Chapitre 6 - Induction Structurelle

Léo SAMUEL

24 janvier 2021

Il s'agit d'une variante de la récurrence.

1 Récurrence classique sur les entiers

$\mathbb{N}$ peut etre définis par

```
type entier_nat = 0 | succ of entier_nat;;
```

Théorème 1 *Théorème de récurrence :*
On suppose :

— $P(0)$
— $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

2 Pour les formules

Le type des formules définis à l'aide de 3 constructeurs récursif (Ou,Et,Non) et 2 constructeurs non récursifs (Constante,Variable)
Le théorème devient alors :

Théorème 2 *Soit* P *un prédicat sur* $\mathcal{F}$
On suppose :

— $\forall b \in B, P(\textit{Constante } b)$
— $\forall x \in \Sigma, P(\textit{Variable } x)$
— $\forall f \in \mathcal{F}, P(f) \Rightarrow P(\neg f)$
— $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}, P(f_1) \land P(f_2) \Rightarrow P(f_1 \land f_2)$
— $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}, P(f_1) \land P(f_2) \Rightarrow P(f_1 \lor f_2)$

Alors $\forall f \in \mathcal{F}, P(f)$

Remarque 1 *Les deux premiers points correspondent à l'initialisation et les trois derniers à l'hérédité*

Démonstration 1 *Il faut faire une récurrence forte sur la hauteur de la formule*

— *Les deux premiers points prouvent que* P *est vrai pour les formules de hauteur* 0
— *Les trois points suivant prouvent que* $\forall n \in \mathbb{N}$, *si* P *est vrai pour toute formule de hauteur inférieur à* n *alors* P *est vrai pour toute formule de hauteur n+1*

Remarque 2 *Structure*

— *Une preuve par induction structurelle peut toujours être remplacée par une récurrence classique sur la hauteur*
— *Le concept est le même que pour les arbres.*

Exemple 1 *Exemple de rédaction : Exercice 9*
$\forall f \in \mathcal{F}$, *notons* $P(f) =$ *"f est équivalente à une formule n'utilisant que des constantes, variables et des* $\overline{\wedge}$

Initialisation : On traite les constructeurs non recursifs

- *Soit* f *une variable,* $f \equiv f$
- *Soit* f *une constante,* $f \equiv f$

Hérédité : On traite les constructeurs récursifs

Soit $f \in \mathcal{F}$ *tq* $P(f)$

Montrons $P(\neg f)$ *: Par* $P(f), \exists f' \in \mathcal{F}, f \equiv f'$ *alors* $\neg f \equiv f' \overline{\wedge} f'$

D'après $P(f), \exists f', g' \in \mathcal{F}$ *tq* $f' \equiv f, g' \equiv g$

- $f \wedge g \equiv (f' \overline{\wedge} g') \overline{\wedge} (f' \overline{\wedge} g')$
- $f \vee g \equiv (f' \overline{\wedge} f') \overline{\wedge} (g' \overline{\wedge} g')$

Alors $\forall f \in \mathcal{F}, f$ *est equivalente à une formule n'utilisant que des constantes, des variables et des* $\overline{\wedge}$