Intégration numérique

C. Charignon

Table des matières

On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (ou continue par morceaux). Le but est de calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f$.

Toutes les méthodes que nous verrons consistent à découper l'intervalle $[a,b]$ en petits intervalles, et à approcher f par une fonction plus simple sur chacun de ces petits intervalles.

Fixons $N \in \mathbb{N}^*$, notons $h = \dfrac{b-a}{N}$ et posons pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $x_i = a + i \times h$. Ainsi, les points $x_0, x_1, \dots, x_n$ découpent $[a,b]$ en N intervalles de longueur h. On remarque que $x_0 = a$ et $x_N = b$.
Remarque : On pourrait préférer découper $[a,b]$ en intervalles de longueur inégale, ceci donnerait lieux à des méthodes dites « à pas adaptatif ».

La remarque de base est que, d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f$$

Ainsi, il nous suffit de trouver une formule pour approcher chaque $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f$.

1 Méthode des rectangles

1.1 Principe de la méthode

Pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, nous approchons f par une fonction constante sur $[x_i, x_{i+1}]$. Comme choix de la constante, on prend souvent $f(x_i)$ (méthode des rectangles « à gauche ») ou $f(x_{i+1})$ (rectangles « à droite »).

Ainsi, on utilise l'approximation (dans le cas des rectangles à gauche) : $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t \approx \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(a_i)\mathrm{d}t = hf(a_i)$.

Et la formule finale pour approcher $\int_a^b f$ est :

$$\sum_{k=0}^{N-1} hf(a_i)$$

qu'on préfère écrire $h \times \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(a_i)$ pour minimiser le nombre de multiplications.

Pour les rectangles à droite, on trouve après décalage d'indice dans la somme $h \times \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f(a_i)$.

1.2 Convergence

On suppose à présent que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la fonction $|f'|$ est continue sur un segment, donc admet un maximum. Notons M ce maximum.
Remarque : M sera noté $\|f'\|_\infty$ en deuxième année.

Alors f est M-lipschitzienne, c'est-à-dire $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|f(y) - f(x)| \leqslant M \cdot |y - x|$.

Majorons l'erreur entre $\displaystyle\int_a^b f$ et $G_N(f)$.

Théorème 1.1.

$$\left| G_N(f) - \int_a^b f \right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{N}.$$

Ainsi, si nous voulons obtenir une précision de ϵ, il suffit que $M\dfrac{(b-a)^2}{N} \leqslant \epsilon$, donc il suffit que $N \geqslant M\dfrac{(b-a)^2}{\epsilon}$.

L'opération la plus coûteuse dans cet algorithme est sans nul doute l'appel à f (la fonction f peut être compliquée, peut-être même est-elle calculée grâce à la méthode de Newton...)

Il y a un appel à chaque tour de boucle, donc N appels au total.

Au final, pour avoir une précision de ϵ, nous allons effectuer de l'ordre de $M\dfrac{(b-a)^2}{\epsilon}$ appels à f. On peut dire que la complexité est en $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$.

1.3 Cas d'une fonction monotone

Dans le cas d'une fonction monotone, on peut calculer simplement l'erreur commise.

Et en plus, les deux valeurs approchées $G_n(f)$ et $D_n(f)$ *encadrent* $\int_a^b f$.

D'ailleurs ce phénomène est utilisé en math par exemple pour étudier la convergence d'une série. On parle de « comparaison série-intégrale ».

2 Méthode des trapèzes

2.1 Principe

2.2 Autres écritures de la formule

2.3 Convergence

On peut démontrer que, si f est $\mathcal{C}^2$, , en notant M le maximum sur $[a, b]$ de f'' (existe car f'' est continue sur un segment) :

$$\left|\int_a^b f(t)dt - T_n\right| \leq \frac{(b-a)^3}{n^2} M$$

2.4 Complexité

3 Remarque : méthode de Simpson

Exercices : Intégration

1 Taylor-Young

Exercice 1. ** Calcul approché grâce à Taylor-Young

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^4$, $x \in D_f$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $x + h \in D_f$. Que calcule la formule suivante, et avec quelle précision ?

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

2 Intégration

Exercice 2. *! Ne pas confondre précision et complexité

1. (cours) Rappeler la précision de la méthode des rectangles et des trapèzes.
2. Donner la complexité de ces méthodes en fonction de la précision ϵ voulue. On donnera une fonction dominant la complexité lorsque $\epsilon \to 0$.

Exercice 3. ** Lecture de fichier

Le fichier `vitesses.csv` contient des mesures de vitesse d'un cycliste lors de l'ascension du col d'Aubisque. Il est constitué d'un certain nombre de lignes de la forme : `instant de la mesure; vitesse à cet instant; vitesse ascensionnelle à cet instant`.

Les instants sont exprimés en secondes depuis le début des mesures, et les vitesses en $\mathrm{km\,h^{-1}}$, les vitesse ascensionnelles en $\mathrm{km\,h^{-1}}$.

1. Écrire une fonction permettant de calculer la distance totale et le dénivelé total parcourue par le cycliste.
2. Tracer le profil du col, c'est-à-dire la courbe donnant l'altitude en fonction de la distance parcourue. Le cycliste est parti de Laruns, à 619 m d'altitude.

Exercice 4. ** Vol d'un dirigeable en plomb

On considère un dirigeable D en plomb. Dans le repère $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ choisi, il présente une symétrie cylindrique autour de l'axe $(O, \vec{e}_x)$. On notera l sa longueur, selon cet axe. On suppose que l'extrémité de D est au point O, de sorte que l'autre extrémité est en $O + l\vec{e}_x$. Et pour tout $x \in [0, l]$, on notera $R(x)$ le rayon de la section de D d'abscisse x. On suppose que $R(0) = 0 = R(l)$.

Les parois de D ont une épaisseur notée e de 1 cm. On notera ρ_{pb}, ρ_{he} et ρ_a les masses volumiques du plomb, de l'hélium, et de l'air respectivement. On donne $\rho_{pb} = 1.135 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\rho_{he} = 0.169\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ et $\rho_a = 1.225\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

On négligera le poids des parties du dirigeable autres que la paroi (moteur, habitacle, etc.)

1. Donner une formule permettant de calculer le volume de D en fonction de la fonction R.
2. Donner une formule permettant de calculer sa masse.
3. En déduire la condition à laquelle D peut voler.
4. Écrire une fonction pour calculer la masse et le volume de D en fonction de R et de l, puis un prédicat pour indiquer si le dirigeable vole.

   On suppose maintenant que $R : x \mapsto l\sqrt[3]{\frac{x}{2l}(1 - \frac{x}{l})}$.

5. Démontrer qu'il existe une valeur de l pour laquelle D vole.
6. Déterminer une valeur approchée de la valeur de l à partir de laquelle D vole.
7. Que pensez-vous de la précision de la méthode des trapèzes dans cette situation ?

Exercice 5. ** Méthode des rectangles à pas variable

Pour les élèves suivant l'option informatique

1. *Méthode des rectangles classique, c'est-à-dire à pas fixé :*
   Écrire une fonction récursive `rectangle` prenant en entrée deux flottants a et b tels que $a < b$, une fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, et un flottant h strictement positif et renvoyant une valeur approchée de $\int_a^b f$ par la méthode des rectangles, en découpant l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de longueur $\leq h$.
   On utilisera le principe suivant : si $b - a \leq h$ on approche f par une fonction constante. On renverra donc $f(a) \times (b - a)$ (ou $f(b) \times (b - a)$ si l'on préfère les rectangles à droite).
   Et si $b - a > h$, on découpe l'intervalle en deux : en posant $m = \frac{a+b}{2}$, on utilise la formule $\int_a^b f = \int_a^m f + \int_m^b f$.

2. Y a-t-il des appels redondants, c'est-à-dire est-ce que la fonction `rectangle` est appelée plusieurs fois avec les mêmes arguments ?
3. *Méthode des rectangles à pas variable :*

   À présent, on suppose que f est monotone. On désire écrire une fonction prenant un flottant $\varepsilon > 0$ en argument, et calculant une valeur approchée de $\int_a^b f$ précise à $\varepsilon \times (b-a)$ près. Autrement dit, on s'autorise une erreur proportionnelle à la longueur de l'intervalle.

   On reprend le même principe que pour la méthode précédente, sauf que l'on s'arrêtera lorsque la *précision* voulue est obtenue et non lorsque le *pas* voulu est atteint.

   (a) Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f - f(a)\cdot(b-a)\right| \leq \big|f(b)-f(a)\big| \times (b-a)$. En déduire le cas d'arrêt de la fonction.

   On pourra pour simplifier traiter le cas où f est croissante.

   (b) Programmer une fonction `rectanglePasVariable` correspondante.

   (c) *(***) Question de maths :* On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $\big|f(y)-f(x)\big| \leqslant K|y-x|$.

   Expliquer brièvement pourquoi ceci permet de prouver la terminaison de votre fonction.

   (d) *Amélioration :* on remarque que certaines valeurs de f sont calculées deux fois. Pourquoi ? Proposer une amélioration pour éviter cette perte de temps. On pourra créer une fonction auxiliaire `rectanglesAux` qui prend deux arguments supplémentaires : `fa` qui contiendra $f(a)$ et `fb` qui contiendra $f(b)$. Ainsi, l'entête de cette fonction sera :

```
def rectanglesAux(f,a,b,fa,fb):
    """
    a et b sont des flottants tels que a<b et f est une fonction continue sur [a,b].
    Renvoie une valeur approchée de \int_a^b f basée sur la méthode des rectangles.
    Les arguments fa et fb doivent contenir respectivement f(a) et f(b).
    """

```

Exercice 6. * Précision de la méthode des trapèzes**

Le but de cet exercice est de calculer la précision de la méthode des trapèzes. Soit I un segment et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. On notera $a = \min(I)$, $b = \max(I)$ et $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$, le résultat de la méthode des trapèzes appliquée avec un pas h à la fonction f sur I sera noté $\mathcal{T}_h$.

1. Démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$ et tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x)\right| \leqslant Kh^3.$$

2. Montrer qu'il existe une constante $L \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $x+h \in I$,

$$\left|F(x+h) - F(x)\frac{h}{2}\big(f(x) + f(x+h)\big)\right| \leqslant Lh^3.$$

3. En déduire qu'il existe une constante Z telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\left|\mathcal{T}_h - \int_a^b f\right| \leqslant Zh^2.$$

Quelques indications

1 Utiliser la formule de Taylor-Young forte à l'ordre 3.

6
1. C'est la formule de Taylor-Lagrange. Par ailleurs, utiliser le fait que f'' est continue sur un segment.
2. Utiliser un DL2 de F en x, ainsi qu'un DL de F en $x+h$. Ensuite, il faudra encore utiliser un DL1 de f'.
3. Il ne reste plus qu'à utiliser Chasles et faire une grosse addition, tout comme dans le calcul de la précision de la méthode des rectangles.