



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## ESPECTROGRAMAS DA FUNÇÃO DE CANTOR

Leonardo Sattler Cassará

Relatório apresentado aos professores Margarete Domingues e Luciano Magrini como parte da avaliação do curso CAP-384.

Repositório deste relatório:  
[github/CAP-384](https://github.com/LeonardoSattler/CAP-384)

INPE  
São José dos Campos  
16 de outubro de 2020

## **RESUMO**

O presente relatório estuda o uso de transformadas janeladas de Fourier sobre a função de Cantor. Seis janelas são testadas: Retangular, de Hanning, de Tukey, de Bartlett, de Papoulis e de Hamming. Dois tamanhos de janela são testados sobre três dimensões da função de Cantor. Os espectrogramas de cada caso são produzidos e os resultados discutidos à luz da Análise de Fourier. Utilizou-se Python para as atividades deste relatório. Em particular, a biblioteca `numpy` para realização da FFT e a biblioteca `matplotlib` para as visualizações. Os códigos desenvolvidos são oferecidos no repositório deste relatório, bem como as imagens produzidas.

Palavras-chave: Função de Cantor. Transformada Janelada de Fourier. Python. Espectrograma. Análise tempo-frequênciа.

## LISTA DE FIGURAS

Pág.

1.1	Conjunto de Cantor após sete iterações. FONTE: en.wikipedia.org Image:Cantor_set_in_seven_iterations.svg.	1
3.1	Funções de Cantor analisadas neste estudo e seus espectros de Fourier. Observa-se que, quanto maior o valor do <code>seed</code> , maior a quantidade de componentes freqüenciais no espectro (a energia se espalha para mais freqüências).	4
3.2	Resultado para <code>seed</code> = 5, tamanho da janela = 0.1. Sob esta configuração, o spectrograma possui maior resolução temporal. Observa-se a partir da janela retangular que existem três momentos em que uma nova gama de freqüências é adicionada ao sinal. As demais janelas não obtiveram resultados equivalentes com relação ao nível de informações presentes no spectrograma. Em particular, Papoulis e Hamming obtiveram o pior desempenho. Os três cortes verticais presentes correspondem aos degraus mais altos da função de Cantor (ver Figura 3.1).	5
3.3	Resultado para <code>seed</code> = 5, tamanho da janela = 0.99. Aqui a resolução da freqüência é maior. Observa-se uma assimetria no eixo horizontal: freqüências altas dominam a segunda metade dos spectrogramas. Apenas o spectrograma da janela retangular não apresenta essa característica, exibindo detalhes de maneira mais uniforme ao longo do tempo.	6
3.4	Resultado para <code>seed</code> = 7, tamanho da janela = 0.1. Os spectrogramas exibem maiores cortes verticais quando comparado com a Figura 3.2.	7
3.5	Resultado para <code>seed</code> = 7, tamanho da janela = 0.99. A mesma assimetria da Figura 3.3 é observada.	8
3.6	Resultado para <code>seed</code> = 10, tamanho da janela = 0.1. Novamente a janela retangular foi capaz de captar melhor os momentos em que altas freqüências são introduzidas. Os cortes verticais estão mais proeminentes.	9
3.7	Resultado para <code>seed</code> = 10, tamanho da janela = 0.99. O spectrogram apresenta mais energia que os demais e ainda mais detalhe de freqüência.	10

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	1
<b>2 METODOLOGIA</b>	2
<b>3 RESULTADOS</b>	3
<b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	4
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	6

## 1 INTRODUÇÃO

O conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$  é um subconjunto do intervalo  $[0,1]$  definido pelo matemático George Cantor no paper [Cantor et al. \(1884\)](#). Esse conjunto é obtido a partir de repetidas remoções do terço médio de um segmento. Iniciando com o intervalo fechado  $[0, 1]$ , remove-se o intervalo aberto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  para se obter  $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ , que são dois segmentos fechados disjuntos. No próximo passo, os terços médios destes dois segmentos são removidos gerando assim quatro segmentos. O conjunto de Cantor é o resultado desta operação após infinitos passos (ver Figura 1.1).



Figura 1.1 - Conjunto de Cantor após sete iterações. FONTE: [en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)  
Image:Cantor\_set\_in\_seven\_iterations.svg.

O conjunto  $\mathcal{C}$  é um conjunto compacto e não vazio. Seja  $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$  e  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , e seja  $\mathcal{C}_n$  o resultado após  $n$  passos. Portanto, o conjunto de Cantor pode ser escrito como  $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$ . Cada conjunto  $\mathcal{C}_n$  é a união de conjuntos finitos compactos e é portanto compacto. Além disso,  $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$  para todo  $n$ , portanto  $\mathcal{C}_n$  é a interseção de conjuntos compactos cada vez menores.

Outras propriedades do conjunto de Cantor são: tem tamanho infinito e não numerável, é um fractal e tem medida nula. Por sua vez, a **função de Cantor**  $G$ , também função de Lebesgue ou escadaria do diabo, é uma função com as seguintes propriedades ([DOVGOSHEY et al., 2006](#)):

- $G$  é contínua e crescente mas não absolutamente contínua.
- $G$  é uma função singular.
- $G$  mapeia o conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$  no intervalo  $[0,1]$ .

Essa função é muito interessante de ser estudada no contexto da análise de sinais. De forte variação e não estacionária, ela pode ser explorada a partir da Transformada Janelada de Fourier. O presente estudo testa diferentes funções janela e produz

espectrogramas da função de Cantor para diferentes valores de  $n$  do conjunto  $\mathcal{C}_n$ . Este manuscrito está assim dividido: na Seção 2 a metodologia empregada é apresentada; na Seção 3 os resultados são oferecidos com breve discussão; na Seção 4 estão as considerações finais do autor.

## 2 METODOLOGIA

A transformada de Fourier é um método extremamente importante na análise de sinais. Entretanto, este método possui uma limitação intrínseca: enquanto ele captura bem todos os conteúdos freqüenciais de um sinal, a transformada não é capaz de capturar o momento no tempo em que as várias freqüências se manifestam.

Dada sua limitação, o físico Húngaro Gabór Dénes propôs um método formal de localização no tempo e na freqüência a partir de uma modificação do núcleo da transformada de Fourier ([GABOR, 1946](#)). Esse núcleo é introduzido com o objetivo de localização no tempo e na freqüência das características de um sinal. A transformada de Gábor é a formulação original da transformada discreta janelada de Fourier (com uma função Gaussiana), e por isso também é chamada de WFT ou Windowed Fourier Transform (Transformada Janelada de Fourier em inglês). A WFT é definida conforme abaixo:

$$\hat{f}(\xi, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-b)e^{-\beta\xi t}dt. \quad (2.1)$$

Essa também é uma transformada linear que explora átomos de freqüência central  $\xi$  e simetria com respeito a  $b$ . Ela possui a característica de ter um espalhamento tempo-freqüência constante, conferindo a mesma resolução para cada um desses domínios (conforme o princípio da incerteza!) uma vez definida a função janela. Ela também admite inversa e é considerada uma representação completa, estável e redundante do sinal. Analogamente ao spectrum de Fourier, o espectrograma da WFT é assim definido:

$$|\hat{f}(\xi, b)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-b)e^{-\beta\xi t}dt \right|^2. \quad (2.2)$$

Seis funções janela foram utilizadas no presente trabalho: Retangular, Hanning, Tukey, Bartlett, Papoulis e Hamming. Uma vez definidas, utilizou-se o pacote `numpy` do Python para aplicar a transformada janelada sobre diferentes definições da função

de Cantor a partir do método `numpy.fft`.

A função de Cantor utilizada possui o parâmetro `seed`, que equivale ao número de elementos do conjunto de Cantor. Por exemplo, `seed = n` gera um output com  $2^{n+1}$  valores que correspondem aos pontos extremos dos intervalos de  $\mathcal{C}_n$ .

Ela foi gerada com o seguinte código:

```
1 def cantor ( n ) :
2     return [ 0. ] + cant ( 0. , 1. , n ) + [ 1. ]
3 def cant ( x , y , n ) :
4     if n == 0:
5         return [ ]
6     new_pts = [ 2. * x/3. + y/3. , x/3. + 2. * y / 3. ]
7     return cant( x , new_pts[ 0 ] , n-1) + new_pts + cant( new_pts[
8         1 ] , y , n-1)
9 seed=5
10 x = np.array ( cantor( seed ) )
11 y = np.cumsum( np.ones( len ( x ) ) / ( len (x)-2) ) - 1. / ( len (
12     x)-2)
13 y[-1] = 1
```

Os valores do array `x` acima (linhas 9) foram tratados como um sinal no presente estudo. Três valores de `seed` foram testados: cinco, sete e dez. Espectrogramas foram gerados para cada cenário. Os resultados são apresentados na próxima seção.

### 3 RESULTADOS

A Figura 3.1 exibe as funções de Cantor analisadas nessa seção e seus respectivos espectros. Os demais resultados desta seção correspondem aos espectrogramas gerados, e estão separados pelo valor do parâmetro `seed` e tamanho da janela. As Figuras exibem os resultados das seis janelas implementadas. O eixo horizontal das figuras corresponde ao intervalo  $[0,1]$  e possui o rótulo “tempo” (ou “t”) para manter analogia à análise de um sinal.

Figura 3.2: `seed = 5`, tamanho da janela = 0.1.

Figura 3.3: `seed = 5`, tamanho da janela = 0.99.

Figura 3.4: `seed = 7`, tamanho da janela = 0.

Figura 3.5: `seed = 7`, tamanho da janela = 0.

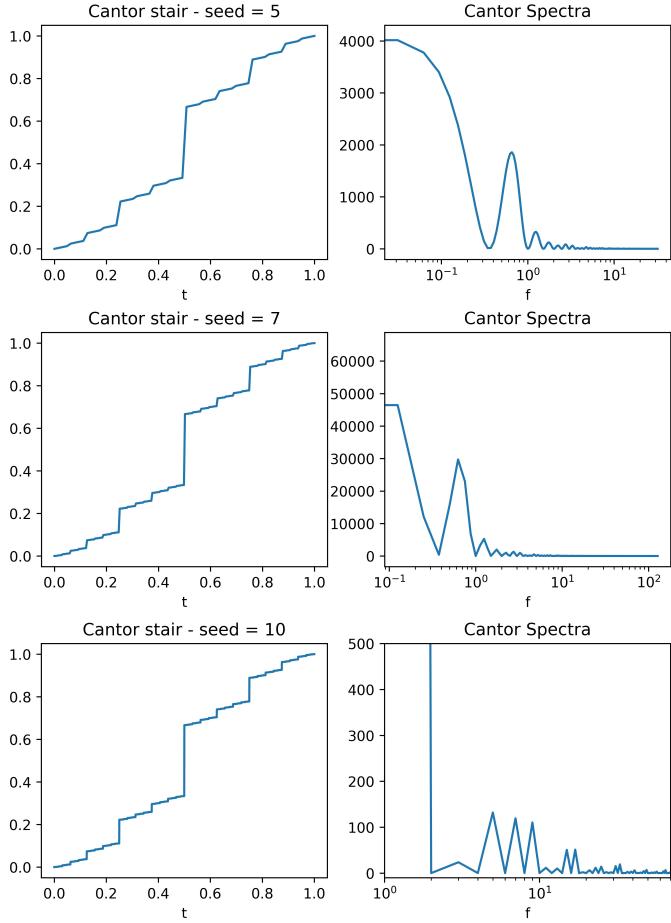


Figura 3.1 - Funções de Cantor analisadas neste estudo e seus espectros de Fourier. Observa-se que, quanto maior o valor do `seed`, maior a quantidade de componentes freqüenciais no espectro (a energia se espalha para mais freqüências).

Figura 3.6: `seed` = 10, tamanho da janela = 0.

Figura 3.7: `seed` = 10, tamanho da janela = 0.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A função de Cantor aqui explorada distribui sua energia para mais componentes freqüencias quanto maior o valor do parâmetro `seed`. A principal característica da WFT é: quanto maior (menor) a largura da janela, menor (maior) será a resolução temporal da ferramenta e maior (menor) será sua resolução freqüencial. Com isso, a WFT requer uma janela de tamanho maior quanto maior o valor de `seed` para ser capaz de captar com detalhe a contribuição de cada freqüência.

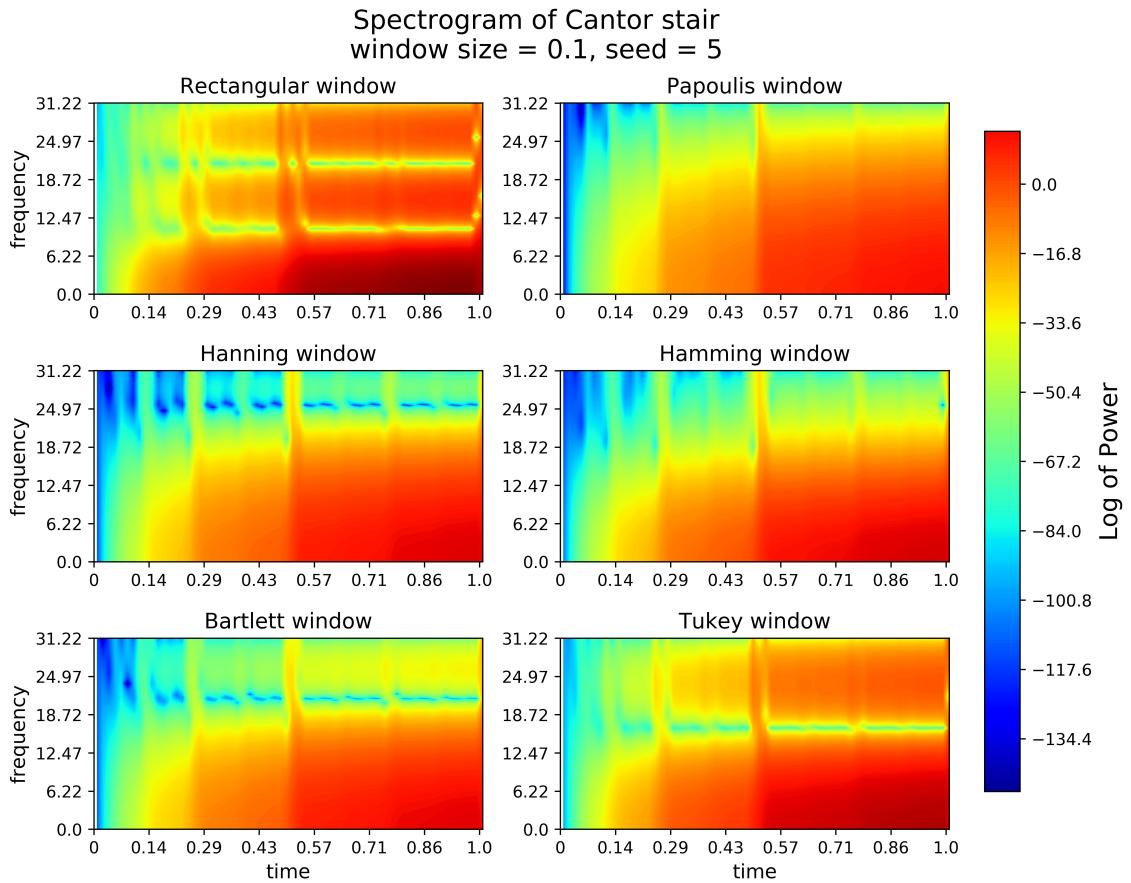


Figura 3.2 - Resultado para `seed` = 5, tamanho da janela = 0.1. Sob esta configuração, o espectrograma possui maior resolução temporal. Observa-se a partir da janela retangular que existem três momentos em que uma nova gama de frequências é adicionada ao sinal. As demais janelas não obtiveram resultados equivalentes com relação ao nível de informações presentes no espectrograma. Em particular, Papoulis e Hamming obtiveram o pior desempenho. Os três cortes verticais presentes correspondem aos degraus mais altos da função de Cantor (ver Figura 3.1).

As seis funções janela empregadas foram capazes de analisar conteúdos freqüenciais da função de Cantor localmente. Em alguns casos, algumas funções janela foram mais úteis que outras em captar as diferentes freqüências da função. Em conjunto, os resultados evidenciam a capacidade da WFT (em especial, do espectrograma) de conferir à análise de Fourier tradicional um componente extra de análise, a saber, o tempo.

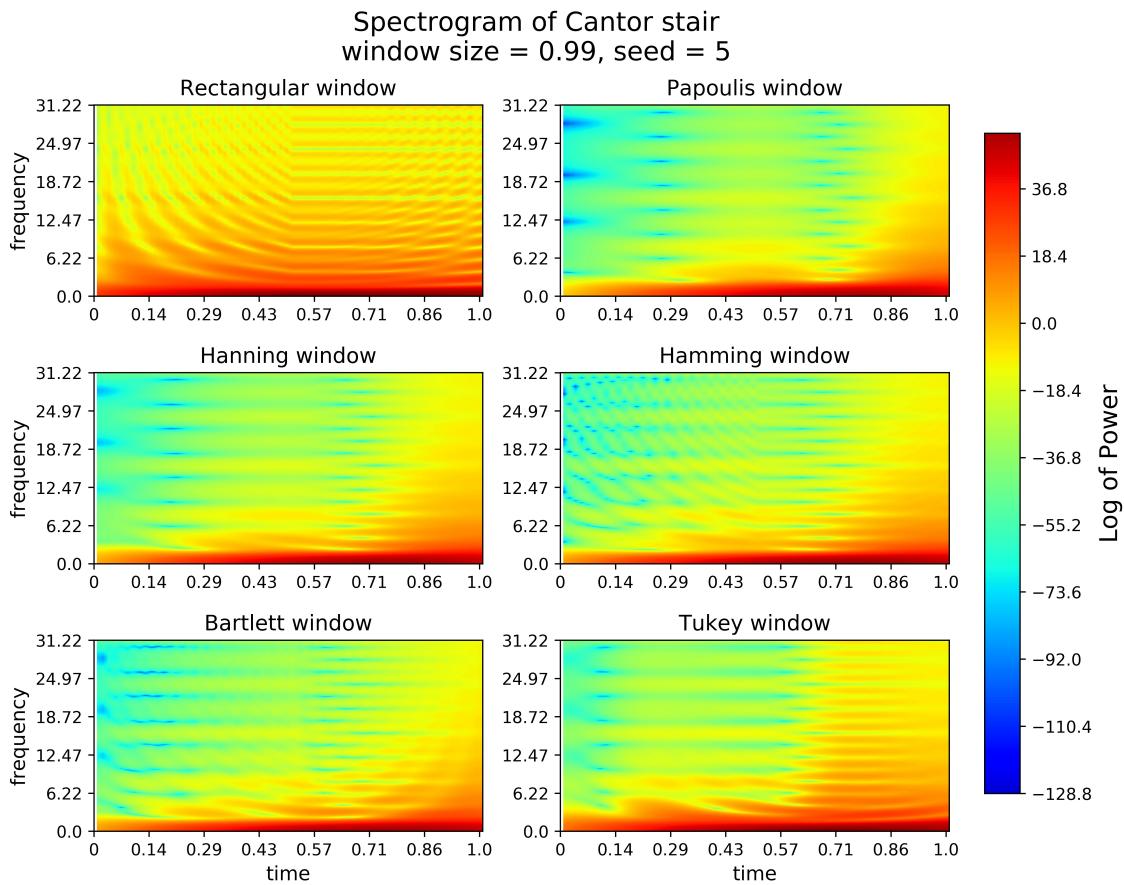


Figura 3.3 - Resultado para `seed` = 5, tamanho da janela = 0.99. Aqui a resolução da frequência é maior. Observa-se uma assimetria no eixo horizontal: frequências altas dominam a segunda metade dos espectrogramas. Apenas o espectrograma da janela retangular não apresenta essa característica, exibindo detalhes de maneira mais uniforme ao longo do tempo.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CANTOR, G. et al. De la puissance des ensembles parfaits de points: Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur. **Acta Mathematica**, Institut Mittag-Leffler, v. 4, p. 381–392, 1884. [1](#)

DOVGOSHEY, O.; MARTIO, O.; RYAZANOV, V.; VUORINEN, M. The cantor function. **Expositiones Mathematicae**, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 1–37, 2006. [1](#)

GABOR, D. Theory of communication. part 1: The analysis of information. **Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering**, IET, v. 93, n. 26, p. 429–441, 1946. [2](#)

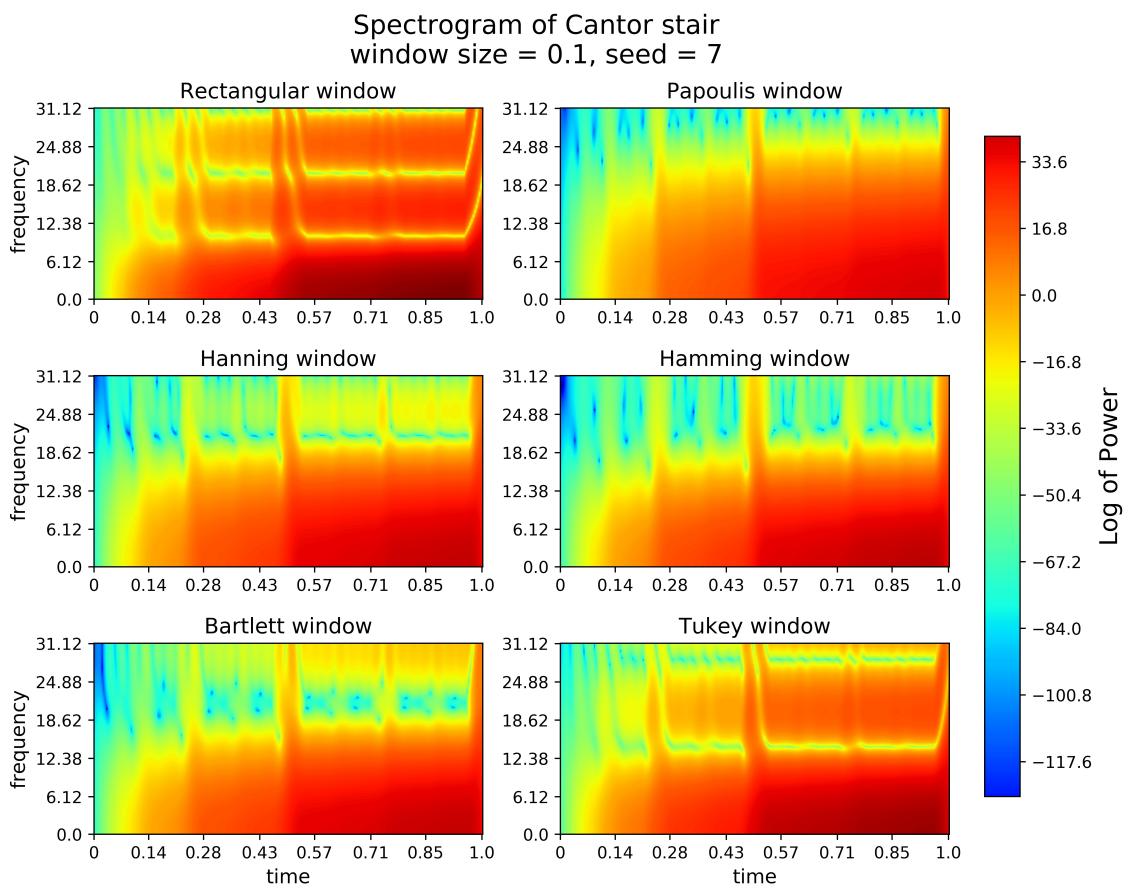


Figura 3.4 - Resultado para `seed` = 7, tamanho da janela = 0.1. Os espectrogramas exibem maiores cortes verticais quando comparado com a Figura 3.2.

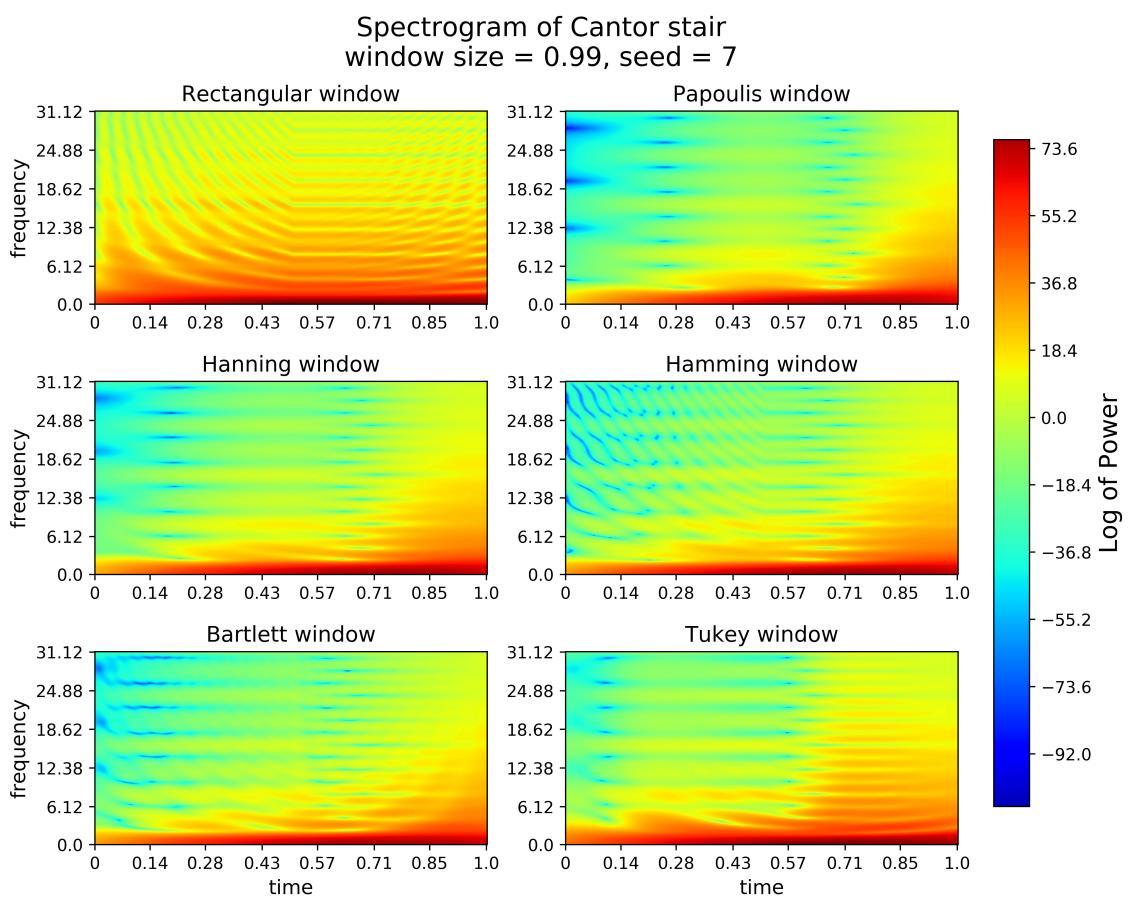


Figura 3.5 - Resultado para `seed` = 7, tamanho da janela = 0.99. A mesma assimetria da Figura 3.3 é observada.

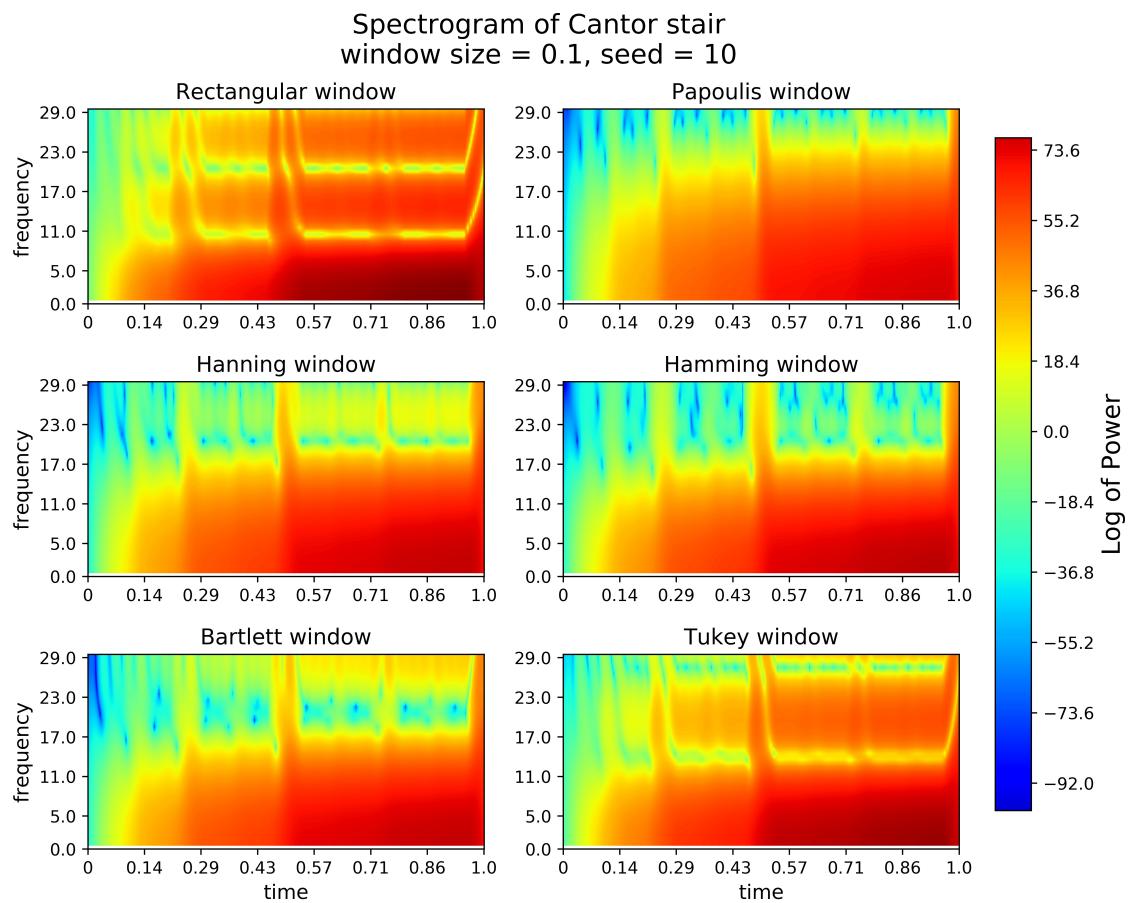


Figura 3.6 - Resultado para `seed` = 10, tamanho da janela = 0.1. Novamente a janela retangular foi capaz de captar melhor os momentos em que altas frequências são introduzidas. Os cortes verticais estão mais proeminentes.

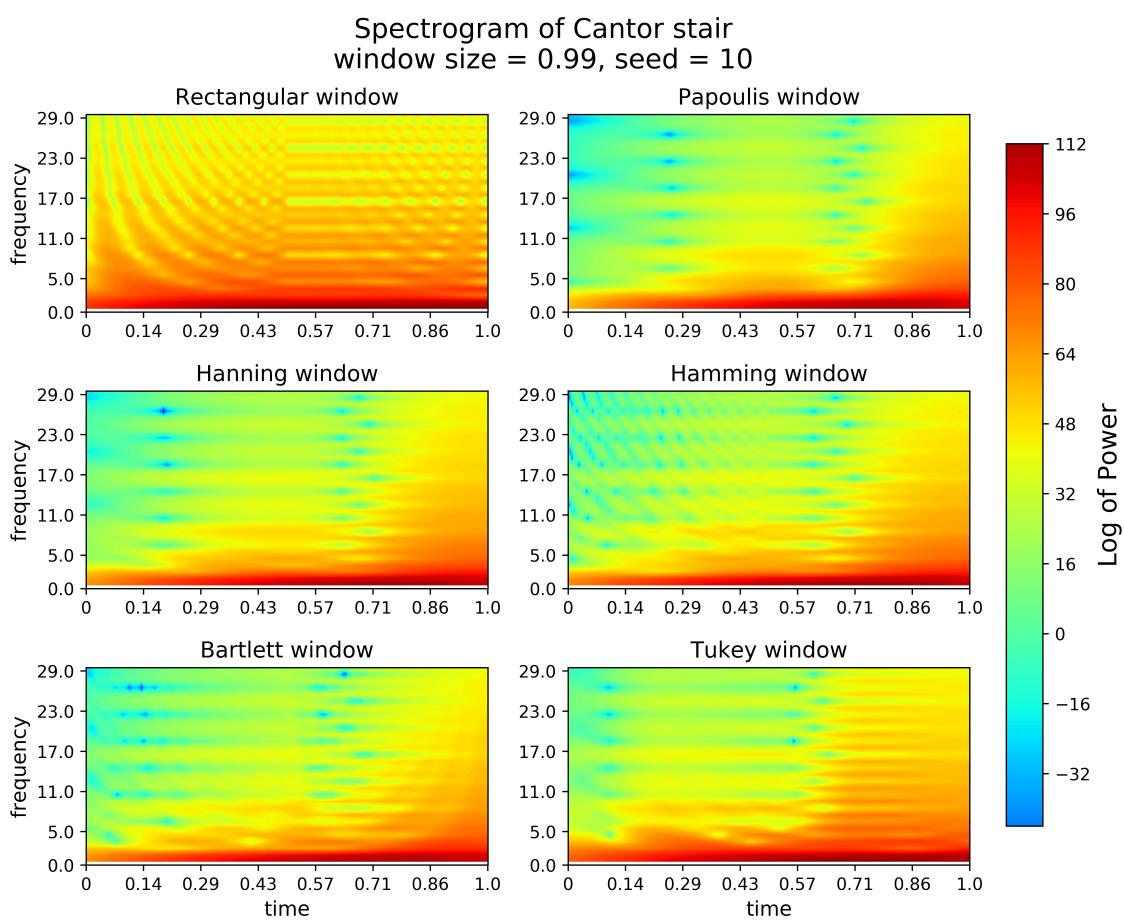


Figura 3.7 - Resultado para `seed` = 10, tamanho da janela = 0.99. O espectrogram apre-senta mais energia que os demais e ainda mais detalhe de frequênci-a.