

# Trabalho N<sup>o</sup>1 - MRAC Direto

COE603 - Controle Adaptativo

Caio Cesar Leal Verissimo - 119046624

Leonardo Soares da Costa Tanaka - 121067652

Lincoln Rodrigues Proença - 121076407

Engenharia de Controle e Automação - UFRJ

Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

Maio de 2025

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Resumo das equações do sistema</b>	<b>2</b>
1.1	Equações do Algoritmo MRAC Direto . . . . .	2
1.2	Estabilidade do Algoritmo MRAC Direto . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Diagramas de blocos</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Resultados das simulações</b>	<b>5</b>
3.1	Simulação #1 . . . . .	5
3.2	Simulação #2 . . . . .	6
3.3	Simulação #3 . . . . .	6
3.4	Simulação #4 . . . . .	7
3.5	Simulação #5 . . . . .	7
3.6	Simulação #6 . . . . .	8
3.7	Simulação #7 . . . . .	8
3.8	Simulação #8 . . . . .	9
3.9	Simulação #9 . . . . .	9
3.10	Simulação #10 . . . . .	10

# 1 Resumo das equações do sistema

Neste experimento, simulamos o algoritmo **MRAC Direto** para o caso:

- $n = 1$  (ordem da planta)
- $n^* = 1$  (grau relativo)
- $n_p = 2$  (número de parâmetros)

## 1.1 Equações do Algoritmo MRAC Direto

A Tabela 1 resume as equações fundamentais do algoritmo MRAC (Model Reference Adaptive Control) na forma direta, considerando uma planta de primeira ordem ( $n = 1$ ), grau relativo igual a 1 ( $n^* = 1$ ) e número de parâmetros  $n_p = 2$ .

Descrição	Equação	Ordem
Planta	$\dot{y} = a_p y + k_p u$	1
Modelo	$\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r$	1
Erro da saída	$e_0 = y - y_m$	
Lei de controle	$u = \theta^T \omega$	
Regressor	$\omega^T = \begin{bmatrix} y & r \end{bmatrix}$	
Lei de adaptação	$\dot{\theta} = -\text{sign}(k_p) \Gamma \omega e_0$	2

Tabela 1: Resumo do Algoritmo MRAC Direto

A Figura 1 ilustra o diagrama de blocos do sistema em malha fechada, juntamente com a verificação da equivalência com o modelo de referência. Este diagrama mostra como a combinação dos ganhos adaptativos  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  pode transformar o comportamento da planta para que ela imite o modelo de referência.

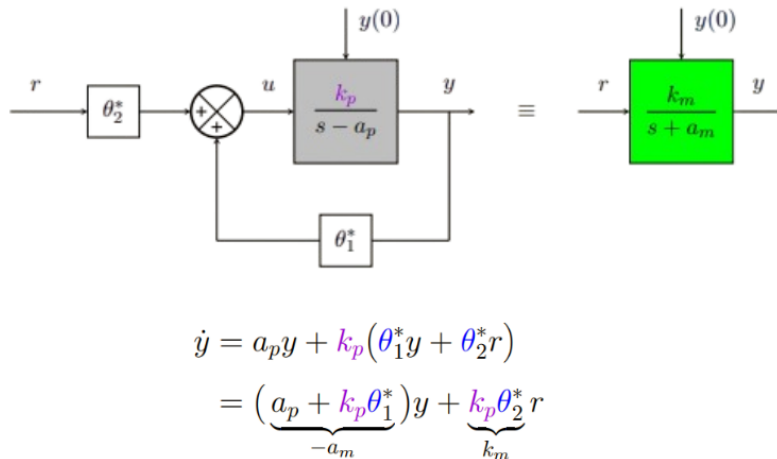


Figura 1: Diagrama de blocos e verificação da equivalência com o modelo de referência

As expressões ideais para os parâmetros  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  que garantem essa equivalência são apresentadas a seguir. Esses parâmetros são obtidos por identificação direta, com base nas constantes do modelo e da planta.

$$\theta_1^* = -\frac{a_p + a_m}{k_p}$$

$$\theta_2^* = \frac{k_m}{k_p}$$

Essas equações representam os valores ideais dos parâmetros adaptativos para que a planta controlada siga o comportamento especificado pelo modelo de referência. Na prática, o algoritmo de adaptação busca aproximar esses valores ao longo do tempo.

## 1.2 Estabilidade do Algoritmo MRAC Direto

**1. Forma vetorial e definições** Escrevendo em forma vetorial:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \implies u^* = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Analogamente, a lei de controle é

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \implies u = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

**2. Dinâmica do erro** Definimos o erro de saída:

$$e = y - y_m. \quad (3)$$

Subtraindo as dinâmicas da planta e do modelo:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m = (a_p y + k_p u) - (-a_m y_m + k_m r) \\ &= -a_m (y - y_m) + (a_p + a_m) y + k_p u - k_m r + \underbrace{(a_m y) - (a_m y)}_{=0} \\ &= -a_m e + k_p \left[ \frac{a_p + a_m}{k_p} y + u - \frac{k_m}{k_p} r \right] \\ &= -a_m e + k_p [u - \theta_1^* y - \theta_2^* r] \\ &= -a_m e + k_p [u - u^*]. \end{aligned} \quad (4)$$

**3. Erro paramétrico** Definimos o vetor de erro de parâmetro:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^* \implies \dot{e} = -a_m e + k_p \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

**4. Função de Lyapunov** Escolhemos

$$V(e, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (6)$$

Calculando sua derivada:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e \dot{e} + |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= -a_m e^2 + k_p \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\omega} e + |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Para garantir  $\dot{V} \leq 0$ , adotamos a lei de adaptação

$$\dot{\theta} = -\Gamma \text{sign}(k_p) \omega e. \quad (8)$$

**5. Conclusões de estabilidade** Com essa escolha,

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0, \implies e(t), \tilde{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty. \quad (9)$$

Como  $r(t) \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow y_m(t) \in \mathcal{L}_\infty$  e

$$\dot{V} \leq 0 \implies V(t) \leq V(0), \quad (10)$$

segue que

$$\int_0^t e^2(\tau) d\tau < \infty \implies e \in \mathcal{L}_2. \quad (11)$$

Finalmente, aplicando o lema de Barbalat,

$$e \in \mathcal{L}_2, \quad \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty \implies \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (12)$$

## 2 Diagramas de blocos

Nesta seção, apresentamos os principais diagramas de blocos que descrevem o funcionamento do controle adaptativo modelo-referência (MRAC) na sua forma direta. Cada figura ilustra uma parte fundamental do sistema, desde a estrutura geral até os componentes individuais como a planta, o modelo de referência e a malha de adaptação.

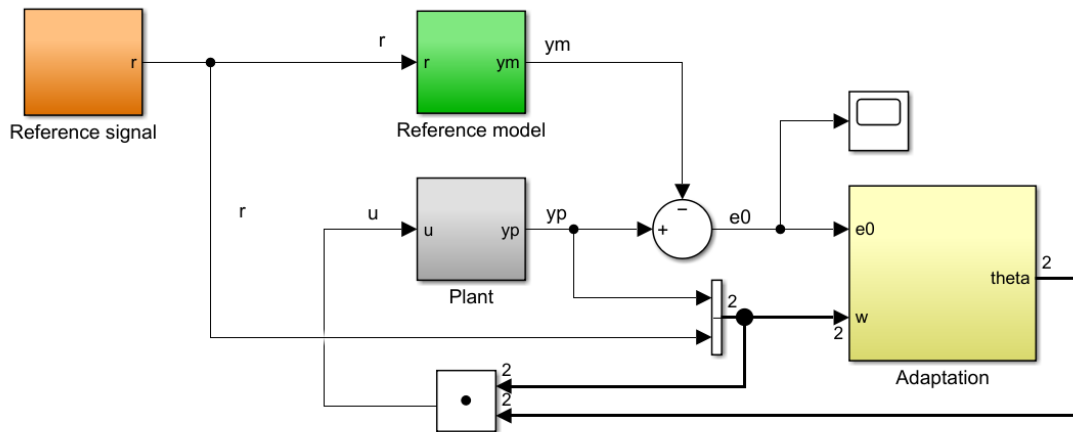


Figura 2: Diagrama de blocos geral do controle MRAC direto.

A Figura 2 mostra a arquitetura geral do controlador MRAC direto. O objetivo do sistema é ajustar os parâmetros do controlador de modo que a saída da planta acompanhe a saída do modelo de referência para qualquer entrada  $r(t)$ . O sinal de erro  $e = y - y_m$  é utilizado para atualizar os parâmetros adaptativos.

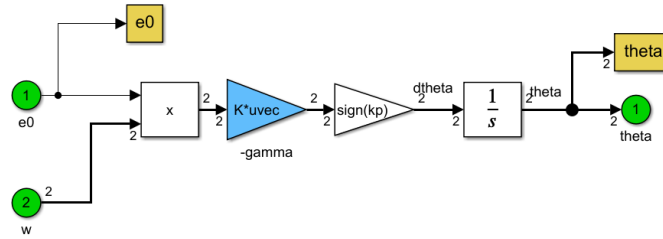


Figura 3: Malha de adaptação dos parâmetros  $\theta$ .

Na Figura 3, destacamos a malha de adaptação, responsável por ajustar os parâmetros do controlador  $\theta$  com base no erro de seguimento. Essa adaptação ocorre conforme uma lei de atualização derivada da função de Lyapunov, garantindo estabilidade do sistema.

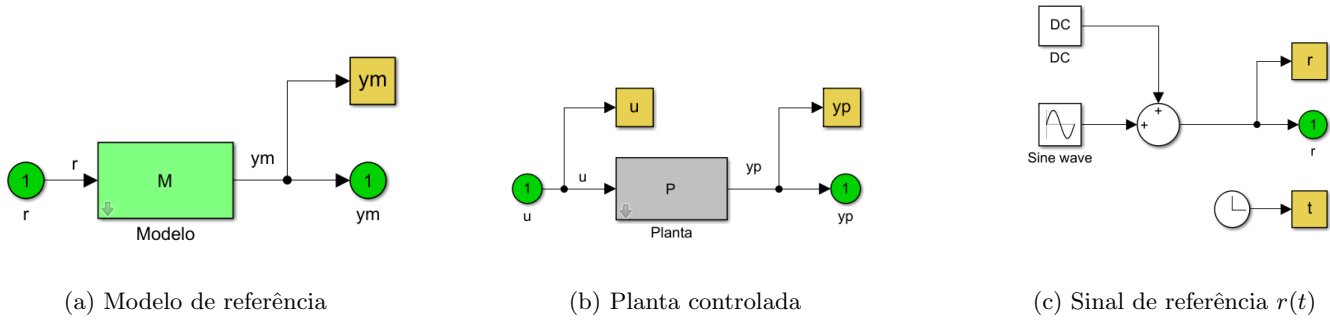


Figura 4: Componentes individuais do sistema MRAC.

A Figura 4 agrupa os blocos fundamentais do sistema MRAC. À esquerda, o modelo de referência define a dinâmica desejada para o sistema. Ao centro, está a planta controlada, que deve seguir essa referência. À direita, o sinal de referência  $r(t)$  atua como entrada comum para ambos os blocos, sendo a base para comparação entre o comportamento ideal e o real.

### 3 Resultados das simulações

Cada subseção a seguir apresenta a configuração do experimento, espaço reservado para os dados obtidos em cada simulação e comentários sobre o desempenho do MRAC Direto.

#### 3.1 Simulação #1

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{k_p}{s - a_p} = \frac{1}{s - 2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{k_m}{s + a_m} = \frac{1}{s + 1}$

- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1$  (constante),  $A_s = 0, \omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(a_p + a_m)/k_p; k_m/k_p] = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.2 Simulação #2

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2$  (constante),  $A_s = 1, \omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.3 Simulação #3

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$

- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 3$ ,  $y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1$  (constante),  $A_s = 0$ ,  $\omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-3; , 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}$ ,  $\Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; , 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.4 Simulação #4

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 3$ ,  $y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2$  (constante),  $A_s = 1$ ,  $\omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-3; , 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}$ ,  $\Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; , 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.5 Simulação #5

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+4}$

- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1$  (constante),  $A_s = 0, \omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2 + 4)/1; , 1/1] = [-6; , 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; , 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.6 Simulação #6

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s - 2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s + 4}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2, A_s = 1, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2 + 4)/1; ; 2/1] = [-6; ; 2]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; ; 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.7 Simulação #7

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s - 2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{2}{s + 1}$



- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1, A_s = 0, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; ; 2/1] = [-3; ; 2]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; ; 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.8 Simulação #8

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{2}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2, A_s = 1, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; ; 2/1] = [-3; ; 2]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; ; 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.9 Simulação #9

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$

- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1, A_s = 0, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; ; 1/1] = [-3; ; 1]$
- **Ganho de adaptação:**

$$\Gamma_1 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ 0.35 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; ; 0]$

Resultados da simulação:

Comentários:

### 3.10 Simulação #10

Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2, A_s = 1, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; ; 1/1] = [-3; ; 1]$
- **Ganho de adaptação:**

$$\Gamma_1 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ 0.35 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ 0.35 & 1 \end{bmatrix}$$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; ; 0]$

Resultados da simulação:

Comentários: