MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

LISTA WAVELET 1 – CAP-384

Leonardo Sattler Cassara

Lista de Exercícios apresentada aos professores Margarete Domingues e Luciano Magrini como parte da avaliação do curso CAP-384.

Repositório desta lista:
<github/CAP-384>

INPE
São José dos Campos
10 de novembro de 2020

SUMÁRIO

Exercício 1

Dada a transformada wavelet contínua (CWT) conforme definida abaixo,

$$\mathcal{W}_f^\psi = C\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt, \qquad a > 0,$$

tal que

$$C\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt$$

tenha energia unitária, calcularei o valor de C para as normas $\mathbb{L}^2$ e $\mathbb{L}^1$.

Resolução:

Seja a norma do espaço $\mathbb{L}^2$:

$$||\psi||_2 := \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt\right\}^{1/2},$$

onde $\psi \in \mathbb{L}^2$. Sendo assim, para qualquer a,b $\in \mathbb{Z}$, $a > 0$, temos:

$$\begin{aligned} ||\psi(b/a)||_2 &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)|^2 dt\right\}^{1/2} \\ &= a^{1/2}||\psi||_2. \end{aligned}$$

Portanto, se uma função $\psi \in \mathbb{L}^2$ tem energia unitária, então todas as funções $\psi_{a,b}$ definida por

$$\psi_{a,b}(t) := a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad a, b \in \mathbb{Z},$$

também possuem energia unitária, ou seja,

$$||\psi_{a,b}||_2 = ||\psi||_2 = 1, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Sendo assim:

$$C := a^{-1/2}. \qquad \blacksquare$$

Similarmente para a norma do espaço $\mathbb{L}^1$:

$$||\psi||_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt,$$

e, sendo assim:

$$||\psi(b/a)||_1 = a||\psi||_2.$$

Portanto:

$$C := a^{-1}. \qquad \blacksquare$$

Exercício 2

Provarei que:

$$\int\int \mathfrak{W}_f^{\psi}(a,\tau)\overline{\mathfrak{W}_g^{\psi}(a,\tau)}d\tau\frac{da}{a^2} = C_\psi \int f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Resolução:

Seja C_ψ definido a partir da seguinte condição de admissibilidade:

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega \leq \infty. \tag{1}$$

Considerando a expressão

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathfrak{W}_f^{\psi}(a,\tau)\overline{\mathfrak{W}_g^{\psi}(a,\tau)}]d\tau,$$

podemos integrá-la com respeito a da/a^2 de $-\infty$ a ∞ e, usando a definição de C_ψ acima, temos ($\hat{f}$ denota a transformada de Fourier da função):

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{W}_f^{\psi}(a,\tau)\overline{\mathfrak{W}_g^{\psi}(a,\tau)}]d\tau\right\}\frac{da}{a^2}\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(at)|^2}{|a|}da\right\}dt\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(t')|^2}{|t'|}dt'\right\}dt\\
=&C_\psi\frac{1}{2\pi}\int\hat{f}(t)\overline{\hat{g}(t)}dt\\
=&C_\psi\int f(t)\overline{g(t)}dt. && \text{(Q.E.D.)}
\end{aligned}$$

Exercício 3

Para este exercício, será utilizada a seguinte definição para o produto interno:

$$\langle f, g\rangle := \int f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Resolução:

Considere a relação abaixo,

$$\int\int \mathfrak{W}_f^{\psi}(a,\tau)\overline{\mathfrak{W}_g^{\psi}(a,\tau)}d\tau\frac{da}{a^2} = C_\psi\langle f, g\rangle.$$

Seja f uma função contínua em t. Usando uma função Gaussiana $g_\alpha(-t)$ para a função g,

$$g_\alpha(t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}},$$

e fazendo $a \to 0^+$, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{C_\phi}\lim_{\alpha\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{W}_\psi^f(a,\tau)\overline{\langle g_\alpha(-t), \psi_{(a,\tau)}\rangle}]\frac{da}{a^2}d\tau \\ &= \frac{1}{C_\phi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathfrak{W}_\psi^f(a,\tau)]\psi_{(a,\tau)}(t)\frac{da}{a^2}d\tau. \qquad \text{(Q.E.D.)} \end{aligned}$$

Exercício 4

In prep.

Exercício 5

In prep.

Exercício 6

In prep.

Exercício 7

In prep.

Exercício 8

In prep.

Exercício 9

In prep.

Exercício 10

In prep.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS