

Chapitre 6 - Induction Structurale

Léo SAMUEL

24 janvier 2021

Il s'agit d'une variante de la récurrence.

1 Récurrence classique sur N

N peut être défini par

```
1  type entier_nat = 0 | succ of entier_nat;;
```

↳ Théorème de récurrence :

On suppose :

- $P(0)$
- $\forall n \in N, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors $\forall n \in N, P(n)$

2 Pour les formules

Le type des formules défini à l'aide de 3 constructeurs récursif (Ou, Et, Non) et 2 constructeurs non récursifs (Constante, Variable)

Le théorème devient alors : ↳

Soit P un prédicat sur F

On suppose :

- $\forall b \in B, P(\text{Constante } b)$
- $\forall x \in \Sigma, P(\text{Variable } x)$
- $\forall f \in F, P(f) \Rightarrow P(\text{Non } f)$
- $\forall f_1, f_2 \in F, P(f_1) \wedge P(f_2) \Rightarrow P(f_1 \wedge f_2)$
- $\forall f_1, f_2 \in F, P(f_1) \wedge P(f_2) \Rightarrow P(f_1 \vee f_2)$

Alors $\forall f \in F, P(f)$

' Les deux premiers points correspondent à l'initialisation et les trois derniers à l'hérédité

Exemple 1 *Exercice 9*

Démonstration 1 *Il faut faire une récurrence forte sur la hauteur de la formule*

- Les deux premiers points prouvent que P est vrai pour les formules de hauteur 0
- Les trois points suivants prouvent que $\forall n \in N$, si P est vrai pour toute formule de hauteur inférieure à n alors P est vrai pour toute formule de hauteur $n+1$

,

- Une preuve par induction structurale peut toujours être remplacée par une récurrence classique sur la hauteur
- Le concept est le même que pour les arbres.

Exemple 2 *Exemple de rédaction : Exercice 9*

$\forall f \in \mathcal{F}$, notons $P(f) = "f \text{ est équivalente à une formule n'utilisant que des constantes, variables et des } \neg"$

Initialisation : On traite les constructeurs non recursifs

- Soit f une variable, $f \equiv f$
- Soit f une constante, $f \equiv f$

Hérédité : On traite les constructeurs rékursifs

Soit $f \in \mathcal{F}$ tq $P(f)$

Montrons $P(\neg f)$: Par $P(f)$, $f' \in \mathcal{F}$, $f \equiv f'$

$\neg f \equiv f' \overline{\wedge} f'$

- D'après $P(f)$, $\exists f', g' \in \mathcal{F}$ tq $f' \equiv f, g' \equiv g$

$f \wedge g \equiv (f' \overline{\wedge} g') \overline{\wedge} (f' \overline{\wedge} g')$ $f \vee g \equiv (f' \overline{\wedge} f') \overline{\wedge} (g' \overline{\wedge} g')$

Alors $\forall f \in \mathcal{F}$, f est équivalente à une formule n'utilisant que des constantes, des variables et des $\overline{\wedge}$