

Médian AI27 : modélisation de problèmes en logique – Printemps 2022

Préliminaires

- **Durée** : 1h30.
- **Seul document autorisé** : une feuille A4 recto verso **manuscrite** (aménagements possibles pour certains 1/3 temps qui en ont préalablement fait la demande).
- **Barème indicatif**, susceptible de changement sans préavis : 4.5 + 4 + 4 + 7 (+ 0,5 point pour la clarté et la présentation de la copie).
- L'élégance des solutions fournies fait partie intégrante des critères d'évaluation.
- Toute ambiguïté, erreur ou omission dans le sujet devra être résolue par le candidat et par lui seul.

Exercice 1 : Logique proportionnelle et tables de vérité

Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble chaque jour ouvrable. Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi.
2. Chaque jour, soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert.
3. Albert ou Charles, ou les deux, commandent chaque jour un dessert.
4. Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

Questions

1. Exprimer les données du problème comme des formules propositionnelles. Expliciter le vocabulaire.
2. Donner la table de vérité associée à cette modélisation.
3. En utilisant la table de vérité, que peut-on en déduire sur qui commande un dessert ? Justifier.
4. Pouvait-on arriver à la même conclusion en supprimant l'une des quatre affirmations ? Justifier.

Exercice 2 : Logique propositionnelle et dimacs

On considère le fichier dimacs suivant.

```
1 p cnf 4 3
2 1 3 -4 0
3 4 0
4 2 -3
```

Et la réponse à l'appel d'un solveur SAT sur ce fichier.

```
s SATISFIABLE v -1 2 3 4 0
```

Question

1. Qu'est-ce que le format DIMACS ? À quoi sert-il ?
2. Que signifie la première ligne du fichier DIMACS ?
3. Le fichier est-il valide ? S'il ne l'est pas, le corriger.
4. Donner la formule propositionnelle correspondant à ce fichier.
5. Montrer que le solveur ne s'est pas trompé.
6. Qu'ajouter au fichier DIMACS afin d'obtenir un autre modèle ?

Exercice 3 : Logique du premier ordre et langage

Soit la formule :

$$(\forall x \exists y R(f(x), f(y))) \wedge ((\forall z (R(x, z)) \rightarrow S(x)))$$

1. Donner l'ensemble des termes.
2. Quel est l'ensemble des variables libres ?
3. Quel est l'ensemble des variables liées ?
4. Supprimer les variables libres. Justifier votre méthode.
5. Mettre la formule ainsi obtenue sous forme prénexe.
6. Appliquer la substitution $x := g(x, y)$ à la formule ainsi modifiée.

Exercice 4 : Logique du premier ordre et modélisation

On considère l'énoncé suivant.

1. Marcus était une personne.
2. Marcus était un Pompéien.
3. Tous les Pompéiens étaient des Romains.
4. César était souverain.

5. Tous les Romains étaient fidèles à César ou le haïssaient.
6. Chacun est fidèle à quelqu'un.
7. Les Romains n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles.
8. Marcus a essayé d'assassiner César.

Questions

1. Modéliser les différentes phrases en logique du premier ordre. Commencer en explicitant le vocabulaire utilisé.
2. Mettre ces formules sous forme de clauses.
3. Déduire, en utilisant les principes de résolution et de réfutation, que Marcus haïssait César.