Algorithmique

Les arbres binaires

Par nature l'arbre binaire est une structure récursive :

- soit vide (ne contient aucun nœud...),
- soit constitué d'un nœud, la racine, et deux (sous-)arbres disjoints (le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit).

Terminologie

Les arbres dont les nœuds contiennent des valeurs sont **étiquetés**.

Parenté : On nomme **fils** les racines des sous-arbres (gauche ou droit) d'un noeud. Dans un arbre binaire chaque nœud possède donc au plus 2 fils (fils gauche et fils droit). Et on donc **père** le nœud "au-dessus". Deux nœuds de même père sont appelés **frères**.

Types de nœuds : Le premier nœud est la **racine**. Un nœud est une **feuille** si il n'a pas de fils, on parle alors également de **nœud externe**. Un nœud est donc dit **interne** si il possède au moins un fils. Parmi les nœuds internes on distingue : les **points doubles** qui possèdent 2 sous-arbres non vides, et les **points simples** (à gauche ou à droite) s'ils n'en possèdent qu'un.

Liens et chemins : Le lien reliant le père à son fils gauche est appelé **lien gauche** (et donc **lien droit** pour le lien reliant le père à son fils droit). Un **chemin** est une succession de liens. Tout chemin de la racine de l'arbre à une feuille est appelé **branche** de l'arbre. Le chemin obtenu en partant de la racine en ne suivant que les liens gauches est appelé **bord gauche** (et donc **bord droit** lorsqu'on ne suit que les liens droits). On remarque qu'il y a autant de branches que de feuilles !

Arbres binaires particuliers

- Les arbres **dégénérés** ne contiennent aucun point double. ils ne sont donc constitués que de points simples à gauche ou à droite et d'une seule feuille.
- Les arbres **complets** ont tous leurs niveaux remplis. Donc : les nœuds internes sont tous des points doubles et les feuilles sont toutes au même niveau.
- Les arbres **parfaits** ont tous leurs niveaux remplis sauf éventuellement le dernier niveau qui est rempli de gauche à droite :
- Les arbres **localement complets** ne sont constitués que de points doubles et de feuilles.
- Il existe des arbres localement complets particuliers dont tous les fils gauches (ou droits) sont des feuilles : on les appelle des **peignes** gauches (ou droits)

Type abtrait

SORTE

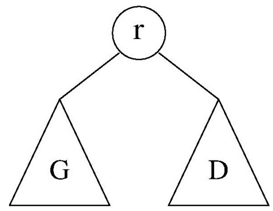
ArbreBinaire

UTILISE

Nœud, Élément

OPÉRATIONS

arbre-vide	:	→ ArbreBinaire
$<-, -, ->$	:	Nœud × ArbreBinaire × ArbreBinaire → ArbreBinaire
racine	:	ArbreBinaire → Nœud
contenu	:	Nœud → Élément
g	:	ArbreBinaire → ArbreBinaire
d	:	ArbreBinaire → ArbreBinaire



$\mathrm{B} = <\mathrm{o}, \mathrm{G}, \mathrm{D}>$

$contenu(racine(\mathrm{B})) = \mathrm{r}$

PRÉCONDITIONS

$racine(B_1)$ **est-défini-ssi** $B_1 \neq arbre\text{-}vide$

$g(B_1)$ **est-défini-ssi** $B_1 \neq arbre\text{-}vide$

$d(B_1)$ **est-défini-ssi** $B_1 \neq arbre\text{-}vide$

AXIOMES

$racine(<o, B_1, B_2>) = o$

$g(<o, B_1, B_2>) = B_1$

$d(<o, B_1, B_2>) = B_2$

AVEC

B_1, B_2 : ArbreBinaire

o : Nœud

Mesures

Taille : le nombre de nœuds de l'arbre.

- taille($arbrevide$) = 0
- taille($<r, G, D>$) = 1 + taille(G) + taille(D)

Hauteur / profondeur d'un nœud : la longueur du chemin pour l'atteindre.

- prof(n) = 0 si n est la racine
- prof(n) = 1 + prof(p), p le père de n

Hauteur d'un arbre : longueur du plus long chemin (profondeur de la feuille la plus éloignée).

- hauteur($arbrevide$) = -1
- hauteur($<r, G, D>$) = 1 + max (hauteur(G), hauteur(D))

Longueurs de cheminement : somme des profondeurs des nœuds.

- Longueur de cheminement : LC(B) = $\sum$ prof(n), n : nœuds de B.
- Longueur de cheminement **externe** : LCE(B) = $\sum$ prof(f), f : feuilles de B.
- Longueur de cheminement **interne** : LCI(B) = $\sum$ prof(n_i), n_i : nœuds internes de B.

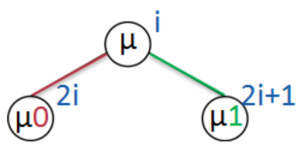
Profondeurs moyennes :

- Profondeur moyenne : PM(B) = LC (B) / taille(B)
- Profondeur moyenne **externe** : PME(B) = LCE(B) / nombre de feuilles de B.
- Profondeur moyenne **interne** : PMI(B) = LCI(B) / nombre de nœuds internes de B.

Occurrences et numérotation hiérarchique

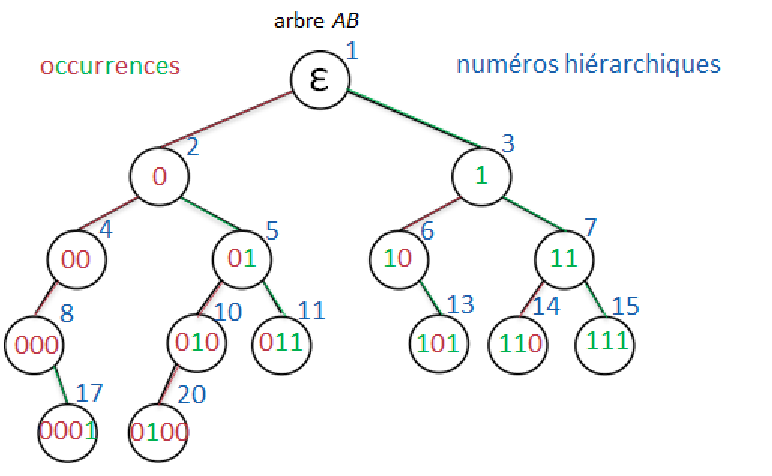
Occurrences

Une façon de décrire un nœud d'un arbre binaire est de lui associer un mot formé de 0 et de 1. Ce mot est appelé occurrence du nœud. Par définition, la racine d'un arbre est noté ε (représentant le mot vide) et si un nœud a pour occurrence le mot μ alors, son fils gauche à pour occurrence $\mu 0$ et son fils droit $\mu 1$. On peut voir l'occurrence comme une description du chemin allant de la racine à ce nœud : à chaque fois que l'on descend à gauche, on ajoute 0, 1 lorsque l'on descend à droite. Un arbre non étiqueté peut alors être représenté par la liste des occurrences de ses nœuds (généralement données par niveaux).



Numérotation hiérarchique

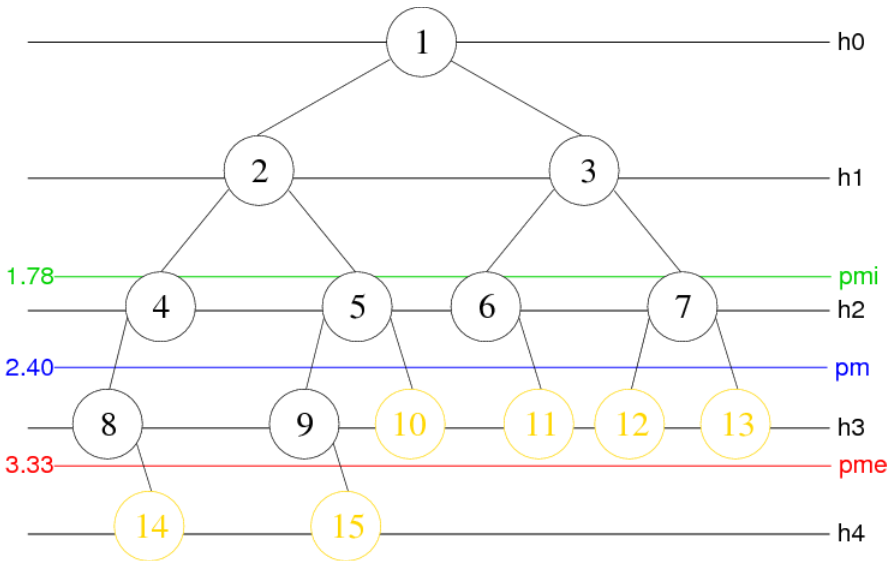
Les nœuds peuvent être numérotés de façon hiérarchique. Sur un arbre parfait, on numérote les nœuds par niveau de haut en bas et de gauche à droite. Sur un arbre quelconque si un nœud est numéroté i alors son fils gauche sera le nœud de numéro $2i$ et son fils droit le nœud de numéro $2i + 1$, la racine ayant toujours le numéro 1.



$AB = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 010, 011, 101, 110, 111, 0001, 0100\}$

Annexe

- 1 est la racine de B, 2 est son fils gauche et 3 son fils droit
- les frères sont : (2,3), (4,5), (6,7), (9,10) et (12,13)
- 1, 2, 3, 5 et 7 sont les points doubles de B
- 4 est le point simple à gauche de B
- 6, 8 et 9 sont les points simples à droite de B
- 10, 11, 12, 13 et 14 et 15 sont les feuilles de B
- (1, 2, 4, 8) et (1, 3, 7, 13) sont les bords gauches et droits de B
- (1, 2, 4, 8, 14), (1, 2, 5, 9, 15), (1, 2, 5, 10), (1, 3, 6, 11), (1, 3, 7, 12) et (1, 3, 7, 13) sont les branches de B



Arbre binaire B

- Les hauteurs/profondeurs des noeuds de l'arbre B sont :

  h=0 : le noeud 1,

  h=1 : les noeuds 2 et 3,

  h=2 : les noeuds 4, 5, 6 et 7,

  h=3 : les noeuds 8, 9, 10, 11, 12 et 13,

  h=4 : les noeuds 14 et 15.
- la hauteur de l'arbre B est H(B)=4
- la taille de l'arbre B est T(B)=15
- Les longueurs de cheminement et profondeurs moyennes de l'arbre B sont :

LC(B)=36	LCI(B)=16	LCE(B)=20
PM(B)=36/15 $\simeq$ 2,4	PMI(B)=16/9 $\simeq$ 1,78	PME(B)=20/6 $\simeq$ 3,33