

# Trabalho N<sup>o</sup>1 - MRAC Direto

COE603 - Controle Adaptativo

Caio Cesar Leal Verissimo - 119046624

Leonardo Soares da Costa Tanaka - 121067652

Lincoln Rodrigues Proença - 121076407

Engenharia de Controle e Automação - UFRJ

Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

Maio de 2025

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Resumo das equações do sistema</b>	<b>3</b>
1.1	Equações do Algoritmo MRAC Direto . . . . .	3
1.2	Estabilidade do Algoritmo MRAC Direto . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Diagramas de blocos</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Resultados das simulações</b>	<b>6</b>
3.1	Simulação #1 . . . . .	7
3.1.1	Configuração do experimento: . . . . .	7
3.1.2	Resultados da simulação: . . . . .	7
3.1.3	Comentários: . . . . .	8
3.2	Simulação #2 . . . . .	9
3.2.1	Configuração do experimento: . . . . .	9
3.2.2	Resultados da simulação: . . . . .	9
3.2.3	Comentários: . . . . .	10
3.3	Simulação #3 . . . . .	11
3.3.1	Configuração do experimento: . . . . .	11
3.3.2	Resultados da simulação: . . . . .	11
3.3.3	Comentários: . . . . .	12
3.4	Simulação #4 . . . . .	13
3.4.1	Configuração do experimento: . . . . .	13

3.4.2	Resultados da simulação: . . . . .	13
3.4.3	Comentários: . . . . .	14
3.5	Simulação #5 . . . . .	15
3.5.1	Configuração do experimento: . . . . .	15
3.5.2	Resultados da simulação: . . . . .	15
3.5.3	Comentários: . . . . .	16
3.6	Simulação #6 . . . . .	17
3.6.1	Configuração do experimento: . . . . .	17
3.6.2	Resultados da simulação: . . . . .	17
3.6.3	Comentários: . . . . .	18
3.7	Simulação #7 . . . . .	19
3.7.1	Configuração do experimento: . . . . .	19
3.7.2	Resultados da simulação: . . . . .	19
3.7.3	Comentários: . . . . .	20
3.8	Simulação #8 . . . . .	21
3.8.1	Configuração do experimento: . . . . .	21
3.8.2	Resultados da simulação: . . . . .	21
3.8.3	Comentários: . . . . .	22
3.9	Simulação #9 . . . . .	23
3.9.1	Configuração do experimento: . . . . .	23
3.9.2	Resultados da simulação: . . . . .	23
3.9.3	Comentários: . . . . .	24
3.10	Simulação #10 . . . . .	25
3.10.1	Configuração do experimento: . . . . .	25
3.10.2	Resultados da simulação: . . . . .	25
3.10.3	Comentários: . . . . .	26

<b>A</b>	<b>Decomposição de Matrizes: Parte Simétrica e Antissimétrica</b>	<b>27</b>
----------	---	-----------

# 1 Resumo das equações do sistema

Neste experimento, simulamos o algoritmo **MRAC Direto** para o caso:

- $n = 1$  (ordem da planta)
- $n^* = 1$  (grau relativo)
- $n_p = 2$  (número de parâmetros)

## 1.1 Equações do Algoritmo MRAC Direto

A Tabela 1 resume as equações fundamentais do algoritmo MRAC (Model Reference Adaptive Control) na forma direta, considerando uma planta de primeira ordem ( $n = 1$ ), grau relativo igual a 1 ( $n^* = 1$ ) e número de parâmetros  $n_p = 2$ .

Descrição	Equação	Ordem
Planta	$\dot{y} = a_p y + k_p u$	1
Modelo	$\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r$	1
Erro da saída	$e_0 = y - y_m$	
Lei de controle	$u = \theta^T \omega$	
Regressor	$\omega^T = [y \quad r]$	
Lei de adaptação	$\dot{\theta} = -\text{sign}(k_p) \Gamma \omega e_0$	2

Tabela 1: Resumo do Algoritmo MRAC Direto

A Figura 1 ilustra o diagrama de blocos do sistema em malha fechada, juntamente com a verificação da equivalência com o modelo de referência. Este diagrama mostra como a combinação dos ganhos adaptativos  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  pode transformar o comportamento da planta para que ela imite o modelo de referência.

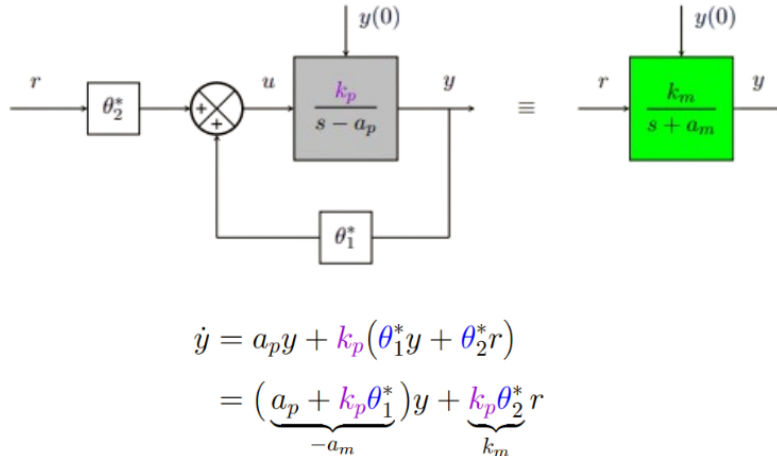


Figura 1: Diagrama de blocos e verificação da equivalência com o modelo de referência

As expressões ideais para os parâmetros  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$  que garantem essa equivalência são apresentadas a seguir. Esses parâmetros são obtidos por identificação direta, com base nas constantes do modelo e da planta.

$$\theta_1^* = -\frac{a_p + a_m}{k_p}$$

$$\theta_2^* = \frac{k_m}{k_p}$$

Essas equações representam os valores ideais dos parâmetros adaptativos para que a planta controlada siga o comportamento especificado pelo modelo de referência. Na prática, o algoritmo de adaptação busca aproximar esses valores ao longo do tempo.

## 1.2 Estabilidade do Algoritmo MRAC Direto

**1. Forma vetorial e definições** Escrevendo em forma vetorial:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \implies u^* = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\omega}. \quad (1)$$

Analogamente, a lei de controle é

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \implies u = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

**2. Dinâmica do erro** Definimos o erro de saída:

$$e = y - y_m. \quad (3)$$

Subtraindo as dinâmicas da planta e do modelo:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m = (a_p y + k_p u) - (-a_m y_m + k_m r) \\ &= -a_m (y - y_m) + (a_p + a_m) y + k_p u - k_m r + \underbrace{(a_m y) - (a_m y)}_{=0} \\ &= -a_m e + k_p \left[ \frac{a_p + a_m}{k_p} y + u - \frac{k_m}{k_p} r \right] \\ &= -a_m e + k_p [u - \theta_1^* y - \theta_2^* r] \\ &= -a_m e + k_p [u - u^*]. \end{aligned} \quad (4)$$

**3. Erro paramétrico** Definimos o vetor de erro de parâmetro:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^* \implies \dot{e} = -a_m e + k_p \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

**4. Função de Lyapunov** Escolhemos

$$V(e, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (6)$$

Calculando sua derivada:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e \dot{e} + |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= -a_m e^2 + k_p \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\omega} e + |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Para garantir  $\dot{V} \leq 0$ , adotamos a lei de adaptação

$$\dot{\theta} = -\Gamma \text{sign}(k_p) \omega e. \quad (8)$$

**5. Conclusões de estabilidade** Com essa escolha,

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0, \implies e(t), \tilde{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty. \quad (9)$$

Como  $r(t) \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow y_m(t) \in \mathcal{L}_\infty$  e

$$\dot{V} \leq 0 \implies V(t) \leq V(0), \quad (10)$$

segue que

$$\int_0^t e^2(\tau) d\tau < \infty \implies e \in \mathcal{L}_2. \quad (11)$$

Finalmente, aplicando o lema de Barbalat,

$$e \in \mathcal{L}_2, \quad \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty \implies \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (12)$$

## 2 Diagramas de blocos

Nesta seção, apresentamos os principais diagramas de blocos que descrevem o funcionamento do controle adaptativo modelo-referência (MRAC) na sua forma direta. Cada figura ilustra uma parte fundamental do sistema, desde a estrutura geral até os componentes individuais como a planta, o modelo de referência e a malha de adaptação.

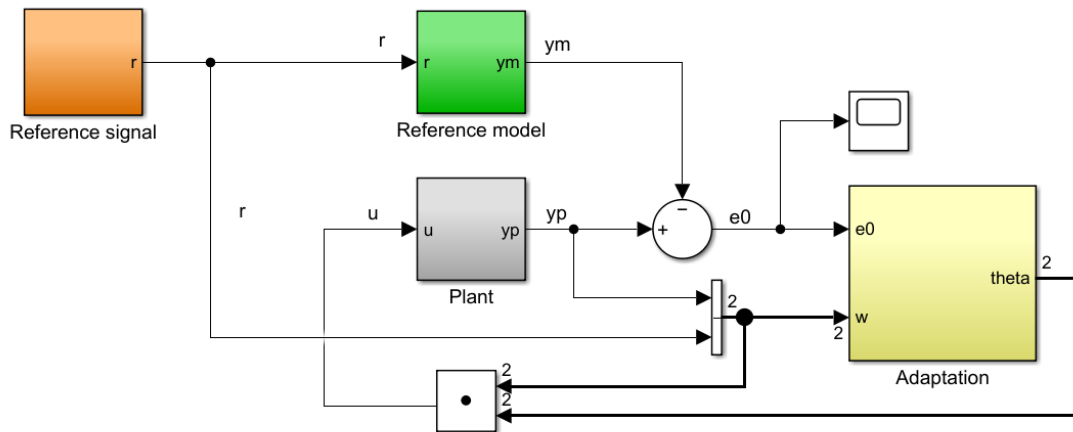
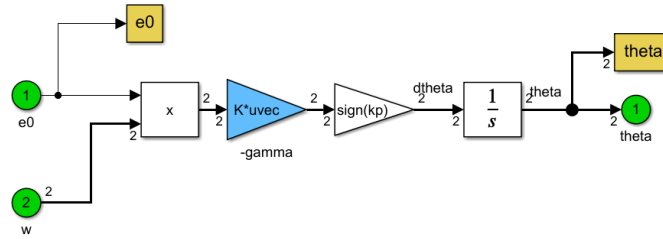


Figura 2: Diagrama de blocos geral do controle MRAC direto.

A Figura 2 mostra a arquitetura geral do controlador MRAC direto. O objetivo do sistema é ajustar os parâmetros do controlador de modo que a saída da planta acompanhe a saída do modelo de referência para qualquer entrada  $r(t)$ . O sinal de erro  $e = y - y_m$  é utilizado para atualizar os parâmetros adaptativos.

Figura 3: Malha de adaptação dos parâmetros  $\theta$ .

Na Figura 3, destacamos a malha de adaptação, responsável por ajustar os parâmetros do controlador  $\theta$  com base no erro de seguimento. Essa adaptação ocorre conforme uma lei de atualização derivada da função de Lyapunov, garantindo estabilidade do sistema.

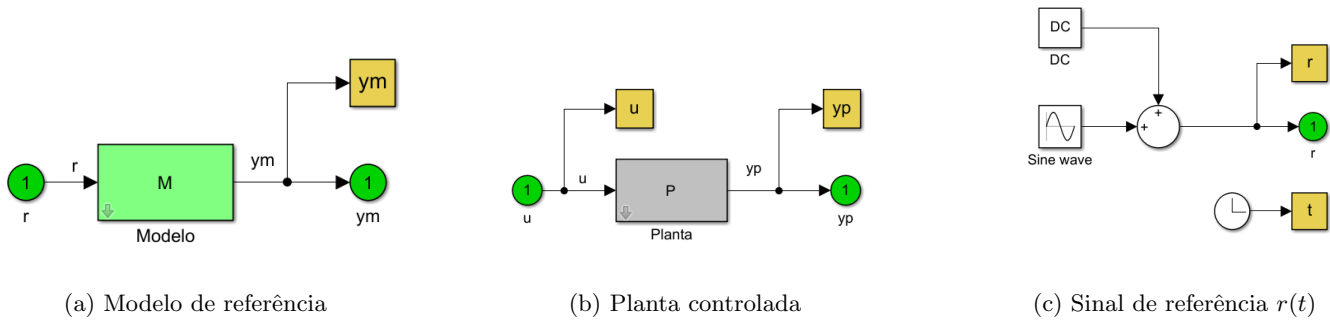


Figura 4: Componentes individuais do sistema MRAC.

A Figura 4 agrupa os blocos fundamentais do sistema MRAC. À esquerda, o modelo de referência define a dinâmica desejada para o sistema. Ao centro, está a planta controlada, que deve seguir essa referência. À direita, o sinal de referência  $r(t)$  atua como entrada comum para ambos os blocos, sendo a base para comparação entre o comportamento ideal e o real.

### 3 Resultados das simulações

Cada subseção a seguir apresenta a configuração do experimento, espaço reservado para os dados obtidos em cada simulação e comentários sobre o desempenho do MRAC Direto.

### 3.1 Simulação #1

#### 3.1.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{k_p}{s - a_p} = \frac{1}{s - 2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{k_m}{s + a_m} = \frac{1}{s + 1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1$  (constante),  $A_s = 0, \omega_s = 5$  rad/s
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(a_p + a_m)/k_p; k_m/k_p] = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.1.2 Resultados da simulação:

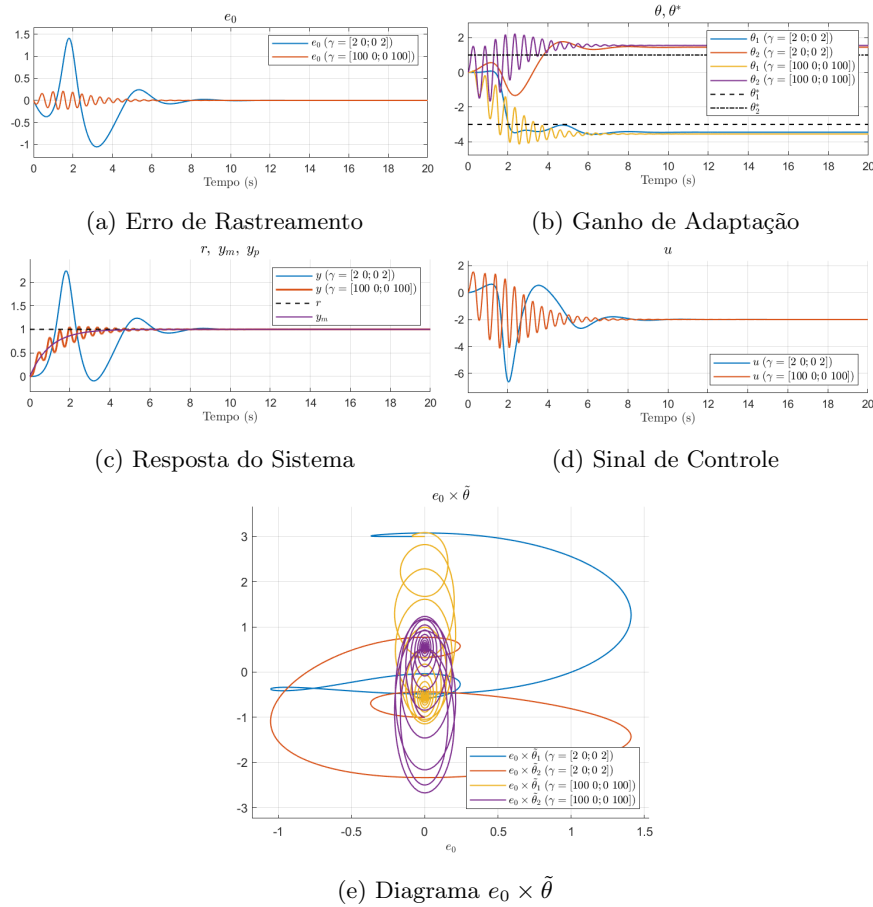


Figura 5: Resultado da simulação (Script: *simu01.m*)

### 3.1.3 Comentários:

A simulação do MRAC Direto apresentou os seguintes comportamentos, conforme a variação do ganho de adaptação  $\Gamma$ :

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** Para  $\Gamma = 100I$ , o erro converge mais rapidamente com menor overshoot. Já para  $\Gamma = 2I$ , a convergência é mais lenta e com maiores oscilações, só que uma menor frequência de oscilação.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Ambos os casos não convergem para o valor ótimo  $\theta^* = [-3; 1]$ . Porque o sinal de entrada que é um sinal DC igual a 1, o que não auxilia na convergência do ganho de adaptação.
- **Resposta do sistema ( $y_p$  e  $y_m$ ):** O rastreamento da referência é mais eficiente para  $\Gamma = 100I$ , apresentando menor erro e resposta mais rápida.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** Ambos os casos convergem para o valor adequado em regime permanente. Com  $\Gamma = 100I$ , o controle atua de forma mais intensa no início, mas estabiliza mais rapidamente.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** Para  $\Gamma = 2I$ , a trajetória é mais lenta e ampla; para  $\Gamma = 100I$ , há convergência rápida com órbitas mais fechadas.

**Conclusão:** Aumentar o ganho de adaptação  $\Gamma$  melhora significativamente a velocidade de convergência do sistema, tanto para o erro quanto para os parâmetros adaptativos, ao custo de maior agressividade no transiente.



## 3.2 Simulação #2

### 3.2.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2$  (constante),  $A_s = 1, \omega_s = 5$  rad/s
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

### 3.2.2 Resultados da simulação:

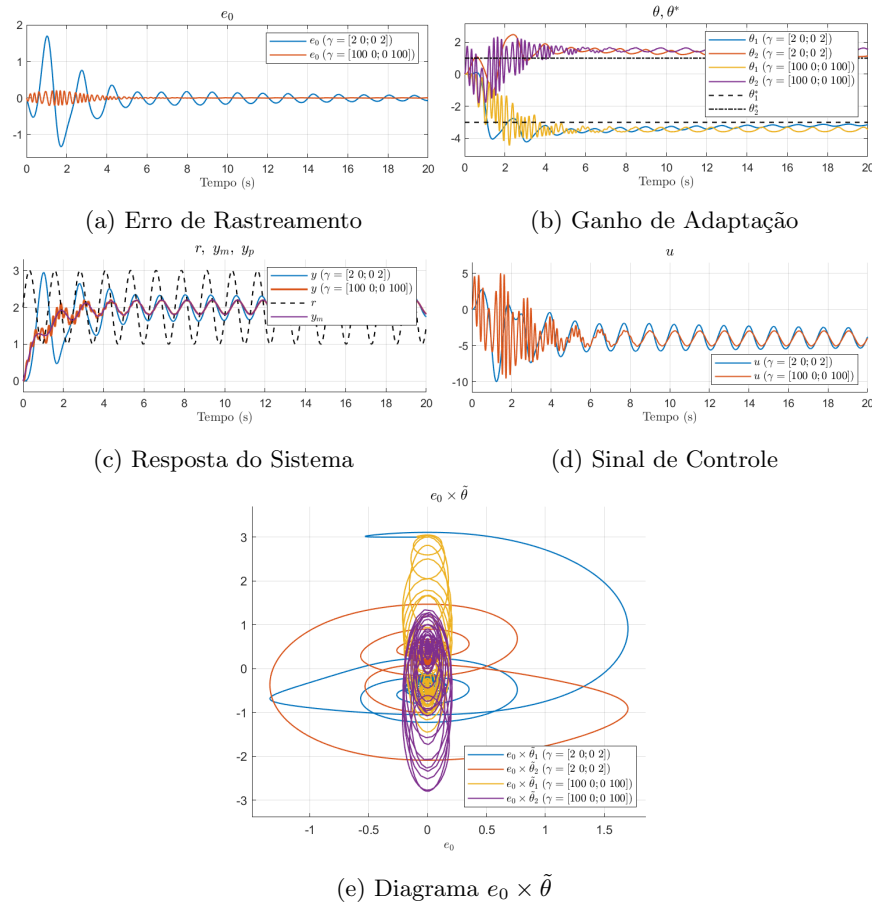


Figura 6: Resultado da simulação (Script: *simu02.m*)

### 3.2.3 Comentários:

Nesta simulação, foi utilizado um sinal de referência composto por uma componente DC e uma senoidal, o que introduz maior oscilação no sistema. Os principais resultados observados foram:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** O erro apresenta comportamento oscilatório permanente devido à componente senoidal do sinal de referência. Com  $\Gamma = 100I$ , o erro é mais suavizado e acompanha melhor a referência.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Ambos os casos convergem para valores próximos de  $\theta^*$ , com maior rapidez e menor variação para  $\Gamma = 100I$ .
- **Resposta do sistema ( $y_p, y_m, r$ ):** A resposta com  $\Gamma = 100I$  segue melhor a referência, com menor defasagem e melhor rastreamento da componente senoidal.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** Oscilatório em ambos os casos, com maior intensidade e frequência no início. A escolha de  $\Gamma$  mais alto permite estabilização mais rápida, porém com maior ação de controle.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** Com  $\Gamma = 100I$ , as trajetórias convergem de forma mais concentrada em torno da origem, indicando melhor desempenho adaptativo.

**Conclusão:** A presença da componente senoidal no sinal de referência exige maior capacidade adaptativa do sistema. O ganho de adaptação elevado ( $\Gamma = 100I$ ) proporciona resposta mais precisa, embora com maior esforço de controle.

### 3.3 Simulação #3

#### 3.3.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 3, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1$  (constante),  $A_s = 0, \omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.3.2 Resultados da simulação:

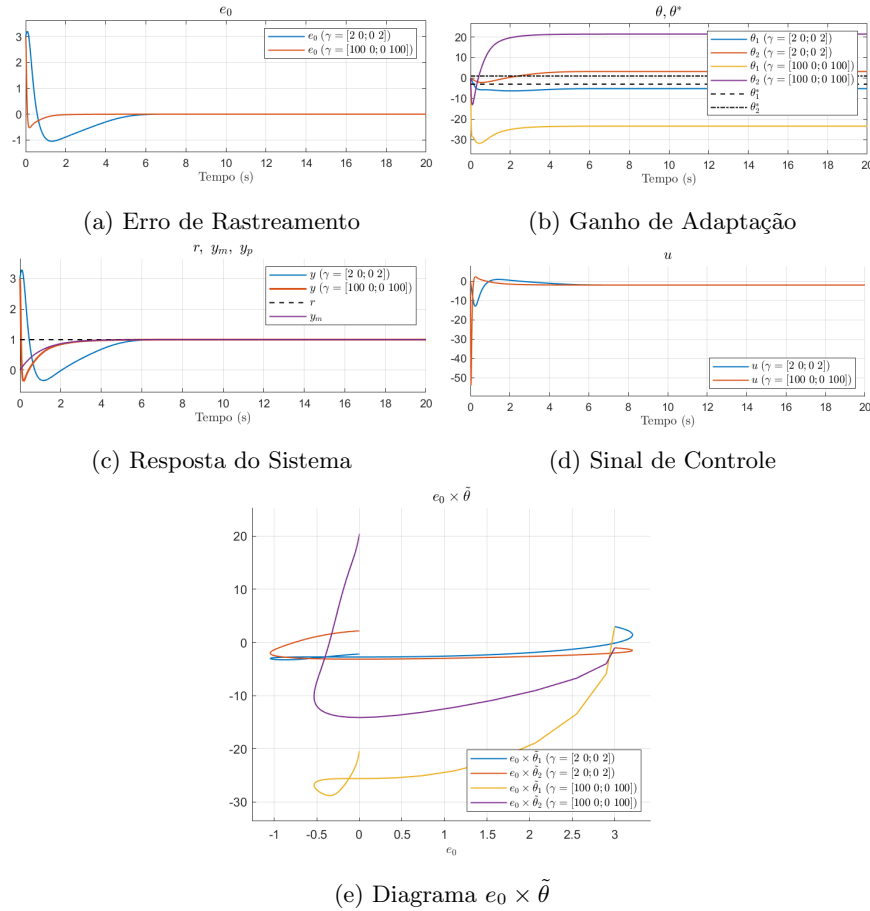


Figura 7: Resultado da simulação (Script: *simu03.m*)

### 3.3.3 Comentários:

Nesta simulação, a planta parte de uma condição inicial não nula ( $y_p(0) = 3$ ), enquanto o modelo inicia em zero. O sinal de referência é constante (DC = 1). Os principais resultados observados foram:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** O erro converge rapidamente para zero, sendo mais eficiente para  $\Gamma = 100I$ . A presença do offset inicial é corrigida com maior rapidez neste caso.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Os parâmetros adaptativos se ajustam rapidamente e não estabilizam em torno de  $\theta^*$ , com menor oscilação e adaptação mais rápida para maior ganho de adaptação.
- **Resposta do sistema:** O sistema com  $\Gamma = 100I$  segue o modelo de referência com mais precisão, apresentando menor tempo de acomodação e sobre-elevação.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O controle é inicialmente intenso devido à diferença nas condições iniciais. Para  $\Gamma = 100I$ , observa-se maior esforço de controle, mas com resposta mais eficaz.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** As trajetórias convergem rapidamente para a origem, especialmente para  $\Gamma = 100I$ , indicando uma adaptação eficiente mesmo com condições iniciais desfavoráveis.

**Conclusão:** A diferença nas condições iniciais evidencia a importância do ganho de adaptação. Valores maiores de  $\Gamma$  resultam em respostas mais rápidas e precisas, compensando rapidamente desvios iniciais.

### 3.4 Simulação #4

#### 3.4.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 3, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2$  (constante),  $A_s = 1, \omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.4.2 Resultados da simulação:

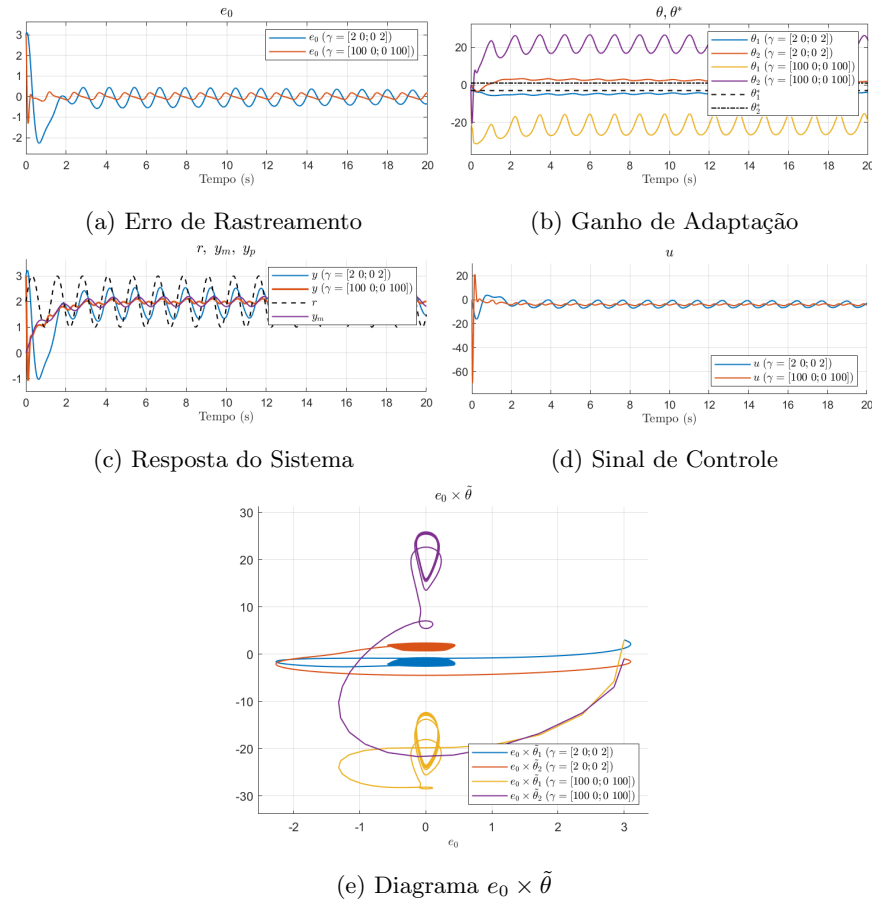


Figura 8: Resultado da simulação (Script: *simu04.m*)

### 3.4.3 Comentários:

Nesta simulação, a planta inicia novamente em  $y_p(0) = 3$ , mas o sinal de referência inclui uma componente senoidal além da parte DC ( $DC = 2$ ,  $A_s = 1$ ,  $\omega_s = 5$  rad/s). Isso introduz um regime permanente oscilatório. Os principais pontos observados são:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** O erro não converge para zero devido à presença do componente harmônico no sinal de referência. No entanto, para  $\Gamma = 100I$ , o erro apresenta menor amplitude de oscilação, indicando melhor desempenho de rastreamento.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Os parâmetros adaptativos não convergem para valores constantes, pois o sistema está em regime oscilatório. Ainda assim, os ganhos oscilam em torno de valores próximos de  $\theta^*$  no caso de  $\Gamma = 2I$ , com maior oscilação observada para  $\Gamma = 100I$ .
- **Resposta do sistema:** O sistema com maior ganho de adaptação responde mais rapidamente e com menor erro de seguimento da referência. Entretanto, a presença de altas frequências exige maior esforço adaptativo.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O controle apresenta oscilações significativas para ambas as configurações, mas mais intensas para  $\Gamma = 100I$ , refletindo a tentativa de acompanhar a componente senoidal do sinal de referência.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** As trajetórias não convergem para a origem, como esperado em um regime não estacionário. Os ciclos fechados no plano de fase revelam a persistência da oscilação e o comportamento quase-periódico da adaptação.

**Conclusão:** A introdução da componente senoidal no sinal de referência impossibilita a convergência do erro para zero. Ainda assim, o aumento do ganho de adaptação melhora o desempenho de rastreamento, ao custo de maior esforço de controle e maiores oscilações nos parâmetros adaptativos.

### 3.5 Simulação #5

#### 3.5.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+10}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1$  (constante),  $A_s = 0, \omega_s = 5, \text{rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+10)/1; 1/1] = [-12; 1]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.5.2 Resultados da simulação:

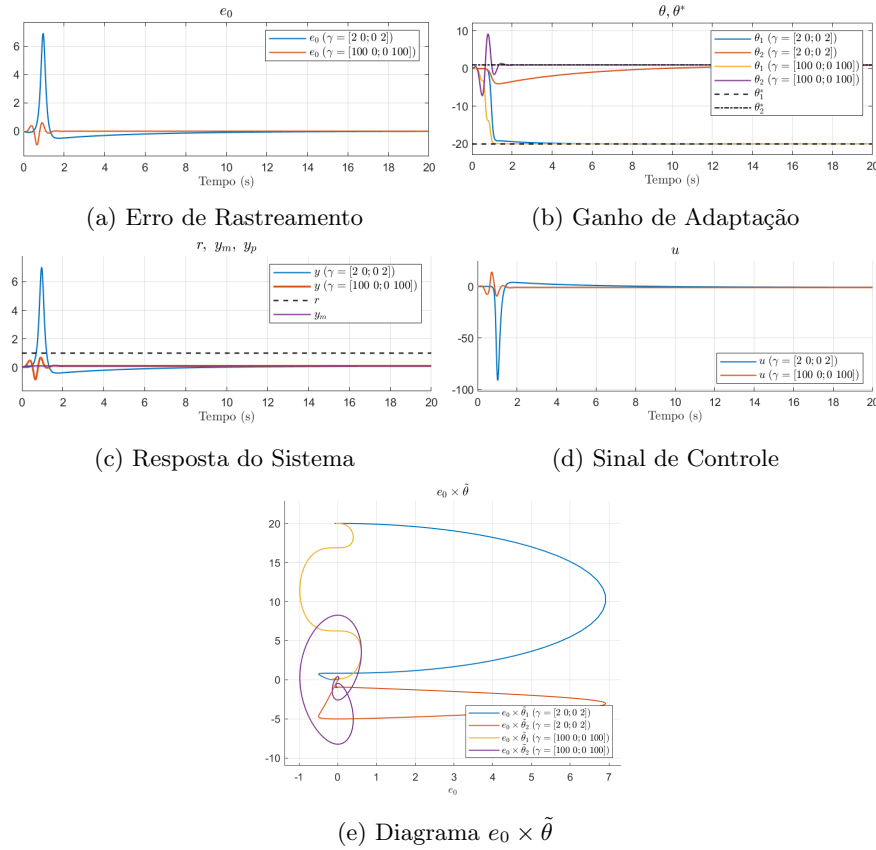


Figura 9: Resultado da simulação (Script: *simu05.m*)

### 3.5.3 Comentários:

Nesta simulação, a planta instável  $P(s) = \frac{1}{s-2}$  é controlada de modo que sua saída siga o modelo de referência  $M(s) = \frac{1}{s+4}$ . O sinal de referência é puramente constante (DC = 1), sem componente senoidal. Os principais pontos observados são:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** Como o sinal de referência é constante e não possui componentes oscilatórias, o erro converge rapidamente para zero. O modelo adaptativo consegue compensar a dinâmica instável da planta com eficiência, especialmente com os ganhos de adaptação utilizados.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Os parâmetros adaptativos convergem suavemente para valores próximos de  $\theta^* = [-6; 1]$ . Isso é esperado, já que a referência constante permite que o algoritmo de adaptação atue em um regime mais estável e previsível.
- **Resposta do sistema:** A resposta da planta controlada aproxima-se da resposta do modelo de referência, com um comportamento estável e transiente bem amortecido. A escolha de um polo mais afastado ( $a_m = 4$ ) no modelo de referência acelera a convergência do sistema.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O esforço de controle é moderado e se estabiliza rapidamente. Como não há variações rápidas na referência, o sinal de controle não apresenta oscilações significativas.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** As trajetórias no plano de fase convergem para a origem, indicando que tanto o erro de rastreamento quanto o erro nos parâmetros adaptativos são eliminados com o tempo. Isso demonstra a eficácia do controlador adaptativo nesse cenário.

**Conclusão:** A estabilidade do modelo de referência e a ausência de componentes senoidais na entrada facilitam a convergência do erro e dos parâmetros adaptativos. A planta instável é controlada com sucesso, e a escolha de um polo mais rápido ( $a_m = 4$ ) no modelo de referência proporciona uma resposta mais ágil, sem comprometer a estabilidade ou exigir esforço excessivo de controle.



### 3.6 Simulação #6

#### 3.6.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+10}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2, A_s = 1, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+10)/1; 2/1] = [-12; 2]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.6.2 Resultados da simulação:

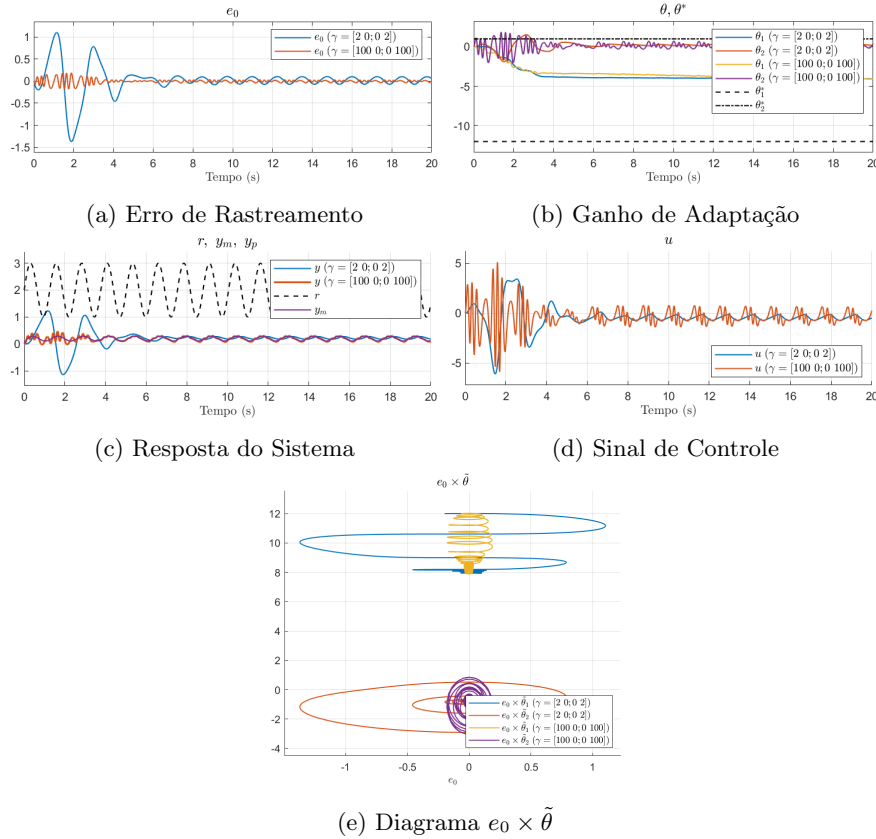


Figura 10: Resultado da simulação (Script: *simu06.m*)

### 3.6.3 Comentários:

Nesta simulação, a planta instável  $P(s) = \frac{1}{s-2}$  deve acompanhar o modelo de referência  $M(s) = \frac{1}{s+4}$ , sendo excitada por um sinal de referência composto por uma parte constante (DC = 2) e uma componente senoidal de amplitude  $A_s = 1$  e frequência  $\omega_s = 5$  rad/s. Os principais pontos observados são:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** Devido à presença da componente senoidal no sinal de referência, o erro não converge exatamente para zero, mas estabiliza em torno de uma oscilação periódica. Ainda assim, o sistema acompanha bem a referência, com pequenas oscilações residuais no erro.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Os parâmetros adaptativos não convergem para valores fixos, refletindo o caráter dinâmico da referência. Observa-se que os ganhos oscilam em torno de valores próximos a  $\theta^* = [-6; 2]$ , com maior oscilação para o caso de  $\Gamma = 100I$ , devido à maior sensibilidade do ganho de adaptação.
- **Resposta do sistema:** A resposta da planta segue bem o comportamento do modelo de referência, incluindo a oscilação imposta pela referência senoidal. O modelo de referência com polo em  $-4$  proporciona uma resposta mais rápida, o que exige maior agilidade do controlador adaptativo.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O sinal de controle apresenta oscilações mais intensas em comparação com o caso de referência puramente constante, resultado da necessidade de acompanhar a frequência da referência. Para  $\Gamma = 100I$ , esse esforço de controle é ainda mais pronunciado.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** As trajetórias no plano de fase revelam ciclos fechados, indicando que o sistema entra em um regime oscilatório estável. A presença de laços periódicos é típica de referências não constantes e confirma a persistência da adaptação ao longo do tempo.

**Conclusão:** A introdução da componente senoidal no sinal de referência impede a convergência do erro para zero, mas o sistema adaptativo ainda é capaz de manter o erro dentro de limites aceitáveis. O modelo de referência mais rápido ( $a_m = 4$ ) melhora a velocidade de resposta, ao custo de maior esforço de controle e flutuações nos parâmetros adaptativos.

### 3.7 Simulação #7

#### 3.7.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{10}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1, A_s = 0, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; 10/1] = [-3; 10]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.7.2 Resultados da simulação:

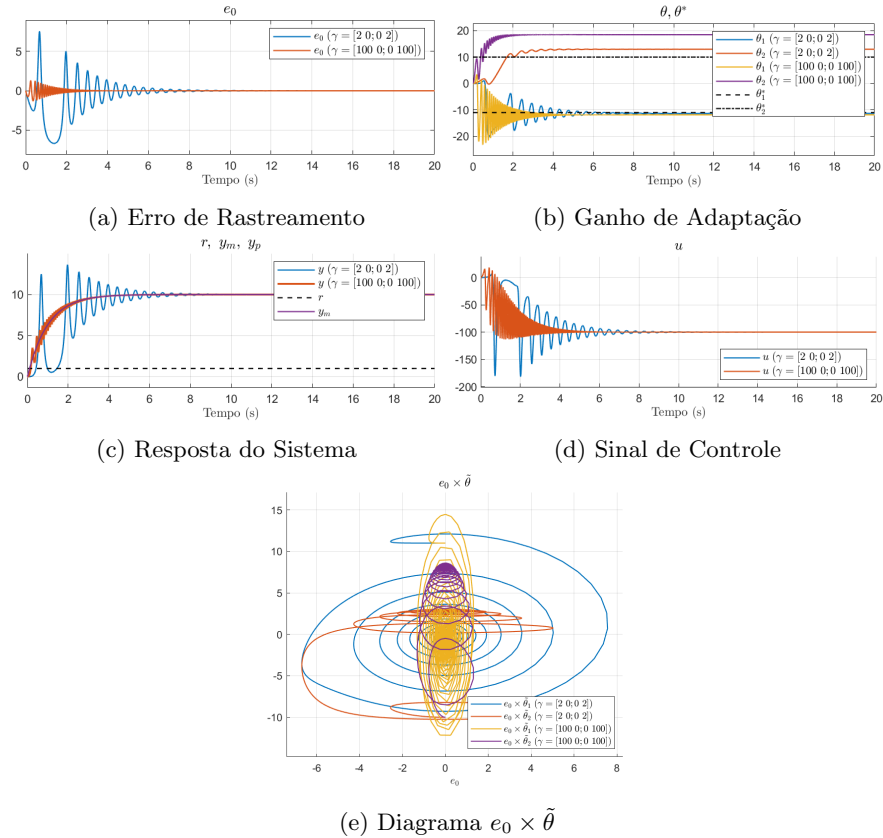


Figura 11: Resultado da simulação (Script: *simu07.m*)

### 3.7.3 Comentários:

Nesta simulação, a planta instável  $P(s) = \frac{1}{s-2}$  deve acompanhar o modelo de referência  $M(s) = \frac{2}{s+1}$  sob a ação de um sinal de referência puramente constante (DC = 1). O modelo de referência é mais lento em comparação com simulações anteriores. Os principais pontos observados são:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** O erro converge rapidamente para zero, evidenciando o bom desempenho do sistema adaptativo. A ausência de componentes oscilatórias no sinal de referência facilita a convergência do erro.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Os parâmetros adaptativos convergem para valores próximos de  $\theta^* = [-3; 2]$ , conforme esperado para o regime com referência constante. A velocidade de convergência é maior no caso de  $\Gamma = 100I$ , devido ao ganho de adaptação mais elevado.
- **Resposta do sistema:** A resposta da planta segue fielmente o modelo de referência, com tempo de acomodação compatível com o polo em  $-1$ . O sistema exibe comportamento suave, sem oscilações ou sobressaltos.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O esforço de controle é moderado, refletindo tanto a suavidade da referência quanto a lentidão relativa do modelo de referência. Para valores maiores de  $\Gamma$ , há um pico mais acentuado no controle inicial, mas que rapidamente se estabiliza.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** O diagrama mostra a trajetória de convergência dos parâmetros, com o erro indo a zero conforme os parâmetros se estabilizam. Ao contrário do caso com referência senoidal, não há ciclos fechados, indicando convergência estática.

**Conclusão:** A utilização de um modelo de referência mais lento e um sinal de entrada constante resulta em uma adaptação mais tranquila, com menor esforço de controle e rápida convergência dos parâmetros. O desempenho do sistema adaptativo é excelente neste cenário, evidenciando a eficácia do controlador mesmo para plantas instáveis.

### 3.8 Simulação #8

#### 3.8.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{10}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2, A_s = 1, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; 10/1] = [-3; 10]$
- **Ganho de adaptação:**  $\Gamma_1 = 2I_{2 \times 2}, \Gamma_2 = 100I_{2 \times 2}$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.8.2 Resultados da simulação:

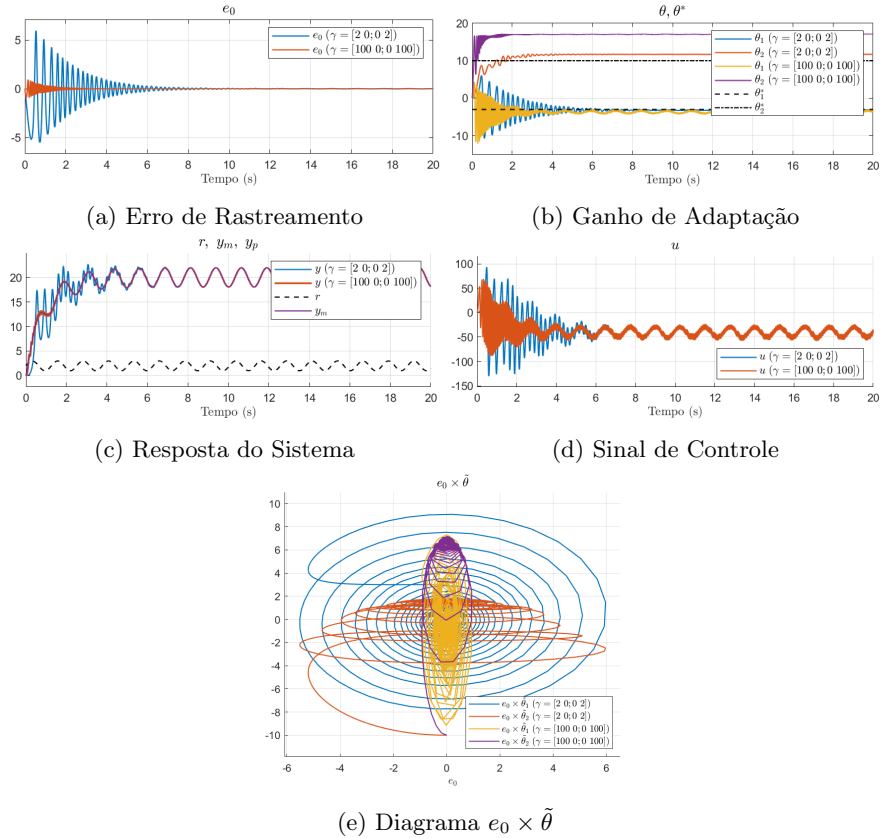


Figura 12: Resultado da simulação (Script: *simu08.m*)

### 3.8.3 Comentários:

Nesta simulação, a planta instável  $P(s) = \frac{1}{s-2}$  deve seguir o modelo de referência  $M(s) = \frac{2}{s+1}$ , sob um sinal de referência composto por uma componente constante (DC = 2) e uma senoidal de baixa amplitude ( $A_s = 1$ ) com frequência  $\omega_s = 5$  rad/s. Este cenário permite observar o desempenho do sistema adaptativo diante de sinais mistos. Os principais pontos observados são:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** O erro inicial é significativo devido à condição inicial nula, mas rapidamente converge, oscilando de forma suave em torno de zero em resposta à componente senoidal. O bom desempenho do controle adaptativo se mantém mesmo com o acréscimo da oscilação.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** Os parâmetros convergem para valores próximos ao ganho ótimo  $\theta^* = [-3; 2]$ , com oscilações em regime permanente induzidas pela natureza periódica da entrada. As variações de  $\theta$  são mais acentuadas quando  $\Gamma = 100I$ , como esperado.
- **Resposta do sistema:** A planta acompanha de forma bastante próxima o comportamento do modelo de referência, apresentando tanto o nível DC quanto a forma oscilatória. A fidelidade na reprodução da dinâmica de referência indica uma adaptação eficaz.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O controle apresenta variações coerentes com a natureza do sinal de referência, com esforço adicional para compensar a instabilidade da planta e seguir as oscilações. Um pico inicial mais elevado aparece nos casos com maior ganho adaptativo, seguido por estabilização.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** O diagrama mostra trajetórias oscilatórias, indicando regime permanente com erro pequeno e parâmetros levemente variantes. A forma espiralada ou cíclica está associada à persistência de excitação da entrada.

**Conclusão:** A presença de uma referência mista (constante + senoidal) impõe maior desafio ao controlador adaptativo, mas os resultados mostram que a estrutura é capaz de lidar com esse cenário com boa precisão. A adaptação responde bem à excitação persistente, promovendo rastreamento eficaz mesmo para uma planta instável.

### 3.9 Simulação #9

#### 3.9.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 1, A_s = 0, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; 1/1] = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**

$$\Gamma_1 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ -0.35 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ -0.35 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.9.2 Resultados da simulação:

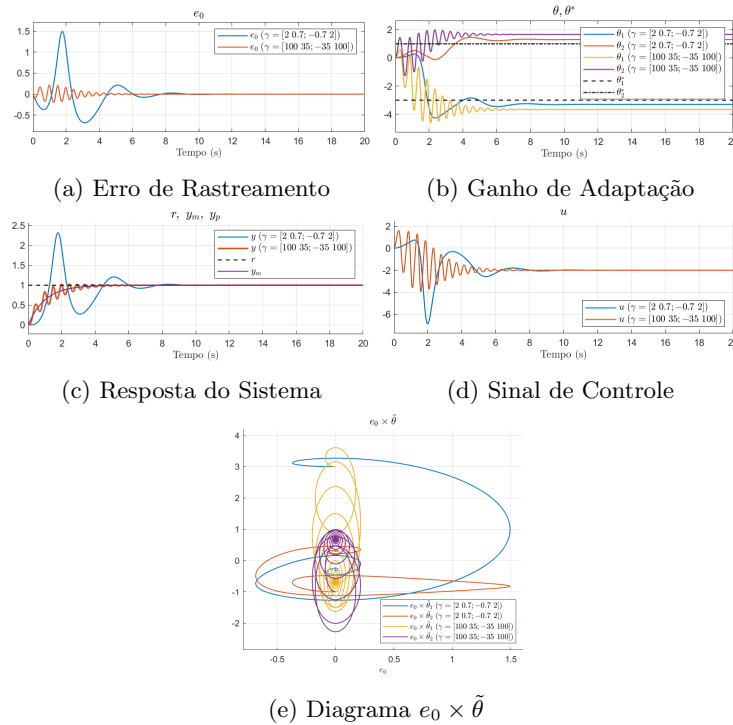


Figura 13: Resultado da simulação (Script: *simu09.m*)

### 3.9.3 Comentários:

Nesta simulação, mantêm-se a planta instável  $P(s) = \frac{1}{s-2}$  e o sinal de referência puramente constante (DC = 1), mas introduz-se uma modificação importante: os ganhos de adaptação  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  passam a ser matrizes simétricas e não-diagonais, com termos fora da diagonal igual a 0,35. Isso permite investigar o impacto de acoplamentos entre os parâmetros adaptativos. Os principais pontos observados são:

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** A convergência do erro ocorre de forma estável e eficaz, com desempenho semelhante ao de simulações anteriores com ganho diagonal. A presença de termos fora da diagonal na matriz  $\Gamma$  não compromete o rastreamento, indicando robustez do algoritmo adaptativo.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** A trajetória dos parâmetros  $\theta$  tende a convergir para valores próximos ao ótimo teórico  $\theta^* = [-3; 1]$ , com dinâmica influenciada pelo acoplamento entre os parâmetros. Observa-se uma interação mais pronunciada entre as componentes de  $\theta$ , refletida em trajetórias mais entrelaçadas.
- **Resposta do sistema:** A saída da planta acompanha fielmente a resposta do modelo de referência, evidenciando que o sistema adaptativo é capaz de compensar a instabilidade da planta mesmo com uma matriz  $\Gamma$  não-diagonal.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O esforço de controle permanece dentro de níveis aceitáveis, com um pico inicial relacionado à correção rápida dos parâmetros. O comportamento do controle é suavizado após o transiente inicial.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** O diagrama mostra um padrão de convergência para a origem, com trajetórias mais curvilíneas ou inclinadas do que nas simulações anteriores, evidenciando a influência da matriz  $\Gamma$  com acoplamento.

**Conclusão:** A introdução de uma matriz de adaptação não-diagonal mostra-se viável e eficaz para este cenário. O acoplamento entre os parâmetros não prejudica a estabilidade ou o rastreamento, e pode até favorecer uma adaptação mais coordenada, dependendo do caso. Esta simulação demonstra a flexibilidade do esquema adaptativo frente a diferentes configurações matriciais de ganho.



### 3.10 Simulação #10

#### 3.10.1 Configuração do experimento:

- **Planta:**  $P(s) = \frac{1}{s-2}$
- **Modelo de referência:**  $M(s) = \frac{1}{s+1}$
- **Condições iniciais:**  $y_p(0) = 0, y_m(0) = 0$
- **Sinal de referência:**  $DC = 2, A_s = 1, \omega_s = 5 \text{ rad/s}$
- **Ganho de matching ótimo:**  $\theta^* = [-(2+1)/1; 1/1] = [-3; 1]$
- **Ganho de adaptação:**

$$\Gamma_1 = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ -0.35 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0.35 \\ -0.35 & 1 \end{bmatrix}$$
- **Condição inicial do parâmetro:**  $\theta(0) = [0; 0]$

#### 3.10.2 Resultados da simulação:

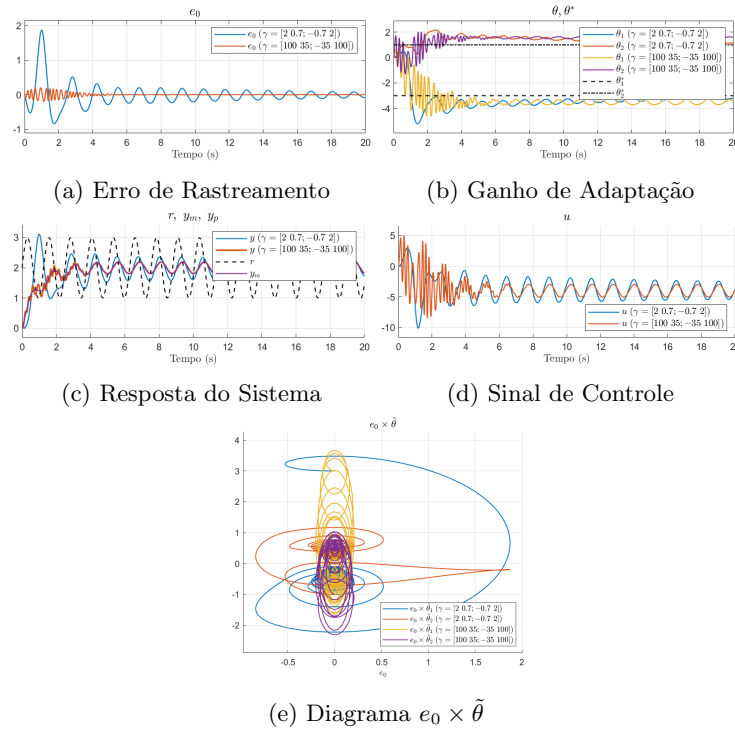


Figura 14: Resultado da simulação (Script: *simu10.m*)

### 3.10.3 Comentários:

Nesta simulação, a planta instável e o modelo de referência permanecem inalterados em relação à Simulação #9. A principal modificação está no sinal de referência, que agora possui uma componente oscilatória (senoide) além do valor DC, tornando o rastreamento mais desafiador. A estrutura de adaptação com matrizes de ganho não-diagonais é mantida.

- **Erro de rastreamento ( $e_0$ ):** O erro apresenta oscilações coerentes com a natureza senoidal do sinal de referência, mas com amplitude limitada, indicando que o sistema consegue acompanhar a referência com boa fidelidade, apesar da maior exigência dinâmica.
- **Ganho de adaptação ( $\theta$ ):** A trajetória dos parâmetros adaptativos mantém estabilidade, com convergência gradual para a vizinhança dos valores ótimos. A oscilação na referência se reflete em oscilações nos parâmetros, especialmente durante os primeiros instantes.
- **Resposta do sistema:** A planta segue o modelo de referência com boa precisão, reproduzindo tanto o valor DC quanto a componente oscilatória da entrada. A performance confirma a eficácia da estrutura adaptativa mesmo sob sinal de referência variado.
- **Sinal de controle ( $u$ ):** O controle exibe oscilações em frequência compatível com a senoide de entrada, mas com amplitude controlada. O esforço de controle aumenta levemente em relação à simulação anterior, como esperado em situações com maior exigência dinâmica.
- **Diagrama de fase ( $e_0 \times \tilde{\theta}$ ):** As trajetórias não convergem diretamente à origem devido à natureza persistente do erro oscilatório. No entanto, o padrão cíclico observado é compatível com um regime permanente de rastreamento senoidal.

**Conclusão:** A Simulação #10 demonstra a robustez da estrutura adaptativa frente a sinais de referência mais complexos, com bom rastreamento, estabilidade dos parâmetros e controle efetivo. A combinação de matriz  $\Gamma$  não-diagonal e entrada mista revela a capacidade do sistema de lidar com variações dinâmicas sem comprometer a convergência e o desempenho.

## A Decomposição de Matrizes: Parte Simétrica e Antissimétrica

Uma matriz  $\Gamma$  pode ser decomposta como a soma de uma parte simétrica  $\Gamma_s$  e uma parte antissimétrica  $A_{as}$ :

$$\Gamma = \Gamma_s + A_{as} \quad (13)$$

Considerando uma matriz simétrica da forma:

$$\Gamma_s = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \quad (14)$$

Seja um vetor linha  $\mathbf{v} = [x \ y]$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\mathbf{v} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{v}^T > 0 \quad (15)$$

Expandindo:

$$\mathbf{v} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{v}^T = \mathbf{v} \cdot \Gamma_s \cdot \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \cdot A_{as} \cdot \mathbf{v}^T \quad (16)$$

Vamos agora considerar uma matriz antissimétrica:

$$A_{as} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Multiplicando:

$$\mathbf{v} \cdot A_{as} \cdot \mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$= a \cdot \begin{bmatrix} -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$= a \cdot (-yx + xy) = 0 \quad (20)$$

Portanto, a contribuição da parte antissimétrica na forma quadrática  $\mathbf{v} \cdot \Gamma \cdot \mathbf{v}^T$  é nula, ou seja:

$$\mathbf{v} \cdot A_{as} \cdot \mathbf{v}^T = 0 \quad (21)$$

Conclui-se que a parte simétrica da matriz  $\Gamma$  é a única que contribui para a positividade da forma quadrática.