Universidade Federal de São Carlos

Departamento de Economia

Econometria Financeira: Análise de Séries Temporais Financeiras usando o R - Homework 2 - Lista ARMA: Teórica

Profa. Dra. Andreza A. Palma

Leonardo Rossi Dourado, 800208, Engenharia de Computação

São Carlos, 23 de junho de 2025

1) *Suponha que a série diária de log-retorno de um ativo siga o seguinte modelo:*

$$y_t = 0.01 + 0.2\, y_{t-2} + \epsilon_t \ ,$$

onde ϵ_t *é um ruído gaussiano com média zero e variância 0.02.*

a) *Determine a média e a variâncias da série de retornos* y_t.

b) *Calcule as autocorrelações de ordem 1 e 2 de* y_t.

c) *Assuma que o valor de y em t = 100,* y_{100} *seja -0.01 e o valor de y em t = 99,* y_{99}*, seja 0.02. Calcule a previsão um passo à frente da série de retornos a partir da origem t = 100. Calcule também a previsão dois passos à frente a partir de t = 100.*

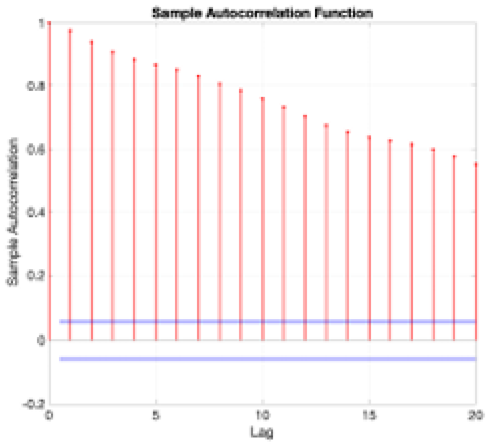
(Respostas da 1 estão no final deste documento)

2) *Descreva como as FAC e FACP são úteis para identificar um modelo ARMA. Como os critérios de informação podem ser usados na construção de um modelo?*

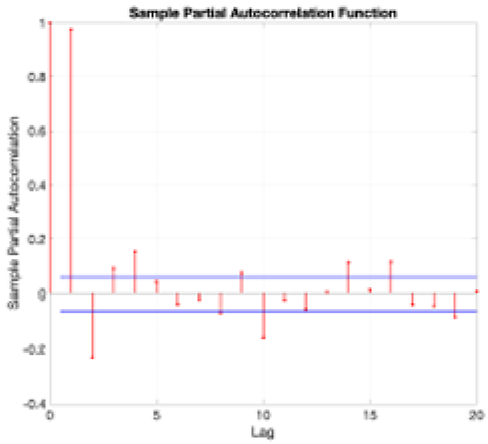
A análise das Funções de Autocorrelação (FAC) e Autocorrelação Parcial (FACP) é o primeiro passo para identificar um modelo, funcionando como uma ferramenta gráfica. Se o gráfico da FACP mostra um corte brusco enquanto a FAC decai lentamente, o modelo sugerido é um AR(p). Se a FAC decai e a FACP é que apresenta um corte repentino, o modelo indicado é um MA(q). Caso ambos os gráficos apresentem um decaimento lento, sem cortes claros, trata-se de um modelo misto ARMA(p,q).

Após estimar alguns modelos possíveis, os critérios de informação como o AIC e o BIC ajudam a escolher o "melhor" entre eles. Esses critérios avaliam o ajuste do modelo aos dados, mas aplicam uma penalidade pelo número de parâmetros que ele utiliza, favorecendo modelos mais simples. A regra de decisão é direta: entre os modelos que passaram nos testes de diagnóstico, aquele que tiver o menor valor de critério de informação é considerado o mais adequado.

3) *Seja a FAC e FACP (ACF e PACF em inglês, respectivamente) de uma série de log-retornos mostrada na página seguinte. Qual seria um modelo do tipo ARMA razoável para descrever a dinâmica dessa série? Como você poderia verificar se o modelo escolhido é adequado? NOTA: As FAC e FACP mostradas abaixo, começam no lag = zero. Então, o* *primeiro elemento é a autocorrelação de ordem zero, que deve ser desconsiderada para a análise proposta.*



(m) ACF



(n) PACF

Modelo Sugerido

Ao analisar os gráficos da Função de Autocorrelação (FAC) e da Função de Autocorrelação Parcial (FACP), observamos dois padrões distintos:

- A FAC apresenta um decaimento lento e gradual. As autocorrelações começam altas e diminuem vagarosamente a cada lag.
- A FACP, por sua vez, mostra um corte brusco (é truncada) após a primeira defasagem (lag=1). Existe um pico significativo no lag 1, e os valores subsequentes caem para dentro do intervalo de não significância

Dado que a FACP se trunca em p=1, um modelo AR(1) seria o mais razoável para descrever a dinâmica desta série.

Verificação do Modelo

Após a estimação do modelo AR(1) sugerido, a verificação de sua adequação é feita por meio da análise de diagnóstico dos resíduos. Se o modelo escolhido for adequado, seus resíduos devem se comportar como um ruído branco, o que significa que eles não possuem autocorrelação.

Existem duas maneiras principais de realizar essa verificação, conforme o documento:

1. **Análise Gráfica:** Inspecionar a FAC e a FACP dos próprios resíduos do modelo. Para um modelo adequado, não deve haver nenhuma autocorrelação estatisticamente significativa nos gráficos.
2. **Teste Estatístico:** Utilizar testes formais como o teste de Ljung-Box. A hipótese nula deste teste é que todas as autocorrelações são conjuntamente nulas. Para que o modelo seja considerado adequado, não devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, a estatística do teste não deve ser significativa.

1)a) Média ($E(y_t)$)

$y_t = 0{,}01 + 0{,}2\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

$E(y_t) = E(0{,}01 + 0{,}2\, y_{t-2} + \varepsilon_t)$

$\mu = 0{,}01 + 0{,}2\, E(y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$

Assumindo estacionariedade, $E(y_t) = E(y_{t-2}) = \mu$. Como o termo ε_t é ruído branco de média zero, então $E(\varepsilon_t) = 0$.

$\mu = 0{,}01 + 0{,}2\mu + 0 \Rightarrow 0{,}8\mu = 0{,}01 \Rightarrow \mu = \frac{0{,}01}{0{,}8} = 0{,}0125$

A ~~média da~~ média da série de retornos é 0,0125

Variância ($Var(y_t)$)

$Var(y_t) = Var(0{,}01 + 0{,}2\, y_{t-2} + \varepsilon_t)$

$Var(y_t) = Var(0{,}2\, y_{t-2}) + Var(\varepsilon_t)$

$Var(y_t) = (0{,}2)^2\, Var$

$Var(y_t) = Var(y_{t-2}) = \gamma_0$. A variância do ruído branco é $\sigma^2 = 0{,}02$

$\gamma_0 = 0{,}04\gamma_0 + 0{,}02 \Rightarrow 0{,}96\,\gamma_0 = 0{,}02 \Rightarrow \gamma_0 \approx 0{,}02083$

A variância das ~~sé~~ séries de retornos é de aproximadamente 0,02083.

1) b) Autocovariância de ordem 1 (γ_1)

$\gamma_1 = E[(0{,}01 + 0{,}2\, y_{t-2} + \varepsilon_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)]$

$\gamma_1 = 0{,}2\, \underbrace{E[(y_{t-2}-\mu)(y_{t-1}-\mu)]}_{=} + \underbrace{E[\varepsilon_t (y_{t-1}-\mu)]}_{= 0}$ pois ε_t não é correlacionado aos valores passados de y.

$\gamma_1 = Cov(y_{t-2}, y_{t-1})$

$\gamma_1 = 0{,}2\,\gamma_1 \Rightarrow 0{,}8\,\gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0$

Autocorrelação de ordem 1 (ρ_1)

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \Rightarrow \rho_1 = \frac{0}{0{,}02083} = 0$$

Autocovariância de ordem 2 (γ_2)

$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-2} - \mu)]$

$\gamma_2 = E[(0{,}01 + 0{,}2\, y_{t-2} + \varepsilon_t - \mu)(y_{t-2} - \mu)]$

$\gamma_2 = 0{,}2\, E[(y_{t-2}-\mu)(y_{t-2}-\mu)] + E[\varepsilon_t (y_{t-2}-\mu)]$

O segundo termo é zero. O primeiro termo é $0{,}2 \cdot Var(y_{t-2}) = 0{,}2\,\gamma_0$

$\gamma_2 = 0{,}2\,\gamma_0$

Autocorrelação de ordem 2 (ρ_2)

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \Rightarrow \rho_2 = \frac{0{,}2\,\gamma_0}{\gamma_0} = 0{,}2$$

As ~~autor~~ autocorrelações de ordem 1 e 2 são, respectivamente, 0 e 0,2.

1)c) Um passo à frente ($\hat{y}_{101}$)

I_{100} é as informações que temos sobre 100

~~E[y101~~ $E[y_{101} | I_{100}]$

$\hat{y}_{101} = E[0{,}01 + 0{,}2\, y_{99} + \varepsilon_{101} | I_{101}]$ * $E[\varepsilon_{101}] = 0$

$\hat{y}_{101} = 0{,}01 + (0{,}2)(0{,}02) = 0{,}01 + 0{,}004 = 0{,}014.$

Dois passos à frente ($\hat{y}_{102}$)

$\hat{y}_{102} = E[0{,}01 + 0{,}2\, y_{100} + \varepsilon_{102} | I_{100}]$ * $E[\varepsilon_{102}] = 0$

$\hat{y}_{102} = 0{,}01 + 0{,}2\, y_{100}$

$\hat{y}_{102} = 0{,}01 + 0{,}2(-0{,}01) = 0{,}008$