



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ**

**Instituto Politécnico do Estado do Rio de Janeiro - IPRJ**

**Cursos de Graduação em Engenharia da Computação e Engenharia Mecânica**

**Modelagem de Reservatório de Petróleo – 2018.2**

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DO ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MEIOS  
POROSO PARA O CASO UNIDIMENSIONAL EM R**

Kayo Brito Matos

Leonardo Simões

Luciano Figueiredo Cezario da Silva

**Professor:**

Grazione de Sousa Boy

Nova Friburgo/RJ

Novembro de 2018

Kayo Brito Matos

Leonardo Simões

Luciano Figueiredo Cezario da Silva

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DO ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MEIOS  
POROSO PARA O CASO UNIDIMENSIONAL EM R**

RELATÓRIO 2 DE MODELAGEM DE RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO

Relatório técnico realizado pelos alunos dos cursos de engenharia mecânica e engenharia de computação, como parte dos requisitos necessários à obtenção de aprovação na disciplina de modelagem de reservatório petróleo.

Orientador: Grazione de Souza boy

Nova Friburgo-RJ

2018

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Tabelas</b>	<b>Página</b>
Tabela 1 – Dados do sistema.....	8
Tabela 2 – Dados do sistema.....	8

<b>Gráficos</b>	<b>Página</b>
Gráfico 1 - .....	9
Gráfico 2 - .....	10
Gráfico 3 - .....	10

## SUMÁRIO

	<b>Página</b>
<b>1. OBJETIVO.....</b>	<b>5</b>
<b>2. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>5</b>
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	<b>5</b>
3.1. Modelagem Matemática.....	5
3.2. Programa Computacional.....	7
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>8</b>
<b>5. CONCLUSÕES.....</b>	<b>11</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>12</b>
<b>ANEXO A – Código Python para a Solução do Regime Transiente.....</b>	<b>13</b>

## 1. OBJETIVO

O objetivo desse trabalho foi obter a solução analítica do problema de cálculo da pressão em escoamento monofásico em meios porosos para o caso unidimensional em  $r$  sob regime transiente. As soluções obtidas foram plotadas em gráficos para observação e comprovação de hipóteses supostas em aula.

## 2. INTRODUÇÃO

Neste relatório será analisado um reservatório com as seguintes características e hipóteses, meio poroso incompressível e permeabilidade homogênea, com escoamento monofásico e isotérmico, de óleo ligeiramente compressível com viscosidade constante, sem gás dissolvido no óleo, sem influencia de efeitos gravitacionais, com escoamento transiente unidimensional na direção  $r$ , baixas velocidades de escoamento. Condição inicial de pressão uniforme no meio, condições de contorno de fluxo nulo nas fronteiras externas do reservatório e presença de um poço vertical de raio  $r_w$ , que penetra toda a formação.

Foi utilizado para a solução uma EDP para um regime transiente, onde se relaciona a variação da pressão com a posição e a variação da pressão com o tempo e as características do fluido e do reservatório, como viscosidade, compressibilidade, permeabilidade e porosidade.

Para o auxílio e a obtenção de gráficos para serem analisados, Para a implementação do programa computacional foi utilizada a linguagem de programação Python em sua versão 3.7.0.

## 3. METODOLOGIA

### 3.1 Modelagem matemática

Esta seção aborda a solução para  $p(r,t)$  no caso de um reservatório cilíndrico fechado inicialmente a uma pressão  $p_i$  de forma uniforme. Considera-se a produção do poço vertical que penetra completamente a formação rochosa. A vazão de produção é constante. O regime transiente e pseudopermanente serão capturados na solução. Entretanto, para os parâmetros de modelagem desse trabalho serão em regime transiente. [3]

Considera-se o seguinte conjunto de EDP e condições iniciais e de contorno

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial \Delta p_o}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial \Delta p_o}{\partial t} \quad (1),$$

assim podemos escrever a equação como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \partial \Delta p_o}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p_o}{\partial t} \quad (2),$$

sendo

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (3)$$

e considerando

$$\Delta p(r, t = 0) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{r \partial \Delta p_o}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = \frac{-q_w \mu}{2\pi k h} \quad (5)$$

$$\frac{r \partial \Delta p_o}{\partial r} \Big|_{r=r_p} = 0 \quad (6)$$

$$\overline{\Delta p} = \bar{p} - p_i \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\Delta p}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \overline{\Delta p}}{\partial r^2} - \frac{s}{\eta} \overline{\Delta p} = 0 \quad (8)$$

$$\left( \frac{r \partial \overline{\Delta p}}{\partial r} \right)_{r=r_w} = \frac{-q_w \mu}{2\pi k h s} \quad (9)$$

$$\left( \frac{r \partial \overline{\Delta p}}{\partial r} \right)_{r=r_p} = 0 \quad (10)$$

Sendo a solução geral

$$\overline{\Delta p}(r, s) = C_1 I_0 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) + C_2 K_0 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) \quad (11)$$

Usando a condição de contorno externo

$$\left( \frac{r \partial \overline{\Delta p}}{\partial r} \right)_{r=r_o} = C_1 \sqrt{\frac{s}{\eta}} I_0 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) - C_2 \sqrt{\frac{s}{\eta}} K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) = 0 \quad (12)$$

$$C_2 = \frac{C_1 I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right)}{K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right)} \quad (13)$$

E assim

$$\overline{\Delta p}(r, s) = C_1 \left[ I_0 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) + \frac{K_0 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right)}{K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right)} \right] \quad (14).$$

Usando a condição de contorno interno

$$\left( \frac{r \partial \overline{\Delta p}}{\partial r} \right)_{r=r_o} = C_1 \left[ \sqrt{\frac{s}{\eta}} r I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) - \frac{\sqrt{\frac{s}{\eta}} r K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right) I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right)}{K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right)} \right] = \frac{-q_w \mu}{2\pi k h} \quad (15),$$

isolando C1

$$C_1 = \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \frac{K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r \right)}{s \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \left[ I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_e \right) \cdot K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \right) - I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \right) \cdot K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_e \right) \right]} \quad (16).$$

Substituindo C1 e C2 na equação 11, teremos então a equação no domínio de Laplace

$$\overline{\Delta p}(r, s) = \frac{a \cdot c}{b} \quad (17)$$

$$a = \frac{q_w \mu}{2\pi k h} \quad (18)$$

$$b = s \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \left[ I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_e \right) \cdot K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \right) - I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \right) \cdot K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_e \right) \right] \quad (19)$$

$$c = I_0 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \right) \cdot K_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_e \right) + I_1 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_e \right) \cdot K_0 \left( \sqrt{\frac{s}{\eta}} r_w \right) \quad (20)$$

O algoritmo stehfest é um dos frequentes usados para inverter numericamente uma função no campo de Laplace para o campo real [2] [3].

$$\Delta p(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum V_i \overline{\Delta p} \left( \frac{\ln 2 i}{t} \right) \quad (21)$$

$$p(t) = p_{in} - \Delta p(t) \quad (22)$$

### 3.2 Programa Computacional

Para a implementação do programa computacional foi utilizada a linguagem de programação Python em sua versão 3.7.0, com a biblioteca math para uso das funções matemáticas exponencial natural, raiz quadrada e erro complementar, a biblioteca matplotlib para a geração de gráficos, a biblioteca scipy para as funções de Bessel  $I_0, I_1, K_0$  e  $K_1$ . O programa computacional foi executado no sistema operacional Windows 10 de 64 bits, em um computador desktop com processador AMD FX-8120 com 3.10 GHz, 16.0 GB de RAM, SSD de 120 GB.

O primeiro teste proposto para o reservatório em questão, sob regime transiente foi fixado o raio do poço  $r_w = 0.2 \text{ m}$  e utilizou-se a variação da vazão em condições padrão, assim  $q_{sc} = 500 \text{ stdm}^3/\text{dia}$ ,  $q_{sc} = 600 \text{ stdm}^3/\text{dia}$  e  $q_{sc} = 700 \text{ stdm}^3/\text{dia}$ . O resultado foi a obtenção de um gráfico de Pressão no reservatório x Logaritmo do tempo. Dessa forma, percebe-se pela análise da expressão analítica (21) quanto maior o  $q_{sc}$  mais deslocado será a curva de resultado, sendo comprovado pela análise do gráfico 1, que mostra o comportamento da maior vazão, com uma variação de pressão menor e a linha mais interiorizada.

## 4. TESTES E DISCUSSÕES

Os valores dos parâmetros empregados na resolução do sistema foram fornecidos de acordo com as tabelas a seguir:

Tabela 1 – Dados predefinidos

Parâmetro	Valor
$k$	$30,0 \times 10^{-14} \text{ m}^2$
$\Phi$	0,15
$p_{inicial}$	35 Mpa
$r_e$	400 m
$L_z$	15 m
$B^0$	$1,35 \text{ m}^3/\text{std m}^3$
$\mu$	$0,6 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
$c_t$	$10,0 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$



Tabela 2 – Referente a valores de  $v_i$  para  $n=10$ 

$i$	$V_i$
1	0,08333
2	-32,08333
3	1279
4	-15623,666
5	84244,1666
6	-236957,5
7	375911,666
8	-340071,666
9	164062,5
10	-32812,5

O primeiro teste proposto para o reservatório em questão, sob regime transiente foi fixado o raio do poço  $r_w = 0.2 \text{ m}$  e utilizou-se a variação da vazão em condições padrão, assim  $q_{sc} = 500 \text{ stdm}^3/\text{dia}$ ,  $q_{sc} = 600 \text{ stdm}^3/\text{dia}$  e  $q_{sc} = 700 \text{ stdm}^3/\text{dia}$ . O resultado foi a obtenção de um gráfico de Pressão no reservatório x Logaritmo do tempo. Dessa forma, percebe-se pela análise da expressão analítica (21) quanto maior o  $q_{sc}$  mais deslocado será a curva de resultado, sendo comprovado pela análise do gráfico 1, que mostra o comportamento da maior vazão, com uma variação de pressão menor e a linha mais interiorizada.

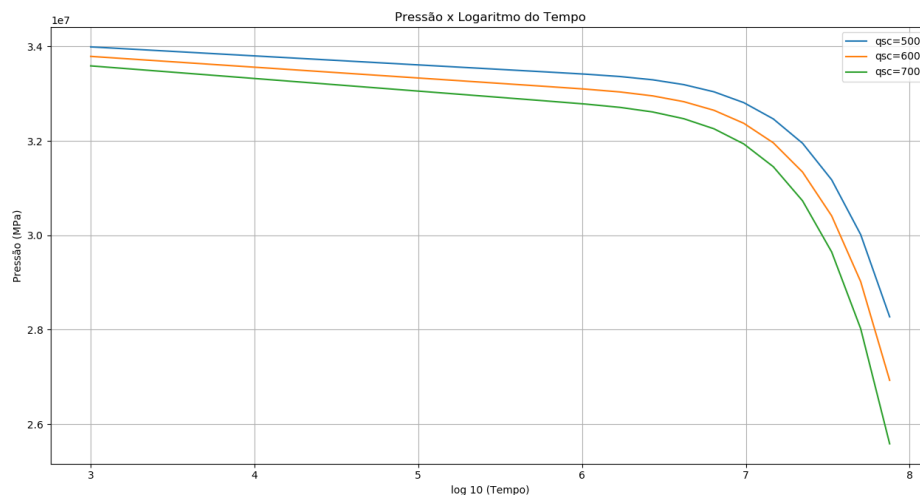


Gráfico 1: Pressão no reservatório x logaritmo do tempo (com variação da vazão em condições padrão)

Quando propomos um segundo estudo, analisamos um modelo de resultado onde se varia uma propriedade do material, sendo escolhida para estudo a variação da viscosidade  $\mu = 0.0004 \text{ Pa.s}$ ,  $\mu = 0.0005 \text{ Pa.s}$  e  $\mu = 0.0006 \text{ Pa.s}$ , ou seja, para determinadas qualidades de óleo explorado e considerando que  $q_{sc} = 500 \text{ stdm}^3/\text{dia}$ . A

partir de então, percebe-se um gráfico semelhante ao gráfico 1, onde quanto maior a viscosidade estudada, mais deslocado torna-se a linha do gráfico. Isso já era esperado, porque o comportamento da pressão varia muito pouco sem relação a mudança da viscosidade.

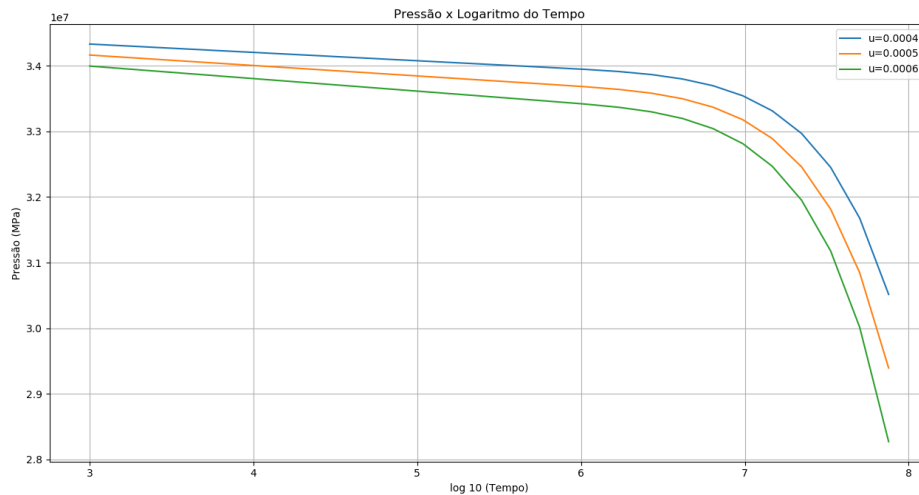


Gráfico2: Pressão no reservatório x logaritmo do tempo (com variação da viscosidade do óleo)

Já no último estudo proposto para testes, o modelo de gráfico 3 foi o resultado obtido, onde temos um valor fixo em  $q_{sc} = 500$  stdm<sup>3</sup>/dia e variação do raio do poço em  $r_w = 0.2$  m,  $r_w = 0.45$  m e  $r_w = 0.6$  m, percebendo um comportamento onde as linhas de estudo tendem a se aproximar com o passar do tempo, isso pois quando temos uma mudança na variação do raio do poço, tende a uma linha de pressão comum, sendo que o maior raio perde mais pressão, sendo influenciado diretamente pela relação de vazão.

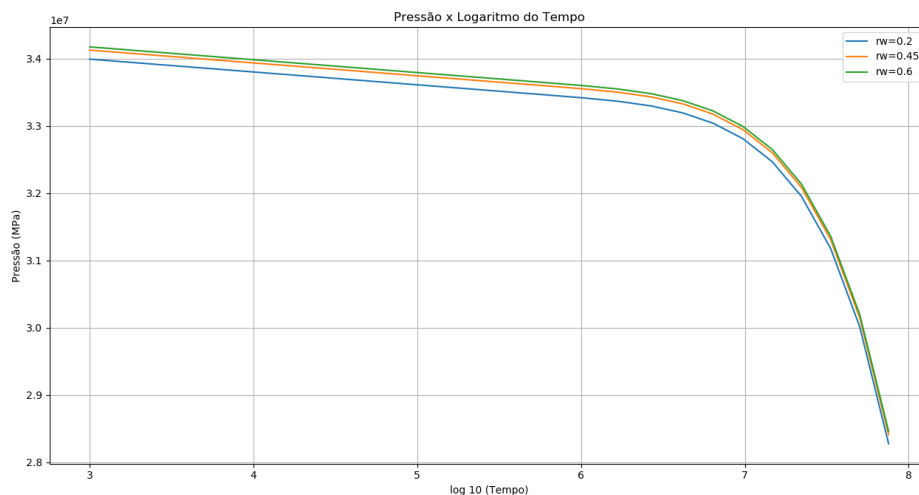


Gráfico 3: Pressão no reservatório x logaritmo do tempo (com variação do raio do poço)

## 5. CONCLUSÃO

Através dos resultados obtidos pelo do estudo de um reservatório em regime transiente podemos perceber que com o decorrer do tempo e sob variáveis vazões de produção, variação da propriedade do material (viscosidade) e variação do raio do poço a pressão em reservatórios tende a diminuir, o que já era de se esperar pela análise analítica.

## 6. Referências

[1] – Dicesar, A, M, de A, G; Leonel, P. L. **ANÁLISE DA DETERMINAÇÃO DA CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA DO SOLO PELO MÉTODO DO PERFIL INSTANTÂNEO**. 2013 <<https://www.sbcs.org.br/wp-content/uploads/2013/11/07-177.pdf>> Acessado em: 14 de janeiro de 2019.

[2] – ZILL, D. G; Cullen, M. R. **Equações diferenciais. Vol 1, Terceira edição. São Paulo: Pearson, 2001.**

[3] – BOY, G. de S.; **Notas de aula da disciplina de Modelagem de Reservatório de Petróleo – 2018.2**

## Anexo A

Tempo inicial 1000 segundos

```
Tmax = 87500000
deltaT = 86400
```

*#Trabalho 2 de Modelagem de Reservatórios de Petróleo - 2018*

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.special as bessell

def plotaGrafico(X, P1, P2, P3, legendas, img):
    fig = plt.figure(1)
    plt.xlabel(legendas[0])
    plt.ylabel(legendas[1])
    plt.title(legendas[2])
    plt.plot(X, P1, label=legendas[3])
    plt.plot(X, P2, label=legendas[4])
    plt.plot(X, P3, label=legendas[5])
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
    fig.savefig(img + '.png')

def dadosGrupo4():
    k = 30 * 10**-14
    fi = 0.15
    pin = 35 * 10**6
    re = 4000
    Lz = 15
    B0 = 1.35
    u = 0.6 * 10**-3
    ct = 10 * 10**-10
    return (k, fi, pin, re, Lz, u, ct, B0)

def Ni(k, fi, u, ct):
    return k/(fi*u*ct)

def Vi():
    V = {}
    V[1]=0.08333
    V[2]=-32.08333
    V[3]=1279
    V[4]=-15623.666
    V[5]=84244.1666
    V[6]=-236957.5
    V[7]=375911.666
    V[8]=-340071.666
    V[9]=164062.5
    V[10]=-32812.5
    return V
```

```

def DeltaPs(s, rw, constantes, n, qw):
    (k, fi, pin, re, h, u, ct, B0) = constantes
    sn = math.sqrt(s/n)
    a = qw*u/(2*math.pi*k*h)
    b = s*sn*rw*(bessel.iv(1,sn*re)*bessel.kv(1,sn*rw)-
bessel.iv(1,sn*rw)*bessel.kv(1,sn*re))
    c =
bessel.iv(0,sn*rw)*bessel.kv(1,sn*re)+bessel.iv(1,sn*re)*bessel.kv(0,s
n*rw)
    return a*c/b

def solucaoRegimeTransientePseudoPermanente(constantes, deltaT, Tmax,
qsc1, qsc2, qsc3, rw1, rw2, rw3, u1, u2, u3):
    (k, fi, pin, re, h, u, ct, B) = constantes
    P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9 = [], [], [], [], [], [], [], [],
[], []
    T, LogT = [], []
    V = Vi()
    n = Ni(k, fi, u, ct)
    qw1, qw2, qw3 = qsc1 * B /86400, qsc2 * B /86400, qsc3 * B /86400
    constantes1, constantes2, constantes3 = list(constantes),
list(constantes), list(constantes)
    constantes1[5], constantes2[5], constantes3[5] = u1, u2, u3
    t = 1000
    while t <= Tmax:
        T.append(t)
        LogT.append(math.log(t, 10))
        VDeltaP1 = VDeltaP2 = VDeltaP3 = VDeltaP4 = VDeltaP5 =
VDeltaP6 = VDeltaP7 = VDeltaP8 = VDeltaP9 = 0
        for i in range(1,11):
            s = i*math.log(2)/t
            VDeltaP1 += V[i]*DeltaPs(s, rw1, constantes, n, qw1)
            VDeltaP2 += V[i]*DeltaPs(s, rw1, constantes, n, qw2)
            VDeltaP3 += V[i]*DeltaPs(s, rw1, constantes, n, qw3)
            VDeltaP4 += V[i]*DeltaPs(s, rw1, constantes, n, qw1)
            VDeltaP5 += V[i]*DeltaPs(s, rw2, constantes, n, qw1)
            VDeltaP6 += V[i]*DeltaPs(s, rw3, constantes, n, qw1)
            VDeltaP7 += V[i]*DeltaPs(s, rw1, constantes1, n, qw1)
            VDeltaP8 += V[i]*DeltaPs(s, rw1, constantes2, n, qw1)
            VDeltaP9 += V[i]*DeltaPs(s, rw1, constantes3, n, qw1)
            P1.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP1))
            P2.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP2))
            P3.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP3))
            P4.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP4))
            P5.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP5))
            P6.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP6))
            P7.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP7))
            P8.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP8))
            P9.append(pin - (math.log(2)/t * VDeltaP9))
            deltaT = deltaT*1.5
            t = t + deltaT
        legendas1 = ('log 10 (Tempo)', 'Pressão (MPa)', 'Pressão x
Logaritmo do Tempo', 'qsc='+str(qsc1), 'qsc='+str(qsc2),
'qsc='+str(qsc3))
        plotaGrafico(LogT, P1, P2, P3, legendas1, 'Gráfico 1')
        legendas2 = ('log 10 (Tempo)', 'Pressão (MPa)', 'Pressão x
Logaritmo do Tempo', 'rw='+str(rw1), 'rw='+str(rw2), 'rw='+str(rw3))
        plotaGrafico(LogT, P4, P5, P6, legendas2, 'Gráfico 2')
        legendas3 = ('log 10 (Tempo)', 'Pressão (MPa)', 'Pressão x
Logaritmo do Tempo', 'u='+str(constantes1[5]),
'u='+str(constantes2[5]), 'u='+str(constantes3[5]))

```

```

        plotaGrafico(LogT, P7, P8, P9, legendas3, 'Gráfico 3')

#Função Principal - MAIN
if __name__ == '__main__':
    constantes = dadosGrupo4()
    Tmax = 87550000
    deltaT = 86400
    qsc1, qsc2, qsc3 = 500, 600, 700
    rw1, rw2, rw3 = 0.20, 0.45, 0.6
    u1, u2, u3 = 0.4 * 10**-3, 0.5 * 10**-3, constantes[5]
    solucaoRegimeTransientePseudoPermanente(constantes, deltaT, Tmax,
    qsc1, qsc2, qsc3, rw1, rw2, rw3, u1, u2, u3)

```

## 5 Referencias

[1] Definição de transformada de Laplace

[https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-tl/tldl-dexfb01nix00e7x00e3o\\_de\\_transformada\\_de\\_laplace.html](https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-tl/tldl-dexfb01nix00e7x00e3o_de_transformada_de_laplace.html)

[2] – ZILL, D. G; Cullen, M. R. Equações diferenciais. Vol 1, Terceira edição. São Paulo: Pearson, 2001.

[3] – BOY, G. de S.; Notas de aula da disciplina de Modelagem de Reservatório de Petróleo – 2018.2