UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE COMPUTACIÓN
CÁLCULO CIENTÍFICO (6109)
SEMESTRE II-2014
Fecha de asignación: 25/02/2015

PROYECTO: Sistemas de ecuaciones lineales en bloques

# Introducción

La solución de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) es considerado uno de los problemas más comunes y útiles del álgebra lineal e incluso surgen de manera natural en problemas de otras áreas.

Cabe mencionar que los SEL pueden tener una estructura en bloques, esto es, los elementos que conforman a la matriz de coeficientes, vector incógnita y vector independiente no son valores reales sino matrices. Este tipo de problemas recibe el nombre de sistemas de ecuaciones lineales en bloques. De manera formal, un sistema de ecuaciones lineales en bloques se define como:

$$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B} \tag{1}$$

con

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \qquad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix},$$

donde:

- La matriz de coeficientes $\mathcal{A}$ es una matriz en bloques. Es decir, cada elemento $ij$ de $\mathcal{A}$, denotado por $\mathcal{A}_{ij}$, es a su vez una matriz. Específicamente,

$$\mathcal{A}_{ij} = A_{ij}, \text{ con } A_{ij} \in \mathbb{R}^{p\times p} \text{ para } i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

- Los elementos del vector de incógnitas y del vector independiente son matrices, es decir, $\mathcal{X}_i = X_i$ y $\mathcal{B}_i = B_i$ con $X_i, B_i \in \mathbb{R}^{p\times q}$ para $i = 1, 2, \ldots, N$. Teniendo en cuenta la notación anterior, nos referiremos a $\mathcal{B}$ como la matriz independiente, mientras que $\mathcal{X}$ será la matriz de incógnitas.

# Factorización $LU$ en bloques

1. Proponga un algoritmo que permita hallar la factorización $LU$ en bloques de una matriz $\mathcal{A}$ dada. Es decir, dada una matriz $\mathcal{A}$ cuadrada de $N \times N$ bloques, se deben hallar dos matrices, $\mathcal{L}$ (triangular inferior en bloques) y $\mathcal{U}$ (triangular superior en bloques), tales que $\mathcal{A} = \mathcal{L}\mathcal{U}$. Específicamente, las matrices $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$ deben poseer la siguiente estructura:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & I_p & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{N1} & L_{N2} & \cdots & I_p \end{bmatrix} \qquad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1N} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{1N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & U_{NN} \end{bmatrix}$$

donde $I_p$ representa a la matriz identidad de orden $p$, mientras que las matrices $L_{ij}$ y $U_{ij}$ son cuadradas de orden $p$ y no necesariamente poseen alguna estructura particular.

2. Implemente su propuesta teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:
   - La matriz $\mathcal{A}$ se genera mediante el scrip `Ablock.m` (adjunto). El encabezado de dicho scrip es $[\mathcal{A}] = \texttt{Ablock}(N, p)$
   - Su algoritmo NO puede calcular inversas.
   - Sólo podrá resolver SEL triangulares: Si su propuesta requiere la solución de SEL, la matriz de coeficientes de dichos sistemas solo puese ser triangular superior o inferior, y la solución de los sistemas debe obtenerse mediante los algoritmos de sustitución hacia adelante o de sustitución hacia atras, según sea el caso.
   - Su implementación debe poseer el siguiente encabezado:
     `function` $[\mathcal{L},\mathcal{U}] = \texttt{BlockLU}(\mathcal{A}, N, p)$
     `Implementacion de su propuesta para generar` $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$

## Solución de SEL en bloques

1. Proponga un algoritmo que resuelva SEL en bloques mediante el uso de la factorización $LU$ en bloques, generada en la sección anterior.
2. Implemente su propuesta, teniendo en cuanta las siguientes consideraciones:
   - La matriz $\mathcal{A}$ se genera mediante el mismo scrip `Ablock.m`. Mientras que la matriz independiente se genera mediante el scrip `Bblock.m` (adjunto) cuyo encabezado es $[\mathcal{B}] = \texttt{Bblock}(N, p, q)$
   - Aplican las mismas restricciones de la sección anterior: NO puede calcular inversas y sólo puede resolver SEL triangulares.
   - Su implementación debe poseer el siguiente encabezado:
     `function` $[\mathcal{X}] = \texttt{SolBlock}(\mathcal{A}, \mathcal{B}, N, p, q)$
     `Implementacion de su propuesta para generar` $\mathcal{X}$ `tal que` $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$

## Consideraciones finales

1. El proyecto debe ser realizado por dos personas máximo.
2. Se deben resolver todos los requerimientos del proyecto.
3. Puede usar Matlab u Octave para sus implementaciones.
4. Usted deberá entregar en la fecha prevista UNICAMENTE un archivo en formato zip (`apellido1apellido2.zip`), que contenga como mínimo cuatro archivos: `informe.pdf`[1], `BlockLU.m`, `SolBlock.m` y `main.m` siendo este último el programa principal.
5. **Importante:** Se tomarán muy en cuenta aspectos concernientes a la programación: eficiencia, facilidad de uso, validaciones de la data de entrada, etc.
6. El informe electrónico (formato `pdf`) debe cumplir con los siguientes aspectos:
   - Interlineado 1.5, letra tamaño 12. El número de páginas no debe ser menor a 3 ni mayor a 5.
   - El informe debe contener una sección con información que usted considere relevante para “ejecutar” su propuesta numérica.
7. Fecha de entrega: 20 de Marzo de 2015.

[1] LÉASE BIEN: el informe DEBE estar en formato PDF.