UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE COMPUTACIÓN
CÁLCULO CIENTÍFICO (6109)
SEMESTRE II-2014

TALLER 6 - Mínimos cuadrados lineales.

MATLAB

- $L = chol(A)$. Encuentra la factorización de Cholesky de la matriz A.
- `[Q,R] = qr(A)`: Encuentra la factorización `QR` full de la matriz `A`.
- `[Q,R] = qr(A,0)`: Encuentra la factorización `QR` reducida de la matriz `A`.
- `cond(A,p)`: Determina el número de condición de la matriz `A`, en la norma subordinada `p`.

Parte Práctica

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

La solución exacta de este sistema es $x_* = (1,1,1)^t$ razón por la cual $r = b - Ax_* = 0$. Así mismo, observe que para $|\epsilon| \approx 0$ el rango de A es tres, mientras que para $\epsilon = 0$ el rango de esta matriz es uno. El objetivo de este ejercicio es, aproximar x_* mediante distintos métodos directos para resolver un sistema sobredeterminado y luego determinar la calidad de dichas aproximaciones.

Para los siguientes valores de $\epsilon = 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}, 10^{-10}$:

a) Calcule la condición de $A^T A$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones normales usando la factorización de Cholesky de $A^T A$, y denote por x_c la aproximación obtenida. Calcule $r_c = b - Ax_c$ y $e_c = x_* - x_c$.

c) Resuelva el sistema sobredeterminado usando la factorización QR de A, vía Householder (comando `qr`(A)) y denote por x_h la aproximación obtenida. Calcule $r_h = b - Ax_h$ y $e_h = x_* - x_h$.

d) Resuelva el sistema sobredeterminado usando la factorización QR reducida de A, vía Gram Schmidt modificado (rutina `mdgrsch.m`) y denote por x_g la aproximación obtenida. Calcule $r_g = b - Ax_g$ y $e_g = x_* - x_g$.

e) Con los valores obtenidos en los ítems anteriores complete la siguiente tabla

		Residuales			**Errores**		
ϵ	$cond(A^T A)$	$\|r_c\|_2$	$\|r_h\|_2$	$\|r_g\|_2$	$\|e_c\|_2$	$\|e_h\|_2$	$\|e_g\|_2$
10^{-6}							
10^{-7}							
10^{-8}							
10^{-9}							
10^{-10}							

f) En función de los datos de la Tabla anterior qué método usaría para resolver el sistema dado. Justifique su respuesta.

2. Considere los siguientes puntos (x_i, y_i) en $\mathbb{R}^2$: $(0,4)$, $(1,5)$, $(2,8)$, $(3,1)$.

   - Obtenga el polinomio $p_2(x)$ de grado menor o igual a dos que mejor aproxime, en el sentido de los mínimos cuadrados a los puntos dados.
   - Grafique a $p_2(x)$ y a los puntos (x_i, y_i) en el intervalo $[-0.5, 3.5]$.
   - Calcule el error generado por $p_2(x)$, es decir calcule $\sum_{i=1}^{4} [p_2(x_i) - y_i]^2$.
   - Cambie el punto $(3,1)$ por el punto $(3,13)$ y repita los ítems anteriores. ¿Qué observa?

3. Sea la siguiente matriz A y un vector b

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   - Determine el rango de la matriz A y el rango de la matriz aumentada $(A|b)$. Tiene solución el sistema?
   - Construya los elementos del sistema de ecuaciones normales para la matriz A dada y el vector independiente b. Calcule el número de condición de A y A^tA. Qué relación observa entre estos valores?
   - Según sus conocimientos de teoría: Qué factorización emplearía para resolver el sistema de ecuaciones normales.? Por qué?
   - Considera que el sistema de ecuaciones normales es la forma más apropiada de resolver un sistema sobredeterminado. Por qué?