

a

a

13 janvier 2021

1 Calcul booléen

1.1 Notations

- Vrai : \top
- Faux : \perp
- Non : \neg
- Et : \wedge
- Ou : \vee

De plus, dans ce chapitre, on notera $B = \{\top, \perp\}$

Ordre de priorité dans les calculs : \neg, \wedge, \vee

1.2 Règles de calcul

Propriété 1 \wedge :

- *Commutatif*
- *Associatif*
- *Neutre* : \top

Propriété 2 \vee :

- *Commutatif*
- *Associatif*
- *Neutre* : \perp

Propriété 3 Entre \vee, \wedge et \neg

- *Distributivité* (\vee est distributif sur \wedge et inversement contrairement aux nombres)
- *Loi de De Morgan* : $\forall(a, b, c) \in B^3$
 - $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
 - $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

Démonstration 1 Montrons que $\forall(a, b, c) \in B^3, a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

On étudie toutes les possibilités pour $((a, b, c))$. Il y en a 8 car $2^3 = 8$

On les regroupe dans une table de vérité

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Les colonnes sont identiques

Les propriétés de \wedge et \vee ressemblent à celle pour \cdot et $+$ sur Z/nZ

On utilise alors souvent :

- 0
- 1
- \cdot
- $+$

Dans ce cas, les loi de DE Morgan sont :

Loi de De Morgan : $\forall(a, b, c) \in B^3$

- $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} + \overline{b}$
- $\overline{(a + b)} = \overline{a} \overline{b}$

Attention dans ce cas, $1 + 1 = 1$

' $(Z/nZ, +, \cdot)$ est un corps.

(B, \vee, \wedge) n'est même pas un anneau car 1 n'a pas d'opposé

' Notons le ou exclusif :

$11 = 0$ On peut vérifier que (B, \cdot, \wedge) est un corps , isomorphe à Z/nZ

1.3 Autres connecteurs logiques

Combien y-a-t-il de fonction de B dans B ?

Il y en a $|B|^{|B|} = 4$

Il y a $id, \neg, 0, 1$

Combien y-a-t-il de fonction de B^2 dans B ? Il y en a 16. Nous connaissons déjà \vee, \wedge ,
Pour définir un opérateur, il suffit de donnée sa table de vérité

1.3.1 L'implication

Exemple 1 "Mange ta soupe ou va dans ta chambre" by FP
donne

"Si tu ne mange pas ta soupe alors va dans ta chambre"

Interpretation en mathématiques :

Table de vérité de \Rightarrow :

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ainsi, la formule $\forall(a, b) \in B^2, a \Rightarrow b$ est vraie si et seulement si a chaque fois que a est vrai, b l'est aussi.
(Quand a est faux, b peut valoir n'importe quoi!)

Digressions :

Un théorème est une formule $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ où E est un ensemble et P, Q des prédicats sur E . (fonctions de E dans B) Dans le cas où P est faux, on a aucune informations sur Q .

Pour montrer q'un théorème est faux, il faut montrer $\neg(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x))$ cad $\exists x \in E, \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$
cad $\exists x \in E, \neg Q(x) \wedge P(x)$ Ainsi, cela revient à trouver un $x \in E$ pour lequel l'hypothèse est vraie mais la conclusion est fausse. Un tel x s'appelle un contre-exemple

1.3.2 Equivalents

1.3.3 Non-et

Il est utilisé car il coute seulement 3 transistors.

On peut définir les autres opérations à partir du non-et. (cf Exercice 9)

De même on définit non-ou.

En général dans un langage, il est seulement fournit \neg, \wedge, \vee desquels on peut définir les autres.

2 Formules logiques