# Trabalho Nº1 - MRAC Direto

COE603 - Controle Adaptativo

Caio Cesar Leal Verissimo - 119046624

Leonardo Soares da Costa Tanaka - 121067652

Lincoln Rodrigues Proença - 121076407

Engenharia de Controle e Automação - UFRJ

Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

Maio de 2025

## Conteúdo

# 1 Resumo das equações do sistema

Neste experimento, simulamos o algoritmo **MRAC Direto** para o caso:

- $n = 1$ (ordem da planta)
- $n^* = 1$ (grau relativo)
- $n_p = 2$ (número de parâmetros)

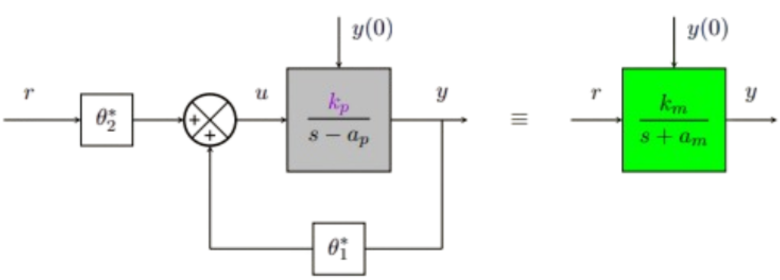
## 1.1 Equações do Algoritmo MRAC Direto

A Tabela 1 resume as equações fundamentais do algoritmo MRAC (Model Reference Adaptive Control) na forma direta, considerando uma planta de primeira ordem ($n = 1$), grau relativo igual a 1 ($n^* = 1$) e número de parâmetros $n_p = 2$.

| Descrição | Equação | Ordem |
|---|---|---|
| Planta | $\dot{y} = a_p y + k_p u$ | 1 |
| Modelo | $\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r$ | 1 |
| Erro da saída | $e_0 = y - y_m$ | |
| Lei de controle | $u = \theta^T \omega$ | |
| Regressor | $\omega^T = \begin{bmatrix} y & r \end{bmatrix}$ | |
| Lei de adaptação | $\dot{\theta} = -\text{sign}(k_p)\Gamma \omega e_0$ | 2 |

Tabela 1: Resumo do Algoritmo MRAC Direto

A Figura 1 ilustra o diagrama de blocos do sistema em malha fechada, juntamente com a verificação da equivalência com o modelo de referência. Este diagrama mostra como a combinação dos ganhos adaptativos $\theta_1^*$ e $\theta_2^*$ pode transformar o comportamento da planta para que ela imite o modelo de referência.




$$\begin{aligned} \dot{y} &= a_p y + k_p\big(\theta_1^* y + \theta_2^* r\big) \\ &= \big(\underbrace{a_p + k_p\theta_1^*}_{-a_m}\big)y + \underbrace{k_p\theta_2^*}_{k_m} r \end{aligned}$$

Figura 1: Diagrama de blocos e verificação da equivalência com o modelo de referência

As expressões ideais para os parâmetros $\theta_1^*$ e $\theta_2^*$ que garantem essa equivalência são apresentadas a seguir. Esses parâmetros são obtidos por identificação direta, com base nas constantes do modelo e da planta.

$$\boxed{\theta_1^* = -\frac{a_p + a_m}{k_p}} \qquad \boxed{\theta_2^* = \frac{k_m}{k_p}}$$

Essas equações representam os valores ideais dos parâmetros adaptativos para que a planta controlada siga o comportamento especificado pelo modelo de referência. Na prática, o algoritmo de adaptação busca aproximar esses valores ao longo do tempo.

## 1.2 Estabilidade do Algoritmo MRAC Direto

**1. Forma vetorial e definições** Escrevendo em forma vetorial:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad u^* = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Analogamente, a lei de controle é

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad u = \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

**2. Dinâmica do erro** Definimos o erro de saída:

$$e = y - y_m. \tag{3}$$

Subtraindo as dinâmicas da planta e do modelo:

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{y} - \dot{y}_m &= (a_p y + k_p u) - (-a_m y_m + k_m r) \\ &= -a_m(y - y_m) + (a_p + a_m)y + k_p u - k_m r + \underbrace{(a_m y) - (a_m y)}_{=0} \\ &= -a_m e + k_p \Big[ \tfrac{a_p + a_m}{k_p}\, y + u - \tfrac{k_m}{k_p}\, r \Big] \\ &= -a_m e + k_p \big[ u - \theta_1^* y - \theta_2^* r \big] \\ &= -a_m e + k_p \big[ u - u^* \big]. \end{aligned} \tag{4}$$

**3. Erro paramétrico** Definimos o vetor de erro de parâmetro:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^* \quad \Longrightarrow \quad \dot{e} = -a_m e + k_p \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

**4. Função de Lyapunov** Escolhemos

$$V(e, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{1}{2} |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \tag{6}$$

Calculando sua derivada:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e\,\dot{e} + |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= -a_m e^2 + k_p \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\omega}\, e + |k_p| \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Para garantir $\dot{V} \leq 0$, adotamos a lei de adaptação

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma \, \mathrm{sign}(k_p) \, \boldsymbol{\omega} \, e. \tag{8}$$

**5. Conclusões de estabilidade** Com essa escolha,

$$\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0, \quad \Longrightarrow \quad e(t),\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \ \in \mathcal{L}_\infty. \tag{9}$$

Como $r(t) \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow y_m(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e

$$\dot{V} \leq 0 \implies V(t) \leq V(0), \tag{10}$$

segue que

$$\int_0^t e^2(\tau)\, d\tau < \infty \quad \Longrightarrow \quad e \in \mathcal{L}_2. \tag{11}$$

Finalmente, aplicando o lema de Barbalat,

$$e \in \mathcal{L}_2, \quad \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} e(t) = 0. \tag{12}$$

# 2 Diagramas de blocos

# 3 Resultados das simulações

## 3.1 Simulação #1

## 3.2 Simulação #2

## 3.3 Simulação #3

## 3.4 Simulação #4

## 3.5 Simulação #5

## 3.6 Simulação #6

## 3.7 Simulação #7

## 3.8 Simulação #8

## 3.9 Simulação #9

## 3.10 Simulação #10