



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

ALIASING E FREQUÊNCIA DE NYQUIST

Leonardo Sattler Cassará

Relatório apresentado aos professores Margarete Domingues e Luciano Magrini como parte da avaliação do curso CAP-384.

Repositório deste relatório:

[<github/CAP-384>](https://github.com/leonardocassar/CAP-384)

INPE

São José dos Campos

13 de outubro de 2020

RESUMO

Este relatório trata dos conceitos da aquisição de dados pertinentes à análise de sinais. Em particular, do tempo de observação e da frequência de amostragem de um sinal. Há uma ênfase nos efeitos da frequência de amostragem, ou *sampling*, que leva à introdução dos conceitos de Critério de Nyquist e Frequência de Nyquist. A operação matemática conhecida como convolução também é apresentada. Toda a análise deste relatório é realizada tendo a transformada de Fourier como principal ferramenta, e exemplos são oferecidos de modo a ilustrar os diferentes efeitos da amostragem sobre os resultados desta transformada.

Palavras-chave: Aquisição de dados. Análise de sinal. Resolução espectral. Frequência de Nyquist. Aliasing.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Funções do exemplo de convolução.	2
2.2 Convolução de duas funções.	3
2.3 Teorema da Convolução.	4
3.1 Efeitos da amostragem finita.	5
3.2 Efeitos da amostragem finita.	6
4.1 Efeitos do sampling rate, $x(t) = \cos(2\pi/10$, ou seja, $f_0 = 0.1$	8
4.2 Efeitos do sampling rate, $x(t) = \cos(2\pi/20$, ou seja, $f_0 = 0.05$	9

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 CONVOLUÇÃO	1
2.1 Convolução e a transformada de Fourier	4
3 EFEITOS DA JANELA DE OBSERVAÇÃO	5
4 ALIASING E FREQUÊNCIA DE NYQUIST	7
4.1 Aliasing	7
4.2 Frequência de Nyquist	10
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	11
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	11

1 INTRODUÇÃO

Amostragem é a redução de um sinal contínuo num sinal discreto e finito. Por sua vez, uma amostra é um valor ou conjunto de valores num determinado ponto do tempo e/ou espaço. Em outras palavras, amostrar um sinal torna-o trabalhável num computador. Como um primeiro passo para o estudo de propriedades de um sinal, seja via análise de Fourier ou qualquer outra ferramenta, este procedimento está sujeito a diversos fatores que afetam profundamente a qualidade da análise. Alguns destes fatores são o tempo total do procedimento de aquisição do sinal e a frequência da amostragem.

Estes fatores estão diretamente relacionados à robustez da observação: tempo de observação num telescópio e alta taxa de aquisição de dados (e poder de processamento para trabalhar com eles) são custosos. Portanto, quando disponíveis, devem ser explorados ao máximo. O presente manuscrito discute os diferentes efeitos da amostragem sobre a análise de Fourier, em particular sobre a Transformada de Fourier. As melhores condições de amostragem do sinal são detalhadas.

Este relatório está assim organizado: na Seção 2 a operação de convolução, relevante para o assunto deste estudo, é introduzida; na Seção 3 os efeitos da janela de observação são discutidos; na Seção 4 os conceitos de aliasing, critério e frequência de Nyquist são introduzidos; na Seção 5 são oferecidas as considerações finais do autor.

2 CONVOLUÇÃO

A convolução é uma operação algébrica sobre duas funções que produz uma terceira função como resultado. Por função subentende-se funções contínuas ou sinais discretos. Para duas funções contínuas $x(t)$ e $y(t)$, a convolução destas é $z(t) = x(t) \star y(t)$ e é assim definida (PARIS, 2001):

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau. \quad (2.1)$$

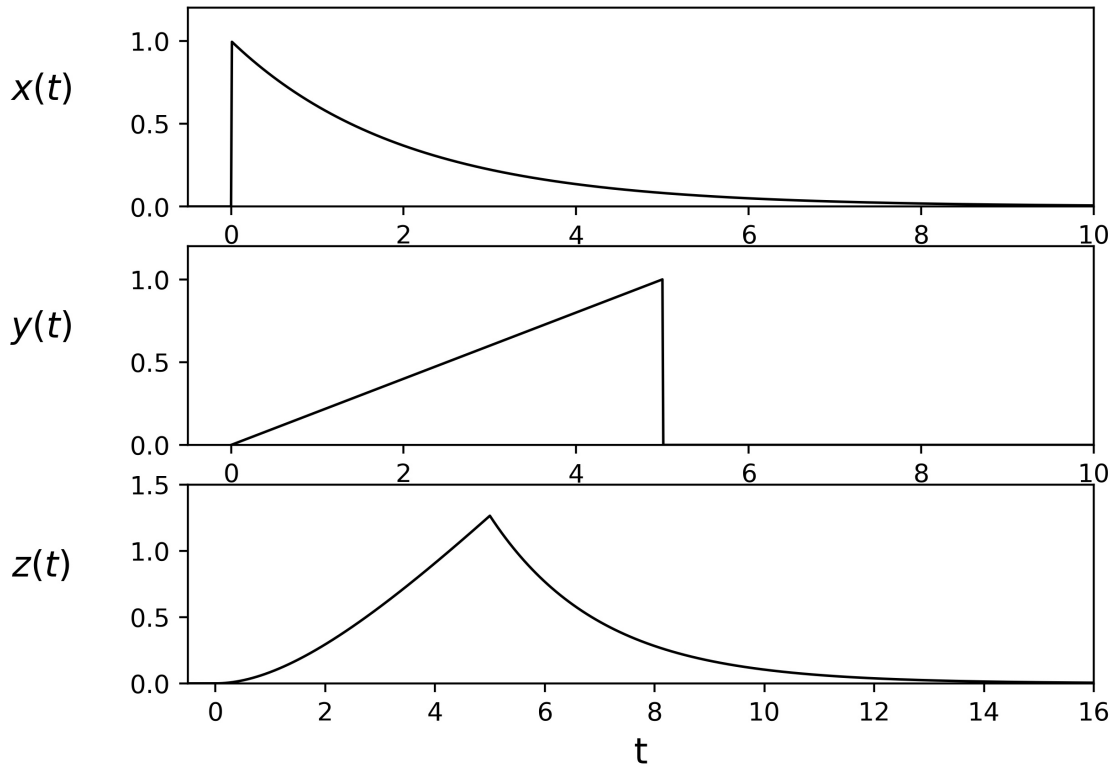
Essa integral existe para todos os valores de t , e o resultado $z(t)$ também é contínuo. A variável τ é simplesmente uma variável de integração e portanto não aparece no resultado. Essa variável aparece associada a t no argumento de $y(t - \tau)$, indicando que essa função está deslocada no tempo com relação a $x(\tau)$ por um fator t que também varia. Como ilustração, considere as funções abaixo:

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) u(t), \quad (2.2)$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t}{5} & \text{para } 0 \leq t \leq 5, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

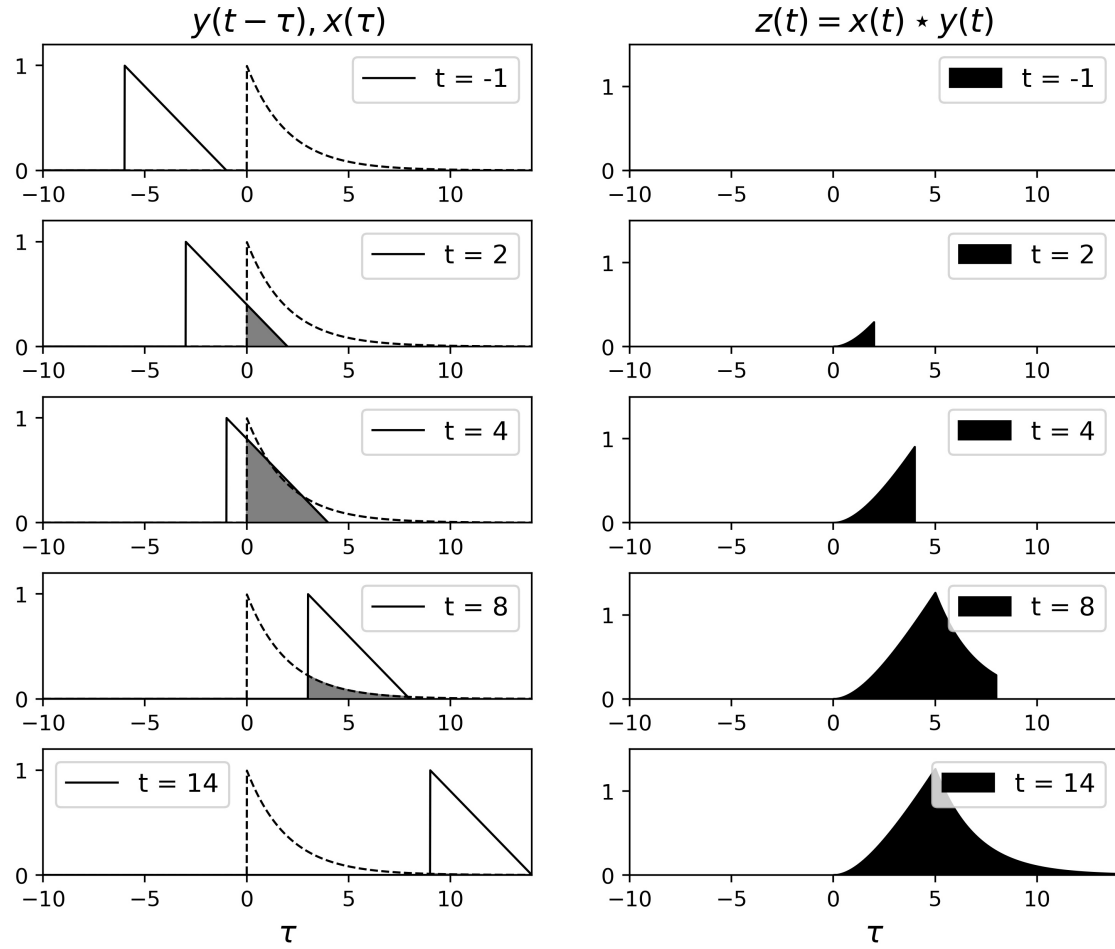
onde $u(t) = 1$ para $t \geq 0$ e $u(t) = 0$ caso contrário. As funções $x(t)$ e $y(t)$ são exibidas na Figura 2.1, bem como a convolução destas $z(t)$. A partir da Eq. 2.2, a função $z(t)$ pode ser calculada com a integral do produto de $x(\tau)$ e $y(t - \tau)$, ou seja, de $x(\tau)$ com uma função y que viaja da esquerda para a direita conforme t . A coluna da direita da Figura 2.2 ilustra o produto das respectivas funções na coluna da esquerda. A convolução é a integral do produto, isto é, a área indicada nos plots da coluna à direita. Conforme t varia, a função y translada da esquerda para a direita alterando o valor da integral. Novamente se verifica que o resultado da convolução depende de t , por isso $z(t)$.

Figura 2.1 - Funções do exemplo de convolução.



Topo: função $x(t)$; meio: função $y(t)$; abaixo: a convolução destas, $z(t)$.

Figura 2.2 - Convolução de duas funções.



Coluna esquerda: função $y(t - \tau)$ em linha cheia viaja para a direita, passando por $x(\tau)$ em linha tracejada. Coluna direita: resultado da convolução das funções $x(t)$ e $y(t)$. Diferentes valores de t são exibidos.

Para sinais discretos, a convolução é assim definida:

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n - k], \quad (2.3)$$

onde k e n denotam parâmetros livres que admitem valores inteiros, x e y representam amostras discretas de um sinal, e $x[k]$ é o valor do k -ésimo registro do sinal x .

2.1 Convolução e a transformada de Fourier

Dada a definição de Transformada de Fourier FT,

$$\text{FT}[x(t)] :: \hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jft}dt, \quad (2.4)$$

pode-se mostrar que a transformada de uma convolução é igual ao produto das transformadas individuais:

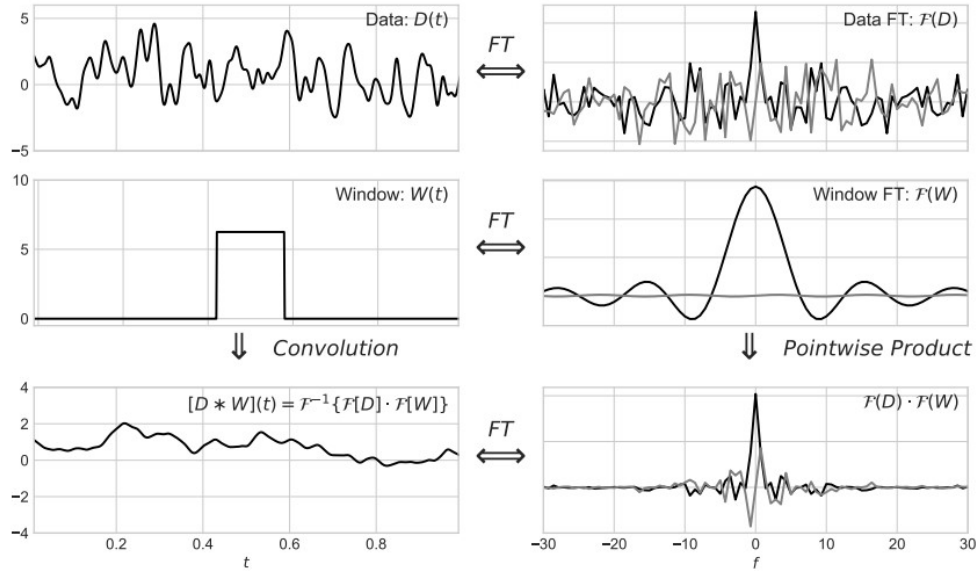
$$\text{FT}[x \star y] = \text{FT}[x] \cdot \text{FT}[y], \quad (2.5)$$

e esse resultado é conhecido como o **Teorema da Convolução**. Uma consequência importante desse resultado é:

$$\text{FT}[x \cdot y] = \text{FT}[x] \star \text{FT}[y]. \quad (2.6)$$

A Figura 2.3 ilustra esse Teorema.

Figura 2.3 - Teorema da Convolução.



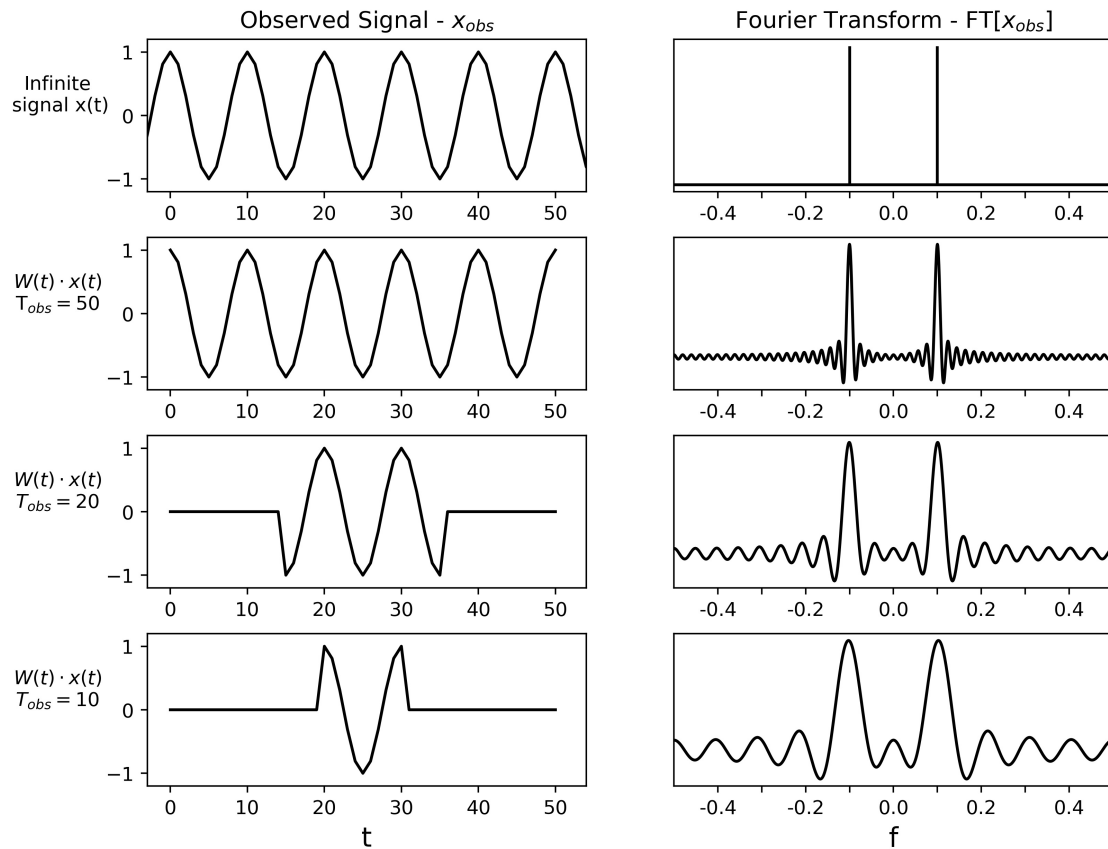
Relação entre a convolução de duas funções (coluna esquerda) e o produto ponto a ponto de suas transformadas (coluna da direita). À esquerda as funções estão no domínio do tempo, e à direita estão suas transformadas de Fourier, ou seja, suas representações no domínio da frequência.

Fonte: [VanderPlas \(2017\)](#)

3 EFEITOS DA JANELA DE OBSERVAÇÃO

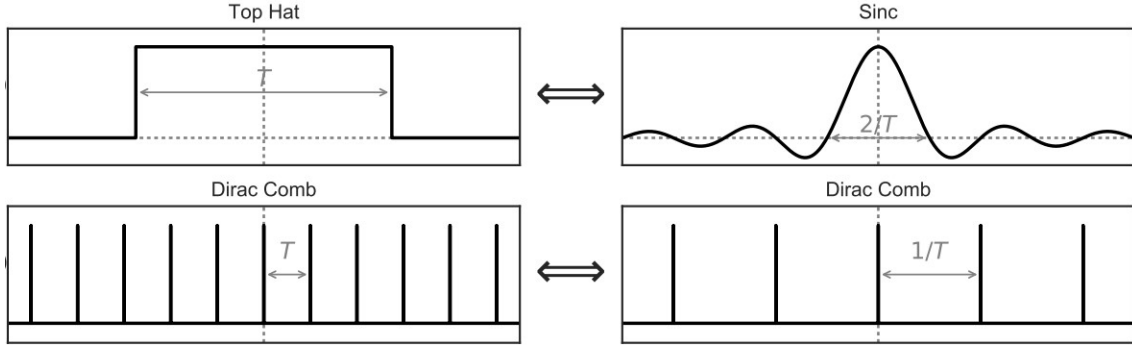
Os principais artefatos da análise espectral são o *aliasing* e o *spectral leakage*, ou vazamento espectral. Spectral leakage é o “vazamento” da energia devida a uma frequência existente no sinal para outras, por exemplo os lóbulos laterais presentes em muitos espectros. Aliasing é um tipo de leakage, que é o efeito do espectro apresentar assinaturas falsas de sinais (alias vem do inglês e significa pseudônimo), e será abordado na próxima seção. As figuras desta seção exemplificam os fenômenos de leakage e ilustram suas causas.

Figura 3.1 - Efeitos da amostragem finita.



Efeitos do tamanho da janela de observação sobre a transformada de Fourier de um sinal. No topo à esquerda o sinal está representado por uma função analítica que se estende infinitamente, cuja transformada de Fourier (topo à direita) é a função delta sobre a frequência do sinal (no caso $f_0 = 0.1$). Abaixo estão sinais com janelas de observação diferentes e suas respectivas transformadas. Quanto menor a janela de observação, maior o efeito dos lóbulos laterais sobre a função delta original, o chamado leakage espectral, e menor a resolução da transformada (maior a largura da assinatura principal).

Figura 3.2 - Efeitos da amostragem finita.



Pares de transformada relevantes para esta seção. Nos gráficos de cima, a transformada de Fourier da função retangular (top hat) gera a função Sinc. Embaixo, a transformada de Fourier de uma combinação de funções delta (espaçadas por um período T) gera outra combinação de funções delta (espaçadas por uma frequência $1/T$).

Fonte: Adaptado de [VanderPlas \(2017\)](#).

A coluna esquerda da Figura 3.1 pode ser entendida como sucessivos produtos da função do topo por janelas de observação cada vez menores, de modo que a análise não será mais feita sobre o sinal $x(t)$ (gerando a transformada do topo à direita), mas sim sobre um novo sinal:

$$x_{obs}(t) = x(t) \cdot W(t), \quad (3.1)$$

onde W é a função janela (ou do inglês, *window*) que multiplica o sinal original. Conforme o Teorema da Convolução, temos então

$$\text{FT}[x_{obs}] = \text{FT}[x(t)] \star \text{FT}[W(t)]. \quad (3.2)$$

O resultado desta convolução é a coluna da direita da Figura 3.1. Quanto menor o tamanho da janela, os efeitos observados são dois: maior a largura da função representando a transformada, e maior a magnitude das oscilações próximas a $y = 0$, os lóbulos laterais. As janelas de observação da figura são $T_{obs} = 50, 20$ e 10 . A transformada de cada uma dessas funções janela (ver par de transformada da linha de cima da Figura 3.2) confere à transformada de x_{obs} suas características, uma vez que $x(t)$ é o mesmo sinal em todas as transformadas da figura.

De fato, a largura da FT na coluna da direita da Figura 3.1 é $\delta f \sim 1/T_{obs}$. Como a janela de observação do sinal do topo é infinita, sua transformada é a função delta (de largura zero). Já os lóbulos laterais vão a zero de maneira oscilatória (e periódica). Em outras palavras, há um vazamento para outras frequências.

Pode-se resolver o problema do vazamento espectral ao definir uma função $W(t)$ que produza um corte gradual sobre o sinal de modo a eliminar o fim abrupto de informação nas fronteiras, ou seja, uma função que vá gradualmente a zero em $-T_{obs}/2$ e $T_{obs}/2$. Uma função muito usada é a função de Hanning, que reduz drasticamente os lóbulos laterais.

4 ALIASING E FREQUÊNCIA DE NYQUIST

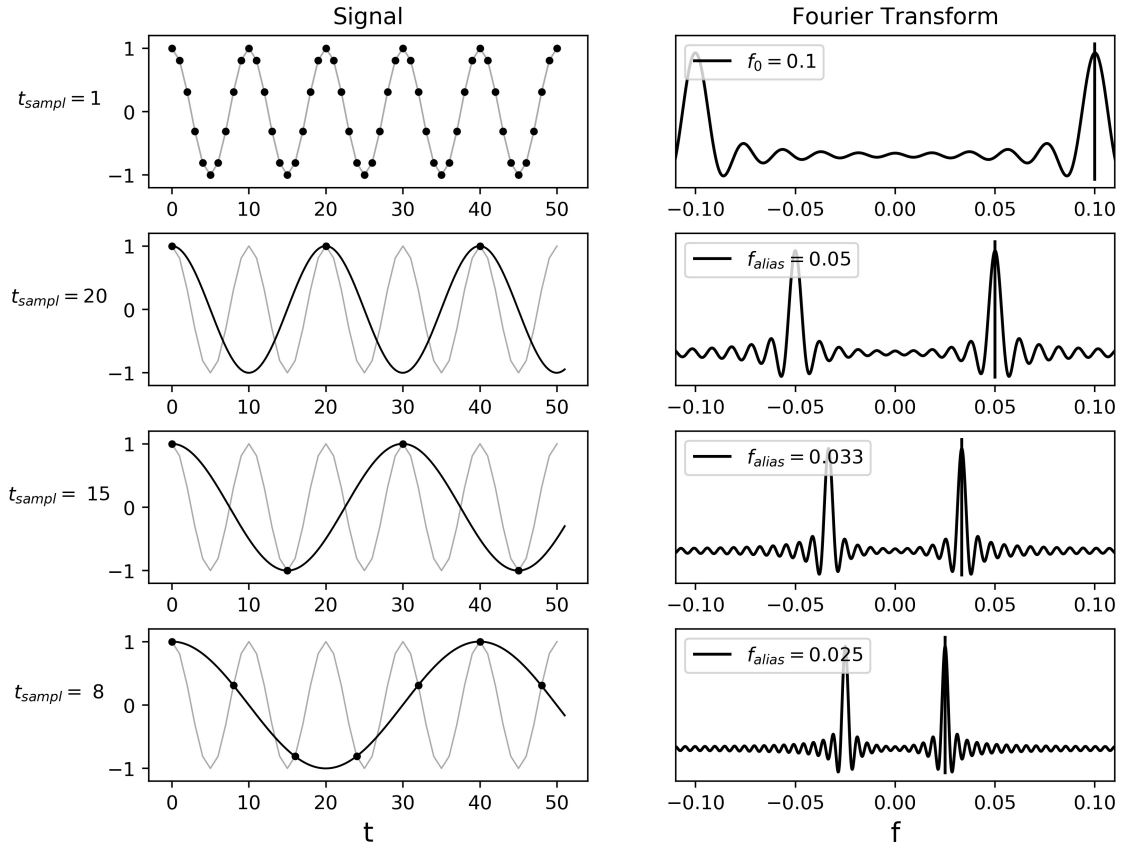
4.1 Aliasing

Um importante artefato da amostragem é ilustrado nas Figuras 4.1 e 4.2. Todo sinal recebido é amostrado, ou seja, sua informação é registrada, de maneira sequencial e uniforme no tempo, determinado assim um intervalo de amostragem $\Delta t = t_{sampl}$. Em outras palavras, o sinal é amostrado numa taxa específica chamada taxa de amostragem (ou, em inglês, *sampling frequency*) $f_{sampl} = \frac{1}{t_{sampl}}$. Os efeitos de diferentes f_{sampl} sobre o mesmo sinal estão ilustrados nas Figuras 4.1 e 4.2. Este efeito, conhecido como aliasing, é um artefato que surge durante a amostragem do sinal, e seu efeito é percebido antes mesmo da transformada: o sinal real (em linha cinza claro) pode ser facilmente confundida com o sinal amostrado (em linha preta), uma vez que somente nossas amostras (os pontos pretos) nos são oferecidas. Essa é a assinatura falsa, ou alias.

Porém, se durante uma análise o primeiro passo após receber o sinal fosse produzir sua transformada, observa-se na coluna da direita que a transformada da amostra não condiz com a transformada do sinal original (no topo à direita). A frequência de pico das transformadas não é mais igual a f_0 , de modo que sua transformada inversa resultaria num sinal totalmente diferente do real.

Mais uma vez o efeito da amostragem sobre a transformada pode ser interpretado como a multiplicação do sinal por uma função janela. Aqui a função que multiplica $x(t)$ é uma combinação (somatória) de funções delta espaçadas por t_{sampl} , de modo que a Eq. 3.1 se torna:

Figura 4.1 - Efeitos do sampling rate, $x(t) = \cos(2\pi/10)$, ou seja, $f_0 = 0.1$.



Efeitos do sampling rate para uma função (ou sinal) cosseno com $f_0 = 0.1$. No topo, o sinal com um sampling rate igual a um. Abaixo, o mesmo sinal sob diferentes sampling rates e suas respectivas transformadas. A linha em cinza claro ilustra o sinal real, e a preta o sinal falsamente identificado tanto pelo nosso cérebro quanto pela FFT, conforme indicado pelos valores de f_{sampl} à direita (todos diferentes de f_0). Fica evidente que para diferentes taxas, diferentes aliases do sinal original são gerados, de modo que a transformada inversa retornaria um sinal totalmente diferentes do original.

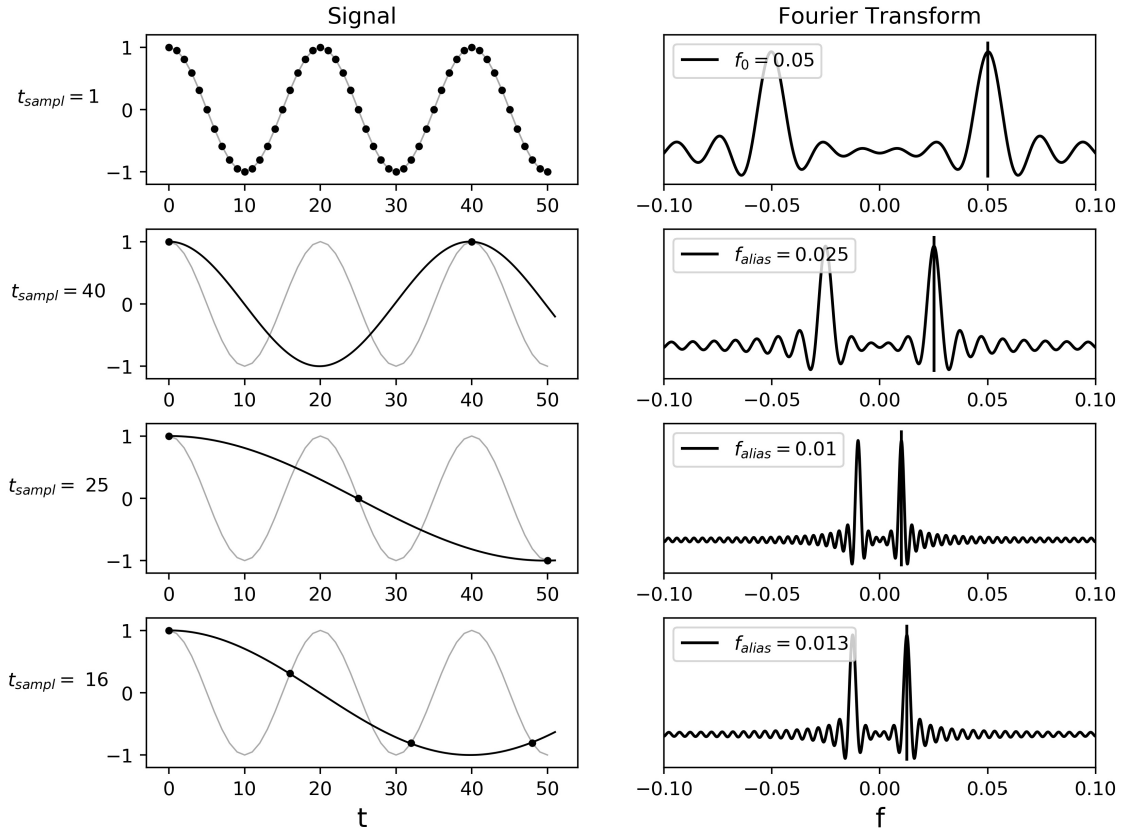
$$x_{obs}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_{sampl}). \quad (4.1)$$

Pelo teorema da convolução:

$$FT[x_{obs}(t)] = FT[x(t)] \star FT\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_{sampl})\right]. \quad (4.2)$$

A transformada da combinação de funções delta também é uma combinação de

Figura 4.2 - Efeitos do sampling rate, $x(t) = \cos(2\pi/20)$, ou seja, $f_0 = 0.05$.



Efeitos do sampling rate para uma função (ou sinal) cosseno com $f_0 = 0.05$.

funções delta, desta vez espaçadas por $f_{samp} = 1/t_{sampl}$ (ver par de transformada da linha de baixo da Figura 3.2):

$$\text{FT}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot t_{sampl})\right] = \frac{1}{t_{sampl}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n \cdot f_{sampl}), \quad (4.3)$$

e, sendo $\text{FT}[x(t)] = X(f)$, a Eq. 4.2 vira:

$$\text{FT}[x_{\text{obs}}(t)] = X(f) \star \left(\frac{1}{t_{\text{sampl}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n \cdot f_{\text{sampl}}) \right) \quad (4.4)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) \frac{1}{t_{\text{sampl}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - s - n \cdot f_{\text{sampl}}) ds \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{t_{\text{sampl}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) \delta(f - s - n \cdot f_{\text{sampl}}) ds \quad (4.6)$$

$$= \frac{1}{t_{\text{sampl}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n \cdot f_{\text{sampl}}). \quad (4.7)$$

Ou seja, o efeito da frequência de amostragem sobre a transformada de $x(t)$, $X(f)$, é gerar assinaturas falsas em frequências $f_{\text{alias}} = |f - N \cdot f_{\text{sampl}}|$, onde N é um número inteiro. Por exemplo, nas Figuras 4.1 e 4.2, as diferentes frequências falsas são iguais a $f_{\text{alias}} = f_0 - 1/t_{\text{sampl}}$. Em particular, na segunda linha da Figura 4.1, para $t_{\text{sampl}} = 20$, $f_{\text{alias}} = f_0 - 0.05 = 0.1 - 0.05 = 0.05$, conforme evidenciado pela transformada na coluna da direita. Outro exemplo: na terceira linha da Figura 4.2, tem-se $t_{\text{sampl}} = 25$, e por consequência $f_{\text{alias}} = f_0 - 0.04 = 0.05 - 0.04 = 0.01$.

Em resumo, a informação sobre $x(t)$ é afetada de modo que sua real forma é perdida, conforme a coluna da esquerda nas Figuras 4.1 e 4.2 evidencia. A coluna da direita destas Figuras mostra que as diferentes t_{sampl} deram origem a diferentes transformadas de Fourier do mesmo sinal. Outros conceitos relevantes à amostragem e maneiras de evitar aliasing serão discutidos na próxima seção.

4.2 Frequência de Nyquist

Em amostragem discreta, todo sinal possui um limite de largura de banda (*bandwidth*), ou seja, a maior frequência em seu espectro deve estar limitada por um limite superior chamado *bandwidth* B . Portanto, as frequências do sinal estendem-se de 0 a B Hz. Dito isto, é recomendado amostrar o sinal periodicamente à uma taxa alta o suficiente, especificamente $f_{\text{sampl}} = 2B$ Hz. Essa “recomendação” é conhecida como **Crítério de Nyquist**. Se o critério de Nyquist é violado, o problema de aliasing pode ocorrer. Na seção anterior, para a Figura 4.1 (sendo $B = f_0$) a frequência de sampling ideal seria $f_{\text{sampl}}^i = 2 \cdot f_0 = 2 \cdot 0.1 = 0.2$, correspondendo a um intervalo ideal $t_{\text{sampl}}^i = 5$. O mais próximo deste valor foi $t_{\text{sampl}} = 8$ ou $f_{\text{sampl}} = 0.125$ (gráficos de baixo). Já na Figura 4.2, a frequência recomendada seria $f_{\text{sampl}}^i = 2 \cdot 0.05 = 0.1$, correspondendo a $t_{\text{sampl}}^i = 10$, e o mais próximo disto foi $t_{\text{sampl}} = 16$ ou $f_{\text{sampl}} = 0.0625$ (gráficos de baixo). Em consequência de não se

amostrar pelo menos igual mas não acima do t_{sampl}^i (ou pelo menos igual mas não abaixo do f_{sampl}^i) surgem frequências $f_{alias} < f_0$.

Em outras palavras, ao amostrar sob frequência f_{sampl} , a frequência máxima que se pode recuperar é igual à metade desta:

$$f_{Ny} = \frac{f_{sampl}}{2}, \quad (4.8)$$

que é conhecida como a **frequência de Nyquist**. Por consequência, a largura de banda do sinal B deve satisfazer $B \leq f_{Ny}$, e esses resultados são conhecidos como **teorema da amostragem de Nyquist-Shannon**.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em resumo, a análise de sinais requer um arcabouço teórico robusto desde a aquisição do sinal. Os diversos efeitos da amostragem foram discutidos no presente manuscrito, tendo em vista a análise de Fourier, em particular o conceito de transformada de Fourier e a operação matemática conhecida como convolução.

Dois fatores foram vistos como cruciais durante a amostragem do sinal: (1) o tamanho da janela de observação T_{obs} afeta a transformada de Fourier de modo que a resolução espectral é $\delta f = \frac{1}{T_{obs}}$, e (2) o **teorema da amostragem** deve ser satisfeito para evitar aliasing, de modo que a largura de banda do sinal B deve ser pequena o suficiente para satisfazer $B \leq f_{Ny}$ ou $B \leq \frac{f_{samp}}{2}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PARIS, B.-P. Convolution. **Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering**, Wiley Online Library, 2001. 1

VanderPlas, J. T. Understanding the Lomb-Scargle Periodogram. **ArXiv e-prints**, mar. 2017. 4, 6