UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE COMPUTACIÓN
CÁLCULO CIENTÍFICO (6109)
SEMESTRE II-2014

TALLER 7 - Métodos iterativos estacionarios para resolver SEL

Parte Introductoria

En este taller se quiere resolver el problema $Ax = b$, utilzando métodos de la forma:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d, \tag{1}$$

donde, B es llamada matriz de iteración y d el vector de iteración. La convergencia de este tipo de métodos iterativos depende de los autovalores de la matriz B, especifícamente del radio espectral de B $(\rho(B))$[1]. Una medida de qué tan rápido converge la iteración (1), es la **tasa de convergencia asintótica** definida como:

$$T(B) = -ln(\rho(B)).$$

En este taller se realizarán experimentos numéricos que involucran a $T(B)$ para los distintos métodos iterativos de la forma (1) vistos en clase (Jacobi, Gauss-Seidel y SOR). También para la elaboración de este taller se requiere el uso de las siguientes funciones de MATLAB:

- `norm(`A`)`: Obtiene la norma de la matriz A.
- `eig(`A`)`: Obtiene los autovalores de la matriz A.
- `diag(`A`)`: Obtiene la diagonal de la matriz A.
- `triu(`A`,1)`: Obtiene la matriz triangular superior de A sin la diagonal.
- `tril(`A`,-1)`: Obtiene la matriz triangular inferior de A sin la diagonal.

Parte Práctica

1. Implemente los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. Para ello complete la instrucciones faltantes en el archivo `MetIter.m` para cada método (El archivo `formulacion.pdf` le será de ayuda)

2. Considere los siguientes dos sistemas lineales:

$$\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 63 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 70 \end{bmatrix},$$

y responda las siguientes preguntas:

[1] Recuerde que $\rho(B)$ es el máximo autovalor de B es valor absoluto

- ¿Cuáles son los primeros 10 iterados cuando se aplican los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver cada uno de los sistemas lineales anteriores?.
- Para cada sistema lineal, ¿Cuál método converge más rápido entre Jacobi y Gauss-Seidel y por qué?.

3. Dado el sistema lineal $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   - Suponga que se va a utilizar el método de SOR(ω) para resolver este sistema con $\omega \notin (0, 2)$. ¿Qué debería suceder?. Compruebe su hipótesis realizando pruebas en el computador.
   - Realice una gráfica en donde se muestre cómo evoluciona la tasa de convergencia asintótica para el método de SOR(ω) mientras ω varía en $(0, 2)$. Mediante esta gráfica dé una aproximación al valor óptimo de ω. Se entiende por valor de óptimo de ω aquel que produce la más alta tasa de convergencia asintótica de SOR(ω).
   - Compare en cuanto a número de iteraciones a los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR(ω) donde

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}.$$

4. Se requiere resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 2x + -y + z &= -2 \\ -2x + 4y - z &= 1 \\ 2x + y + 4z &= -6 \end{aligned}$$

   - Estudie la convergencia de Jacobi y Gauss-Seidel cuando se aplican para resolver el sistema anterior.
   - Utilice los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema.
   - En base a los resultados. Indique, razonablemente, por qué se cree que un método es más rápido que el otro.

Grupo Docente de Cálculo Científico I / Realizado por M. Monsalve