitas vezes, o problema em questão mostra-se complicado em uma visão discreta ou utilizando-se formulações de cálculo numérico;
- Uma possibilidade de simplificar a visualização do problema é a utilização de linguagem simbólica
- Essa linguagem, basicamente, apresenta o problema da forma como escrevemos e apresentamos as equações.

Introdução

- Aqui, o aluno aprenderá:
  - Gerar uma expressão simbólica;
  - Manipular expressões simbólicas com a finalidade de melhorar a visualização;
  - Realizar operações na linguagem simbólica
  - Apresentar dados (plotar)
  - Outros assuntos relacionados

Objetos Simbólicos

- Podem ser variáveis não inicializadas, constantes (números) ou expressões constituídas de variáveis simbólicas e números;
- Criados usando os comandos:

```
nome_objeto = sym ('vari_simb'); % cria uma variável
simbólica e atribui um nome a ela
syms var1 var2 var3 % cria várias variáveis (sem nomes)
```

em que:

- vari_simb, var1, var2 e var3 são as variáveis simbólicas criadas.

- Exemplo de criação: criar as variáveis simbólicas x, y e z

```
syms x y z % cria várias variáveis simbólicas
```

Expressões Simbólicas

- Nada mais são do que expressões matemáticas contendo uma ou mais variáveis simbólicas;
- Quando digitadas, lembram expressões numéricas padrão.
- Exemplos de criação: criar as funções:

$$p = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$$

```
p = x^3 + 4*x^2 + 5*x + 2;
```

$$f = 2x + 4y + 5\sqrt{z} + 2$$

```
f = 2*x + 4*y + 5*sqrt(z) + 2;
```

$$g = xy + 2\cos(z)$$

```
g = x*y + 4*cos(z);
```

Expressões Simbólicas

- Para saber qual ou quais variáveis simbólicas estão relacionadas em uma expressão, basta utilizar o comando:

```
findsym(expressao)
```

- Exemplos de criação: verificar quais as variáveis simbólicas estão presentes nas expressões p, f e g anteriores.

```
findsym(p)
findsym(f)
findsym(g)
```

Manipulação

- Muitas vezes, expressões resultantes de cálculos simbólicos podem não se apresentar de forma simples ou muito interessante de se visualizar;
- Nesses casos, essas expressões podem ser manipuladas, das seguintes formas:
  - Agrupando-se termos de mesma potência;
  - Expandindo produtos;
  - Evidenciando multiplicadores comuns;
  - Utilizando identidades trigonométricas;
  - Simplificando, entre outras.

Manipulação

- Para fins de manipulação, utilizam-se os seguintes comandos:

```
collect(expressao)
collect(expressao,nome_variavel)
```

- O comando `collect` desenvolve os termos de uma expressão que possuem variáveis com a mesma potência, reagrupando-as no final.
- Exemplo de criação: manipular a expressão:

$$f = \left(x^2 + x - e^x\right)\left(x + 3\right)$$

```
f = (x^2 + x - exp(x))*(x + 3)
F = collect(f)
```

Manipulação

- Outra forma de manipulação é usando:

```
expand(expressao)
```

- O comando `expand` desenvolve os produtos dos termos realizando a distributiva em relação à soma e/ou utiliza identidades trigonométricas, exponenciais, logarítmicas para expandir termos incluídos no somatório.
- Exemplo de criação: manipular a expressão:

$$g = (x+5)(x-y)(x+4)$$

```
g = (x+5)*(x-y)*(x + 3)
G = expand(g)
```

Manipulação

- Outra forma de manipulação é usando:

```
factor(expressao)
```

- O comando `factor` reescreve uma expressão polinomial na forma fatorada, em função das raízes do polinômio.

- Exemplo de criação: escrever as expressões em função de suas raízes:

$$h_1 = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2$$

$$h_2 = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$$

```
h1 = x^3+4*x^2+5*x+2
H1 = factor(h1)
```

```
h2 = x^3+4*x^2-5*x+2
H2 = factor(h2)
```

?

Manipulação

- Outra forma de manipulação é usando:

```
simplify(expressao)
```

- O comando `simplify` utiliza operações matemáticas, identidades funcionais e trigonométricas para gerar a forma mais simples de uma expressão.
- Exemplo de criação: simplificar a expressão:

$$f = 0,999xy + 0,245(x + y)$$

```
f = 0.999*x*y + 0.245*(x+y)
simplify(f)
```

Manipulação

- Outra forma de manipulação é usando:

```
[expressao_simples how] = simple(expressao)
```

- O comando `simple` determina a forma da expressão com o menor número de caracteres
- Em muitos casos, é a forma mais simples (aplica os comandos anteriores).
- Exemplo de criação: simplificar a expressão:

$$f = \frac{x^3 - 4x^2 + 16x}{x^3 + 64}$$

```
f = (x^3 -4*x^2 +16*x) / (x^3 + 64)
[f_simples how] = simple(f)
```

Manipulação

- Outra forma de manipulação é usando:

```
pretty(expressao)
```

- O comando `pretty` exibe uma expressão simbólica em um formato que lembra a maneira como são escrita pelas pessoas

- Exemplo de criação: exibir a expressão da maneira como é escrita:

$$f = \sqrt{x^2 + y^2}$$

```
f = sqrt(x^2 + y^2)
pretty(f)
```

Cálculos com variáveis simbólicas

- Nesta seção, serão apresentados alguns cálculos comumente realizados em problemas de sistemas dinâmicos.
- Um cálculo muito utilizado é a obtenção de determinantes de matrizes.
- Exemplo de criação: obter o determinante da matriz simbólica

$$A = \begin{bmatrix} 2x^2+3x+1 & -2x+10 \\ -2x+10 & 4x^2+x+2 \end{bmatrix}$$

```
A = [2*x^2+3*x+1        -2*x+10
     -2*x+10            4*x^2+x+2]
determinante = det(A)
```

Cálculos com variáveis simbólicas

- Note que para esse caso, o resultado é uma expressão também simbólica.
- Em alguns problemas, é necessário tratar o valor desse determinante como um polinômio.
- Para isso, utiliza-se o comando de conversão:

```
coefs_poli = sym2poly(expressão)
```

- Exemplo de criação: obter o polinômio correspondente ao determinante anterior

```
determinante_poli = sym2poly(determinante)
```

Cálculos com variáveis simbólicas

- Outra operação bastante utilizada é a substituição de variável por um valor numérico que a variável venha a assumir.
- Para isso, utiliza-se o comando:

```
subs(expressão,var,numero)
```

em que:

- `var` é a variável que se deseja substituir por `numero`.

- Exemplo de criação: avaliar $f = x^2 + 3x + 5\Big|_{x=2}$

```
f = x^2+3*x+5
Resultado = subs(f,x,2)
```

Plotagem

- Muitas vezes, deseja-se esboçar uma expressão simbólica
- Isso é feito utilizando o comando:

```
ezplot(espressão)
ezplot(espressão,[min,max])
ezplot(espressão,[xmin,xmax,ymin,ymax])
```

em que:

- `min` e `max` definem o domínio de definição da variável independente;
- `xmin,xmax,ymin,ymax` definem o domínio de definição da variável dependente.

- É possível, também, plotar uma expressão por outra usando:

```
ezplot(espressão1, espressão2)
```

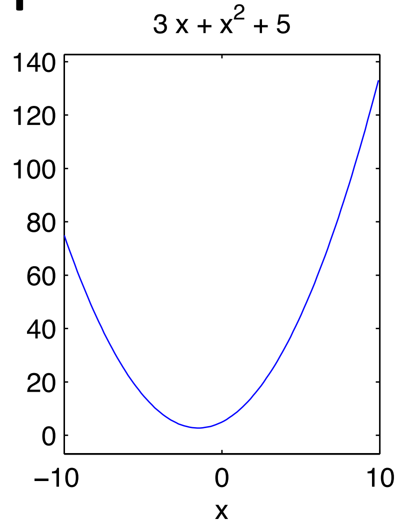
Plotagem

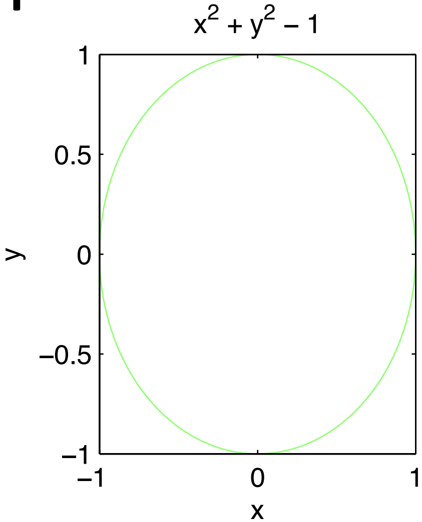
- Exemplo de criação: plotar as expressões:

$$f_1 = x^2 - 5x + 6$$

$$f_2 = x^2 + y^2 - 1$$

```
f1 = x^2+3*x+5
ezplot(f1,[-10,10])
f2 = (x^2 + y^2 -1)
ezplot(f2,[-1,1,-1,1])
```



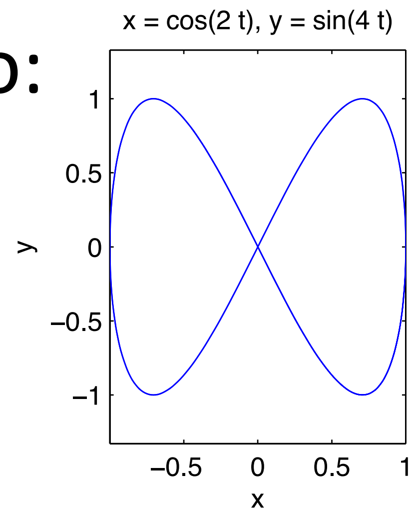


- Plotar as expressões x por y, sendo:

$$x = \cos(2t)$$

$$y = \text{sen}(4t)$$

```
syms t
xx = cos(2*t);
yy = sin(4*t);
ezplot(xx,yy)
```



Solução de equações algébricas

- Uma equação algébrica pode ser composta de uma ou mais variáveis simbólicas
  - Se a eq. tiver mais de uma variável simbólica, uma solução pode relacional qualquer variável com as demais.
- A solução pode ser obtida utilizando o comando:

```
r = solve(eq)
r = solve(eq,var)
```

em que:

- `eq` pode ser o nome de uma expressão simbólica declarada previamente ou uma expressão digitada literalmente.

- `var` é a variável de interesse para a qual a solução é desejada.

Solução de equações algébricas

- Exemplo de criação: resolver as equações:

$$f = x^2 - 5x + 6$$

$$g = x\cos(x)$$

$$\cos(2x) + 3\mathrm{sen}(x) = 2$$

```
syms x
f   = x^2 - 5*x + 6
f_res = solve(f)
g = x*cos(x)
g_res = solve(g)
sol = solve('cos(2*x)+3*sin(x)=2')
```

- Comparar o resultado da solução de g com:

```
f = @(x) x.*cos(x);
x0 = 0:1:5; % faixa
x = fsolve(f,x0)
```

Exercício1: solução de equações

- Resolver as equações:

$$f_1 = e^{2t} - 5$$

avaliar o resultado utilizando o comando `eval`

$$f_2 = 5a - 3b - 4$$

$f_3 = f_2$ com relação a variável a

Sistema de equações algébricas

- O comando `solve` também resolve sistemas de equações algébricas simbólicas:
  - Se o nº de eqs. e variáveis for o mesmo, a solução será numérica;
  - Se o nº de variáveis for maior do que o nº de eqs., a solução será simbólica para as variáveis desejadas em função das demais.
- O comando é aplicado das seguintes formas:

```
Output = solve(eq1,eq2,…,eqn)
Output = solve(eq1,eq2,…,eqn,var1,var2, …,varn)
[var1,var2,va3] = solve(eq1,eq2,eq3)
```

Sistema de equações algébricas

- Exemplos de criação: resolver os sistemas:

$$2x+3y=2$$
$$-x+5y=1$$

2 equações
2 incógnitas

```
syms x y
[x,y] = solve('2*x+3*y=2','-x+5*y=1')
% ou
f1 = 2*x+3*y-2
f2 = -x+5*y-1
[x,y] = solve(f1,f2)
```

$$10x+12y+6t$$
$$5x-y=13t$$

2 equações
3 incógnitas

```
syms x y t
f3 = 10*x+12*y+16*t
f4 = 5*x-y-13*t
[xt,yt]=solve(f3,f4,x,y)% em função de t
[tx,yx]=solve(f3,f4,t,y)% em função de x
[xy,ty]=solve(f3,f4,x,t)% em função de y
```

Solução de EDOs

- Uma EDO é resolvida simbolicamente utilizando:

```
dsolve('eq')
dsolve('eq','var')
```

- Atenção deve ser tomada na digitação da EDO
  - Escrever `'eq'` em função do operador diferencial $D = d/dt$.
  - Ex.1: $\frac{dx}{dt} + 3x = 100$ deve ser escrita como uma *string* dada por: `'Dx+3*x=100'`
  - Ex.2: $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 5y = \text{sen}(2t)$ deve ser escrita como uma *string* dada por: `'D2y+3*Dy+5*y=sin(2*t)'`

Solução de EDOs

- Exemplos de criação: resolver as EDOs simbolicamente:

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 4t$$

```
sol = dsolve('Dx+2*x=4*t')
```

O MATLAB define a variável independente t como a padrão (**ótimo!**)

OBS.1: tem-se uma EDO de primeira ordem;

OBS.2: a constante resultante (apenas uma) deve ser avaliada na condição inicial (ou de contorno);

OBS.3: não é necessário definir variáveis simbólicas.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$$

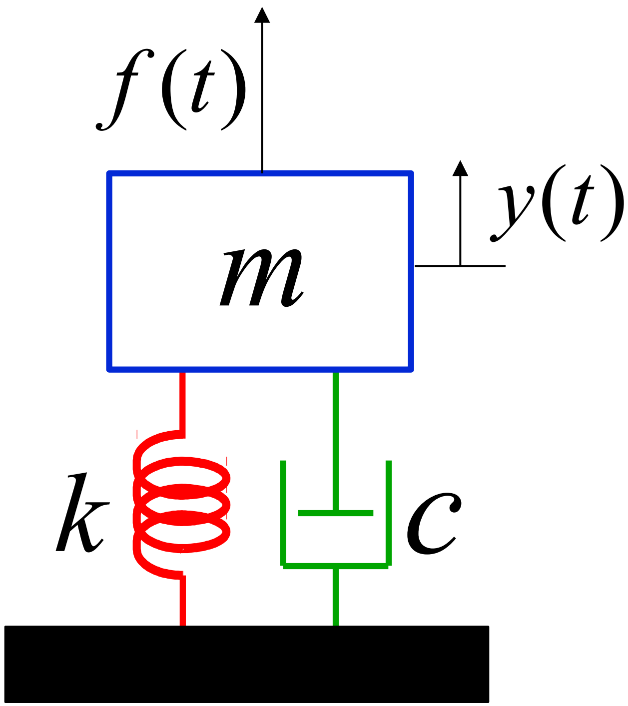
```
sol = dsolve('D2y + 2*Dy + y = 0')
```

OBS1: tem-se uma EDO de segunda ordem;

OBS2: duas constantes surgem do processo de solução, indicando a necessidade de duas condições iniciais (ou de contorno)

Exercício2: resposta de sistemas mecânicos

- Exercício 03 – Simule a resposta de um sistema massa-mola-amortecedor excitado por uma força senoidal durante 20 segundos. Plote a resposta $y(t)$.



$$\boxed{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)}$$

$$m = 1\text{kg};\ c = 2\text{Ns/m};\ k = 100\,N/m$$

$$f(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \qquad \boxed{C_1 = C_2 = 0}$$

- Verifique se a frequência do sinal de resposta é a mesma do sinal de entrada

Derivação

- A derivação em linguagem simbólica é realizada utilizando o comando `diff` nas seguintes formas:

```
diff(f)
diff(f,var)
```

em que:

- `f` é a expressão simbólica que se deseja derivar
- `var` é a variável em relação a qual se deseja derivar.

- Exemplos de criação: obter a derivada de:

$$f(x) = e^{x^3}$$

$$g(x,t) = 4x^4 + 6t^2$$

```
syms x t
f = exp(x^4)
f_deriv = diff(f)
g = 4*x^4 + 6*t^2
g_deriv = diff(g) %mantem t constante
g_deriv_t = diff(g,t) %com relação a t
(x cte.)
```

Integração

- A integração em linguagem simbólica é realizada utilizando o comando `int` nas seguintes formas:

```
int(f)
int(f,var)
```

em que:

- `f` é a expressão simbólica que se deseja integrar;
- `var` é a variável em relação a qual se deseja integrar (dvar).

- Exemplos de criação: sendo $f(x) = 2x^2 + e^{2x}$ e $g(x,t) = 4x^4 + 6t^2$ obter:

$$\int f(x)dx$$

$$\int g(x,t)dx$$

$$\int g(x,t)dt$$

```
syms x t
f = 2*x^2 + exp(2*x)
f_int = int(f)
g = 4*x^4 + 6*t^2
g_int_x = int(g,x)
g_int_t = int(g,t)
```

Integração

- A integração definida também pode ser realizada, usando o comando da forma:

```
int(f,a,b)
int(f,var,a,b)
```

em que:

- `f` é a expressão simbólica que se deseja integrar;
- `var` é a variável em relação a qual se deseja integrar (dvar);
- `a` e `b` são os limites de integração.

- Exemplos de criação: sendo $f(x)=2x^2+e^{2x}$ e $g(x,t)=4x^4+6t^2$ obter: $\int_0^2 f(x)dx$ e $\int_0^5 g(x,t)dt$

```
f_int_0a2 = eval(int(f,0,2))
g_int_t_0a5 = int(g,t,0,5)
```

Resolver $\int_0^2 f(x)dx$ utilizando substituição.

Exercício3: comportamento dinâmico de uma máquina

- Mediu-se a velocidade de uma máquina em um intervalo de tempo de 5 segundos e notou-se que o comportamento segue a seguinte função:

$$\mathrm{vel}(t) = 3{,}37\mathrm{e}^{-1{,}5t}\cos\left(4{,}77t\right) - 1{,}06\mathrm{e}^{-1{,}5t}\mathrm{sen}\left(4{,}77t\right)$$

- Obtenha o seu deslocamento e sua aceleração.
- Mostre (plote) os dados de desl., vel. e acel. em uma única figura.
- Compare o resultado via linguagem simbólica com os resultados obtidos através de derivação e integração numéricas.

Perguntas ?