Chapitre 4

Espaces vectoriels

Compétences attendues.

- ✓ Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est libre.
- ✓ Montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.
- ✓ Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel F de E.
- ✓ Déterminer le rang d'une matrice, d'une famille de vecteurs.
- ✓ Montrer que deux sous-espaces vectoriels $F, G \subset E$ sont en somme directe.
- ✓ Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.
- ✓ Montrer que p sous-espaces vectoriels sont en somme direct.

Mathieu Mansuy - Professeur de Mathématiques en ECS2 au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
`mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1.1 Espaces vectoriels

Définition.

Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* est un ensemble E muni de deux lois :

- une loi $+$ d'addition de deux éléments de E,
- une loi $\cdot$ de multiplication d'un élément de $\mathbb{K}$ et d'un élément de E,

qui vérifie un certain nombre de propriétés de calcul.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Remarque. Il faut retenir qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est une structure qui permet :

- **d'additionner deux vecteurs.**

  Si u et v sont deux vecteurs, alors $u + v$ est un vecteur.

- **de multiplier un vecteur par un scalaire**

  Si α est un scalaire et u est un vecteur, alors $\alpha \cdot u$ est un vecteur.

- et donc plus généralement **d'effectuer des combinaisons linéaires**.

  Si $u_1, \dots, u_p$ sont p vecteurs et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ p scalaires, alors

  $$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p$$

  est un vecteur, appelé *combinaison linéaire des vecteurs* $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Dans toute la suite de ce chapitre, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Espaces vectoriels usuels

Il a été prouvé en première année que les ensembles suivants, munis de leurs lois usuelles sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, et plus généralement $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

➤ *Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on ne reviendra jamais à la définition. On montrera qu'il est un sous-espace vectoriel de l'un des espaces vectoriels usuels précédents.*

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un *sous-espace vectoriel* de E si

(1) $F \neq \emptyset$;

(2) $\forall (u,v) \in F^2$, $u + v \in F$;

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in F$, $\lambda \cdot u \in F$.

Propriété 1 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(1) $0_E \in F$;

(2) $\forall (u,v) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Exemples.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E (appelés *sous-espaces vectoriels triviaux* de E).
- L'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble des polynômes de degré $\leq n$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Les ensembles $\mathcal{C}(I, R)$, $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \ldots$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

➤ *Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E, on montrera les deux points de la caractérisation précédente. Pour le point (2), on rédigera ainsi :*

Soient $(u,v) \in F^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, montrons que $\lambda u + \mu v$ appartient à F. On a :

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \qquad \ldots \qquad \text{(\textit{à compléter})}$$

On vérifie ensuite que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ appartient bien à F en vérifiant toutes les conditions définissant F.
On conclut alors que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice. Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Montrer que l'ensemble des suites réelles bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Propriété 2

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un s.e.v. de E.

Preuve.

$\square$

1.4 Sous-espaces engendrés par une famille de vecteurs

Définition.

Soit $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$. On appelle *sous-espace vectoriel engendré par la famille* $(u_1, \ldots, u_p)$ et on note $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p \in E$.
Autrement dit,

$$\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_p,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p\}.$$

Exemple. Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. On a $\operatorname{Vect}(u) = \{\alpha \cdot u,\ \alpha \in \mathbb{K}\}$. Il s'agit donc de l'ensemble des vecteurs colinéaires à u. Autrement dit, il s'agit de la droite vectorielle (passant par 0_E) dirigée par le vecteur u.

Propriété 3

(1) $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \dots, u_p$, alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset F$.

(3) Pour tout $i \neq j$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}^*$, on a

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p);$$

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_i + \lambda u_j, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p);$$
$$\text{Vect}(u_1, \dots, \mu \cdot u_i, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p).$$

➤ *Soit F un sous-espace vectoriel défini par (ou dont la définition se ramène à) un système d'équations linéaires. Pour écrire F sous forme d'un Vect(...) :*

- *on échelonne le système, et on identifie inconnues principales et inconnues paramètres ;*
- *on substitue dans l'expression de F les inconnues principales par les inconnues paramètres. Les inconnues principales ne doivent plus apparaitre !*
- *on factorise par les inconnues paramètres pour obtenir les vecteurs qui engendrent F.*

Le nombre d'inconnues paramètres est le nombre de "degrés de liberté" pour les éléments de F, soit en d'autres termes sa dimension.

Exercice. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$. Écrire F comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Exercice. Écrire $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ comme sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2 Familles de vecteurs, bases, dimension

2.1 Familles libres

Définition.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ des éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une *famille libre* (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont *linéairement indépendants*) si :

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \;\Rightarrow\; (\forall i \in [\![1, p]\!],\; \lambda_i = 0) \right)$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *liée* (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont *linéairement dépendants*), ce qui s'écrit :

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0),\; \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E.$$

Remarques.

- Une famille d'un seul vecteur non nul est libre.
- Une famille de deux vecteurs non colinéaires (c'est-à-dire deux vecteurs non proportionnels) est libre.
- Attention, cela ne se généralise pas à trois vecteurs. Par exemple les vecteurs $(-1, 1, 0), (0, -1, 1)$ et $(1, 0, -1)$ sont deux à deux non colinéaires, et pourtant ils forment une famille liée puisque

$$(-1, 1, 0) + (0, -1, 1) + (1, 0, -1) = (0, 0, 0).$$

➤ *Pour montrer qu'une famille est libre, on se ramène à la définition. On rédigera suivant le modèle suivant :*

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ *tel que*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0. \qquad (*)$$

Montrons que $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \dots,\ \alpha_p = 0$.
Pour cela, on écrit un système d'équations linéaires associé à $(*)$. *On conclut que* $(u_1, \dots, u_p)$ *est une famille libre.*

Exercice. Montrer que la famille $((1, 1, -1), (-2, -1, 4), (3, 3, -4))$ est libre.

Exercice. Montrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ est libre.

Propriété 4

- Une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est libre.
- Une famille de matrices-colonne ou de n-uplets échelonnée est libre.

Exemples.

- $(1, X+1, X^3 - X)$ est une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts. C'est donc une famille libre.
- $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de matrices-colonne échelonnée. C'est donc une famille libre.

Propriété 5

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Preuve.

$\square$

2.2 Familles génératrices

Définition.

Une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dite génératrice de E si

$$E = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p),$$

ce qui se réécrit :

$$\forall u \in E, \quad \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. La décomposition du vecteur u n'est pas nécessairement unique : il peut y avoir plusieurs combinaisons linéaires de $(u_1, \ldots, u_p)$ égales au même vecteur.

Exercice. Montrer que la famille $((1,2),(2,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0,\ x - z = 0\}$.

Propriété 6

Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Preuve.

□

Exemple. $((1,2),(2,-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, donc il en est de même de $((1,2),(2,-1),(3,1))$.

2.3 Bases

Définition.

Une famille de vecteurs de E libre et génératrice est appelée *base* de E.

Propriété 7

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_n)$, c'est à dire :

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K},\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i.$$

Les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont appelés coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve.

□

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et préciser les coordonnées d'un vecteur $u = (x,y,z)$ dans cette base.

Exemples.

- **Base canonique de $\mathbb{K}^n$.**

  Dans $\mathbb{K}^n$, on pose :

  $$e_1 = (1,0,0,\dots,0) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_i = (0,\dots,0,\underset{i^{eme}\text{ position}}{1},0,\dots,0) \quad , \quad \dots \quad , \quad e_n = (0,0,\dots,0,1)$$

  La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- **Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**

  Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'indice (i,j) : $E_{i,j}$ est la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position (i,j).

  La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dite base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.**

  Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $(1, X, \dots, X^n)$ est une base (dite base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$).

2.4 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

- Soit $u \in E$, et $(m_1,\dots,m_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire l'unique n-uplet de scalaires tel que :

  $$u = m_1 \cdot e_1 + \cdots + m_n \cdot e_n.$$

  On appelle *matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$* la matrice colonne notée $M_{\mathcal{B}}(u)$ de ces coefficients dans la base $\mathcal{B}$:

  $$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

- Soit $\mathcal{F} = (u_1,\dots,u_p) \in E^p$, une famille de vecteurs de E.

  On appelle *matrice de la famille $(u_1,\dots,u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$* et on note $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = M_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ dont la j-ème colonne est $M_{\mathcal{B}}(u_j)$:

  $$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \cdots & m_{2,j} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \quad \text{où} \quad u_j = \sum_{k=1}^{n} m_{i,j} e_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

Exemples.

- Si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$.
- Considérons $E = \mathbb{K}^3$, $\mathcal{B}$ sa base canonique et $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (2,0,1)$ vecteurs de E.

  $$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice. Soit $\mathcal{B} = ((0,1,1),(1,0,1)(1,1,0))$ et $u = (2,0,4)$. Déterminer $M_{\mathcal{B}}(u)$.

Exercice. Écrire la matrice des polynômes $P_i(X) = (X+a)^i$ pour tout $0 \leq i \leq n$ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.

2.5 Dimension d'un espace vectoriel

Définition.

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.

Théorème 8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- il existe une base de E ;
- toutes les bases de E ont le même cardinal.

Le cardinal d'une base est appelé *dimension de* E et noté $\dim(E)$.

Exemples. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.

Théorème 9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$ pour former une base de E.

Corollaire 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On est dans l'un des cas suivants :

- $\dim(F) = 0$, et alors $F = \{0_E\}$;
- $\dim(F) = 1$, et alors F est une droite vectorielle ;
- $\dim(F) = 2$, et alors F est un plan vectoriel ;
- $\dim(F) = 3$, et dans ce cas $F = \mathbb{R}^3$.

Propriété 11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

- toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n ;
- une famille libre de cardinal n est une base de E ;
- toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n ;
- une famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

➤ *Il est souvent pénible de montrer qu'une famille est génératrice, alors que la liberté est souvent plus simple à montrer. Aussi, autant que possible, lorsqu'il s'agit de montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel E, on montrera qu'elle est libre et contient* $\dim(E)$ *vecteurs. Ceci nécessite bien entendu de connaître la dimension de E.*

Exercice. Montrer que $((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.6 Rang d'une famille de vecteurs

Définition.

Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang de* $(u_1,\ldots,u_p)$ et on note $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_p)$ la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_p)$.

Propriété 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie n. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. On a :

(1) La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$.

(2) La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$.

Définition.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle *rang de* M, et on note $\mathrm{rg}(M)$ le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ est de rang 1 : en effet, toutes ses colonnes sont proportionnelles.

Propriété 13

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(M) = rg({}^tM)$.

Remarque. Comme conséquence, le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Propriété 14

(1) Le rang d'une matrice A est invariant lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice qu'on ramène par opérations élémentaires sur les lignes à une matrice échelonnée par lignes A'.

Le rang de A est le nombre de pivots non nuls dans A' (i.e. le rang du système linéaire homogène associé à A).

Preuve.

(1) Soit A' la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$. On a :

$$\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_i + \lambda L_j, \dots, L_n) = \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_i, \dots, L_n)$$

Donc $\mathrm{rg}(A') = \dim(\mathrm{Vect}(L_1 + \lambda L_i, \dots, L_n)) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n)) = \mathrm{rg}(A)$.

On montrerait de même que le rang est invariant pour les autres opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \neq 0$).

(2) D'après la question précédente, on sait que le rang de A est égal au rang de la matrice échelonnée A'. On cherche donc le rang de A'. On a

$$A' = \begin{pmatrix} m'_{1,j_1} & * & & & & \\ 0 & & m'_{2,j_2} & * & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & m'_{r,j_r} & * \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Par opérations élémentaires sur les lignes, on peut se ramener à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & & \vdots & \\ & & 0 & \dots & & 0 & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Or on a alors :

$$Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\1\\ \\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\ *\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\\0\end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\\0\end{pmatrix}, \dots\right) = Vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\ \\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}}_{r \text{ vecteurs}}\right)$$

Cet espace est donc de dimension r. On peut donc conclure que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = r$, le nombre de pivots dans la matrice échelonnée.

$\square$

➤ *Pour calculer le rang d'une matrice A, on échelonne la matrice par opérations* ***sur les lignes****. Le rang de A est alors le nombre de pivots non nuls de la matrice échelonnée obtenue.*

Propriété 15

Si $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors le rang de $\mathcal{F}$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Exercice. Soient $u_1 = (1, -1, 1),\ u_2 = (-1, 1, -1),\ u_3 = (0, 1, 1),\ u_4 = (1, 0, 2)$. Déterminer le rang de $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, ainsi qu'une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

➤ *Pour déterminer le rang d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, et pour extraire de $\mathcal{F}$ une base de Vect$(\mathcal{F})$, on procèdera ainsi :*

- *On écrit la matrice de $\mathcal{F}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E ;*
- *On se ramène à une matrice échelonnée par **opérations élémentaires sur les lignes** :*

$$\begin{pmatrix} m'_{1,j_1} & \cdots & & & & \\ 0 & & m'_{2,j_2} & \cdots & & \\ & & 0 & & & \\ & & & & m'_{r,j_r} & \cdots \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix};$$

- *Le rang de $\mathcal{F}$ est égal à r, le nombre de pivots non nuls dans la matrice échelonnée par lignes ;*
- *La sous-famille $(u_{j_1}, \ldots, u_{j_r})$, dont les vecteurs correspondent aux colonnes des pivots (inconnues principales), est libre de cardinal $r = \mathrm{rg}(\mathcal{F})$.*

Propriété 16

Supposons que E est de dimension n, et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible.}$$

Preuve.

□

➤ *Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension n, on pourra procéder ainsi :*

- *On écrit la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ de E ;*
- *On montre que la matrice $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est de rang n (et donc inversible) à l'aide du pivot de Gauss.*

3 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels

3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle somme de F et G et on note $F+G$ l'ensemble

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}.$$

Ainsi, on a

$$z \in F + G \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

Propriété 17

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.

□

Propriété 18

Si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G).$$

Preuve.

□

Remarque. On peut montrer plus précisément que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \qquad \text{(formule de Grassmann)}$$

3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

On dit que la somme $F + G$ est *directe* si pour tout $z \in F + G$, la décomposition $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ est unique, c'est à dire :

$$\forall z \in F + G, \quad \exists!(x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

On note alors $F \oplus G$.

Propriété 19 (Caractérisation des sommes directes)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors il y a équivalence entre :

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) $F \cap G = \{0_E\}$;

(3) $\forall (x,y) \in F \times G,\ x+y=0_E \Rightarrow x=y=0_E$.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) On suppose que la somme est directe. Soit $z \in F \cap G$. Montrons que $z = 0_E$. On a :

$$z = \underbrace{z}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G}.$$

Par unicité de l'écriture dans une somme directe, on en déduit que $z = 0_E$. Ainsi on a $F \cap G \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est immédiate puisque $F \cap G$ est un s.e.v.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$, et soit $(x,y) \in F \times G$ tel que $x + y = 0_E$. Alors on a :

$$\underbrace{x}_{\in F} = \underbrace{-y}_{\in G}.$$

Ainsi $x, y \in F \cap G = \{0_E\}$, donc $x = y = 0_E$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Montrons que $F+G$ est directe. Prenons pour cela $z \in F+G$. Il existe $(x,y) \in F \times G$ tel que :

$$z = x + y \tag{$*$}$$

On veut montrer que cette décomposition est unique. Prenons donc $(x', y') \in F \times G$ tel que

$$z = x' + y' \tag{$**$}$$

et montrons que $x = x'$, $y = y'$. On a en faisant $(*) - (**)$

$$0_E = \underbrace{(x - x')}_{\in F} + \underbrace{(y - y')}_{\in G}.$$

En utilisant (3), on en déduit que $x - x' = 0_E$ et $y - y' = 0_E$, soit encore $x = x'$ et $y = y'$.

$\square$

Propriété 20 (Caractérisation en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases de F et G. Il y a équivalence entre

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) la concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F+G$;

(3) $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Preuve.

$\square$

3.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires dans* E si $E = F \oplus G$. Ainsi, on a la caractérisation :

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ \exists!(x,y) \in F \times G,\ z = x + y$$

Propriété 21 (Caractérisation des supplémentaires)

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Propriété 22 (Caractérisations en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre

(1) $E = F \oplus G$ (2) $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$ (3) $\begin{cases} F + G = E \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) Si $F + G$ est directe, alors $F \cap G = \{0_E\}$, et on a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) = \dim(E)$.

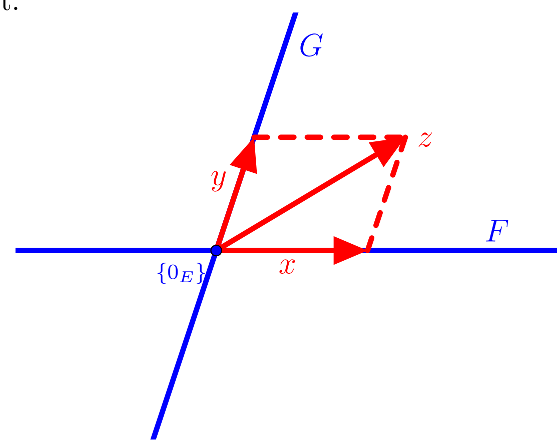
(2) $\Rightarrow$ (3) On a $F \cap G = \{0_E\}$, donc la somme $F + G$ est directe. On en déduit que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G)$. Donc $F + G = E$.

(3) $\Rightarrow$ (1) On a déjà que $F + G = E$. Reste à montrer que la somme $F + G$ est directe. Or c'est équivalent à la deuxième condition $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$. D'où le résultat.

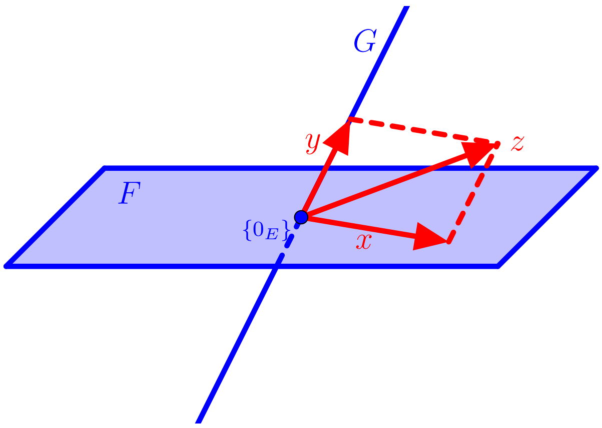
□

➤ *Pour montrer que deux espaces F et G sont supplémentaires, on privilégie la caractérisation* (2) *qui est en général plus simple à établir.*

Exemple. On représentera schématiquement des espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ comme suit.



Représentation schématique de $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.



Représentation schématique de $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels:

$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$; $G = Vect((1,1,1))$ et $H = Vect((1,0,0))$.

a) Montrer que F et G sont supplémentaires.

b) Même question avec F et H.

Remarque. Comme on le voit dans le dernier exemple, un sous-espace vectoriel a en général plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'**un** supplémentaire et non du supplémentaire.

Propriété 23

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Alors

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \text{la concaténation de } \mathcal{B}_F \text{ et } \mathcal{B}_G \text{ est une base de } E.$$

On dit alors que la base de E ainsi obtenue en concaténant $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est *adaptée à la décomposition en somme directe* $E = F \oplus G$.

Preuve. Notons $\mathcal{B}$ la famille obtenue en concaténant $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

- $\Rightarrow$ Supposons que $E = F \oplus G$. F et G sont en somme directe, donc la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F + G$. Comme de plus $E = F + G$, c'est donc une base de E.

- $\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E. Alors $F+G$ contient une famille génératrice de E, donc $E = F + G$. De plus $\mathcal{B}$ est une base de $F + G$, ce qui est équivalent à F et G en somme directe.

$\square$

Exercice. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $e_1 = (1, 1, -3)$, $e_2 = (-1, 0, 4)$ et $e_3 = (1, 4, 1)$, et posons $F = Vect(e_1, e_2)$, $G = Vect(e_3)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Propriété 24

Tout sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Preuve. Comme F est un sous-espace d'un E de dimension finie, F est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. C'est une famille libre de E, donc on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (par le théorème de la base incomplète). On a $F = Vect(e_1, \dots, e_p)$, posons $G = Vect(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On déduit de la propriété précédente qu'alors

$$F \oplus G = E.$$

□

3.4 Somme de p sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle *somme des* $F_1, \dots, F_p$ et on note $\sum_{i=1}^{p} F_i$ l'ensemble

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_p \mid x_i \in F_i\}.$$

Ainsi on a :

$$x \in \sum_{i=1}^{p} F_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad x = x_1 + \cdots + x_p.$$

Propriété 25

$\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Même preuve que dans le cas $p = 2$.

□

Propriété 26

Si les F_i sont de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

Preuve. On prouve, comme dans le cas $p = 2$, que la concaténation de bases des F_i est génératrice de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ pour conclure. □

3.5 Somme direct de p sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est *directe*, et on note $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, si :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i, \quad \exists!(x_1,\dots,x_p) \in F_1\times\cdots\times F_p, \quad x = x_1+\cdots+x_p.$$

Propriété 27

La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si on a :

$$\forall (x_1,\dots,x_p) \in F_1\times\cdots\times F_p, \quad x_1+\cdots+x_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E.$$

Preuve. La preuve est identique au cas $p = 2$.

$\square$

Théorème 28

Soit $F_1,\dots,F_p$ p sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, et $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) les sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i\in\{1,\dots,p\}}$ sont en somme directe ;

(2) la concaténation des $\mathcal{B}_i$ est une base de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$;

(3) $\displaystyle\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\dim(F_i)$.

Preuve. La preuve est similaire au cas $p = 2$.

$\square$