UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE COMPUTACIÓN
CÁLCULO CIENTÍFICO (6109)
SEMESTRE II-2014

TALLER 8 - Interpolación polinomial.

# Parte Introductoria

Para la elaboración de este taller se requiere el uso de las siguientes funciones de MATLAB:

- `c = polyfit(x,y,n)`: Encuentra los coeficientes de un polinomio $p_n(x)$ de grado $n$ tal que $p_n(x_i) = y_i$.. Específicamente `c` es un vector de longitud $n+1$ tal que $p_n(x) = \mathtt{c}(1)x^n + \mathtt{c}(2)x^{n-1} + ... + \mathtt{c}(n)x + \mathtt{c}(n+1)$
- `y = polyval(c,v)`:, donde $c$ es un vector de longitud $n+1$ que representan los coeficientes de un polinomio $p_n$ de grado $n$. Esta función evalúa a $p_n$ en $v$ y deja el resultado en $y$, es decir, $y = p_n(v) = \mathtt{c}(1)v^n + \mathtt{c}(2)v^{n-1} + ... + \mathtt{c}(n)v + \mathtt{c}(n+1)$
- `xu = linspace(x1, x2, n)`: genera `n` nodos, igualmente espaciados, entre `x1` y `x2`.
- `c = poly(v)`: Si `v` es un vector de dimensión $n$, entonces el vector `c` contiene los coeficientes un polinomio $p_n$ de la forma $p_n(x) = \mathtt{c}(1)x^n + \mathtt{c}(2)x^{n-1} + ... + \mathtt{c}(n)x + \mathtt{c}(n+1)$, cuyas $n$ raíces son los elementos de `v`.

# Parte Práctica

1. Con tres puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ se puede construir un único polinomio de grado a lo más 2,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \tag{1}$$

que pasa por dichos puntos.

Considere los siguientes puntos $(1, \log 1)$, $(4, \log 4)$, $(6, \log 6)$.

- Plantee y resuelva un S.E.L. que permita obtener los coeficientes $a_i$ necesarios del polinomio del menor grado posible que pase por todos los puntos anteriores.
- Obtenga el número de condición de la matriz de coeficientes del sistema planteado.
- Grafique la función real con el polinomio interpolador. ¿Qué observa?
- Emplee el polinomio hallado para estimar $\log 2$.

2. Otra forma de escribir un polinomio que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ es:

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1). \tag{2}$$

Un procedimiento simple para calcular los $b_i$ de la forma (2) es el siguiente:

(a) Evaluando (2) en $x_0$ se obtiene que

$$b_0 = f(x_0)$$

(b) Evaluando (2) en $x_1$ y sustituyendo el valor de $b_0$ se obtiene que

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

(c) Evaluando (2) en $x_2$ y sustituyendo el valor de $b_0$ y de $b_1$ se obtiene que

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$$

- Emplee los mismos puntos del ejercicio anterior para obtener los $b_i$ que permitan construir el polinomio interpolador.
- Emplee el polinomio hallado para estimar $\log 2$.
- Calcule el error relativo y compare los resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior.
- ¿Cuál de los dos procedimientos considera mejor? Justifique su respuesta.

3. Considere la siguiente tabla de interpolación, con la cual se construirá al polinomio de interpolación, $p_2(x)$, usando la base de Lagrange.

| x | 3 | 1 | -2 |
|---|---|---|---|
| y | 33 | 9 | 3 |

(a) Obtenga a los Lagrangeanos $l_0, l_1$ y $l_2$. Escriba cada polinomio de Lagrange en su forma canónica y demuestre que

$$l_0(x) = \frac{x^2}{10} + \frac{x}{10} - \frac{1}{5}, \quad l_1(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x}{6} + 1, \ \text{ y } \ l_2(x) = \frac{x^2}{15} - \frac{4x}{15} + \frac{1}{5}$$

(b) Determine a $p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$ y demuestre que

$$p_2(x) = 2x^2 + 4x + 3.$$

(c) Ejecute la función `[c,L] = lagrange(x,y)`, con los datos de tabla de interpolación de este ejercicio.

- Analice el significado de la instrucción `V = conv(V,poly(x(j)))/(x(k)-x(j));`
- Para cada valor de `k` del ciclo externo, ¿qué significan los valores contenidos en `L(k,:)`?
- Analice los valores de los parámetros de salida, `c` y `L`. Compare estos valores y los cálculos realizados en los ítems *a)* y *b)*.

4. **Interpolación Inversa.** Sea $f \in C^1[a,b]$. Suponga que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$. Sean $x_0, x_1, \cdots x_n$ números distintos en $[a,b]$ con $f(x_i) = y_i$, para cada $i = 0, 1, \cdots n$. Teniendo en cuenta que $f^{-1}(y_i) = x_i$ y que $f^{-1}(0) = c$ se deduce que, una forma de aproximar el valor de $c$ consiste en hallar el polinomio $q_n$ que interpole a la función $f^{-1}$.

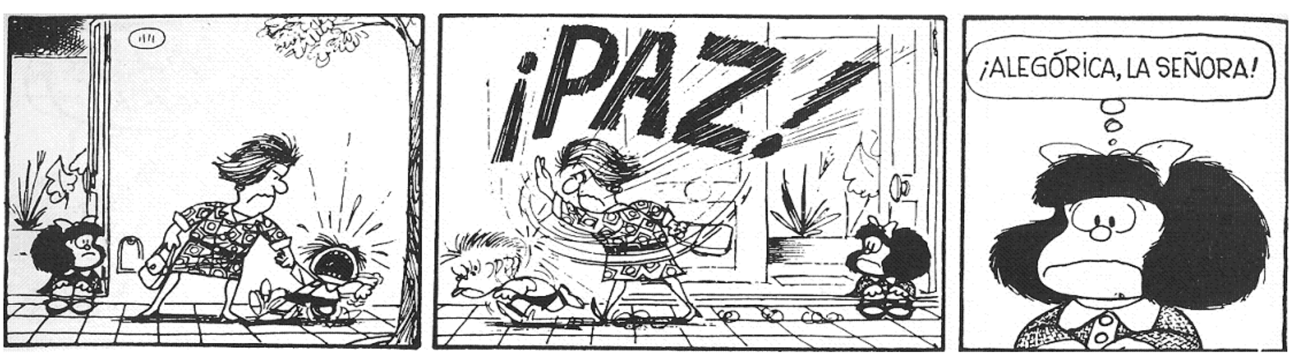
   (a) ¿Qué condición deben cumplir los $y_i$ con $i = 0, 1, \cdots n$, para que sea posible hallar $q_n$?

   (b) Plantee un algoritmo que calcule una aproximación a la raíz cúbica de un número dado $a$, solamente usando operaciones básicas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones). Para resolver este problema, considere la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   $$f(x) = x^3 - a. \tag{3}$$

   Note que si $x_* \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x_*) = 0$, entonces $x_*$ es exactamente la raíz cúbica de $a$.

   (c) Implente su idea en una rutina con el siguiente encabezado `function [r]=raiz3(a)`, donde `r` aproxima a la raíz cúbica de `a`.




Grupo Docente de Cálculo Científico I / Realizado por M. Monsalve