UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE COMPUTACIÓN
CÁLCULO CIENTÍFICO (6109)
SEMESTRE II-2014

TALLER 3 - Transformaciones matriciales: Primera Parte

MATLAB

- `[L,U] = lu(A)`: Encuentra la factorización `LU` de la matriz `A`.
- `[L,U,P] = lu(A)`: Encuentra la factorización `LU` de una permutación de la matriz `A`. Es decir, `PA=LU`.
- `D=diag(A)`: Obtiene la diagonal de la matriz `A`.
- `S=triu(A)`. Obtiene la parte triangular superior de la matriz `A`, y la almacena en la variable `S`.
- `I=tril(A)`. Obtiene la parte triangular inferior de la matriz `A`, y la almacena en la variable `I`.
- `C=chol(A)`: Encuentra la factorización de Cholesky de la matriz `A`.
- `det(A)`: Obtiene el determinante de la matriz `A`.
- `inv(A)`: Si `A` es no singular, el comando `inv(A)` genera la matriz inversa de `A`.

Aspecto Teóricos

En esta sección se encuentran algunos aspectos teóricos que son necesarios para la elaboración de este Taller.

- Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica positivo definida (SPD) si $A = A^T$ y $x^t Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo. En vista que la desigualdad $x^t Ax > 0$ no necesariamente es fácil de probar para cualquier matriz A y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Existen otras formas para identificar si una matriz es o no positivo definida. A continuación se dan algunas de ellas.

  1. Si A es positivo definida, entonces $a_{ii} > 0$ para todo i.
  2. Si A es positivo definida, entonces el elemento de mayor magnitud de A debe estar en la diagonal de A.
  3. Si A es simétrica, diagonal dominante con diagonal positiva, entonces A es SPD.
  4. Una matriz simétrica A es positivo definida, si y sólo si A tiene factorización de Cholesky.

- Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y suponga que es posible escribir A como $A = LU$ donde L es triangular inferior y U es triangular superior, es decir,

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

  Ahora bien, cuando:

  - L es unitaria, es decir, todos sus elementos diagonales son iguales a uno, entonces $A = LU$ se conoce como *factorización de Doolittle de A*. Esta factorización también es más comúnmente conocida como la *factorización LU de A*.
  - U es unitaria, entonces $A = LU$ se conoce como *factorización de Crout de A*.
  - $U = L^T$, entonces la factorización obtenida se conoce como *factorización de Cholesky* y sólo es posible de obtener cuando A es SPD.

Parte Práctica

1. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$
   - Ejecute la rutina `Ax.m` con la matriz A dada y para distintos vectores $x \in \mathbb{R}^2$.
   - Explique brevemente qué hace dicha rutina.
   - ¿Es correcto afirmar que la rutina `Ax.m` transforma al vector x en el vector y? Justifique
   - Ejecute la rutina con $x_1 = [0.5889\ 0.8082]^t$ y $x_2 = [-0.2230\ 0.9748]^t$. Comente lo observado.
   - ¿Quiénes son x_1 y x_2?. Justifique muy bien su respuesta.
2. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 15 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -29 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$
   - Encuentre la factorización LU de la matriz A usando el comando `lu` de Matlab. Denote a estas matrices por `LM`, y `UM` respectivamente.
   - Las siguientes instrucciones de Matlab permiten definir a la matriz elemental `E21` así como observar el efecto que tiene sobre A.

```
>> n=4;
>> U=A;
>> m21 = U(2,1)/U(1,1);
>> E21 = eye(n);
>> E21(2,:) = E21(2,:)-m21*E21(1,:);
>> U = E21*U
ans =
    5.0000    3.0000    2.0000    4.0000
         0   12.6000   -5.6000   -3.2000
   -3.0000   -2.0000  -29.0000   -2.0000
   -2.0000    4.0000    4.0000   -9.0000
```

- Defina cada una de las matrices elementales `E31,E41,E32,E42` y `E43`.
- Verifique que `E43*E42*E32*E41*E31*E21*A` es igual a la matriz `U`.
- Defina `Linv=E43*E42*E32*E41*E31*E21`
- Calcule la inversa de `Linv` SIN USAR EL COMANDO `inv` de Matlab y almacene el resultado en `L`.
- Verifique que `L*U` es igual a A. **Observe que `L` es triangular inferior unitaria.**
- ¿Las matrices `LM` y `L` (`UM` y `U`) son las mismas?. Comente sus respuestas.
- ¿Qué operación elemental debe usarse antes de calcular los multiplicadores, con la finalidad de obtener la factorización de Crout de A?. Realice y analice las siguientes instrucciones para encontrar la respuesta.

```
>> format rat
>> n=4;
>> U=A;
>> m1 = 1/U(1,1);
>> E1 = eye(n);
>> E1(1,:)=m1*E1(1,:);
>> U=E1*U
ans =
   1    3/5    2/5    4/5
   4    15     -4     0
   -3   -2     -29    -2
   -2   4      4      -9
>> m21 = U(2,1);
>> E21 = eye(n);
>> E21(2,:) = E21(2,:)-m21*E21(1,:);
>> U = E21*U
ans =
   1    3/5    2/5     4/5
   0    63/5   -28/5   -16/5
   -3   -2     -29     -2
   -2   4      4       -9
```

- Defina cada una de las matrices elementales `E31,E41,E32,E42,E43` y `E2,E3,` `E4` siguiendo el procedimiento anterior.

- Verifique que E4*E43*E3*E42*E32*E2*E41*E31*E21*E1*A es igual a la matriz U. **Observe que U es triangular superior unitaria.**
- Defina Linv=E4*E43*E3*E42*E32*E2*E41*E31*E21*E1
- Calcule la inversa de Linv usando el comando inv de Matlab y almacene el resultado en Lc.
- Construya la siguiente matriz en la variable L

```
1/m1   0      0      0
m21    1/m2   0      0
m31    m32    1/m3   0
m41    m42    m43    1/m4
```

- Verifique que Lc y L son la misma matriz. Comente sus resultados.
- Verifique que L*U es igual a A.

3. Ejecute las siguientes instrucciones en Matlab

```
>> A=[5 2 3; 2 6 -1; 1 1 8];
>> [L,U]=lu(A);
>> [det(A) det(L) det(U) det(L)*det(U)]
```

¿Qué observa?

Ahora, considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde ϵ es el épsilon de la máquina (variable eps de Matlab)

- Calcule el determinante de la matriz A.
- Obtenga la factorización LU a la matriz A. NO USE el comando lu de Matlab
- Ejecute la siguiente instrucción

```
>>[det(A) det(L) det(U) det(L)*det(U)]
```

¿Qué observa? Explique brevemente los resultados.

4. Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 21 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 9 & -4 \\ 2 & 1 & -4 & 17 \end{bmatrix}$$

- Obtenga la factorización LU de A, con Matlab.
- Descomponga la matriz U en $D\widetilde{U}$ donde D es una matriz diagonal y $\widetilde{U}$ es una matriz diagonal superior unitaria.

- Verifique que $A = LD\widetilde{U}$. Observe que $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$, donde $\widetilde{L} = LD$ corresponde a la factorización de Crout de A.
- Verifique que $A = A^T = \widetilde{U}^T DL^T$.
- ¿Qué relación existe entre L y $\widetilde{U}^T$ y $\widetilde{U}$ y L^T?. En base a esta relación cómo puede reescribirse la matriz A.
- Descomponga la matriz D como el producto de dos matrices. $\sqrt{D}\sqrt{D}$ [1]. ¿Por qué razón se puede hacer esta descomposición?.
- En base a la descomposición anterior cómo se puede reescribir la matriz A.
- Encuentre la factorización de Cholesky de la matriz A utilizando el comando `chol` de Matlab. Compare sus resultados.

Grupo Docente de Cálculo Científico I / Realizado por V. Felipe & M. Monsalve

[1] $\sqrt{A} = [\sqrt{a_{ij}}]$.