# a

a

24 janvier 2021

Il s'agit d'une variante de la récurrence.

## 1 Récurrence classique sur les entiers

$\mathbb{N}$ peut etre définis par

```
type entier_nat = 0 | succ of entier_nat;;
```

**Théorème 1** *Théorème de récurrence :*
*On suppose :*
- $P(0)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

*Alors* $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

## 2 Pour les formules

Le type des formules définis à l'aide de 3 constructeurs récursif (Ou,Et,Non) et 2 constructeurs non récursifs (Constante,Variable)
Le théorème devient alors :

**Théorème 2** *Soit* $P$ *un prédicat sur* $\mathbb{F}$
*On suppose :*

- $\forall b \in B, P(Constanteb)$
- $\forall x \in \Sigma, P(Variablex)$
- $\forall f \in \mathbb{F}, P(f) \Rightarrow P(Nonf)$
- $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{F}, P(f_1) \wedge P(f_2) \Rightarrow P(f_1 \wedge f_2)$
- $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{F}, P(f_1) \wedge P(f_2) \Rightarrow P(f_1 \vee f_2)$

*Alors* $\forall f \in \mathbb{F}, P(f)$

**Remarque 1** *Les deux premiers points correspondent à l'initialisation et les trois derniers à l'hérédité*

**Exemple 1** *Exercice 9*

**Démonstration 1** *Il faut faire une récurrence forte sur la hauteur de la formule*
- *Les deux premiers points prouvent que* $P$ *est vrai pour les formules de hauteur* 0
- *Les trois points suivant prouvent que* $\forall n \in \mathbb{N}$, *si* $P$ *est vrai pour toute formule de hauteur inférieur à* $n$ *alors* $P$ *est vrai pour toute formule de hauteur n+1*

**Remarque 2**
- *Une preuve par induction structurelle peut toujours être remplacée par une récurrence classique sur la hauteur*
- *Le concept est le même que pour les arbres.*

**Exemple 2** *Exemple de rédaction : Exercice 9*
$\forall f \in \mathcal{F}$, *notons* $P(f) =$"*f est équivalente à une formule n'utilisant que des constantes, variables et des* $\overline{\wedge}$

*Initialisation : On traite les constructeurs non recursifs*
$\bullet Soitfunevariable, f \equiv f$
$\bullet Soitfuneconstante, f \equiv f$

*Hérédité : On traite les constructeurs récursifs*
*Soit* $f \in \mathcal{F}$ *tq* $P(f)$
*Montrons* $P(\neg f)$ : *Par* $P(f), f' \in \mathcal{F}, f \equiv f'$
$\neg f \equiv f' \overline{\wedge} f'$
$\bullet D'aprsP(f), \exists f', g' \in \mathcal{F} tq f' \equiv f, g' \equiv g$
$f \wedge g \equiv (f' \overline{\wedge} g') \overline{\wedge} (f' \overline{\wedge} g')$ $f \vee g \equiv (f' \overline{\wedge} f') \overline{\wedge} (g' \overline{\wedge} g')$
*Alors* $\forall f \in \mathcal{F}, f$ *est equivalente à une formule n'utilisant que des constantes, des variables et des* $\overline{\wedge}$