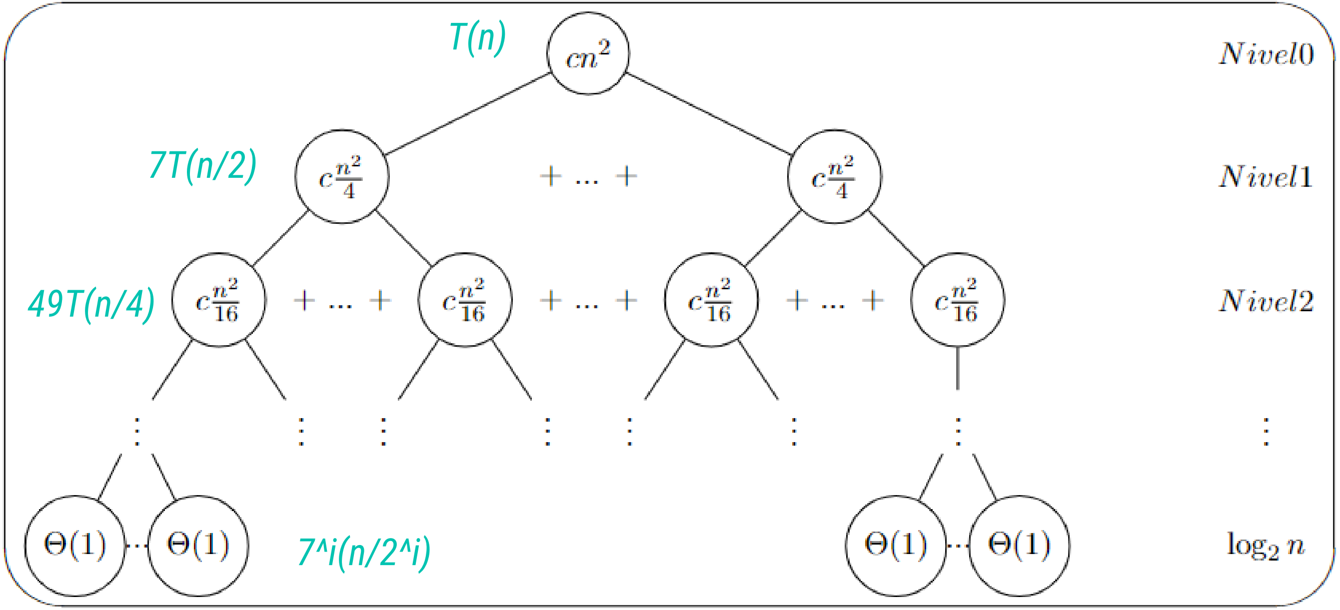
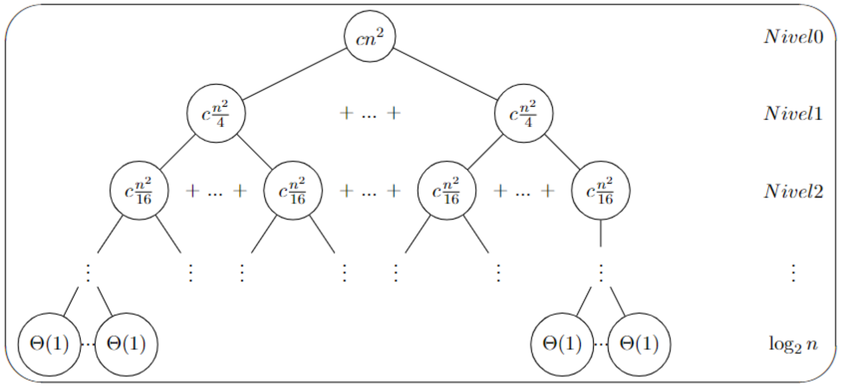
Análise do algoritmo de Strassen
Recursion Tree

$$T(n) \quad = 7T(n/2) + cn^2$$



Análise do algoritmo de Strassen
Recursion Tree

$$T(n) \quad = 7T(n/2) + cn^2$$



Número de níveis: $\log_2 n + 1$.

Nível em que há somente folhas: $\log_2 n$.

Tamanho do problema no nível i: $n/2^i$

Número de nós no nível i: 7^i

Custo no nivel i: $7^i c(n/2^i)^2 = (7/4)^i cn^2$.

No último nível, o custo de cada folha é $\theta(1)$ e são $7^{\log_2 n}$ folhas.

Portanto, o custo total das folhas é $\theta(7^{\log_2 n}) = \theta(n^{\log_2 7})$

$$\begin{aligned}
7 &= e^{\ln 7} \\
\log_2 n &= \frac{\ln n}{\ln 2} \\
7^{\log_2 n} &= (e^{\ln 7})^{\frac{\ln n}{\ln 2}} \\
&= (e^{\ln n})^{\frac{\ln 7}{\ln 2}} \\
&= (n)^{\frac{\ln 7}{\ln 2}} \\
&= n^{\log_2 7}
\end{aligned}$$

E => Euler's Constant

Análise do algoritmo de Strassen
Recursion Tree

Número de níveis: $\log_2 n + 1$.

Nível em que há somente folhas: $\log_2 n$.

Tamanho do problema no nível i: $n/2^i$

Número de nós no nível i: 7^i

Custo no nivel i: $7^i c(n/2^i)^2 = (7/4)^i cn^2$.

No último nível, o custo de cada folha é $\theta(1)$ e são $7^{\log_2 n}$ folhas.

Portanto, o custo total das folhas é $\theta(7^{\log_2 n}) = \theta(n^{\log_2 7})$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n-1} (7/4)^i cn^2 + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= cn^2(\sum_{i=0}^{\log_2 n-1} (7/4)^i) + \theta(n^{\log_2 7})$$

Série Geom..
Apendice A

$$= cn^2(\frac{(7/4)^{\log_2 n-1+1} - 1}{(7/4) - 1}) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= cn^2(\frac{(7/4)^{\log_2 n} - 1}{(7/4) - 1}) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= cn^2(\frac{(e^{\ln(7/4)})^{\frac{\ln n}{\ln 2}} - 1}{\frac{7-4}{4}}) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= cn^2(\frac{(e^{\ln n})^{\frac{\ln 7 - \ln 4}{\ln 2}} - 1}{\frac{3}{4}}) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= \frac{4}{3}cn^2(n^{\frac{\ln 7}{\ln 2} - \frac{\ln 4}{\ln 2}} - 1) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= \frac{4}{3}cn^2(n^{\log_2 7 - \log_2 4} - 1) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= \frac{4}{3}cn^2(n^{\log_2 7 - 2} - 1) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= \frac{4}{3}cn^2(\frac{n^{\log_2 7}}{n^2} - 1) + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= \frac{4}{3}cn^{\log_2 7} - \frac{4}{3}cn^2 + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$\leq \frac{4}{3}cn^{\log_2 7} + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= c_1 n^{\log_2 7} + \theta(n^{\log_2 7})$$

$$= \mathcal{O}(n^{\log_2 7})$$

Análise do algoritmo de Strassen
Substitution method

Estima-se que

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{log_2 7})$$

$$T(n) \leq c_1 n^{log_2 7} \qquad \text{para um determinado } c_1 > 0$$

Suponha que

$$T(k) \leq c_1 k^{log_2 7} \qquad \text{para } c > 0 \text{ e } n > k \geq n_0 \text{ e } n > 2n_0$$

$n > 2n_0$ implica $n/2$ dentro do intervalo, mas n não

Então

$$\begin{aligned}
T(n) &= 7T(n/2) + c_2 n^2 \\
&\leq 7c_1 (\frac{n}{2})^{log_2 7} + c_2 n^2 \\
&= 7c_1 (\frac{n^{log_2 7}}{2^{log_2 7}}) + c_2 n^2 \\
&= 7c_1 (\frac{n^{log_2 7}}{7^{log_2 2}}) + c_2 n^2 \\
&= \frac{7}{7} c_1 (n^{log_2 7}) + c_2 n^2 \\
&= \mathcal{O}(n^{log_2 7})
\end{aligned}$$

Análise do algoritmo de Strassen
Substitution method

Contradição

Estima-se que

$$T(n) = \mathcal{O}(n^2)$$

$$T(n) \leq c_1 n^2 \qquad \text{para um determinado } c_1 > 0$$

Suponha que

$$T(k) \leq c_1 k^2 \qquad \text{para } c_1 > 0 \text{ e } n > k \geq n_0 \text{ e } n > 2n_0$$

$n > 2n_0$ implica $n/2$ dentro do intervalo, mas n não

Então

$$\begin{aligned}
&= 7T(n/2) + c_2 n^2 \\
&= 7c_1(\frac{n}{2})^2 + c_2 n^2 \\
&= \frac{7}{4}c_1 n^2 + c_2 n^2 \\
&= n^2(\frac{7}{4}c_1 + c_2) && \text{se } c_1 \text{ ou } c_2 > 1 \\
&\geq n^2 && \text{uma contradição} \\
T(n) &= \Omega(n^2) && \text{e permitindo concluir}
\end{aligned}$$