Chapitre 5 - Logique

Léo SAMUEL

13 janvier 2021

1 Calcul booléen

1.1 Notations

— Vrai : $\top$
— Faux : $\bot$
— Non : $\neg$
— Et : $\wedge$
— Ou : $\vee$

De plus, dans ce chapitre, on notera $B = \{\top, \bot\}$
Ordre de priorité dans les calculs : $\neg$,$\wedge$,$\vee$

1.2 Règles de calcul

Propriété 1 $\wedge$ *:*
— *Commutatif*
— *Associatif*
— *Neutre :* $\top$

Propriété 2 $\vee$ *:*
— *Commutatif*
— *Associatif*
— *Neutre :* $\bot$

Propriété 3 *Entre* $\vee$, $\wedge$ *et* $\neg$
— *Distributivité (*$\vee$ *est distributif sur* $\wedge$ *et inversement contrairement aux nombres)*
— *Loi de De Morgan :* $\forall(a, b, c) \in B^3$
  — $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
  — $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

Démonstration 1 *Montrons que* $\forall(a, b, c) \in B^3, a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
On étudie toutes les possibilités pour $((a, b, c))$*. Il y en a* 8 *car* $2^3 = 8$
On les regroupe dans une table de vérité

a	b	c	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c$	$a \wedge b$	$a \wedge c$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Les colonnes sont identiques

Les propriétés de $\wedge$ et $\vee$ ressemblent à celle pour $\cdot$ et $+$ sur Z/nZ

On utilise alors souvent :
— 0
— 1
— $\cdot$
— $+$
Dans ce cas, les loi de DE Morgan sont :

Loi de De Morgan : $\forall(a,b,c) \in B^3$
— $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} + \overline{b}$
— $\overline{(a + b)} = \overline{a}\overline{b}$
Attention dans ce cas, $1 + 1 = 1$
' $(Z/nZ, +, \cdot)$ est un corps.
$(B, \vee, \wedge)$ n'est même pas un anneau car 1 n'a pas d'opposé
' Notons le ou exclusif :
$11 = 0$ On peut vérifier que $(B, , \wedge)$ est un corps , isomorphe à Z/nZ

1.3 Autres connecteurs logiques

Combien y-a-t-il de fonction de B dans B ?
Il y en a $|B|^{|B|} = 4$
Il y a $id, \neg, 0, 1$

Combien y-a-t-il de fonction de B^2 dans B ? Il y en a 16. Nous connaisons déja $\vee, \wedge$,
Pour definir un opérateur, il suffit de donnée sa table de vérité

1.3.1 L'implication

Exemple 1 *"Mange ta soupe ou va dans ta chambre" by FP*
donne
"Si tu ne mange pas ta soupe alors va dans ta chambre"

Interpretation en mathématiques :
Table de vérité de $\Rightarrow$:

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ainsi, la formule $\forall(a,b) in B^2, a \Rightarrow b$ est vraie si et seulement si a chaque fois que a est vrai, b l'est aussi. (Quand a est faux, b peut valoir n'importe quoi !)
Digressions :
Un théorème est une formule $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ où E est un ensemble et P, Q des prédicats sur E. (fonctions de E dans B) Dans le cas où P est faux, on a aucune informations sur Q.

Pour montrer q'un théorème est faux, il faut montrer $\neg(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x))$ cad $\exists x \in E, \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$ cad $\exists x \in E, \neg Q(x) \wedge P(x)$ Ainsi, cela revient à trouver un $x \in E$ pour lequel l'hypothèse est vraie mais la conclusion est fausse. Un tel x s'appelle un contre-exemple

1.3.2 Equivalents

1.3.3 Non-et

Il est utilisé car il coute seulement 3 transistors.
On peut definir les autres opérations à partir du non-et. (cf Exercice 9)

De même on définit non-ou.

En général dans un langage, il est seulement fournit $\neg, \wedge, \vee$ desquels on peut définir les autres.

2 Formules logiques