

Médian IA02 : modélisation de problèmes en logique – Printemps 2022

Préliminaires

- **Durée** : 1h30.
- **Seul document autorisé** : une feuille A4 recto verso **manuscrite** (aménagements possibles pour certains 1/3 temps qui en ont préalablement fait la demande).
- **Barème indicatif**, susceptible de changement sans préavis : 5 + 6 + 8 (+ 1 point pour la clarté et la présentation de la copie).
- L'élégance des solutions fournies fait partie intégrante des critères d'évaluation.
- Toute ambiguïté, erreur ou omission dans le sujet devra être résolue par le candidat et par lui seul.

Exercice 1 – Prolog

On considère le programme Prolog suivant.

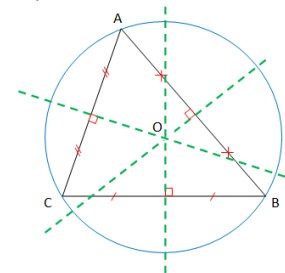
```
1 person(mary).
2 person(susie).
3 person(john).
4
5 aliment(food).
6 aliment(wine).
7
8 likes(john, susie).
9 likes(john, mary).
10 likes(mary, food).
11 likes(mary, wine).
12 likes(john, wine).
13 likes(X, Y) :- person(X), Y = susie.
14
15 egocentric(X) :- likes(X, X).
16 friends(X, Y) :- likes(X, Y), likes(Y, X).
17 isliked(X) :- likes(_, X).
18
19 hates(X, Y) :- \+ likes(X, Y).
20 enemies(X, Y) :- hates(X, Y), hates(Y, X).
```

Questions

1. Donner la réécriture en logique du premier ordre de la ligne 16.
2. Que signifie en langage naturel la ligne 13 ? Comment la réécrire de façon plus élégante ?
3. Quelle est l'utilité de l'opérateur \+ de la ligne 19 ?
4. À quoi sert le symbole _ de la ligne 17 ? Comment écrire cette formule en logique du 1^{er} ordre ?
5. Que renvoient les requêtes suivantes ? On demande toutes les solutions renvoyées, dans l'ordre où elles sont renvoyées, éventuels doublons compris.
 1. likes(mary, wine).
 2. likes(john, X).
 3. likes(Y, X), aliment(Y).
 4. person(X), isliked(X).
 5. egocentric(X).
 6. (BONUS): hates(X, Y).

Exercice 2 – Triangles et médiatrices en logique du 1^{er} ordre

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes (c.-à-d. elles passent toutes par un même point). Pour rappel, la médiatrice d'un segment $[A, B]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B .



Modélisation

On utilisera les prédicats suivants :

- $\text{med}/3$, tel que $\text{med}(M, A, B)$ signifie que le point M appartient à la médiatrice du segment $[A, B]$.
- $\text{eq}/2$, tel que $\text{eq}(X, Y)$ signifie que les nombres réels X et Y sont égaux.

Et la fonction suivante :

- $d/2$, tel que $d(A, B)$ dénote la distance entre les points A et B .

Questions

1. Écrire en logique du 1^{er} ordre une formule permettant de caractériser les points de la médiatrice d'un segment comme étant équidistants des extrémités de ce segment.
2. Écrire en logique du 1^{er} ordre une formule permettant de décrire les propriétés du prédicat $\text{eq}/2$ (réflexivité, transitivité, symétrie).
3. Écrire les précédentes formules sous forme normale conjonctive.
4. Démontrer que pour tout triangle ABC , si le point M appartient à la fois à la médiatrice de $[AB]$ et à celle de $[BC]$, alors il appartient à celle de $[CA]$. On utilisera pour cela le principe de résolution.

Exercice 3 – Groupe de rock et logique propositionnelle

Alexis, Bruno et Charlie forment un groupe de rock dans leur garage. Ce sont des musiciens complets capables de jouer de tous les instruments.

- **(C1)** Chacun joue d'un seul instrument à la fois (mais tout le monde joue d'un instrument).
- **(C2)** Ils disposent de deux guitares, d'un piano et d'une batterie.

Ils décident d'exécuter ensemble un morceau avec les contraintes suivantes :

- **(C3)** Si Alexis est au piano alors Bruno est à la guitare.

- **(C4)** Si Alexis est à la guitare alors Charlie est au piano.
- **(C5)** Si Bruno est à la guitare alors Charlie est aussi à la guitare.
- **(C6)** Si Alexis est la batterie alors Charlie est au piano.
- **(C7)** Si Charlie est au piano alors Bruno est à la guitare.

Question 1 (modélisation)

On souhaite modéliser ce problème en logique propositionnelle. Pour cela :

1. Montrer comment modéliser ce problème avec seulement 9 variables. N'utiliser que 2 lettres pour chacune des variables.
2. Modéliser chacune des contraintes en logique propositionnelle.
3. Mettre les formules sous forme de clauses.

Question 2 (résolution)

1. Montrer que Bruno est à la guitare.
2. Montrer que Charlie ne peut pas être à la batterie.

On utilisera pour cela le principe de résolution appliqué aux clauses issues de la modélisation de la question précédente.