



UFRJ

COPPE

PEE

ECA

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia

Programa de Engenharia Elétrica

Engenharia de Controle e Automação

Adaptive control

Conteúdo

0 Organização do curso	3
1 Revisão: controle 2DOF	20
2 Exemplos simples	38
3 Identificação adaptativa de parâmetros	179
4 MRAC	296
5 Least-squares MRAC	461
6 Combined/composite M-MRAC+LS estimator	494
7 LS-MRAC with high-order tuners	544
8 Backstepping	627
9 LS-MRAC with $n^* > 1$	819
10 MIMO MRAC	911
11 Apêndice - Projeto do controle 2DOF	1012

0 ORGANIZAÇÃO DO CURSO

Contents

0.1	Horário	4
0.2	Prerequisites	5
0.3	Objetivos do curso	6
0.4	Plano de aulas simplificado	7
0.5	Ementa <i>não-oficial</i>	8
0.6	Duração do curso	9
0.7	Atividades	10
0.8	Bibliography	11
0.9	Bibliografia extra	15
0.10	Artigos	16
0.11	Avaliação	18
0.12	Apresentações e entrega dos relatórios	19

0.1 HORÁRIO

COE835 : H-312B

: 4^a. feira 10:00 – 12:00

: 6^a. feira 10:00 – 12:00

COE603 : H-219B

: 3^a. feira 13:00 – 15:00

: 5^a. feira 12:00 – 15:00

Professor : Ramon R. Costa

Laboratório : H-345

Telefone : (cel) 98887-9355

e-mails : ramonrcosta@gmail.com

0.2 PREREQUISITES

- Linear algebra
- Linear systems
- Discrete control
- Nonlinear systems $\Leftarrow !$

0.3 OBJETIVOS DO CURSO

- Apresentar as principais técnicas de análise e projeto
- Introdução ao estado da arte
- Capacitar o aluno a ler e pesquisar no tema

0.4 PLANO DE AULAS SIMPLIFICADO

(...)

0.5 EMENTA *NÃO-OFFICIAL*

- Revisão: controle 2DOF
- Exemplos simples
 - MRAC ($n^* = 1$) direto e indireto
 - VS-MRAC
- Estimação adaptativa de parâmetros
- MRAC SISO
- LS-MRAC
- Backstepping
- MRAC MIMO
- VS-MRAC

0.6 DURAÇÃO DO CURSO

COPPE/PEE

COE835 Controle adaptativo

Início : 24/set/25

Término : 12/dez/25

★ 12 semanas

★ 45 horas-aula

POLI/ECA

COE603 Controle adaptativo

Início : 18/mar/25

Término : 19/jul/25

★ 15 semanas

★ 75 horas-aula

0.7 ATIVIDADES

- (1) Aulas
- (2) Seminários
- (3) Pesquisa bibliográfica
- (4) Simulações digitais
- (5) Relatórios

0.8 BIBLIOGRAPHY

- [1] EUGENE LAVRETSKY & KEVIN A. WISE
Robust and Adaptive Control. With Aerospace Applications [2 Ed].
Springer, **2024**.
- [2] NHAN T. NGUYEN
Model-Reference Adaptive Control. A Primer.
Springer, **2018**.
- [3] HOVAKIMYAN & CAO
 \mathcal{L}_1 Adaptive Control Theory.
SIAM, **2010**.
- [4] KARL JOHAN ÅSTRÖM & BJÖRN WITTENMARK
Adaptive Control [2 Ed].
Dover, **2008**.

[5] PETROS IOANNOU & BARIŞ FIDAN

Adaptive Control Tutorial.

SIAM, 2006.

[6] GANG TAO

Adaptive Control Design and Analysis.

John Wiley & Sons, 2003.

[7] JEFFREY T. SPOONER, MANFREDI MAGGIORE, RAÚL ORDÓÑEZ & KEVIN M. PASSINO

Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems: Neural and Fuzzy Approximator Techniques.

John Wiley & Sons, 2002.

[8] GANG FENG & ROGELIO LOZANO

Adaptive Control Systems.

Newnes, 1999.

- [9] IVEN MAREELS & JAN WILLEM POLDERMAN
Adaptive Systems. An Introduction.
Springer, **1996**.
- [10] PETROS A. IOANNOU & JING SUN
Robust Adaptive Control.
Prentice Hall, **1996**.
- [11] MIROSLAV KRSTIĆ, IOANNIS KANELAKOPOULOS & PETAR KOKOTOVIĆ
Nonlinear and Adaptive Control Design.
John Wiley & Sons, Inc., **1995**.
- [12] EDOARDO MOSCA
Optimal, Predictive, and Adaptive Control.
Prentice-Hall, **1994**.
- [13] JEAN-JACQUES E. SLOTINE & WEIPING LI
Applied Nonlinear Control.
Prentice Hall, **1991**.

- [14] ROBERT R. BITMEAD, MICHEL GEVERS & VINCENT WERTZ
Adaptive Optimal Control. The Thinking Man's GPC.
Prentice Hall, **1990**.
- [15] KUMPATI S. NARENDRA & ANURADHA M. ANNASWAMY
Stable Adaptive Systems.
Prentice Hall, **1989**.
- [16] SHANKAR SAstry & MARC BODSON
Adaptive Control. Stability, Convergence, and Robustness.
Prentice Hall, **1989**.
- [17] YOAN D. LANDAU
Adaptive Control.
Marcel Dekker Inc., **1979**.

0.9 BIBLIOGRAFIA EXTRA

1. GILBERT STRANG

Introduction to Linear Algebra [4 Ed].
Wellesley - Cambridge Press, **2009**.

2. KARL JOHAN ÅSTRÖM & BJÖRN WITTENMARK

Computer Controlled Systems Theory and Design.
Prentice-Hall Inc., **1997**.

0.10 ARTIGOS

1. LIU HSU & RAMON R. COSTA

Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements: Part 1.

Int. Journal of Control, Vol. 49, No. 2, 399–416, **1989**.

2. RAMON R. COSTA, LIU HSU, ALVARO K. IMAI & PETAR KOKOTOVIĆ

Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems.

Automatica, Vol. 39, pp. 1251-1257, **2003**.

3. RAMON R. COSTA

Lyapunov design of least-squares model-reference adaptive control.

IFAC 2020, Berlin, Germany, July 11-17, **2020**.

4. RAMON R. COSTA

Model-reference adaptive control with high-order parameter tuners.

ACC 2022, Atlanta, USA, June 8-10, **2022**.

5. RAMON R. COSTA

Least-squares model-reference adaptive control with high-order parameter tuners.
Automatica, **2024**.

6. RAMON R. COSTA

Least-squares adaptive control and observer.
IEEE-TAC (To appear), **2025**.

0.11 AVALIAÇÃO

★ Baseado em trabalhos:

- Simulações digitais
- Relatórios
- Seminários

0.12 APRESENTAÇÕES E ENTREGA DOS RELATÓRIOS

:	Trabalho	Data
1	MRAC (Caso $n = 1$, $n^* = 1$ e $n_p = 2$)	
2	Algoritmos de identificação	
3	Solução do controle 2DOF	
4	MRAC (Casos $n^* = 1$ e 2 , $\forall n$)	
5	MRAC (Caso $n^* = 3$, $\forall n$)	
6	LS-MRAC (Caso $n^* = 1$)	
7	Composite M-MRAC+LS (Caso $n^* = 1$)	
8	Backstepping (Caso $n^* = 2$), Observador de ordem completa. Indireto	
9	Backstepping (Caso $n^* = 2$), Observador de ordem reduzida. Indireto	
10	Backstepping (Caso $n^* = 2$), Observador de ordem reduzida. Direto	
11	Backstepping (Caso $n^* = 3$)	
12	MIMO MRAC (Caso $n^* = 1$)	
13	MIMO MRAC (Caso $n^* = 2$)	
14	MIMO LS-MRAC (Caso $n^* = 1$)	
15	VS-MRAC (Caso $n^* = 1$)	

1 REVISÃO: CONTROLE 2DOF

Contents

1.1	Introduction	21
1.2	Problema geral	22
1.3	Realimentação de estado	23
1.4	Observadores	28
1.4.1	Observadores de ordem mínima	32
1.5	Estrutura 2DOF	33
1.6	Identificação de parâmetros	34
1.7	Estrutura do MRAC	36

1.1 INTRODUCTION

“Despite the vast literature on the subject, there is still a general feeling that adaptive control is a collection of unrelated technical tools and tricks.”

[IOANNOU & SUN:1996] (pag. 25)

1.2 PROBLEMA GERAL

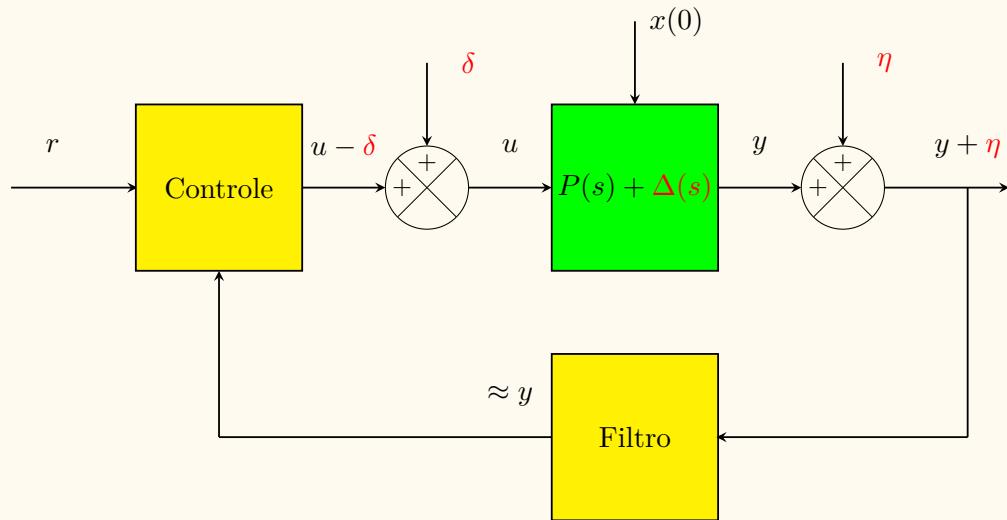
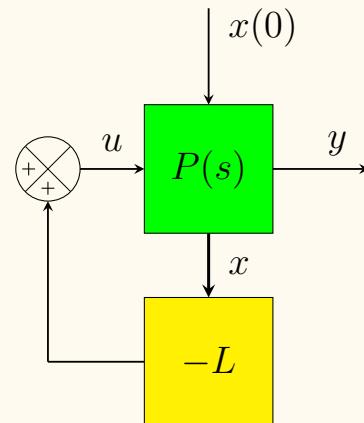


Figura 1: Diagrama de blocos com incertezas e perturbações.

- δ : Perturbação de entrada (baixa frequência)
- η : Perturbação de saída (alta frequência)
- $\Delta(s)$: Incerteza na planta

1.3 REALIMENTAÇÃO DE ESTADO

- Solução para o problema de estabilização de sistemas lineares.



★ Problema mais simples: Não há incertezas nem perturbações.

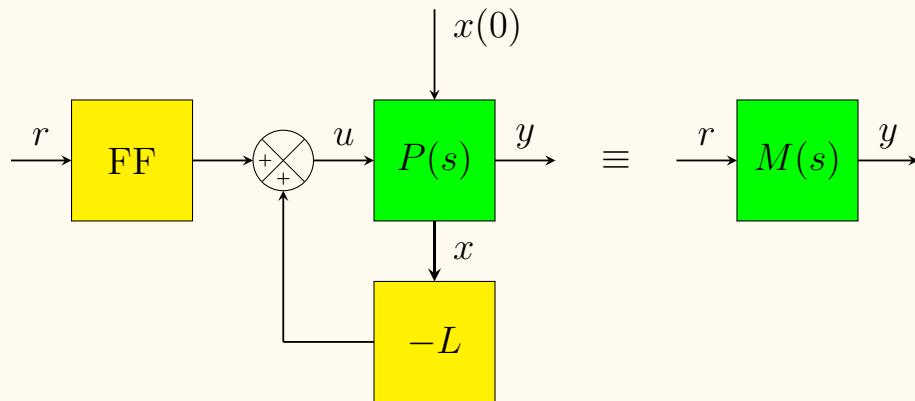
■ Vantagem:

- Liberdade para realocar todos os polos

■ Desvantagens:

- Necessita medição do estado
- Análise de robustez difícil

- Solução para o problema de rastreamento.



- ★ A realimentação de estado realoca os polos.
- ★ O bloco *feedforward* (FF) realoca os zeros (via cancelamento).
- ★ Condição de rastreabilidade : os zeros da planta devem ser estáveis.

Exemplo 1

Planta de 1a. ordem.

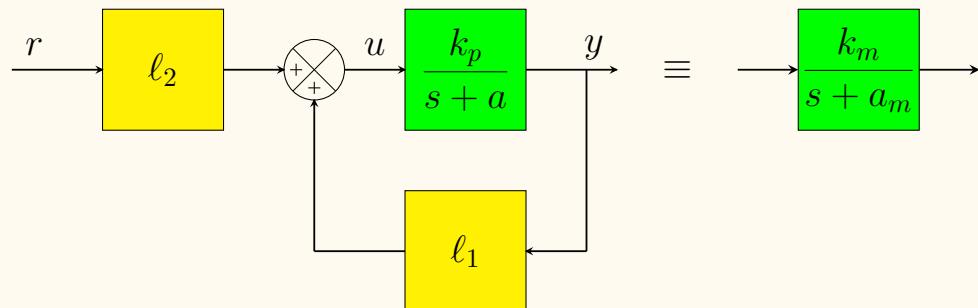
Planta :

$$P(s) = \frac{k_p}{s + a}$$

Modelo :

$$M(s) = \frac{k_m}{s + a_m}$$

(Dinâmica desejada)



Controle :

$$u = \ell_1 y + \ell_2 r$$

Malha fechada:

$$(s + \underbrace{a - k_p \ell_1}_{a_m})y = \underbrace{k_p \ell_2}_{k_m} r$$

Solução:

$$\ell_1 = \frac{a - a_m}{k_p}$$

Feedback (FB)

$$\ell_2 = \frac{k_m}{k_p}$$

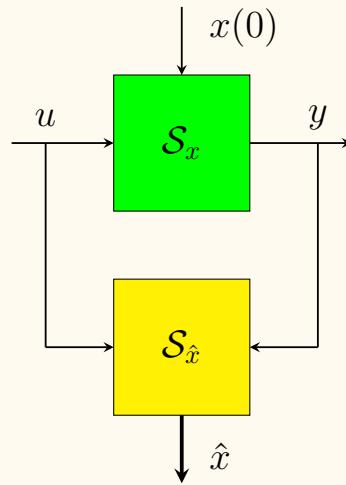
Feedforward (FF)

★ Note que k_p aparece no denominador!

Problema: Quando o parâmetro k_p é adaptado $\Rightarrow \hat{k}_p \neq 0 !!$
 $\Rightarrow \text{sign}(k_p)$ deve ser conhecido.

1.4 OBSERVADORES

- Estimador dinâmico de estado.



★ O observador é uma cópia da planta (+ uma realimentação).

Hipótese fundamental :

- A planta é perfeitamente conhecida.
- A planta é completamente observável.

★ Somente $x(0)$ é desconhecido !!

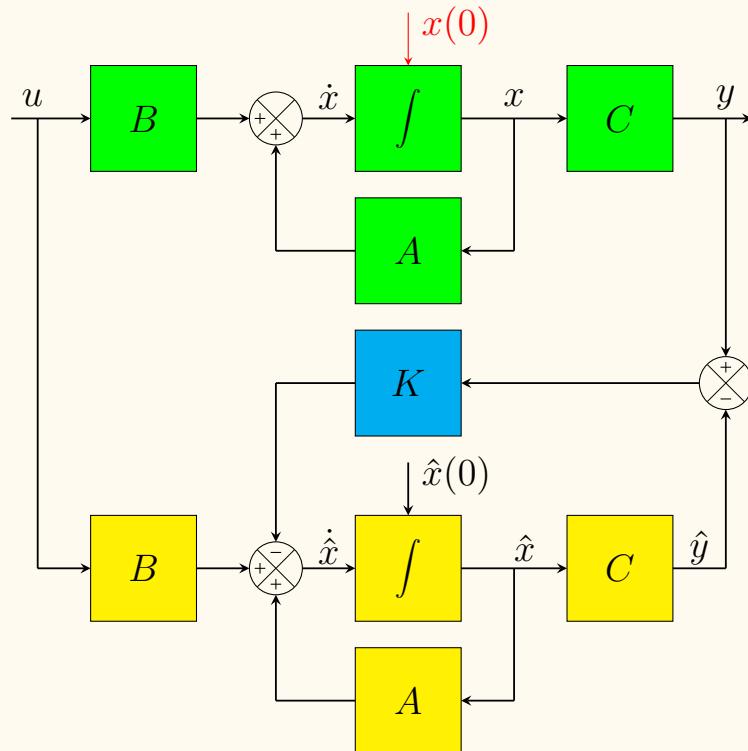
Planta :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

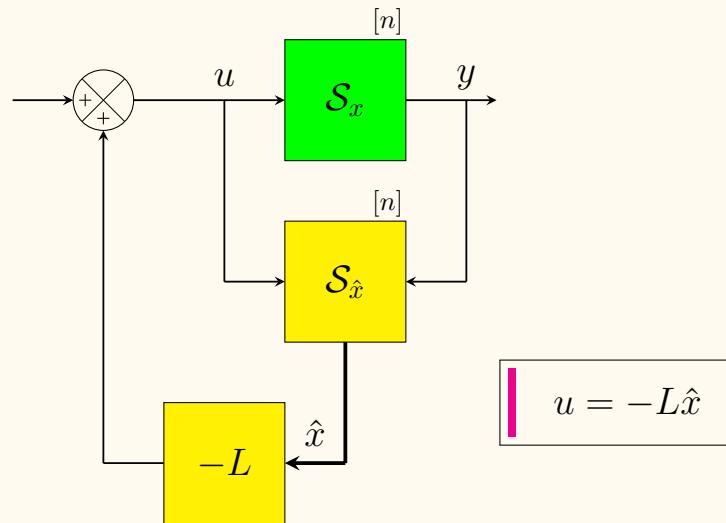
Observador :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \underbrace{K(y - \hat{y})}_{\text{Realimentação}}$$

Diagrama de blocos : Observador de ordem completa com realimentação.



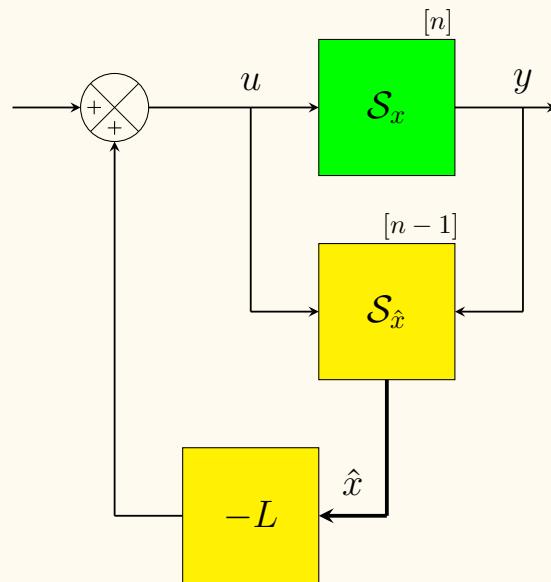
- Solução para o problema de estabilização sem medição do estado.



★ Muito importante : Princípio da separação.

Matrizes K e L podem ser projetadas separadamente !!

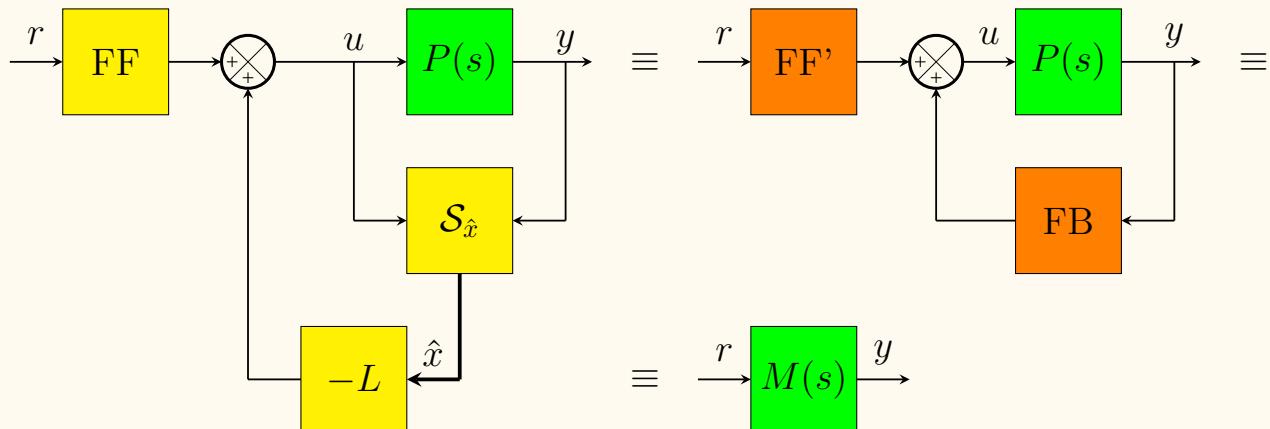
1.4.1 OBSERVADORES DE ORDEM MÍNIMA



★ Ideia : $y = x_1$ não precisa ser estimado. É medido!

1.5 ESTRUTURA 2DOF

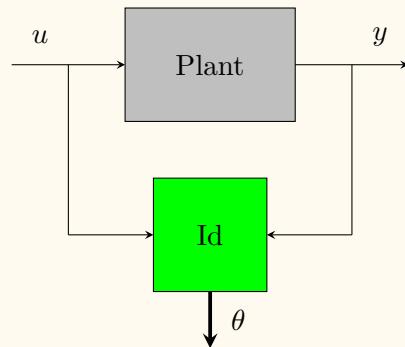
- Solução geral para o problema de rastreamento sem medição do estado.



★ $M(s)$: *Modelo de referência.*

Dinâmica desejada para o sistema em malha fechada.

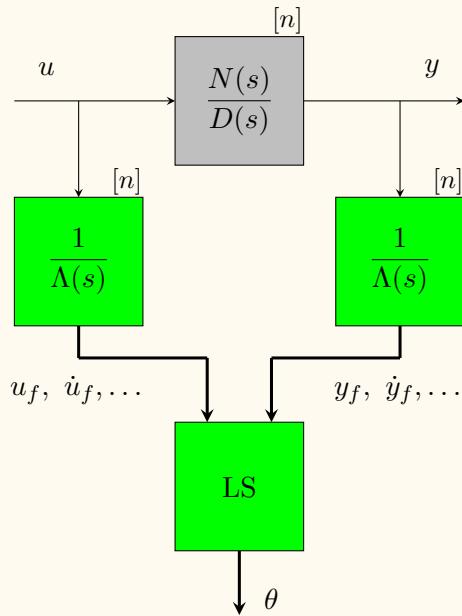
1.6 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS



- ★ θ não é realimentado na planta!
- ★ Os algoritmos utilizam previsões. \Rightarrow Problema não-linear.

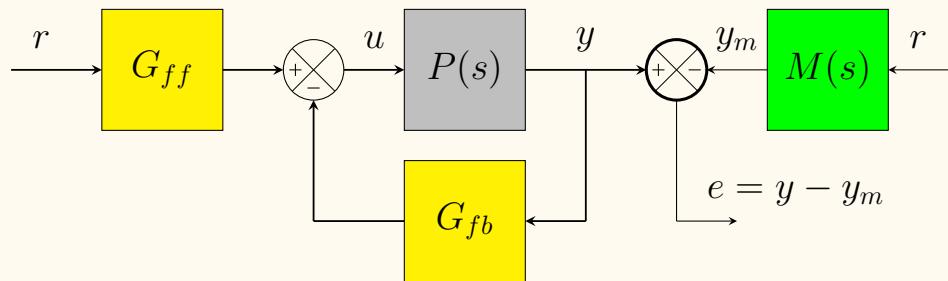
Problema: Como implementar?

Solução: Utilizar estrutura com filtros.



★ LS = Least-Squares.

1.7 ESTRUTURA DO MRAC



- ★ **MRAC** : *Model-reference adaptive control*
- ★ G_{fb} e G_{ff} são *ajustados/adaptados* tal que $e_0(t) \rightarrow 0$.
- ★ O problema torna-se **não linear** e **variante no tempo**.

Problema: Como implementar?

Solução: Utilizar estrutura **com filtros** (semelhante ao caso do identificador).

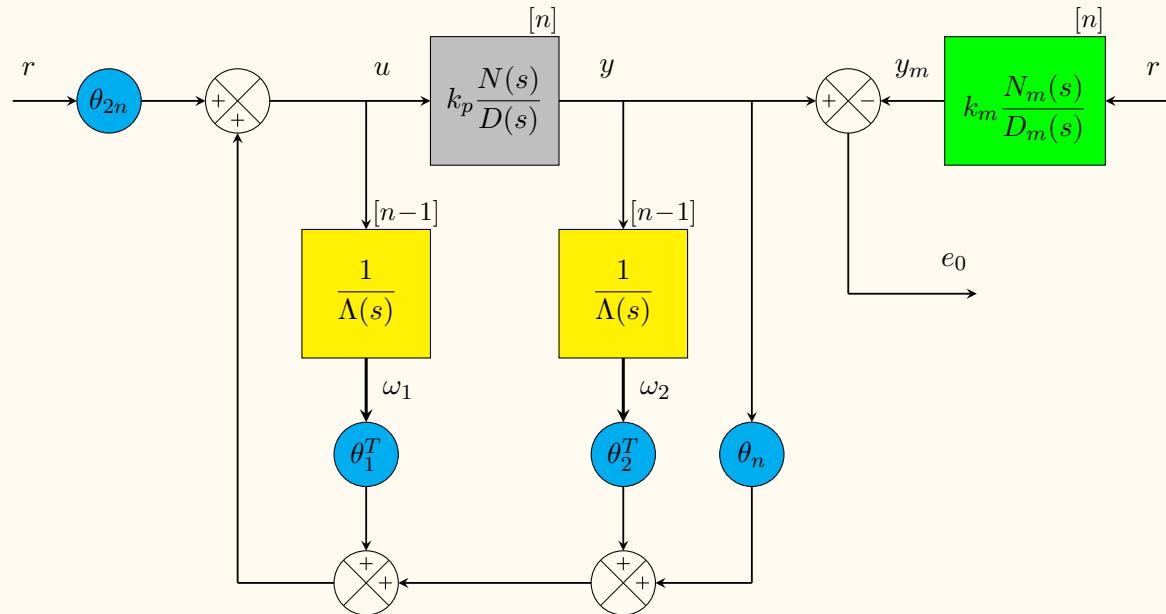


Figura 2: Estrutura do MRAC.

2 EXEMPLOS SIMPLES

Contents

2.1	Planta com 1 parâmetro desconhecido (a_p)	40
2.1.1	MRAC direto	42
2.1.2	Método do Gradiente	67
2.1.3	MRAC indireto	84
2.1.4	VS-MRAC	96
2.1.5	Problemas & exercícios	114
2.2	Enfoque discreto	119
2.2.1	Método do Gradiente discreto	120
2.2.2	MRAC indireto discreto	130
2.2.3	Problemas & exercícios	131
2.3	Planta com 1 parâmetro desconhecido (k_p)	132
2.3.1	MRAC direto	133
2.3.2	Solução analítica	142
2.3.3	MRAC indireto	145
2.3.4	Simulações	153
2.3.5	Problemas & exercícios	154
2.4	Planta com 2 parâmetros desconhecidos (a_p e k_p)	155

2.4.1	MRAC direto	156
2.4.2	Problemas & exercícios	178

2.1 PLANTA COM 1 PARÂMETRO DESCONHECIDO (a_p)

Classificação do sistema:

$n = 1$	(ordem)
$n^* = 1$	(grau relativo)
$n_p = 1$	(# de parâmetros)

■ Planta :

$\dot{y} = a_p y + u$

$y = \frac{1}{s - a_p} u$

a_p desconhecido !

■ Modelo :

$\dot{y}_m = -a_m y_m + r$

$y_m = \frac{1}{s + a_m} r$

- ★ Neste caso, o problema pode ser resolvido utilizando apenas *feedback*.
Não é necessário *feedforward*.

Os seguintes algoritmos são discutidos:

MRAC direto: Os parâmetros da lei de controle são adaptados diretamente utilizando um critério de estabilidade.

Método do Gradiente: Os parâmetros do controle são projetados por otimalidade.

MRAC indireto: Os parâmetros da planta são identificados e então utilizados para gerar o controle.

VS-MRAC: É uma abordagem onde a lei de controle é baseada em relés.

VS-MRAC = Variable structure MRAC

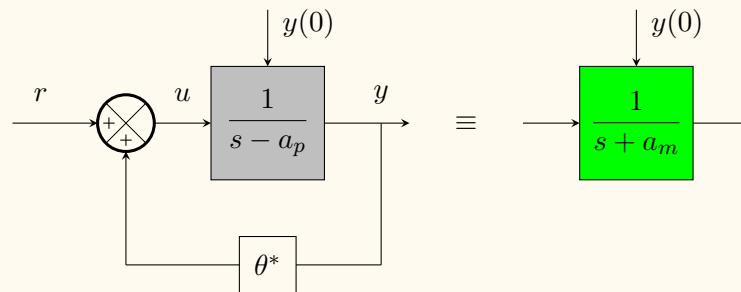
2.1.1 MRAC DIRETO

Exemplo 1 [Tao:2003], (pag. 17)

Planta : $\boxed{\dot{y} = a_p y + u}$ $y = \frac{1}{s - a_p} u$ a_p desconhecido !

Modelo : $\boxed{\dot{y}_m = -a_m y_m + r}$ $y_m = \frac{1}{s + a_m} r$

Se a_p fosse conhecido, então



Lei de controle ideal :

$$u^* = \theta^* y + r$$

Matching gain :

$$\theta^* = -a_p - a_m$$

$$\exists! \theta^*$$

Quando a_p é desconhecido, usamos o controle

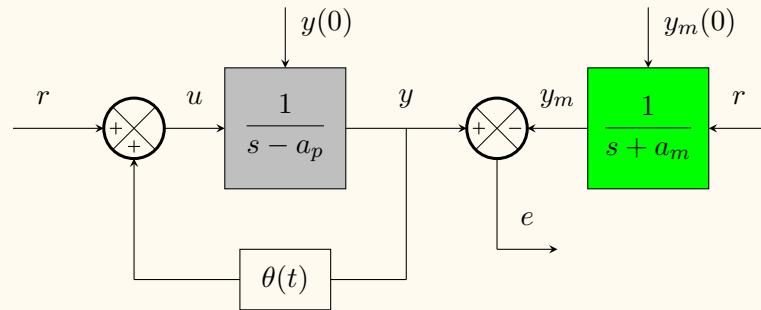
$$u = \theta(t) y + r$$

Certainty equivalence principle

★ $\theta(t)$ é uma estimativa de θ^* .

★ $\theta(t)$ é variante no tempo! \Rightarrow O problema torna-se não linear.

Estrutura do MRAC:



Lei de controle:

$$u = \theta(t) y + r$$

Não linear !

Erro de saída :

$$e = y - y_m$$

Equação do erro (dinâmica de $e(t)$):

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m \\ &= (a_p y + u) - (-a_m y_m + r) + (a_m y) - (a_m y) \\ &= -a_m \underbrace{(y - y_m)}_e + \underbrace{(a_p + a_m)}_{-\theta^*} y - r + u \\ &= -a_m e - \underbrace{(\theta^* y + r)}_{u^*} + u\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{e} = -a_m e + [u - u^*]$$

Erro paramétrico :

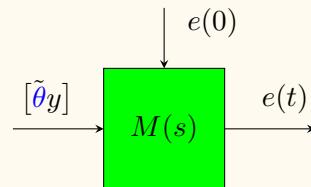
$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$$

A equação do erro pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -a_m e + [\theta y + r - \theta^* y - r] \\ &= -a_m e + \tilde{\theta} y\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$e = M(s)[\tilde{\theta} y], \quad M(s) = \frac{1}{s + a_m}$$



Erro de controle:

$$\tilde{u} = u - u^* = \tilde{\theta}y$$

(mismatching control)

Outra forma para a equação do erro:

$$e = M(s)[\tilde{u}]$$

★ Note que, $\tilde{\theta} \equiv 0 \Rightarrow e(t) \rightarrow 0$ exponencialmente !

Resumo das equações do sistema (em termos de erros):

$$\begin{cases} \dot{e} = -a_m e + \tilde{\theta} y & \text{(dinâmica do erro de rastreamento)} \\ \dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = ? & \text{(dinâmica do erro paramétrico)} \end{cases}$$

Próximo passo: Achar uma lei de adaptação para $\tilde{\theta}(t)$ tal que $e(t) \rightarrow 0$ e também $\tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$.

★ Fundamental: estabilidade !

Tomamos a função de Lyapunov [Parks:1966]:

$$\boxed{2V(e, \tilde{\theta}) = e^2 + \tilde{\theta}^2} \quad \text{positiva definida} \quad (1)$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= e \dot{e} + \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= e(-a_m e + \tilde{\theta} y) + \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -a_m e^2 + \tilde{\theta} e y + \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -a_m e^2 + \tilde{\theta} [ey + \dot{\tilde{\theta}}]\end{aligned}$$

Escolhemos:

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = -ey}$$

Resultado: $\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$ negativa semi-definida !

Conclusão: $e(t), \tilde{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow$ Estabilidade

Análise de convergência

$$\bullet r \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow y_m \in \mathcal{L}_\infty$$

$$\bullet \begin{cases} e \in \mathcal{L}_\infty \\ y_m \in \mathcal{L}_\infty \end{cases} \Rightarrow y \in \mathcal{L}_\infty$$

$$\bullet \dot{V} \leq 0 \Rightarrow V(t) \leq V(0)$$

Integrando a expressão de \dot{V} , temos:

$$\int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau = \int_0^t -a_m e^2(\tau) d\tau = -a_m \int_0^t e^2(\tau) d\tau$$

Ou melhor,

$$\underbrace{V(t) - V(0)}_{\leq 0} = -a_m \int_0^t e^2(\tau) d\tau$$

$$\underbrace{V(0) - V(t)}_{\geq 0} = a_m \int_0^t e^2(\tau) d\tau < \infty, \quad \forall t !$$

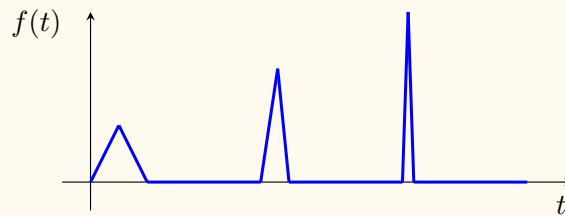
Conclusão:

$$e \in \mathcal{L}_2$$

★ Propriedade importante! Isto é *quase convergência*.

★ Aparentemente, $e \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow e(t) \rightarrow 0$. Porém isto não é verdade.

Exemplo 2 Função solução.



$$\int_0^\infty f^2(d\tau) < \infty \quad \text{porém} \quad f(t) \not\rightarrow 0$$

Ref.: [Slotine & Li:1991], (pag. 122)
[Chen:1999], (pag. 123)

Lema. [Tao:2003], (pag. 80)

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \in \mathcal{L}_2 \\ \dot{f}(t) \in \mathcal{L}_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0}$$

Outro lema mais geral ainda,

Lema. (Barbalăt) [Tao:2003], (pag. 81)

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \text{ unif. contínua} \\ \int_0^\infty f(t) dt < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0}$$

Lembrete :

$$\left[\begin{array}{l} f(t) \text{ dif.} \\ \dot{f}(t) \in \mathcal{L}_\infty \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) \text{ Lip.} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) \text{ u.c.} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) \text{ contínua} \end{array} \right]$$

Note que

$$\left. \begin{array}{l} e(t) \in \mathcal{L}_\infty \\ \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \\ y \in \mathcal{L}_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{e} = \underbrace{-a_m e}_{\mathcal{L}_\infty} + \underbrace{\tilde{\theta} y}_{\mathcal{L}_\infty} \Rightarrow \boxed{\dot{e}(t) \in \mathcal{L}_\infty}$$

Aplicando o lema, conclui-se que:

$$\left. \begin{array}{l} e(t) \in \mathcal{L}_2 \\ \dot{e}(t) \in \mathcal{L}_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0}$$

Fato.

$$\theta(t) \not\rightarrow \theta^*$$

Condição para convergência: Excitação persistente (PE)

$$\int_t^{t+\tau} y^2(\xi) d\xi \geq \alpha > 0$$

Variação da análise de estabilidade

Modificando a função de Lyapunov (1) para

$$2V(e, \tilde{\theta}) = e^2 + \gamma^{-1}\tilde{\theta}^2$$

sua derivada resulta

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e(-a_m e + \tilde{\theta} y) + \gamma^{-1}\tilde{\theta}\dot{\theta} \\ &= -a_m e^2 + \tilde{\theta}(ey + \gamma^{-1}\dot{\theta})\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\dot{\theta} = -\gamma ey \quad (\gamma > 0)$$

★ γ = ganho de adaptação.

Summary of the algorithm

Subsystem	Equation	Order
Plant	$\dot{y} = a_p y + u$	1
Model	$\dot{y}_m = -a_m y_m + r$	1
Tracking error	$e_0 = y - y_m$	
Control law	$u = \theta y + r$	
Update law	$\dot{\theta} = -\gamma e_0 y$	1
	System order =	3

Resultados de simulação

Vide: [relatorio-01.pdf]

Simulação #1 Condições iniciais nulas.

Condições iniciais . . . : $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros : $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 2, 100$$

Sinal de referência . . . : $r = 1$

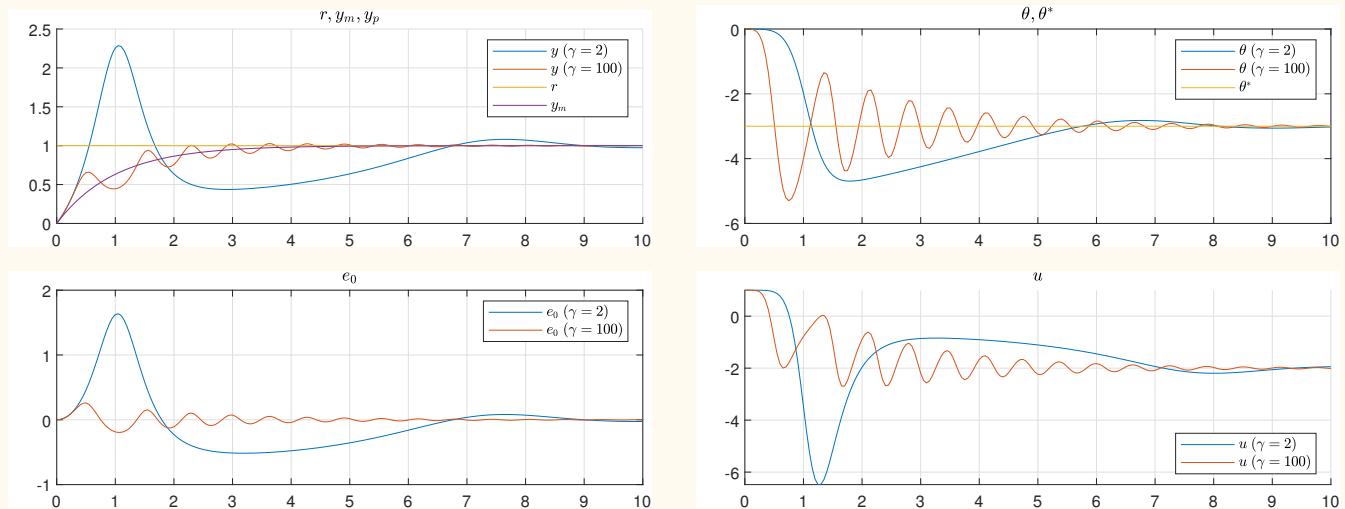


Figura 3: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `simu01.m`)

- Observa-se que o aumento de γ somente causa um aumento na frequência de oscilação de θ .
- A envoltória permanece aproximadamente a mesma.

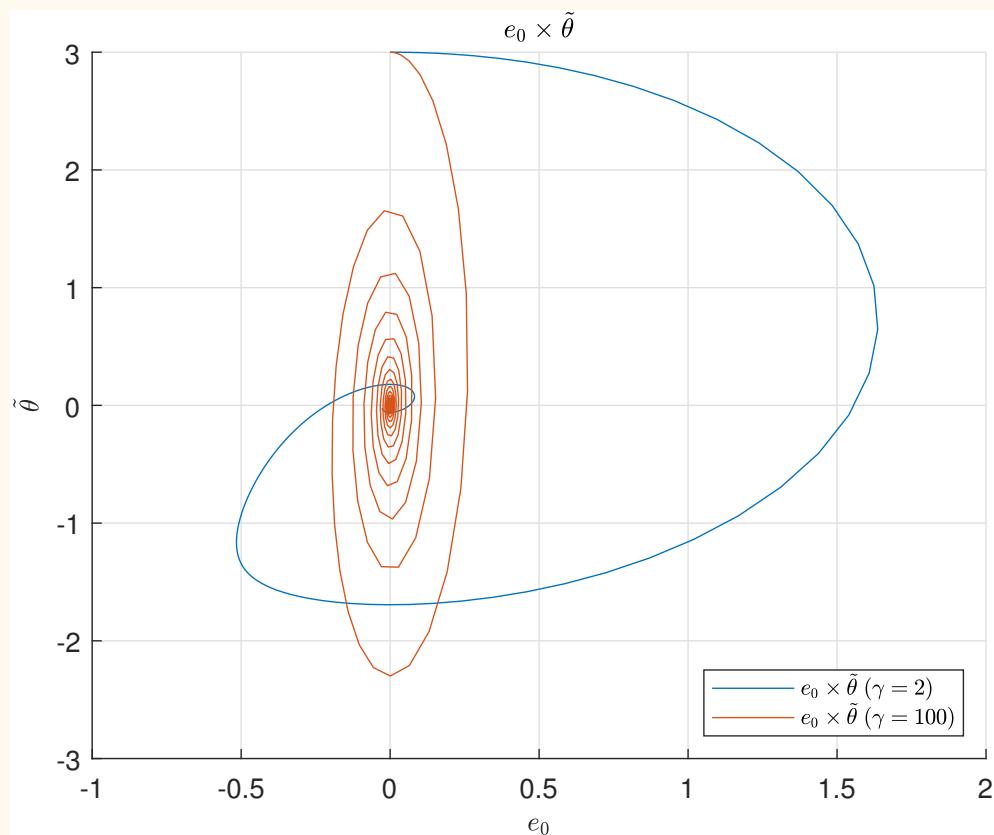


Figura 4: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `simu01.m`)

Simulação #2 Efeito de condição inicial pequena.

Condições iniciais . . . : $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros : $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 2, 100$$

Sinal de referência . . : $r = 1$

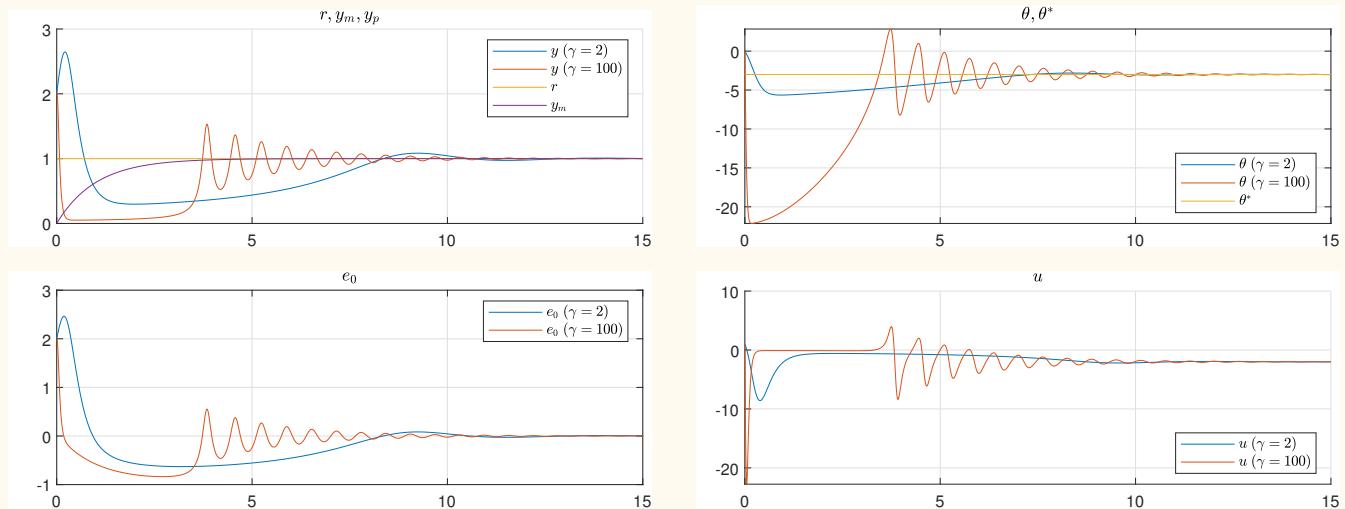


Figura 5: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `simu02.m`)

- Esta simulação mostra a não uniformidade do transitório de adaptação em relação às condições iniciais.
- O comportamento de θ para $\gamma = 2$ é completamente diferente do comportamento para $\gamma = 100$.

Simulação #3 Efeito de condição inicial grande.

Condições iniciais . . . : $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros : $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 2, 100$$

Sinal de referência . . : $r = 1$

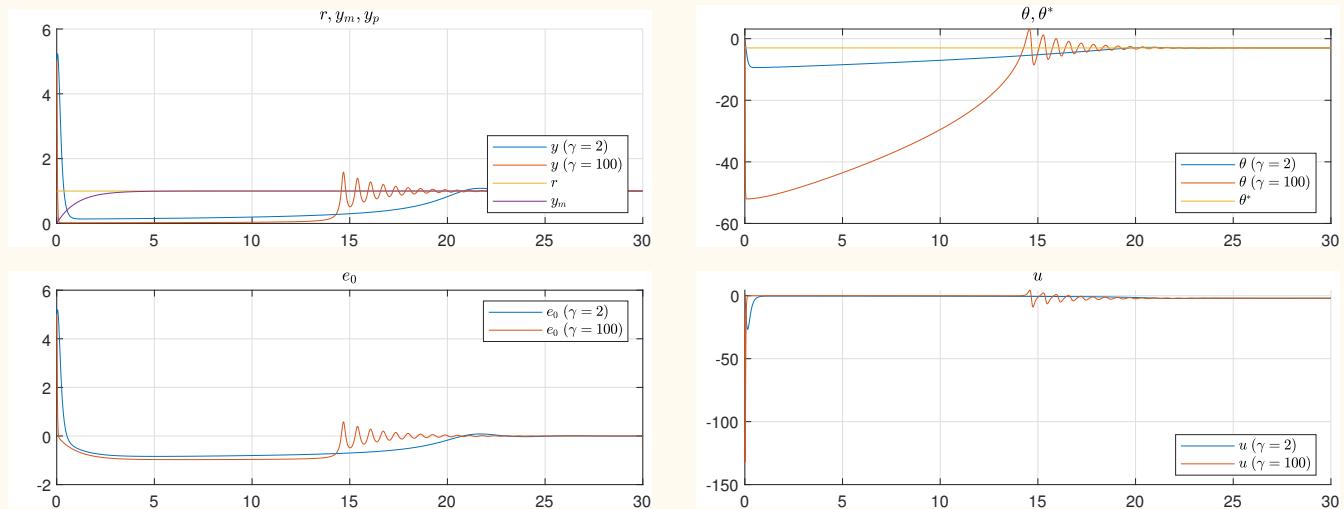


Figura 6: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `simu03.m`)

- A duração do transitório de adaptação aumenta com as condições iniciais.
- $e(0)$ grande $\Rightarrow \dot{\theta}(0)$ grande \Rightarrow Salto inicial de θ . *(Super-estabilização)*
- θ grande $\Rightarrow y = \frac{1}{s+\theta}r = \frac{1/\theta}{s/\theta+1}r \simeq 0$. *(Atenuação de r)*

Simulação #4 Efeito de variações descontínuas no parâmetro a_p .

Condições iniciais . . . : $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros : $a_p = [2, 3, 4, 5, 6]$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 10$$

Sinal de referência . . : $r = 1$

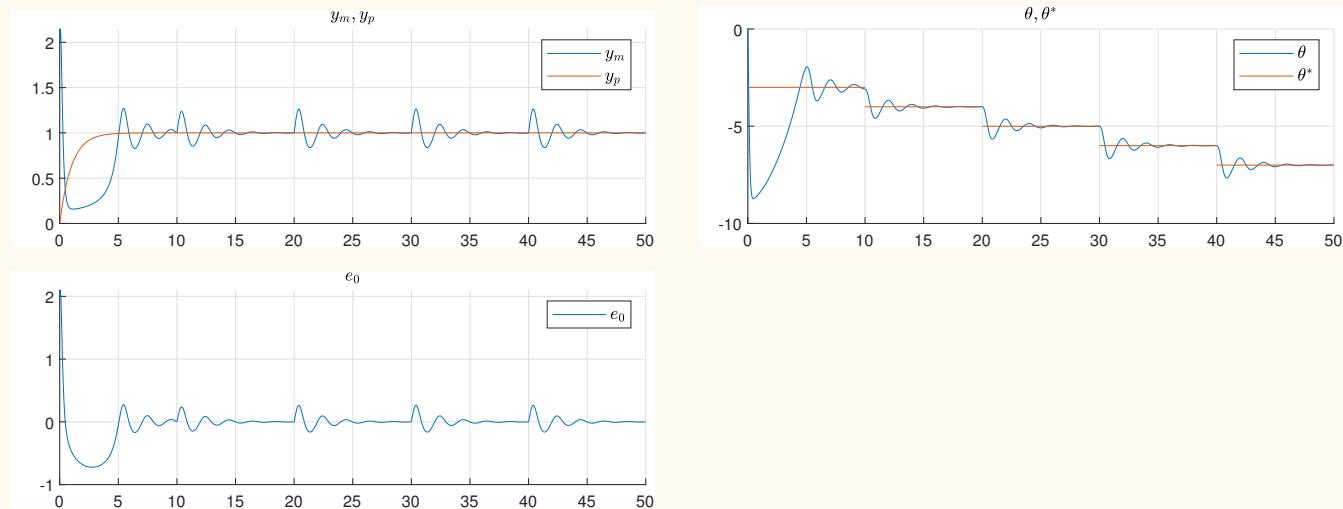


Figura 7: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `simu04.m`)

2.1.2 MÉTODO DO GRADIENTE

Exemplo 3 Ref.: [Tao:2003], (pag. 20)

Planta :
$$\boxed{\dot{y} = a_p y + u}$$
 $P(s) = \frac{1}{s - a_p}$ a_p desconhecido

Modelo :
$$\boxed{\dot{y}_m = -a_m y_m + r}$$
 $M(s) = \frac{1}{s + a_m}$

Lei de controle:
$$\boxed{u = \theta y + r}$$

Equação do erro:
$$\boxed{\dot{e} = -a_m e + \tilde{\theta} y}$$

Vamos definir o seguinte sinal filtrado:

$$\zeta = M(s)y = \frac{1}{s + a_m} y$$

Então, podemos reescrever a equação do erro como

$$\begin{aligned} e &= M[\theta y - \theta^* y] \\ &= M[\theta y] - \theta^* M[y] \\ &= M[\theta y] - \theta^* \zeta \end{aligned}$$

Note que: e : sinal medido

θ : parâmetro adaptado

y : sinal medido

θ^* : parâmetro desconhecido

ζ : sinal filtrado

Idéia: Ajustar o parâmetro θ tal que o erro de estimativa de e seja pequeno.

Estimador:

$$\hat{e} = M[\theta y] - \theta \zeta$$

θ = estimativa de θ^*

Erro de estima:

$$\varepsilon = e - \hat{e}$$

Nota. Partindo-se da equação do erro na forma

$$e = M[\theta y - \theta^* y]$$

o estimador resulta

$$\hat{e} = M[\theta y - \theta y] = 0 \quad !!!$$

O erro de estima também pode ser escrito como

$$\varepsilon = e - \hat{e}$$

$$= M[\theta y] - \theta^* \zeta - M[\theta y] + \theta \zeta \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \tilde{\theta} \zeta$$

Vamos agora escolher a função de Lyapunov (parcial)

$$2V(\tilde{\theta}) = \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2, \quad \gamma > 0$$

Derivando,

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}} \dot{\tilde{\theta}} = \gamma^{-1} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}}$$

Considere a seguinte lei de adaptação normalizada

$$\dot{\theta} = -\frac{\gamma \varepsilon \zeta}{m^2}$$

com sinal normalizante

$$m^2 = 1 + \zeta^2$$

★ Lembrar que $\zeta = M(s)y$.

Substituindo em \dot{V} ,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \gamma^{-1} \tilde{\theta} \dot{\theta} \\ &= \gamma^{-1} \tilde{\theta} \left(-\frac{\gamma \varepsilon \zeta}{m^2} \right) \\ &= -\frac{\tilde{\theta} \varepsilon \zeta}{m^2}\end{aligned}$$

Lembrando que $\varepsilon = \tilde{\theta} \zeta$,

$$\boxed{\dot{V} = -\frac{\varepsilon^2}{m^2} \leq 0}$$

Conclusão:

- $V(\tilde{\theta})$ não cresce \Rightarrow

$$\boxed{\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty}$$

$$\bullet \varepsilon = \tilde{\theta} \zeta \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{m} = \underbrace{\tilde{\theta}}_{<1} \underbrace{\frac{\zeta}{m}}_{<1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\frac{\varepsilon}{m} \in \mathcal{L}_\infty|}$$

$$\bullet \dot{V} = -\frac{\varepsilon^2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{m^2} d\tau < \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\frac{\varepsilon}{m} \in \mathcal{L}_2|}$$

$$\bullet \dot{\theta} = -\gamma \underbrace{\frac{\varepsilon}{m}}_{\mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2} \underbrace{\frac{\zeta}{m}}_{<1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\dot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty|} \quad \text{e} \quad \boxed{|\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2|}$$

Análise de convergência

★ É possível mostrar com estes resultados que

$$y \rightarrow y_m$$

★ A demonstração é trabalhosa !

Ver [Tao:2003], (pag. 212) .

Nota. Aplicação do método do Gradiente.

Função custo:

$$J = \frac{\varepsilon^2}{m^2} = \frac{\tilde{\theta}^2 \zeta^2}{m^2}$$

Derivando em relação a $\tilde{\theta}$,

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{\theta}} = 2\tilde{\theta} \frac{\zeta^2}{m^2} = 2\varepsilon \frac{\zeta}{m^2} \quad !!$$

Lei do gradiente: A adaptação é feita no sentido negativo de $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\theta}}$.

Isto é,

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\frac{\partial J}{\partial \tilde{\theta}} = -\gamma \varepsilon \frac{\zeta}{m^2}$$

★ Note o efeito da normalização: $J = \underbrace{\tilde{\theta}^2}_{<1} \frac{\zeta^2}{m^2}$

Summary of the algorithm

Subsystem	Equation	Order
Plant	$\dot{y} = a_p y + u$	1
Model	$\dot{y}_m = -a_m y_m + r$	1
Tracking error	$e_0 = y - y_m$	
Filter	$\dot{\zeta} = -a_m \zeta + y$	1
Control law	$u = \theta y + r$	
Prediction	$\hat{e} = \frac{1}{s + a_m} [\theta y] - \theta \zeta$	1
Prediction error	$\varepsilon = e_0 - \hat{e}$	
Normalizing signal	$m^2 = 1 + \zeta^2$	
Update law	$\dot{\theta} = -\frac{\gamma \varepsilon \zeta}{m^2}$	1
	System order =	5

Resultados de simulação Vide: [relatorio-02.pdf]

Simulação #1 Condições iniciais nulas.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 10, 100$$

Sinal de referência....: $r = 1$

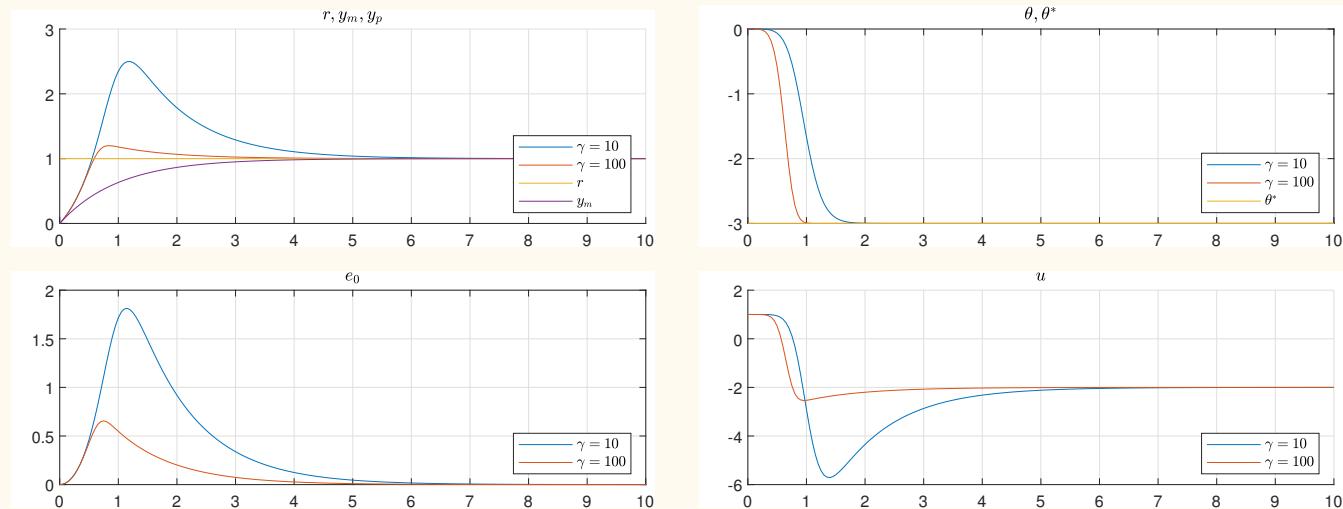


Figura 8: Resultado da simulação com algoritmo Gradiênte normalizado. (Script: `simu01.m`)

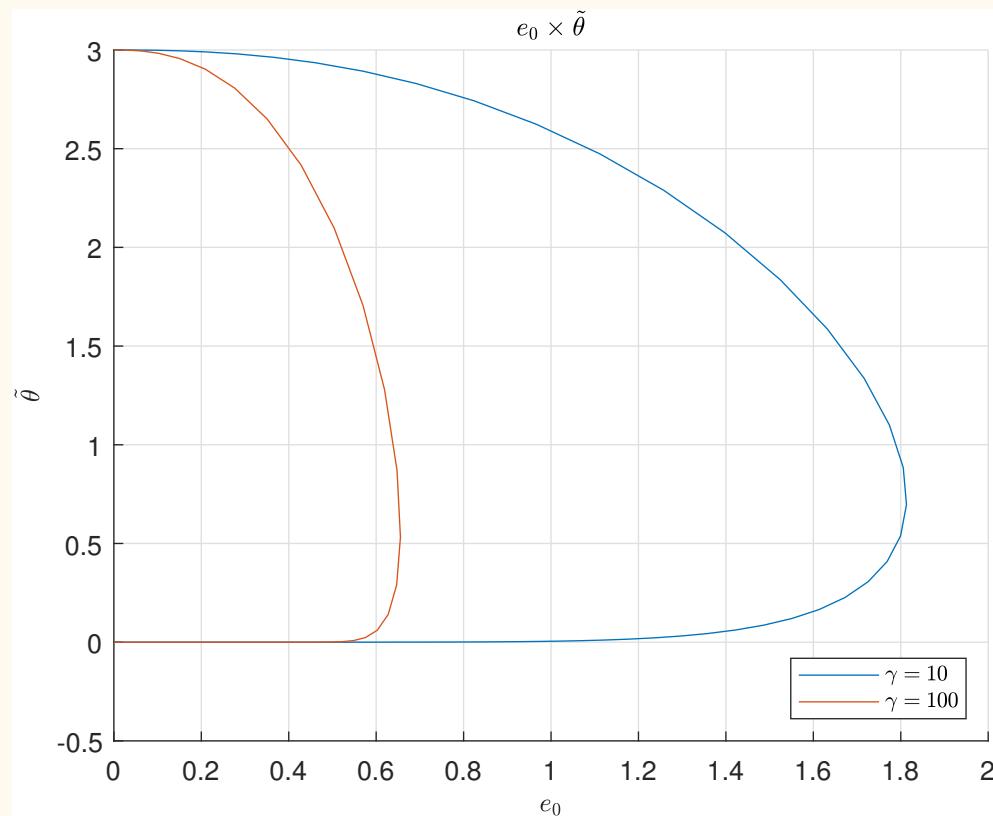


Figura 9: Resultado da simulação com algoritmo Gradiente normalizado. (Script: `simu01.m`)

Simulação #2 Efeito de condição inicial pequena.

Condições iniciais.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 2, 100$$

Sinal de referência....: $r = 1$

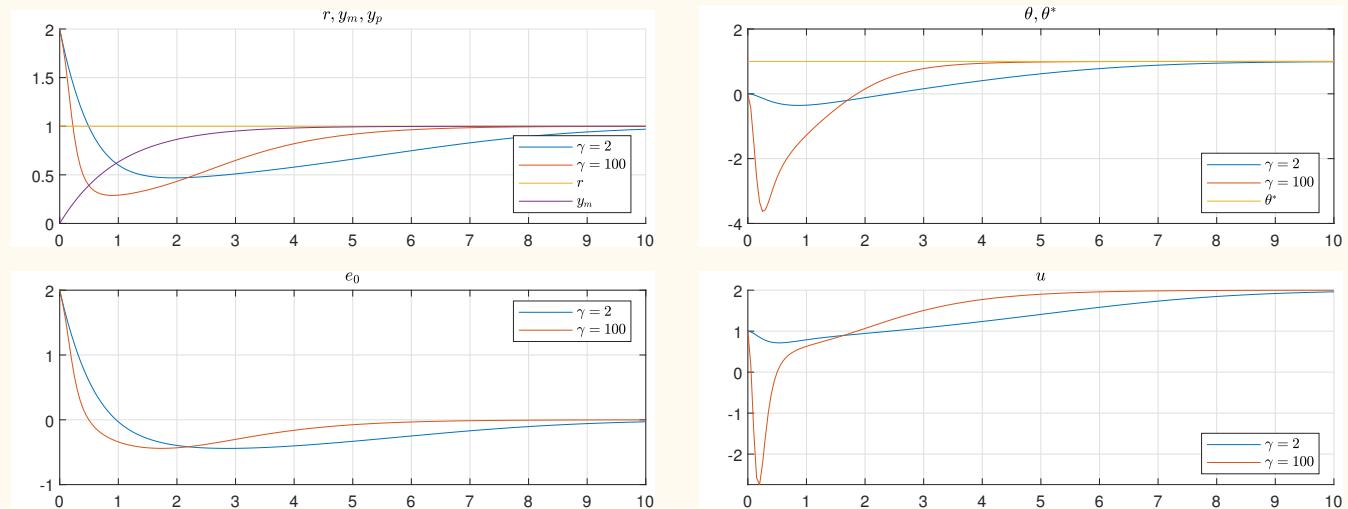


Figura 10: Resultado da simulação com algoritmo Gradiente normalizado. (Script: `simu02.m`)

Simulação #3 Efeito de condição inicial grande.

Condições iniciais.....: $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 1, 100$$

Sinal de referência....: $r = 1$

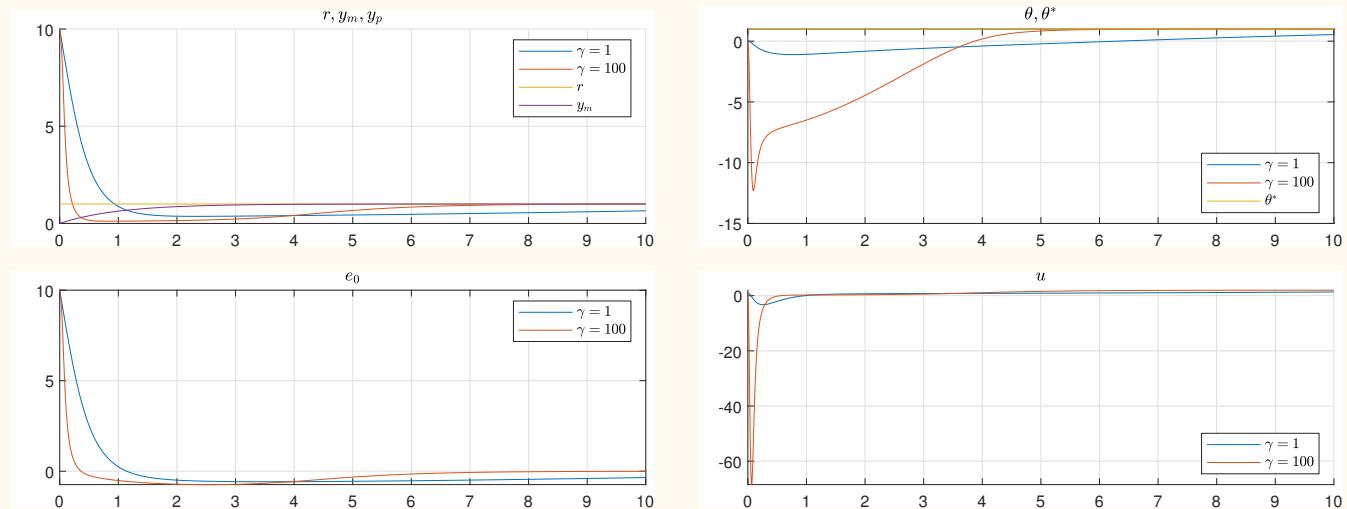


Figura 11: Resultado da simulação com algoritmo Gradiente normalizado. (Script: `simu03.m`)

2.1.3 MRAC INDIRETO

Exemplo 4 Ref.: [Tao:2003], (pag. 21)

Planta :
$$\boxed{\dot{y} = a_p y + u}$$
 $P(s) = \frac{1}{s - a_p}$ a_p desconhecido

Modelo :
$$\boxed{\dot{y}_m = -a_m y_m + r}$$
 $M(s) = \frac{1}{s + a_m}$

Lei de controle:
$$\boxed{u = \theta y + r}$$
, $\theta^* = -a_p - a_m$

Seja \hat{a}_p uma **estima de a_p** .

Podemos calcular $\theta(t)$ como:

$$\boxed{\theta(t) = -\hat{a}_p - a_m}$$

Para encontrar \hat{a}_p , introduz-se um filtro estável

$$\frac{1}{s + a_f}, \quad a_f > 0$$

A planta pode ser expressa como

$$\begin{aligned} sy &= a_p y + u + (a_f y) - (a_f y) \\ &= -a_f y + (a_f + a_p)y + u \end{aligned}$$

Portanto,

$$(s + a_f)y = (a_f + a_p)y + u$$

ou melhor,

$$y = \underbrace{(a_f + a_p)}_{\psi^*} \underbrace{\frac{1}{s + a_f}y}_{y_f} + \underbrace{\frac{1}{s + a_f}u}_{u_f} \Rightarrow \boxed{y = \psi^* y_f + u_f}$$

Predição de y :

$$\hat{y} = \psi y_f + u_f$$

★ Lembrar que $\psi = a_f + \hat{a}_p$ é uma estima de ψ^* . \Rightarrow

$$\theta(t) = -\psi + a_f - a_m$$

★ A análise pode ser feita com \hat{a}_p ou ψ .

Erro de predição:

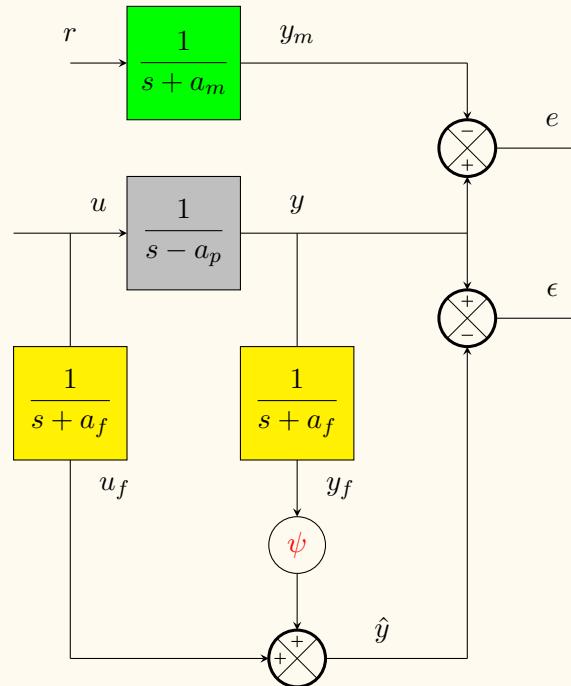
$$\varepsilon = \hat{y} - y$$

$$= (\psi y_f + u_f) - (\psi^* y_f + u_f) \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \tilde{\psi} y_f$$

★ A equação do erro não tem dinâmica !!

Estrutura do MRAC indireto:



Lei de adaptação:

$$\boxed{\dot{\psi} = -\frac{\gamma \varepsilon y_f}{m^2}}, \quad m^2 = 1 + y_f^2, \quad \gamma > 0$$

Análise de estabilidade

Função de Lyapunov: $2V(\tilde{\psi}) = \gamma^{-1} \tilde{\psi}^2$

Derivando,

$$\dot{V} = \gamma^{-1} \tilde{\psi} \dot{\psi} = \gamma^{-1} \tilde{\psi} \left(-\frac{\gamma \varepsilon y_f}{m^2} \right) = -\frac{\varepsilon y_f \tilde{\psi}}{m^2} = -\frac{\varepsilon^2}{m^2} \leq 0$$

Conclusão:

$$\boxed{\tilde{\psi} \in \mathcal{L}_\infty}$$

Summary of the algorithm

Subsystem	Equation	Order
Plant	$\dot{y} = a_p y + u$	1
Model	$\dot{y}_m = -a_m y_m + r$	1
Tracking error	$e_0 = y - y_m$	
Filters	$\dot{y}_f = -a_f y_f + y$ $\dot{u}_f = -a_f u_f + u$	1 1
Identification	$\hat{a}_p = \psi - a_f$	
Control gain	$\theta = -\hat{a}_p - a_m$	
Control law	$u = \theta y + r$	
Prediction	$\hat{y} = \psi y_f + u_f$	
Prediction error	$\varepsilon = \hat{y} - y$	
Normalizing signal	$m^2 = 1 + y_f^2$	
Update law	$\dot{\psi} = -\gamma \varepsilon \frac{y_f}{m^2}$	1
	System order =	5

Resultados de simulação Vide: [relatorio-03.pdf]

Simulação #1 Condições iniciais nulas.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 2, 100$$

Sinal de referência....: $r = 1$

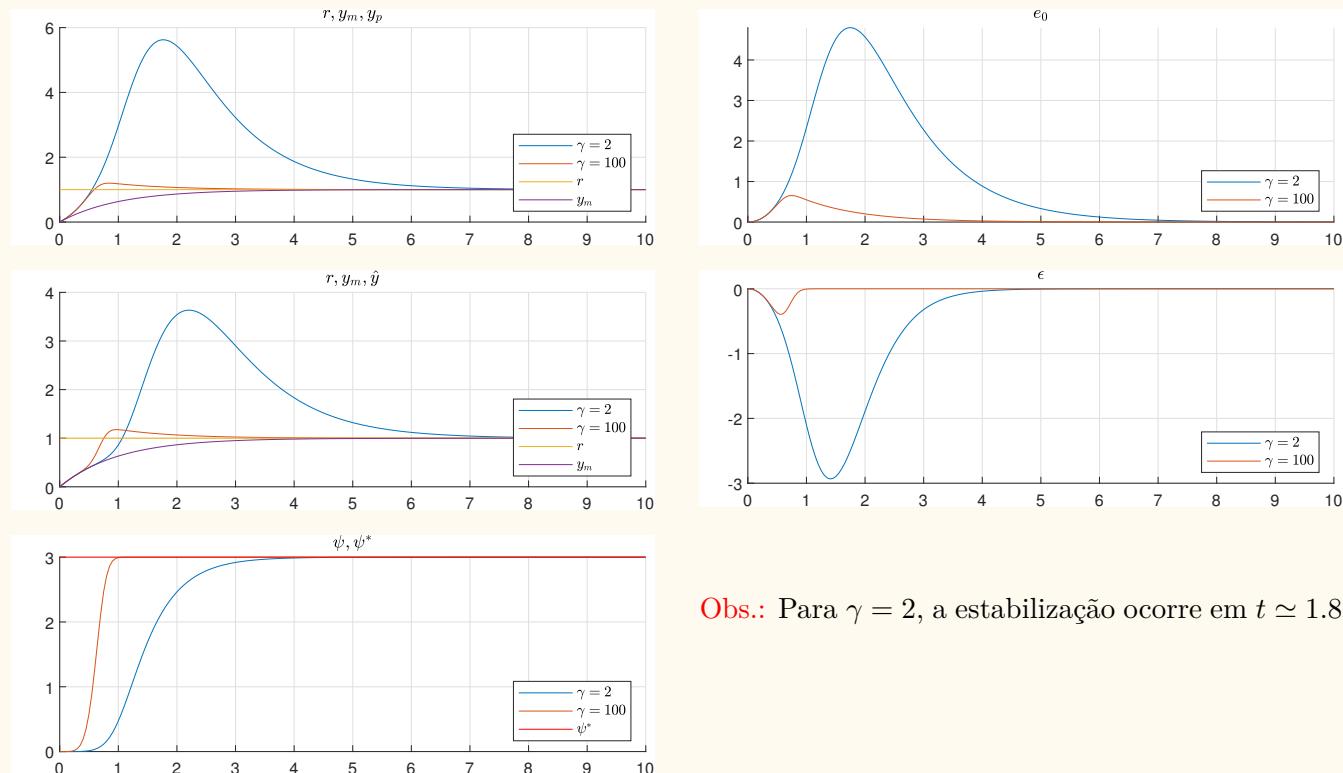


Figura 12: Resultado da simulação com algoritmo MRAC indireto.

(Script: **simu01.m**)

Simulação #2 Efeito de condição inicial pequena.

Condições iniciais.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 2, 100$$

Sinal de referência....: $r = 1$

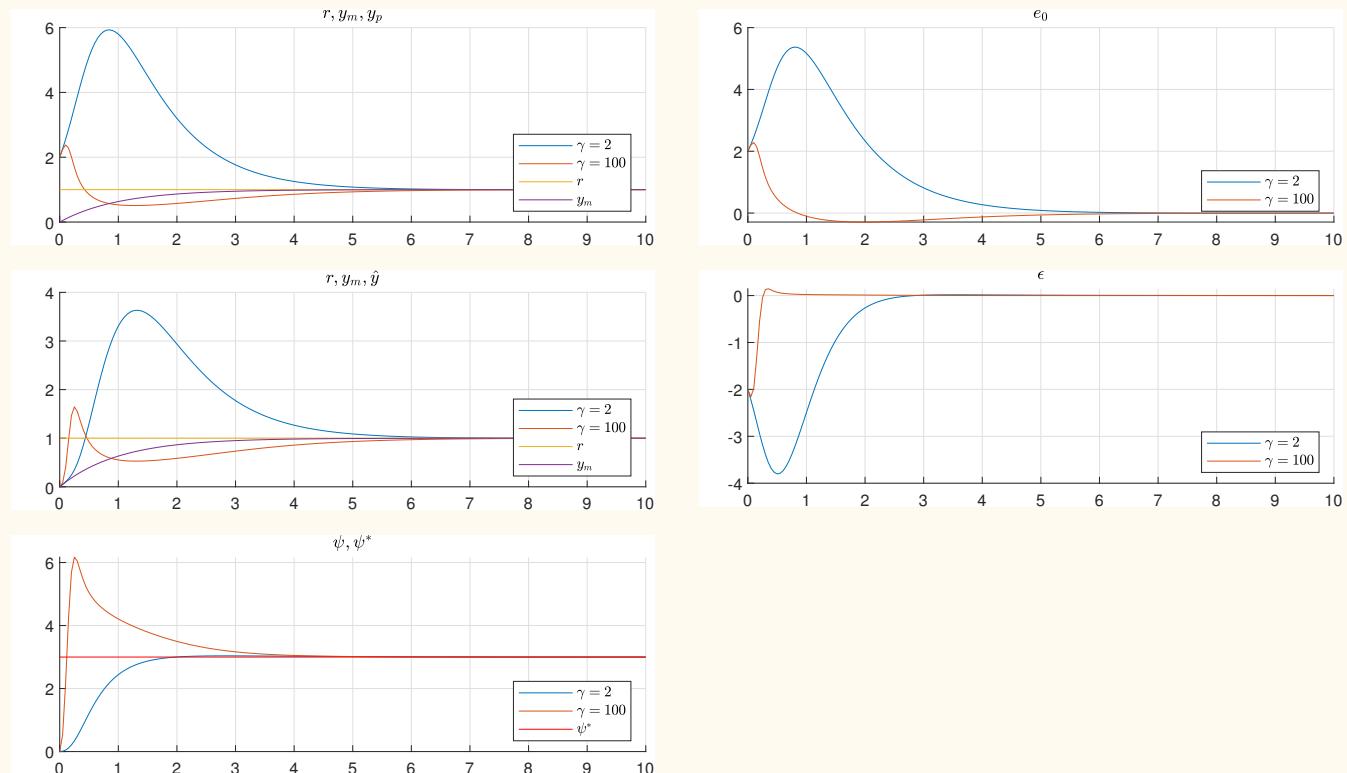


Figura 13: Resultado da simulação com algoritmo MRAC indireto.

(Script: `simu02.m`)

Simulação #3 Efeito de condição inicial grande.

Condições iniciais.....: $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = 2$

$$a_m = 1$$

$$\gamma = 2, 100$$

Sinal de referência....: $r = 1$

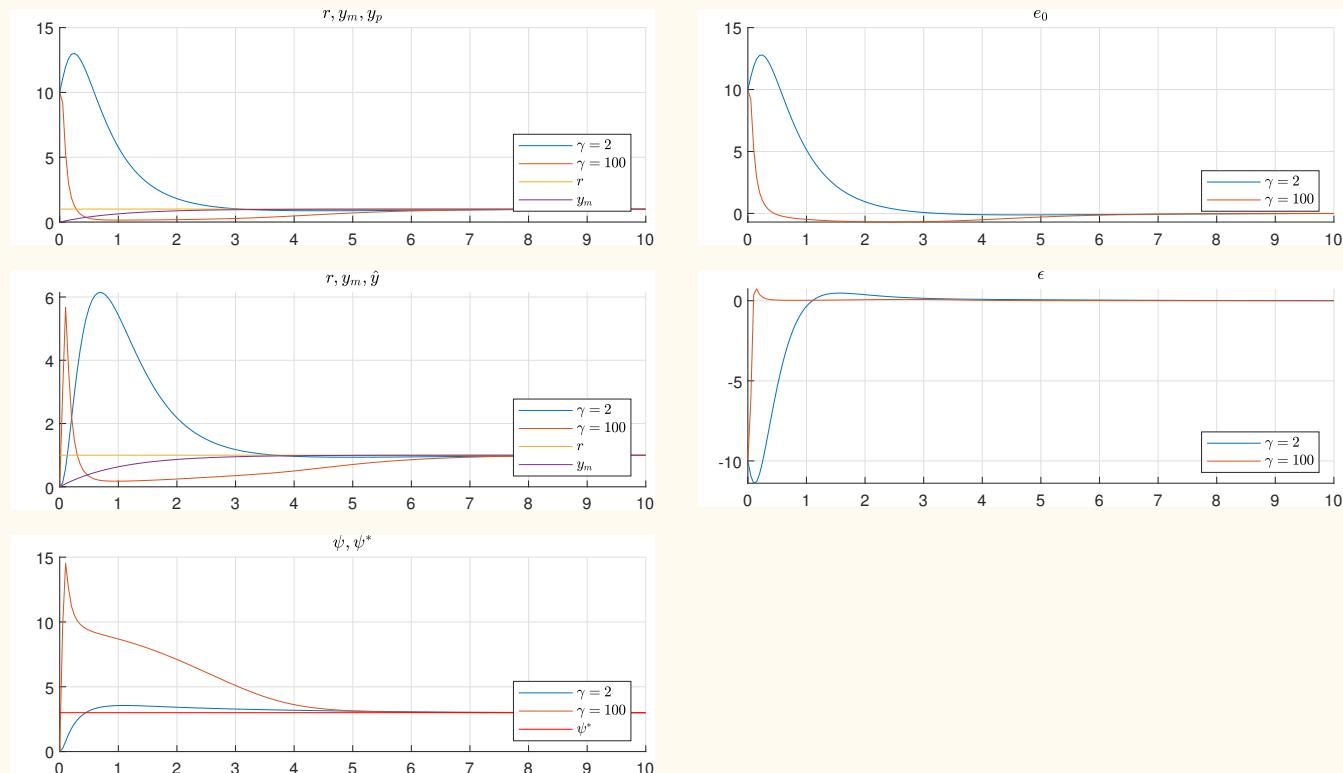


Figura 14: Resultado da simulação com algoritmo MRAC indireto.

(Script: `simu03.m`)

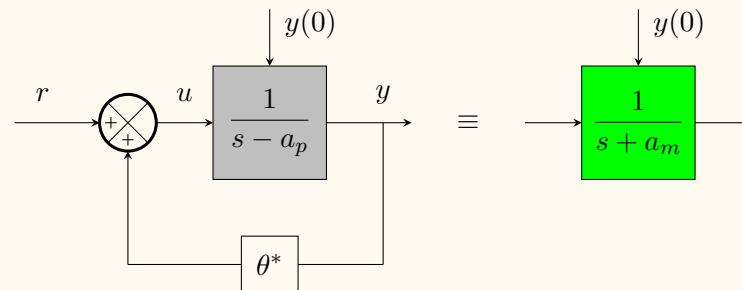
2.1.4 VS-MRAC

Ref.: [Hsu & Costa:1989]

Planta : $\dot{y} = a_p y + u$ $y = \frac{1}{s - a_p} u$ a_p desconhecido !

Modelo : $\dot{y}_m = -a_m y_m + r$ $y_m = \frac{1}{s + a_m} r$

Se a_p fosse conhecido, então



Lei de *controle ideal*:

$$u^* = \theta^* y + r$$

Matching gain :

$$\theta^* = -a_p - a_m$$

Controle proposto:

$$u = \theta(t) y + r$$

★ $\theta(t)$ é um **sinal chaveado** (*switching function*).

Erro de saída:

$$e = y - y_m$$

Equação do erro:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m \\ &= (a_p y + u) - (-a_m y_m + r) + (a_m y) - (a_m y) \\ &= -a_m (\underbrace{y - y_m}_e) + \underbrace{(a_p + a_m)}_{-\theta^*} y - r + u \\ &= -a_m e - \theta^* y - r + \theta y + r \\ &= -a_m e + [\underbrace{\theta - \theta^*}_{\tilde{\theta}}] y\end{aligned}$$

Erro paramétrico:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$$

Portanto,

$$\dot{e} = -a_m e + \tilde{\theta} y$$

Resumo das equações do sistema (em termos de erros):

$$\begin{cases} \dot{e} = -a_m e + \tilde{\theta} y \\ \theta = ? \quad (\text{switching function}) \end{cases}$$

Nova proposta: *Variable Structure - MRAC* (VS-MRAC)

★ O sinal θ não é definido por uma equação diferencial !!

Função de Lyapunov para este sistema (sem o termo $\tilde{\theta}^2$) :

$$2V(e) = e^2$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\dot{V}(e) &= e\dot{e} = -a_m e^2 + \tilde{\theta}ye \\ &= -a_m e^2 + (\theta - \theta^*)ye \\ &= -a_m e^2 + \theta ye - \theta^*ye\end{aligned}$$

Hipótese: Conhecemos um *upper-bound* $\bar{\theta}$ para θ^* . Isto é

$$\bar{\theta} > |\theta^*|$$

Isto permite escolher

$$\theta = -\bar{\theta} \operatorname{sign}(ye)$$

Resultado:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -a_m e^2 - \bar{\theta} ye \operatorname{sign}(ye) - \theta^* ye \\ &= -a_m e^2 - \underbrace{\bar{\theta}|ye|}_{>0} - \theta^* ye\end{aligned}$$

★ Note que $\bar{\theta}|ye| > |\theta^*ye| > 0$

Portanto,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -a_m e^2 - \Delta \quad (\Delta > 0) \\ &< -a_m e^2 \quad (!!)\end{aligned}$$

Conclusão: $\boxed{\dot{V} < 0} \Rightarrow \boxed{e(t) \rightarrow 0}$ pelo menos exponencialmente !!

A lei de controle pode ser escrita como

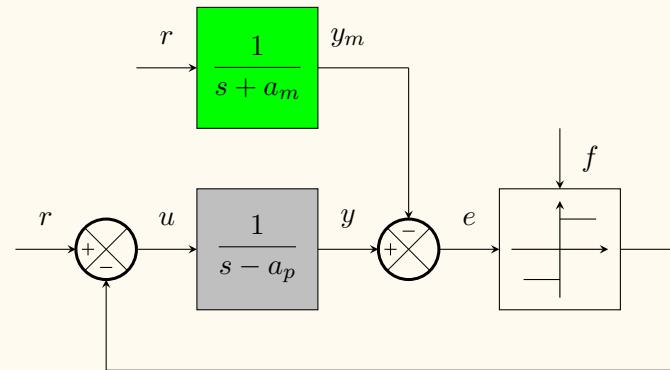
$$\begin{aligned} u &= \bar{\theta} y + r \\ &= -\bar{\theta} \operatorname{sign}(ey)y + r \\ &= -\underbrace{\bar{\theta}|y|}_{f} \operatorname{sign}(e) + r \end{aligned}$$

Ou melhor,

$$u = -f \operatorname{sign}(e) + r$$

★ $f = \bar{\theta}|y|$ é um upper-bound para $\theta^*|y|$.

Estrutura do VS-MRAC:

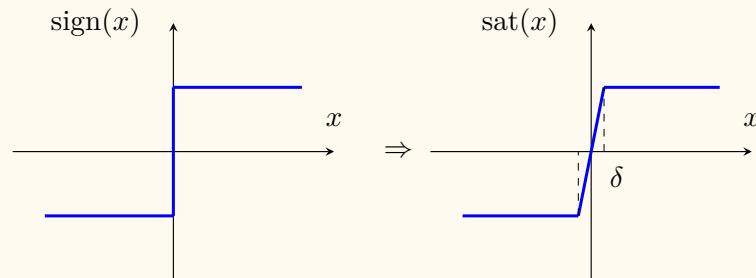


Resultados de simulação

Vide: [relatorio-04.pdf]

★ **Problema:** descontinuidade da função $\text{sign}(\cdot)$.

★ Para a implementação da lei de controle, o relé é substituído por uma zona linear.



Summary of the algorithm

Subsystem	Equation	Order
Plant	$\dot{y} = a_p(t)y + u$	1
Model	$\dot{y}_m = -a_m y_m + r$	1
Tracking error	$e_0 = y - y_m$	
Filter	$\tau \dot{\theta}_{eq} = -\theta_{eq} + \theta$	1
Control law	$u = \theta_{eq} y + r$	
Update law	$\theta = -\bar{\theta} \text{ sat}(ye_0)$	
Linear zone	$\text{sat}(x) = \begin{cases} \delta^{-1}x & \text{se } x < \delta \\ \text{sign}(x) & \text{se } x \geq \delta \end{cases}$	
	System order =	3

★ Note that the plant is time varying!

Simulação #1 Efeito da zona linear δ .

Condições iniciais.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = -2$

$$a_m = 1$$

$$\bar{\theta} = 5$$

$$\tau = 0.1$$

$$\delta = 0.1, 0.01$$

Sinal de referência....: $r = 1$

- ★ O aumento da zona linear suaviza os sinais porém cria um erro de regime que pode ser observado em y .

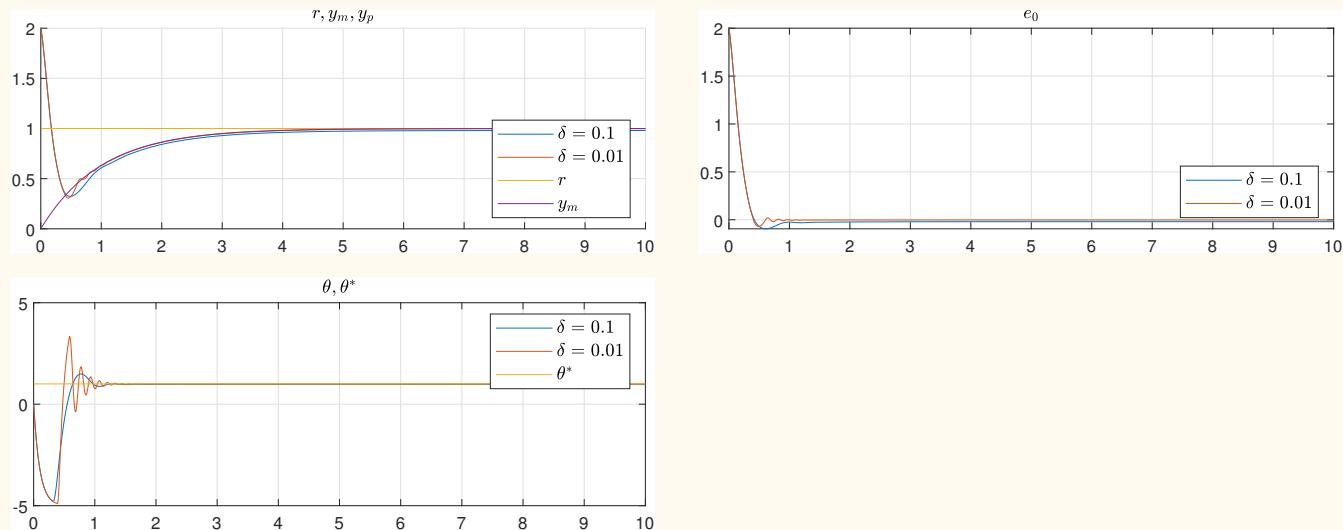


Figura 15: Resultado da simulação com algoritmo VS-MRAC.

(Script: `simu01.m`)

Simulação #2 Efeito da constante de tempo τ do filtro.

Condições iniciais.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = -2$

$$a_m = 1$$

$$\bar{\theta} = 5$$

$$\tau = 0.1, 0.01$$

$$\delta = 0.01$$

Sinal de referência....: $r = 1$

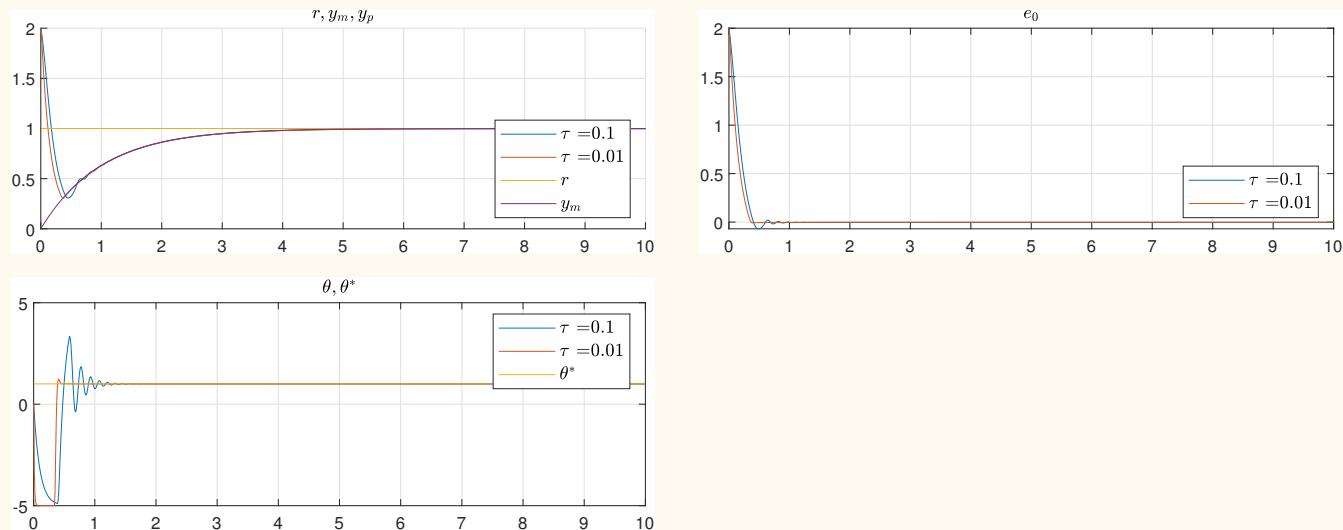


Figura 16: Resultado da simulação com algoritmo VS-MRAC.

(Script: `simu02.m`)

Simulação #3 Efeito de uma constante de tempo τ muito pequena.

Condições iniciais.....: $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p = -2$

$$a_m = 1$$

$$\bar{\theta} = 5$$

$$\tau = 0.1, 0.00001$$

$$\delta = 0.00001$$

Sinal de referência....: $r = 1$

★ Neste caso, o *chattering* torna-se visível.

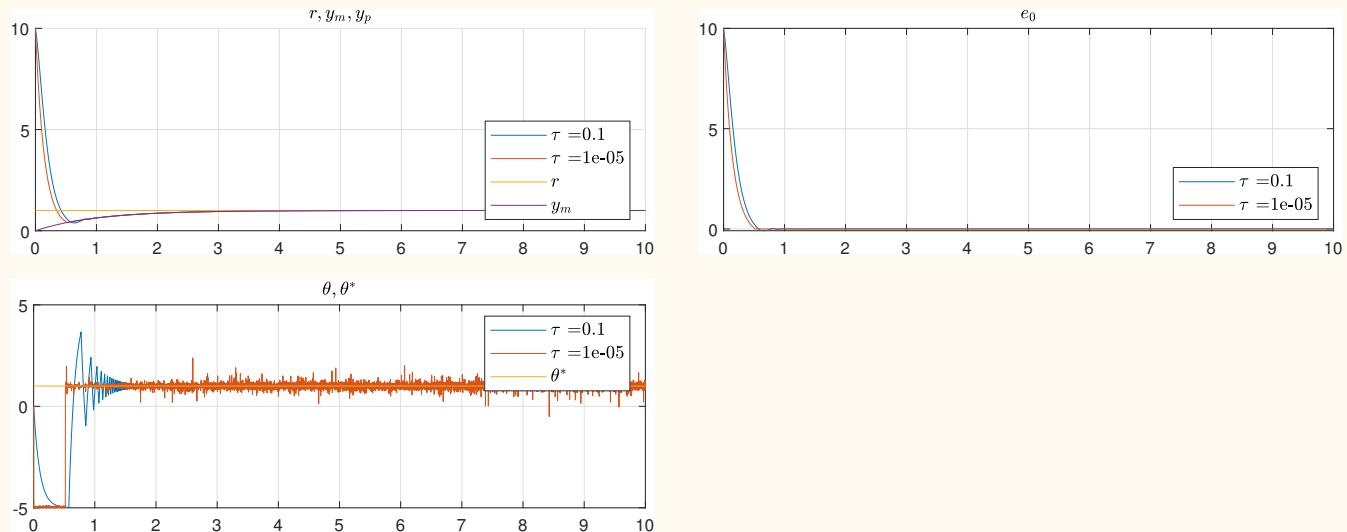


Figura 17: Resultado da simulação com algoritmo VS-MRAC.

(Script: `simu03.m`)

Simulação #4 Caso em que o parâmetro da planta é variante no tempo.

Condições iniciais....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parâmetros.....: $a_p(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leq t \leq 10 \\ -2 + \sin(2t), & t > 10 \end{cases}$

$$a_m = 1$$

$$\bar{\theta} = 5$$

$$\tau = 0.1$$

$$\delta = 0.1$$

Sinal de referência....: $r = 1$

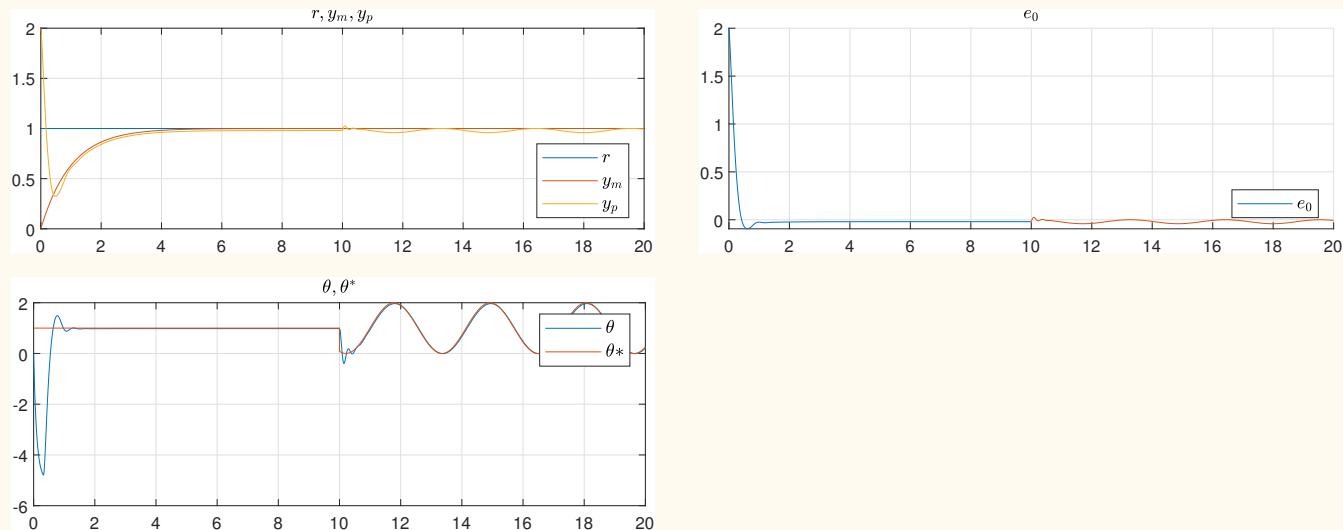


Figura 18: Resultado da simulação com algoritmo VS-MRAC.

(Script: `simu04.m`)

2.1.5 PROBLEMAS & EXERCÍCIOS

- (1)** Observe o diagrama de blocos do MRAC indireto. O sinal de erro e não é utilizado na lei de controle e nem na lei de adaptação.
- (a)** O modelo de referência é realmente necessário?
- (b)** Explique?

Solução:

(2) Considere o algoritmo Gradiente Normalizado apresentado na seção 2.1.2.

Modifique o fator de normalização para

$$m^2 = 1 + \zeta^2 + \dot{\zeta}^2$$

e mostre que, com essa modificação,

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{m} \in \mathcal{L}_\infty .$$

Solução:

Relembrando...

Erro de estima :

$$\varepsilon = \tilde{k}\zeta$$

Lei de adaptação :

$$\dot{k} = -\frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}$$

Derivando a equação do erro,

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{k}\zeta + \tilde{k}\dot{\zeta} \\ &= -\gamma\varepsilon\frac{\zeta^2}{m^2} + \tilde{k}\dot{\zeta}\end{aligned}$$

Porém,

$$\zeta = \frac{1}{s + a_m}y \quad \Rightarrow \quad \dot{\zeta} = -a_m\zeta + y$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= -\gamma\varepsilon \frac{\zeta^2}{m^2} + \tilde{k}\dot{\zeta} \\ &= -\gamma\varepsilon \frac{\zeta^2}{m^2} + \tilde{k}(-a_m\zeta + y) \\ &= -\gamma\varepsilon \frac{\zeta^2}{m^2} - a_m \underbrace{\tilde{k}\zeta}_{\varepsilon} + \tilde{k}y \\ &= -\left(a_m + \gamma \frac{\zeta^2}{m^2}\right)\varepsilon + \tilde{k}y\end{aligned}$$

Dividindo por m ,

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{m} = -\underbrace{\left(a_m + \gamma \frac{\zeta^2}{m^2}\right)}_{\in \mathcal{L}_\infty} \frac{\varepsilon}{m} + \tilde{k} \underbrace{\frac{y}{m}}_{\in \mathcal{L}_\infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\dot{\varepsilon}}{m} \in \mathcal{L}_\infty}$$

Detalhe : $\dot{\zeta} = -a_m\zeta + y \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{m} \in \mathcal{L}_\infty \quad !!$

2.2 ENFOQUE DISCRETO

Algoritmos analisados:

- Método do Gradiente
 - MRAC indireto
-
- ★ Não existe um equivalente discreto para o MRAC direto.

2.2.1 MÉTODO DO GRADIENTE DISCRETO

Exemplo 5 Ref.: [Tao:2003], (pag. 23)

Planta : $y(t+1) = a_p y + u$ $P(z) = \frac{1}{z - a_p}$ a_p desconhecido

Modelo : $y_m(t+1) = -a_m y_m + r$ $M(z) = \frac{1}{z + a_m}, \quad |a_m| < 1$

Parâmetro ideal: $\theta^* = -(a_p + a_m)$

Controle ideal : $u^* = \theta^* y + r$

Controle adaptativo: $u = \theta y + r$

Erro de saída:

$$e = y - y_m$$

Equação do erro (dinâmica de $e(t)$):

$$\begin{aligned} e(t+1) &= y(t+1) - y_m(t+1) \\ &= (a_p y + u) - (-a_m y_m + r) + (a_m y) - (a_m y) \\ &= -a_m \underbrace{(y - y_m)}_e + \underbrace{(a_p + a_m)}_{-\theta^*} y - r + u \\ &= -a_m e - \theta^* y + \theta y \end{aligned}$$

Portanto,

$$e(t+1) = -a_m e(t) + [\tilde{\theta} y]$$

ou

$$e = M(z)[\tilde{\theta} y]$$

★ Similar ao caso contínuo.

Como no caso contínuo, define-se o sinal filtrado

$$\boxed{\zeta = M(z)y = \frac{1}{z + a_m}y}$$

Pode-se reescrever a equação do erro como

$$\begin{aligned} e &= M[\theta y - \theta^* y] \\ &= M[\theta y] - \theta^* M[y] \\ &= M[\theta y] - \theta^* \zeta \end{aligned}$$

Estimador:

$$\boxed{\hat{e} = M[\theta y] - \theta \zeta} \quad \theta = \text{estimativa de } \theta^*$$

Erro de estima:

$$\boxed{\varepsilon = e - \hat{e}}$$

Que pode ser escrito como

$$\varepsilon = e - \hat{e}$$

$$= M[\theta y] - \theta^* \zeta - M[\theta y] + \theta \zeta \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon = \tilde{\theta} \zeta}$$

Função de Lyapunov: $V(\tilde{\theta}) = \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2$

A variação é dada por

$$\begin{aligned}\Delta V(\tilde{\theta}) &= V(\tilde{\theta}(t+1)) - V(\tilde{\theta}(t)) \\ &= \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2(t+1) - \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2(t)\end{aligned}$$

Considere a seguinte lei de adaptação normalizada

$$\theta(t+1) = \theta(t) - \frac{\gamma \varepsilon(t) \zeta(t)}{m^2(t)}$$

com sinal normalizante

$$m^2 = 1 + \zeta^2$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta V(\tilde{\theta}) &= \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2(t+1) - \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2(t) \\ &= \gamma^{-1} [\theta(t+1) - \theta^*]^2 - \gamma^{-1} [\theta(t) - \theta^*]^2 \\ &= \gamma^{-1} [\theta^2(t+1) - 2\theta(t+1)\theta^* + \theta^{*2}] - \gamma^{-1} [\theta^2(t) - 2\theta(t)\theta^* + \theta^{*2}]\end{aligned}$$

Usando

$$\theta^2(t+1) = \theta^2 - 2\frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}\theta + \left(\frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}\right)^2$$

e simplificando a notação, tem-se que

$$\begin{aligned}\Delta V(\tilde{\theta}) &= \gamma^{-1} \left[-2\frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}\theta + \left(\frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}\right)^2 - 2\left(\theta - \frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}\right)\theta^* \right] + 2\gamma^{-1}\theta\theta^* \\ &= -2\frac{\varepsilon\zeta}{m^2}\theta + \gamma^{-1}\left(\frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}\right)^2 + 2\frac{\varepsilon\zeta}{m^2}\theta^* \\ &= \gamma^{-1}\left(\frac{\gamma\varepsilon\zeta}{m^2}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon\zeta}{m^2}\tilde{\theta} \\ &= \left(\frac{\gamma\zeta^2}{m^2} - 2\right)\frac{\varepsilon^2}{m^2}\end{aligned}$$

Lembrando que $\frac{\zeta^2}{m^2} < 1$,

$$\Rightarrow \boxed{\dot{V} \leq -\alpha_1 \frac{\varepsilon^2}{m^2}} \leq 0 \quad \text{para} \quad \boxed{0 < \gamma < 2}$$

★ Note que neste caso (discreto), o ganho de adaptação é limitado.

Conclusão:

- $V(\tilde{\theta})$ não cresce $\Rightarrow \boxed{\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty}$ e $\boxed{\theta \in \mathcal{L}_\infty}$

- $\varepsilon = \tilde{\theta} \zeta \Rightarrow \frac{\varepsilon}{m} = \underbrace{\tilde{\theta}}_{<1} \frac{\zeta}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{\varepsilon}{m} \in \mathcal{L}_\infty}$

- $\Delta\theta = \theta(t+1) - \theta(t) = -\gamma \underbrace{\frac{\varepsilon}{m}}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{\frac{\zeta}{m}}_{<1}$ \Rightarrow | $\Delta\theta \in \mathcal{L}_\infty$

- $\theta(t) = \theta(0) + \sum_{t=0}^t \Delta\theta < \infty \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\theta(t)| \leq |\theta(0)| + \sum_{t=0}^t |\Delta\theta| < \infty, \forall t \Rightarrow$ | $\sum_{t=0}^{\infty} |\Delta\theta| < \infty$

- $\sum_{t=0}^{\infty} \Delta\theta = -\gamma \sum_{t=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\varepsilon}{m}}_{<1} \underbrace{\frac{\zeta}{m}}_{<1} < \infty \Rightarrow$ | $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{m} < \infty$

$$\bullet \Delta V \leq 0 \Rightarrow V(t) \leq V(0) < \infty$$

$$\bullet V(t) = V(0) + \sum \Delta V \leq V(0) < \infty \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} |\Delta V| < \infty$$

$$\bullet \Delta V \leq -\alpha_1 \frac{\varepsilon^2}{m^2} \Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{m^2} d\tau < \infty \Rightarrow \boxed{\left| \frac{\varepsilon^2}{m^2} \in \mathcal{L}_{\infty} \right|} \text{ e } \boxed{\left| \frac{\varepsilon}{m} \in \mathcal{L}_2 \right|}$$

★ É possível mostrar com estes resultados que

$$y \rightarrow y_m$$

A demonstração é trabalhosa !

2.2.2 MRAC INDIRETO DISCRETO

★ Algoritmo similar ao caso contínuo.



Exercício!

2.2.3 PROBLEMAS & EXERCÍCIOS

Exercício. ...

2.3 PLANTA COM 1 PARÂMETRO DESCONHECIDO (k_p)

A planta ainda é bastante simples: $n = 1$ (ordem)

$n^* = 1$ (grau relativo)

$n_p = 1$ (# de parâmetros)

Apenas o ganho de alta frequência k_p é desconhecido.

■ Planta :
$$\dot{y} = -y + k_p u \quad y = \frac{k_p}{s+1} u \quad k_p \text{ desconhecido !}$$

■ Modelo :
$$\dot{y}_m = -y_m + r \quad y_m = \frac{1}{s+1} r$$

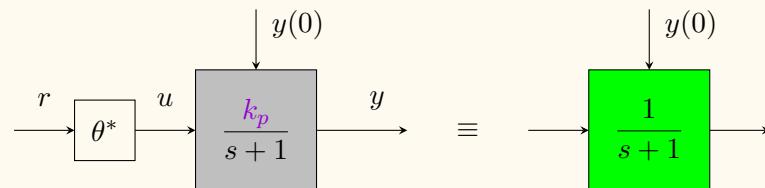
- ★ Neste caso, o problema pode ser resolvido utilizando apenas *feedforward*.
Não é necessário *feedback*.

2.3.1 MRAC DIRETO

Planta :
$$\dot{y} = -y + k_p u \quad y = \frac{k_p}{s+1} u \quad k_p \text{ desconhecido !}$$

Modelo :
$$\dot{y}_m = -y_m + r \quad y_m = \frac{1}{s+1} r$$

Se k_p fosse conhecido, então



Lei de *controle ideal*:

$$u^* = \theta^* r$$

$$\theta^* = \frac{1}{k_p}$$

Lei de controle:

$$u = \theta r$$

Erro de saída:

$$e = y - y_m$$

Equação do erro:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m \\ &= (-y + k_p u) - (-y_m + r) \\ &= -(y - y_m) + k_p \left(u - \frac{1}{k_p} r \right) \\ &= -e + k_p (u - \theta^* r) \\ &= -e + k_p (u - u^*)\end{aligned}$$

Erro paramétrico:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$$

A equação do erro pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -e + k_p [\theta r - \theta^* r] \\ &= -e + k_p \tilde{\theta} r\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$e = M(s) k_p [\tilde{\theta} r]$$

★ Note a presença de k_p na equação do erro.

Resumo das equações do sistema (em termos de erros):

$$\begin{cases} \dot{e} = -e + k_p \tilde{\theta} r \\ \dot{\tilde{\theta}} = ? \end{cases}$$

Função de Lyapunov:

$$2V(e, \tilde{\theta}) = e^2 + \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2$$

Derivando,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e \dot{e} + \gamma^{-1} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -e^2 + k_p \tilde{\theta} e r + \gamma^{-1} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -e^2 + \gamma^{-1} \tilde{\theta} [\dot{\tilde{\theta}} + \gamma k_p e r] \end{aligned}$$

Qual é o problema?!

Nova função de Lyapunov:

$$2V(e, \tilde{\theta}) = e^2 + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}^2 > 0$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e\dot{e} + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}\dot{\theta} \\ &= -e^2 + k_p \tilde{\theta} e_r + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}\dot{\theta} \\ &= -e^2 + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta} [\dot{\theta} + \gamma \operatorname{sign}(k_p) e_r]\end{aligned}$$

Escolhemos:

$$\dot{\theta} = -\gamma \operatorname{sign}(k_p) e_r$$

Resultado: $\dot{V} = -e^2 \leq 0 \Rightarrow$

$$e(t), \theta(t) \in \mathcal{L}_\infty$$

Hipótese fundamental. É necessário o conhecimento de $\text{sign}(k_p)$.

- ★ É interessante notar que o único mecanismo para instabilização neste caso é quando $\theta \rightarrow \infty$.
- ★ A planta é estável.

Summary of the algorithm

Subsystem	Equation	Order
Plant	$\dot{y} = -a_m y + k_p u$	1
Model	$\dot{y}_m = -a_m y_m + r$	1
Tracking error	$e_0 = y - y_m$	
Control law	$u = \theta r$	
Update law	$\dot{\theta} = -\gamma \operatorname{sign}(k_p) e y$	1
	System order =	3

Simulation results

Simulation 1

Initial conditions.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

Parameters.....: $a_m = 1$

$$k_p = 0.5$$

$$\gamma = 10, 100$$

Reference signal.....: $r = 1$

Matching.....:

$$\theta^* = 2$$

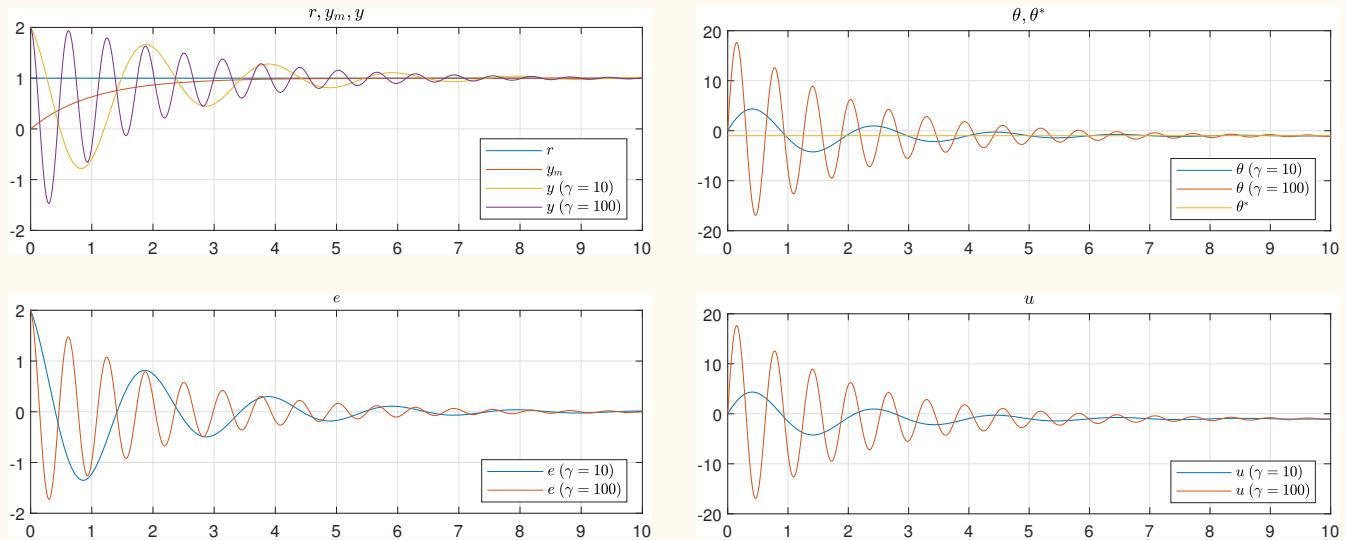


Figura 19: Direct MRAC. Case: $\gamma = 10, 100$.

*** To be checked. $\theta \not\rightarrow -2$

★ Simulations are performed with the Matlab ODE package.

2.3.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Planta :
$$\dot{y} = -a_m y + k_p u \quad y = \frac{k_p}{s + a_m} u, \quad k_p > 0$$

Modelo :
$$\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r \quad y_m = \frac{1}{s + a_m} r$$

Controle :
$$u = \theta r$$

Adaptação :
$$\dot{\theta} = -\gamma e r$$

Sinal de referência :
$$r = 1 \quad (\text{Simplificação !!})$$

★ A solução analítica mostra o efeito de γ no comportamento transitório.

Como $r = 1$, a dinâmica é regulada pelo sistema linear

$$\begin{cases} \dot{e} = -a_m e + k_p \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma e \end{cases}$$

Aplicando Transformada de Laplace,

$$\begin{cases} se - e(0) = -a_m e + k_p \tilde{\theta} \\ s\tilde{\theta} - \tilde{\theta}(0) = -\gamma e \end{cases}$$

Resolvendo para e , tem-se

$$se + a_m e = e(0) + k_p \tilde{\theta} \quad (\times s)$$

$$s^2 e + a_m s e = e(0)s + k_p s \tilde{\theta}$$

$$s^2 e + a_m s e = e(0)s + k_p (\tilde{\theta}(0) - \gamma e)$$

$$(s^2 + a_m s + k_p \gamma) e = e(0)s + k_p \tilde{\theta}(0)$$

Porém,

$$\begin{aligned} k_p \tilde{\theta}(0) &= k_p (\theta(0) - \theta^*) \\ &= k_p \theta(0) - k_p \frac{1}{k_p} \\ &= k_p \theta(0) - 1 \end{aligned}$$

Então,

$$(s^2 + a_m s + k_p \gamma) e = e(0)s + k_p \theta(0) - 1$$

Resultado:

$$e = \frac{e(0)s + k_p \theta(0) - 1}{s^2 + a_m s + k_p \gamma} \quad (\theta(0) = \theta^* \Rightarrow e = 0)$$

- ★ O ganho γ só influencia a frequência de oscilação.
- ★ A atenuação é definida pelo parâmetro a_m do modelo.
- ★ Note que o sistema oscila mesmo para $e(0) = 0$.

2.3.3 MRAC INDIRETO

Planta :
$$\dot{y} = -y + k_p u \quad y = \frac{k_p}{s+1} u \quad k_p \text{ desconhecido !}$$

Modelo :
$$\dot{y}_m = -y_m + r \quad y_m = \frac{1}{s+1} r$$

Lei de *controle ideal*:
$$u^* = \theta^* r \quad \theta^* = \frac{1}{k_p}$$

Lei de controle:
$$u = \theta r$$

Estima de k_p :
$$\hat{k}_p \Rightarrow \theta = \frac{1}{\hat{k}_p}$$

A planta pode ser escrita como: $y = k_p \underbrace{M(s)u}_{u_f}$ (*)

Filtro: $u_f = M(s)u = \frac{1}{s+1} u$

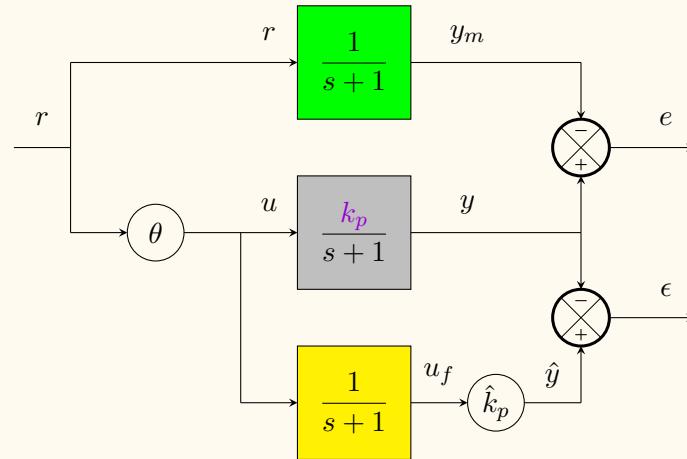
Predição: $\hat{y} = \hat{k}_p M(s)u \Rightarrow \boxed{\hat{y} = \hat{k}_p u_f}$

Erro de predição:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \hat{y} - y \\ &= \hat{k}_p u_f - k_p u_f \\ &= \tilde{k}_p u_f\end{aligned}$$

(*) Desprezando-se as condições iniciais.

Diagrama de blocos do MRAC indireto:



Lei de adaptação:

$$\dot{\hat{k}}_p = -\gamma \varepsilon u_f$$

Análise de estabilidade

Função de Lyapunov: $2V(\tilde{k}_p) = \tilde{k}_p^2$

Derivando,

$$\dot{V} = \tilde{k}_p \dot{\hat{k}}_p = -\gamma \tilde{k}_p \varepsilon u_f = -\gamma \varepsilon^2 \leq 0$$

Conclusão:

$$\tilde{k}_p, \hat{k}_p \in \mathcal{L}_\infty \quad \text{e} \quad \varepsilon \in \mathcal{L}_2$$

Dúvida: Não é necessário conhecer $\text{sign}(k_p)$?

★ De fato! Não é necessário conhecer $\text{sign}(k_p)$ para identificação.

★ O conhecimento de $\text{sign}(k_p)$ é necessário somente para estabilização.

O controle é dado por :

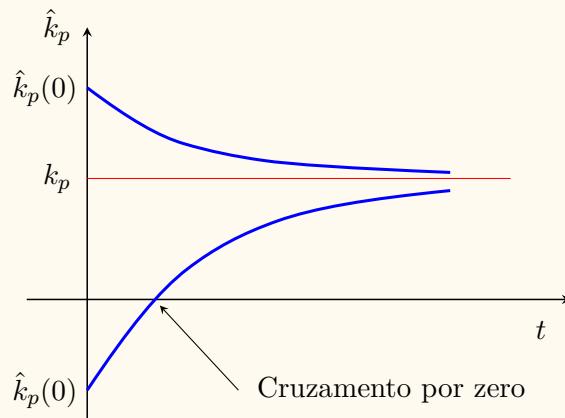
$$u = \frac{1}{\hat{k}_p} r$$

★ $\hat{k}_p(t)$ não pode cruzar por zero!

A lei de adaptação pode ser escrita como:

$$\dot{\hat{k}}_p = -\gamma \varepsilon u_f = -\underbrace{\gamma u_f^2}_{\geq 0} \tilde{k}_p$$

Portanto, $\tilde{k}_p \rightarrow 0$ \Rightarrow $\hat{k}_p \rightarrow k^*$ monotonicamente.



★ O cruzamento de \hat{k}_p por zero deve ser evitado.

Solução: Inicializar \hat{k}_p do lado correto!

★ É necessário o conhecimento de $\text{sign}(k_p)$. (!!)

Condição de identificabilidade

Referência: [Sastry & Bodson:1989], (pag. 15)

A solução do sistema linear variante no tempo

$$\dot{\tilde{k}}_p = -\gamma u_f^2 \tilde{k}_p \quad (\dot{\tilde{k}}_p = \dot{\hat{k}}_p)$$

é dada por

$$\tilde{k}_p(t) = \tilde{k}_p(0) \exp\left(-\gamma \int_0^t u_f^2(\tau) d\tau\right)$$

Portanto, se

$$\boxed{\int_0^t u_f^2(\tau) d\tau \rightarrow \infty}$$

então

$$\boxed{\tilde{k}_p(t) \rightarrow 0}$$

- ★ Esta condição depende de u_f (sinal interno que depende de θ e r).

Pontos que serão abordados mais adiante:

- Persistent excitation (PE) : condição sobre o sinal u_f para que ocorra a identificação.
- Richness : condição sobre o sinal r para que u_f seja PE.

2.3.4 SIMULAÇÕES

(...)

2.3.5 PROBLEMAS & EXERCÍCIOS

Exercício. Considere o seguinte caso em que a planta é instável.

Planta :
$$\dot{y} = y + k_p u$$

$$y = \frac{k_p}{s - 1} u$$

Apenas k_p desconhecido !

Modelo :
$$\dot{y}_m = -y_m + r$$

$$y_m = \frac{1}{s + 1} r$$

Obtenha os algoritmos de controle e de adaptação.

2.4 PLANTA COM 2 PARÂMETROS DESCONHECIDOS (a_p E k_p)

A planta ainda é bastante simples: $n = 1$ (ordem)

$n^* = 1$ (grau relativo)

$n_p = 2$ (# de parâmetros)

Planta :
$$\boxed{\dot{y} = a_p y + k_p u} \quad y = \frac{k_p}{s - a_p} u \quad a_p \text{ e } k_p \text{ desconhecidos !}$$

Modelo :
$$\boxed{\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r} \quad y_m = \frac{k_m}{s + a_m} r$$

★ Neste caso, são necessários *feedback* e *feedforward*.

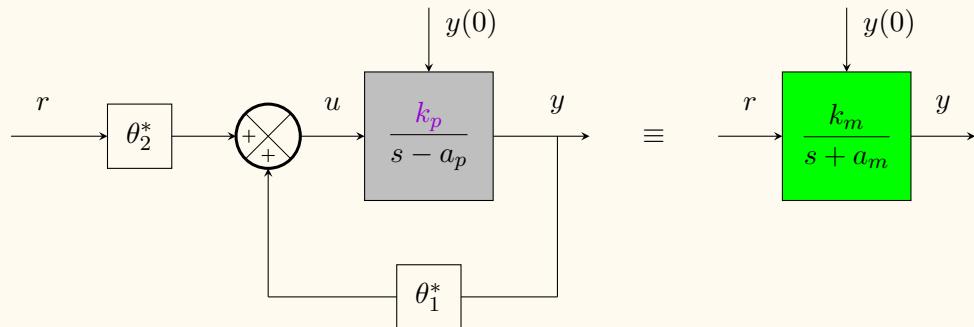
2.4.1 MRAC DIRETO

Exemplo 6 Ref.: [...]

Planta : $\dot{y} = a_p y + k_p u$ k_p e a_p desconhecidos !

Modelo : $\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r$

Lei de *controle ideal*: $u^* = \theta_1^* y + \theta_2^* r$



Verificação:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a_p y + k_p (\theta_1^* y + \theta_2^* r) \\ &= \underbrace{(a_p + k_p \theta_1^*)}_{-a_m} y + \underbrace{k_p \theta_2^*}_{{k_m}} r \end{aligned}$$

Matching gains :

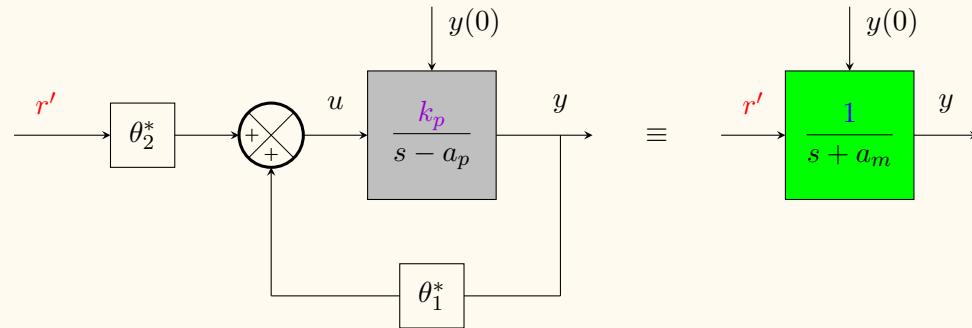
$$\theta_1^* = -\frac{a_p + a_m}{k_p}$$

$$\theta_2^* = \frac{k_m}{k_p}$$

Obs.: It is usual to assume $k_m = 1$.

Rewrite the reference model as

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + \underbrace{k_m r}_{r'} = -a_m y_m + r'$$



Matching gains :

$$\theta_1^* = -\frac{a_p + a_m}{k_p}$$

$$\theta_2^* = \frac{1}{k_p}$$

Forma vetorial: $u^* = \theta_1^*y + \theta_2^*r \Rightarrow$

$$u^* = \theta^{*T} \omega$$

★ $\theta^* = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \end{bmatrix}$ e $\omega = \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}$ (Vetores !!)

★ For convenience, the reference signal is written r .

Controle adaptativo: $u = \theta_1 y + \theta_2 r \Rightarrow$

$$u = \theta^T \omega$$

★ $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$

Erro de saída:

$$e = y - y_m$$

Equação do erro:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_m \\ &= (a_p y + k_p u) - (-a_m y_m + r) + (a_m y) - (a_m y) \\ &= -a_m \underbrace{(y - y_m)}_e + (a_p + a_m)y + k_p u - r \\ &= -a_m e + k_p \left[\underbrace{\frac{a_p + a_m}{k_p} y + u}_{-\theta_1^*} - \underbrace{\frac{1}{k_p} r}_{\theta_2^*} \right] \\ &= -a_m e + k_p \left[u - \theta_1^* y - \theta_2^* r \right] \\ &= -a_m e + k_p \left[u - u^* \right]\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{e} = -a_m e + k_p [u - u^*]$$

ou ainda,

$$e = M(s) k_p [u - u^*]$$

★ Note que

$$k_p = (\theta_2^*)^{-1}$$

Controle: $u = \theta_1 y + \theta_2 r = [\theta_1 \quad \theta_2] \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} = \theta^T \omega$

Erro paramétrico: $\begin{cases} \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_1^* \\ \tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_2^* \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tilde{\theta} = \theta - \theta^*}$

A equação do erro pode ser escrita como:

$$\dot{e} = -a_m e + k_p [\tilde{\theta}^T \omega]$$

Ou ainda,

$$\boxed{e = M(s) k_p [\tilde{\theta}^T \omega]}$$

Resumo das equações do sistema (em termos de erros):

$$\begin{cases} \dot{e} = -a_m e + k_p [\tilde{\theta}_1 y + \tilde{\theta}_2 r] \\ \dot{\theta}_1 = ? \\ \dot{\theta}_2 = ? \end{cases}$$

Notação compacta (vetorial):

$$\begin{cases} \dot{e} = -a_m e + k_p [\tilde{\theta}^T \omega] \\ \dot{\theta} = ? \end{cases}$$

Função de Lyapunov:

$$\begin{aligned} 2V(e, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) &= e^2 + \gamma_1^{-1} |k_p| \tilde{\theta}_1^2 + \gamma_2^{-1} |k_p| \tilde{\theta}_2^2 \\ &= e^2 + |k_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e \dot{e} + |k_p| (\gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \gamma_2^{-1} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2) \\ &= -a_m e^2 + k_p \tilde{\theta}^T \omega e + |k_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -a_m e^2 + |k_p| \tilde{\theta}^T [\text{sign}(k_p) \omega e + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}] \end{aligned}$$

Escolhemos:

$$\boxed{\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \text{sign}(k_p) \omega e}$$

Resultado: $\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$ negativa semi-definida !

Conclusão:

$$e(t), \theta(t) \in \mathcal{L}_\infty$$

e

$$e(t) \in \mathcal{L}_2$$

Análise de convergência

Semelhante ao caso do exemplo 1 :

$$\left. \begin{array}{l} e(t) \in \mathcal{L}_2 \\ \dot{e}(t) \in \mathcal{L}_\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Summary of the algorithm

Subsystem	Equation	Order
Plant	$\dot{y} = a_p y + k_p u$	1
Model	$\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r$	1
Tracking error	$e_0 = y - y_m$	
Regressor	$\omega = [y \ r]^T$	
Control law	$u = \theta^T \omega$	
Update law	$\dot{\theta} = -\Gamma \text{sign}(k_p) \omega e$	2
	System order =	4

Simulation results**Simulation #1** Null initial conditions.Initial conditions.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = [0 \ 0]^T$$

Parameters.....: $a_p = 2$ $a_m = 1$ $\Gamma = I$
 $k_p = 0.5$ $k_m = 1$ Reference signal.....: $r(t) = dc + a \sin(\omega t)$
 $dc = 1$
 $a = 1$
 $\omega = 1$ Matching parameter.: $\theta^* = [-6, 2]$, $k^* = 0.5$, $\|\theta^*\| = 6.32$

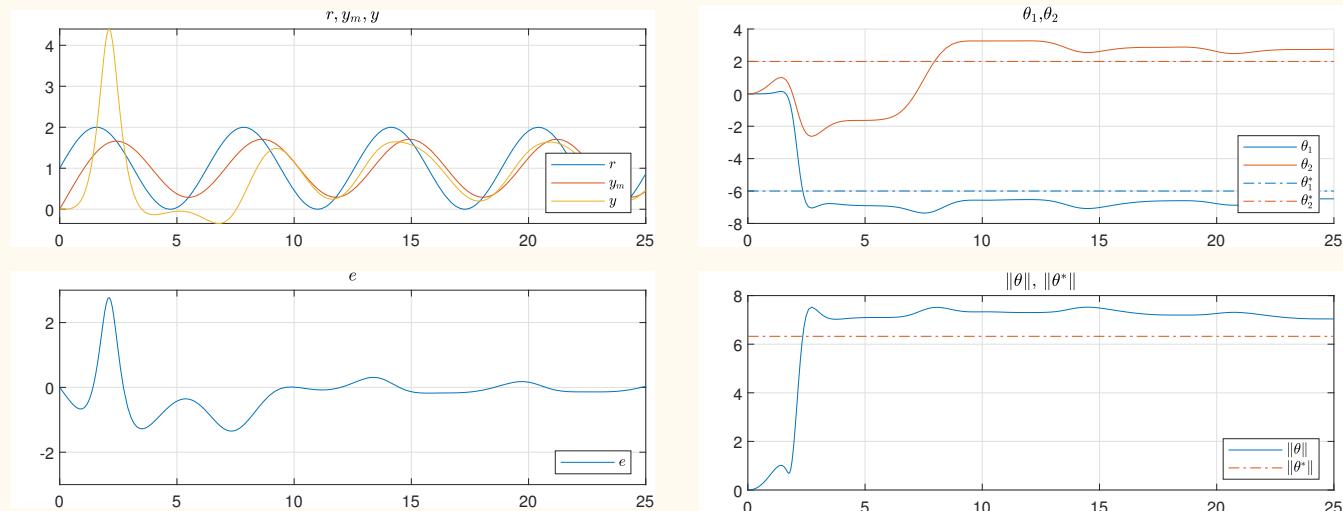


Figura 20: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: **simu01.m**)

Simulação #2 Efeito da condição inicial pequena.

Initial conditions.....: $y(0) = 1$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = [0 \ 0]^T$$

Parameters.....: $a_p = 2$ $a_m = 1$ $\Gamma = I$

$$k_p = 0.5$$

$$k_m = 1$$

Reference signal.....: $dc = 1$

$$a = 1$$

$$\omega = 1$$

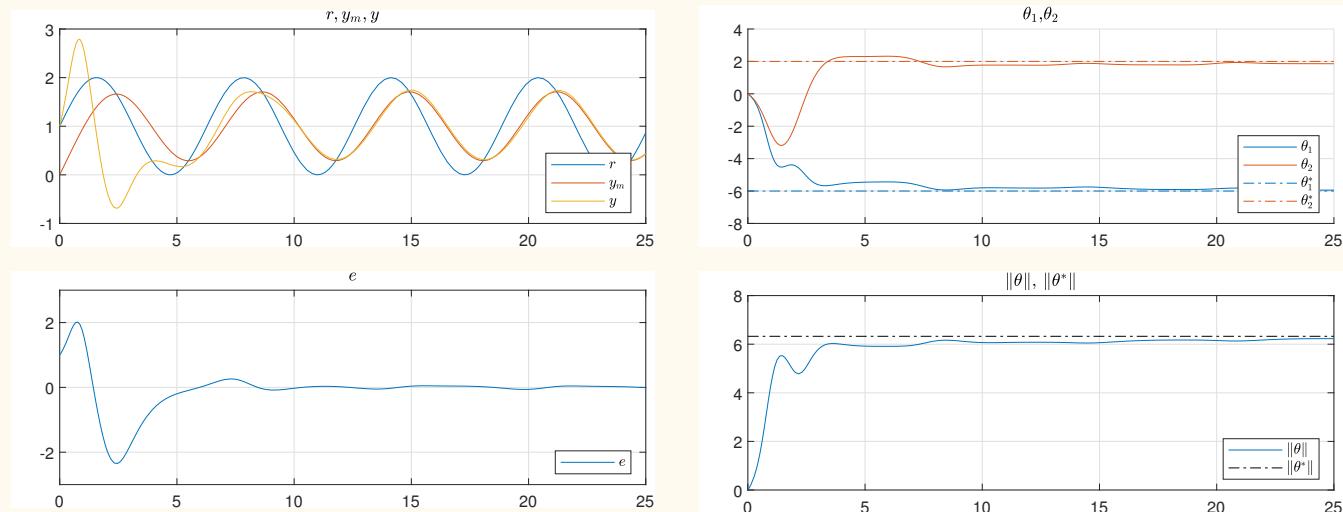


Figura 21: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: **simu02.m**)

Simulação #3 Efeito da condição inicial grande.Initial conditions.....: $y(0) = 5$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = [0 \ 0]^T$$

Parameters.....: $a_p = 2$ $a_m = 1$ $\Gamma = I$

$$k_p = 0.5$$
 $k_m = 1$

Reference signal.....: $dc = 1$

$$a = 1$$

$$\omega = 1$$

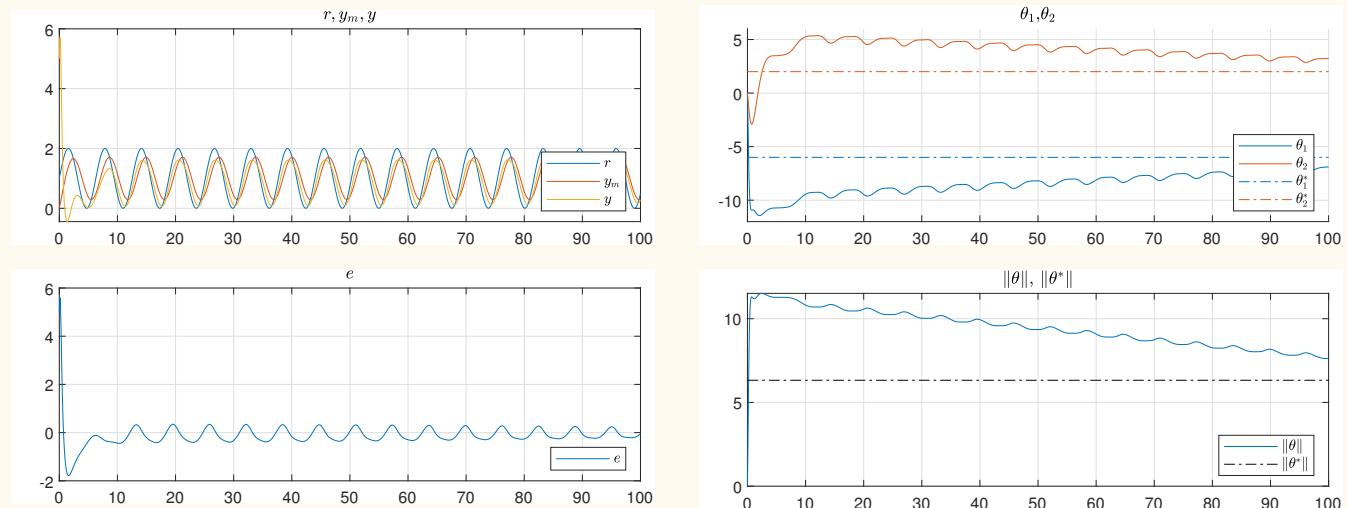


Figura 22: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: **simu03.m**)

Simulação #4 Efeito do ganho de adaptação.

Initial conditions.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = [0 \ 0]^T$$

Parameters.....: $a_p = 2$ $a_m = 1$ $\Gamma = 10 I$
 $k_p = 0.5$ $k_m = 1$

Reference signal.....: $dc = 1$
 $a = 1$
 $\omega = 1$

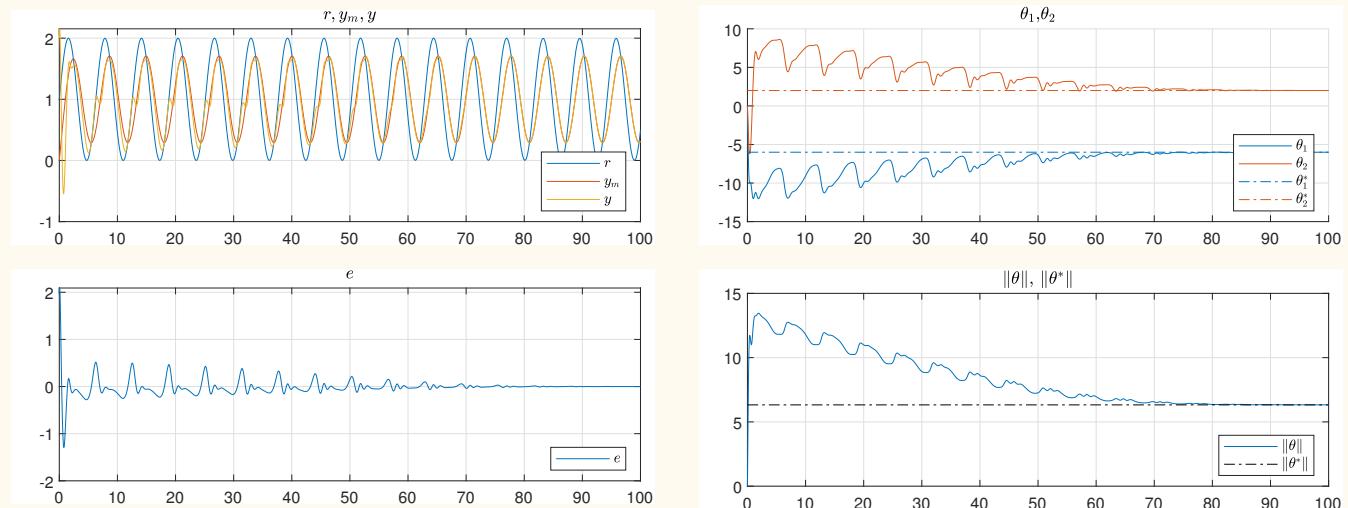


Figura 23: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: **simu04.m**)

Simulação #5 Efeito do sinal DC.Initial conditions.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = [0 \ 0]^T$$

Parameters.....: $a_p = 2$ $a_m = 1$ $\Gamma = 10 I$
 $k_p = 0.5$ $k_m = 1$ Reference signal.....: $dc = \{1, 2, 3\}$
 $a = 1$
 $\omega = 1$

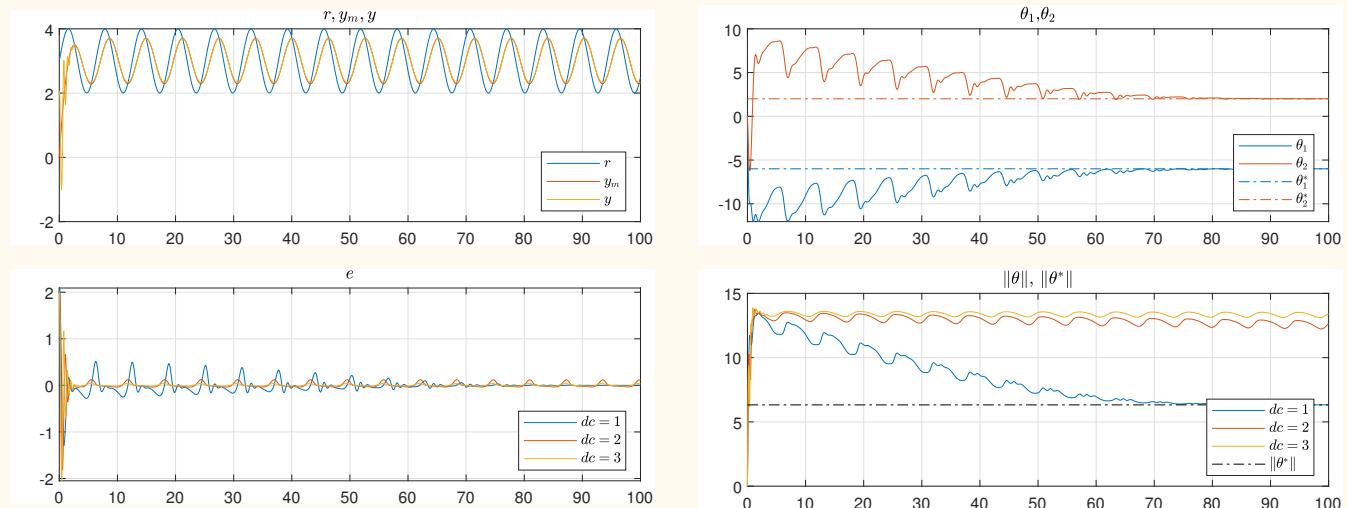


Figura 24: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: **simu05.m**)

Resultados de simulações

- Mostrar convergência
- Mostrar não uniformidade em relação às condições iniciais

2.4.2 PROBLEMAS & EXERCÍCIOS

Exercício. ...

3 IDENTIFICAÇÃO ADAPTATIVA DE PARÂMETROS

Contents

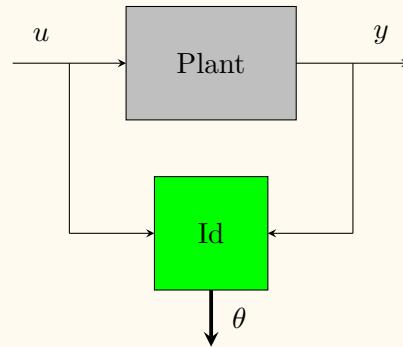
3.1	Introdução	181
3.2	Parametrização do modelo	182
3.2.1	Parametrização alternativa	186
3.2.2	Implementação dos filtros	188
3.2.3	Adaptação	190
3.3	Gradiente normalizado	191
3.3.1	Simulações	197
3.4	<i>Least-squares</i> normalizado	233
3.4.1	Simulações	246
3.4.2	Problemas & exercícios	260
3.5	Parameter convergence	262
3.5.1	Improving convergence	263
3.5.2	Simulations	268
3.6	Adaptação robusta	285
3.6.1	Modificação zona-morta	287
3.6.2	Modificação σ	288
3.6.3	Modificação σ com switching	289

3.6.4	Projeção	291
-------	----------	-----

3.1 INTRODUÇÃO

Referência. [Tao:2003], (pag. 99)

Problema de identificação



★ θ não é realimentado na planta!

★ A planta pode ser instável! \Rightarrow Necessidade de normalização do regressor.

3.2 PARAMETRIZAÇÃO DO MODELO

Planta :

$$P(s)y = Z(s)u$$

onde : $P(s) = s^n + \dots + p_1s + p_0$

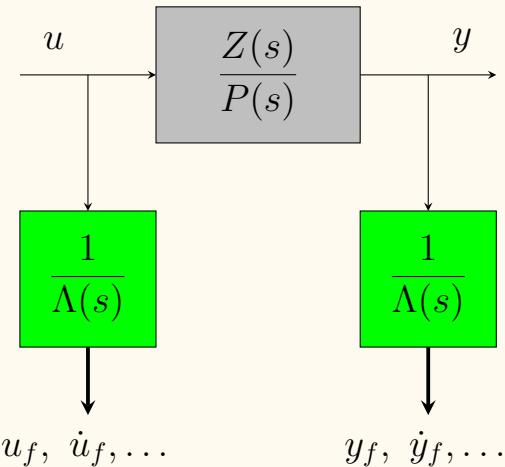
$$Z(s) = z_ms^m + \dots + z_1s + z_0$$

Filtros :

$$\frac{1}{\Lambda(s)}$$

(grau n)

onde : $\Lambda(s) = s^n + \dots + \lambda_1s + \lambda_0$



Podemos escrever a equação da planta como:

$$\begin{aligned}\frac{P}{\Lambda}y &= \frac{Z}{\Lambda}u \\ &= \frac{Z}{\Lambda}u + \left(\frac{\Lambda}{\Lambda}y - \frac{\Lambda}{\Lambda}y \right)\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\boxed{y = \frac{Z}{\Lambda}u + \frac{\Lambda - P}{\Lambda}y} \quad \text{ou} \quad \boxed{y = Zu_f + (\Lambda - P)y_f}$$

- ★ $\text{grau}(\Lambda - P) = n - 1$
- ★ O sinal $y(t)$ pode ser escrito em função de sinais filtrados.

Definimos o **vetor de parâmetros**

$$\theta^* = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \cdots & z_m & (\lambda_0 - p_0) & (\lambda_1 - p_1) & \cdots & (\lambda_{n-1} - p_{n-1}) \end{bmatrix}^T$$

e o **vetor regressor**

$$\begin{aligned}\phi &= \left[\frac{1}{\Lambda} u \quad \frac{s}{\Lambda} u \quad \cdots \quad \frac{s^m}{\Lambda} u \quad \frac{1}{\Lambda} y \quad \frac{s}{\Lambda} y \quad \cdots \quad \frac{s^{n-1}}{\Lambda} y \right]^T \\ &= [u_f \quad \dot{u}_f \quad \ddot{u}_f \quad \cdots \quad y_f \quad \dot{y}_f \quad \ddot{y}_f \quad \cdots]^T\end{aligned}$$

★ Note que $\theta^*, \phi \in \mathbb{R}^{n+m+1}$.

Então,

$$y = \theta^{*T} \phi$$

Exemplo 7 Parametrização de um sistema de 2a. ordem.

Planta: $(s^2 + p_1 s + p_0)y = (z_1 s + z_0)u$

Filtros: $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0} \Rightarrow$

$u_f = \frac{1}{\Lambda} u$

e

$y_f = \frac{1}{\Lambda} y$

Definindo

$$\theta^* = [z_0 \ z_1 \ (\lambda_0 - p_0) \ (\lambda_1 - p_1)]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\phi = [u_f \ \dot{u}_f \ y_f \ \dot{y}_f]^T \in \mathbb{R}^4$$

Então,

$y = \theta^{*T} \phi$

3.2.1 PARAMETRIZAÇÃO ALTERNATIVA

- Na parametrização anterior, θ contem coeficientes de $Z(s)$ e de $\Lambda(s) - P(s)$.
 - Na parametrização alternativa a seguir, definimos θ_p , que contem somente os coeficientes de $Z(s)$ e $P(s)$.
- ★ Um exemplo com um sistema de 2a. ordem ilustra o procedimento.

Exemplo 8 Parametrização alternativa de um sistema de 2a. ordem.

Plant: $(s^2 + p_1s + p_0)y = (z_1s + z_0)u$

Filter: $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s^2 + \lambda_1s + \lambda_0} \quad \Rightarrow \quad u_f = \frac{1}{\Lambda} u \quad \text{and} \quad y_f = \frac{1}{\Lambda} y$

Applying the filter to both sides: $(s^2 + p_1s + p_0)\frac{y}{\Lambda} = (z_1s + z_0)\frac{u}{\Lambda}$
 $\Rightarrow \ddot{y}_f = (z_1s + z_0)u_f - (p_1s + p_0)y_f$

Defining

$$\theta_p^* = [z_0 \ z_1 \ p_0 \ p_1]^T$$

$$\phi = [u_f \ \dot{u}_f \ -y_f \ -\dot{y}_f]^T$$

Then,

$$\ddot{y}_f = \theta_p^{*T} \phi$$

Note that

$$\ddot{y}_f = y - (\lambda_1s + \lambda_0)y_f$$

3.2.2 IMPLEMENTAÇÃO DOS FILTROS

- ★ Os filtros são idênticos.

Realização de estado:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = A\omega_1 + bu \\ \dot{\omega}_2 = A\omega_2 + by \end{cases}$$

Escolhemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (sI - A)^{-1}bu \\ &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ \lambda_0 & s + \lambda_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ &= \frac{1}{\Lambda} \begin{bmatrix} s + \lambda_1 & 1 \\ -\lambda_0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \frac{1}{\Lambda} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} u_f \\ \dot{u}_f \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\omega_2 = (sI - A)^{-1}by = \begin{bmatrix} y_f \\ \dot{y}_f \end{bmatrix}$$

Vetor regressor :

$$\phi = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

★ Note que utiliza-se o mesmo filtro para u e y .

3.2.3 ADAPTAÇÃO

Seja $\theta(t)$ uma estimativa de θ^* obtida por um algoritmo adaptativo.

Estimativa de y :

$$\hat{y} = \theta^T \phi$$

(Parametrização linear)

Erro de estimativa :

$$\epsilon = \hat{y} - y$$

Erro paramétrico:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$$

Portanto,

$$\epsilon = \tilde{\theta}^T \phi$$

(Equação do erro)

3.3 GRADIENTE NORMALIZADO

Ideia: Atualizar a estimativa do parâmetro na direção do negativo do gradiente.

Função custo:

$$J(\theta) = \frac{\epsilon^2}{2m^2}$$

Sinal normalizante:

$$m^2 = 1 + \kappa \phi^T \phi \quad \kappa > 0$$

★ Em geral, m é definido de forma a garantir que $\frac{\phi}{m} \in \mathcal{L}_\infty$.

Note que:

$$J(\theta) = \frac{\epsilon^2}{2m^2} = \frac{\tilde{\theta}^T \phi \phi^T \tilde{\theta}}{2m^2}$$

Gradiente de J :

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{2\phi \phi^T \tilde{\theta}}{2m^2} = \frac{\phi \epsilon}{m^2}$$

Outra forma de obtenção:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial J}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} = \frac{\epsilon}{m^2} \phi$$

Algoritmo do Gradiente:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2} \quad \Gamma > 0$$

Lema. Estabilidade do algoritmo do Gradiente:

- $\theta \in \mathcal{L}_\infty$
- $\dot{\theta}, \frac{\epsilon}{m} \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$

Prova. [Tao:2003], (pag. 103)

Função de Lyapunov: $2V(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$

Derivando,

$$\dot{V}(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} = \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left(-\frac{\Gamma \phi \epsilon}{m^2} \right) = -\frac{\epsilon^2}{m^2} = -\frac{(\tilde{\theta}^T \phi)^2}{m^2} \leq 0$$

★ Porque não é definida negativa?!

Conclusões:

$$\bullet \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$$

$$\bullet \frac{\epsilon}{m} \in \mathcal{L}_2$$

$$\bullet \frac{|\epsilon|}{m} \leq \|\tilde{\theta}\| \underbrace{\frac{\|\phi\|}{m}}_{<1} \Rightarrow \boxed{\frac{|\epsilon|}{m} \in \mathcal{L}_\infty}$$

$$\bullet \dot{\theta} = -\Gamma \underbrace{\frac{\phi}{m}}_{<1} \underbrace{\frac{\epsilon}{m}}_{\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty}$$



Note que

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2} = -\underbrace{\frac{\Gamma \phi \phi^T}{m^2}}_{A(t)} \tilde{\theta} = -A(t) \tilde{\theta}$$

onde

$$A(t) = A^T(t) \geq 0 \quad \text{rank}(A(t)) = 1$$

★ Quer dizer, $\tilde{\theta} = 0$ é um ponto de equilíbrio unif. estável !!

Importante:

- $\tilde{\theta} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0$

- $\epsilon = \tilde{\theta}^T \phi \equiv 0 \quad \not\Rightarrow \quad \tilde{\theta} = 0$
 $\Rightarrow \quad \tilde{\theta} \perp \phi \quad (!!)$

- $\begin{cases} \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty \\ \text{"Se" } \ddot{\theta} \in \mathcal{L}_\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta} = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \theta \rightarrow \text{constante} \quad (!!)$

★ Ver exemplos em [Slotine & Li:1991], (pag. 122) .

3.3.1 SIMULAÇÕES

Case 1 First order plant, one unknown parameter.

Plant : $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$

Filter : $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s + \lambda}$

★ As simulações utilizam o pacote ODE do Matlab.

Resumo das equações

Planta.....: $\dot{y} = (1/\tau)(-y + u) \Rightarrow \tau\dot{y} = -y + u$

Parametrização 1 ..: $\underbrace{\dot{y}_f}_{Y_1} = \underbrace{(1/\tau)}_{\theta_1^*} \underbrace{(-y_f + u_f)}_{\phi_1}$

Parametrização 2 ..: $\underbrace{-y_f + u_f}_{Y_2} = \underbrace{(\tau)}_{\theta_2^*} \underbrace{(\dot{y}_f)}_{\phi_2}$

Estimativa.....: $\hat{Y}_i = \theta_i \phi_i, \quad (i = 1, 2)$

Erro.....: $\epsilon_i = \hat{Y}_i - Y_i$

Normalização.....: $m_i^2 = 1 + \kappa_i \phi_i^2$

Lei de adaptação ..: $\dot{\theta}_i = -\gamma_i \frac{\phi_i \epsilon_i}{m_i^2}$

Simulation 1 Zero initial conditions, small gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $\tau = 0.7$ $\gamma_1 = 1$ $\kappa_1 = 0$
 $\lambda = 1$ $\gamma_2 = 1$ $\kappa_2 = 0$

Initial conditions : $y(0) = 0$
 $\theta_1(0) = 0$
 $\theta_2(0) = 0$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

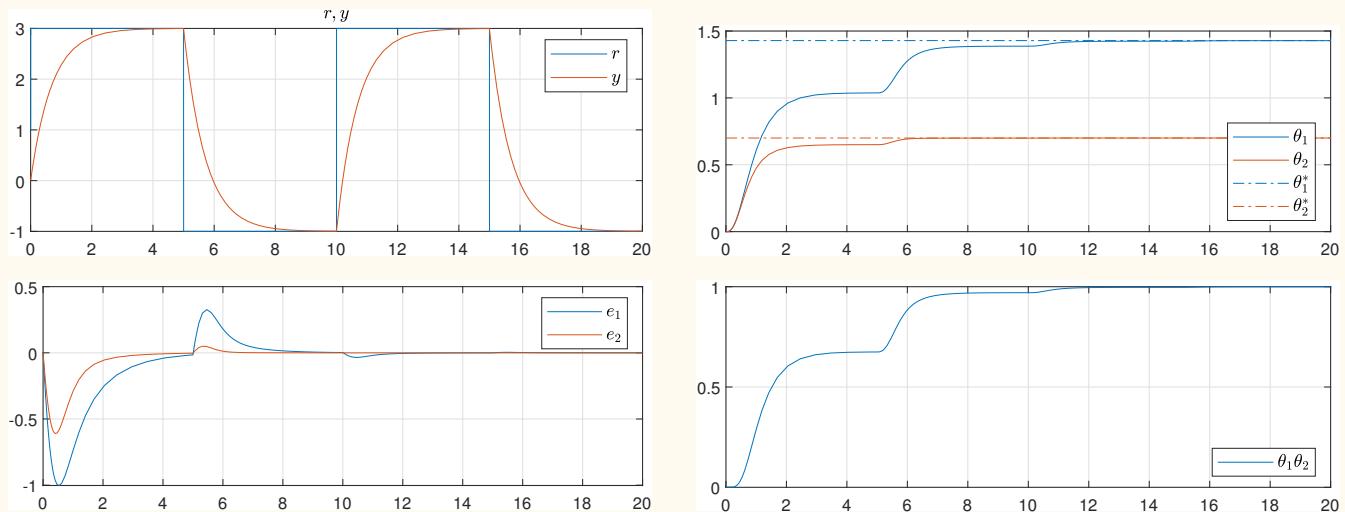


Figura 25: Normalized Gradient. Plant-11.

Simulation 2 Zero initial conditions, large gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $\tau = 0.7$ $\gamma_1 = 10$ $\kappa_1 = 0$
 $\lambda = 1$ $\gamma_2 = 10$ $\kappa_2 = 0$

Initial conditions : $y(0) = 0$
 $\theta_1(0) = 0$
 $\theta_2(0) = 0$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

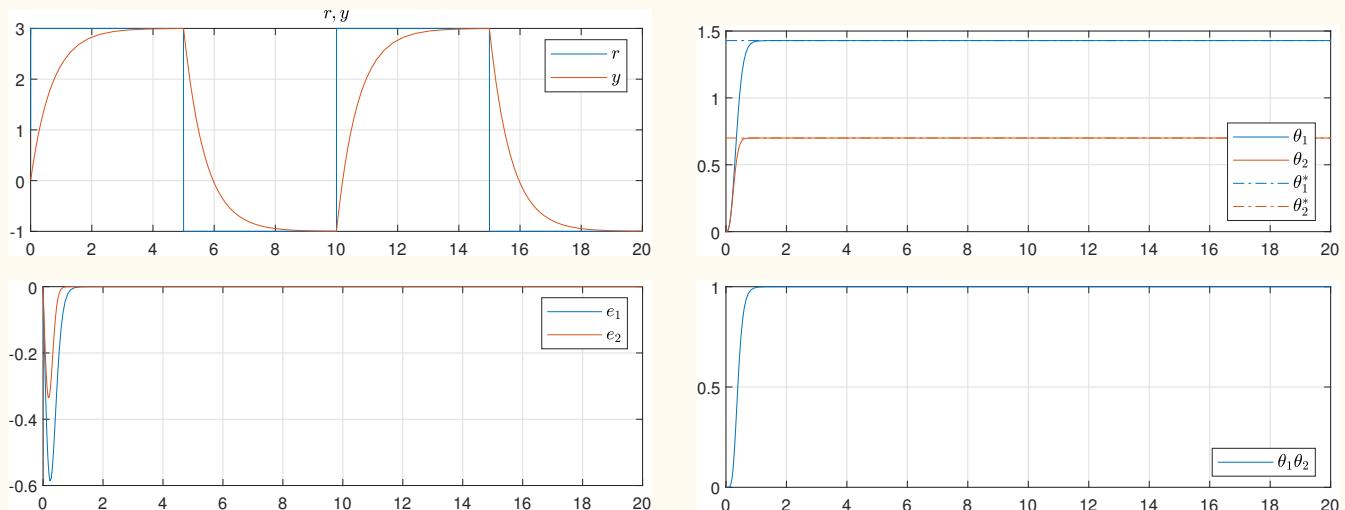


Figura 26: Normalized Gradient. Plant-11.

Simulation 3 Small initial conditions, large gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $\tau = 0.7$ $\gamma_1 = 10$ $\kappa_1 = 0$
 $\lambda = 1$ $\gamma_2 = 10$ $\kappa_2 = 0$

Initial conditions : $y(0) = 5$
 $\theta_1(0) = 0$
 $\theta_2(0) = 0$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

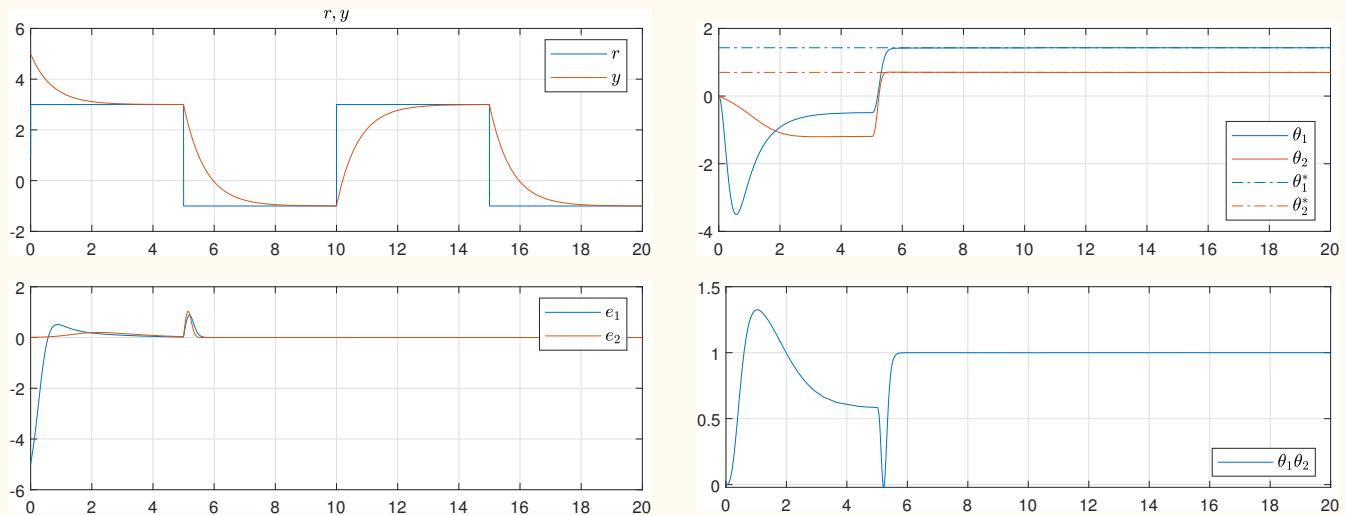


Figura 27: Normalized Gradient. Plant-11.

Simulation 4 Effect of normalization.Algorithm : **Normalized Gradient**

Parameters : $\tau = 0.7$ $\gamma_1 = 10$ $\kappa_1 = 10$
 $\lambda = 1$ $\gamma_2 = 10$ $\kappa_2 = 10$

Initial conditions : $y(0) = 5$
 $\theta_1(0) = 0$
 $\theta_2(0) = 0$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

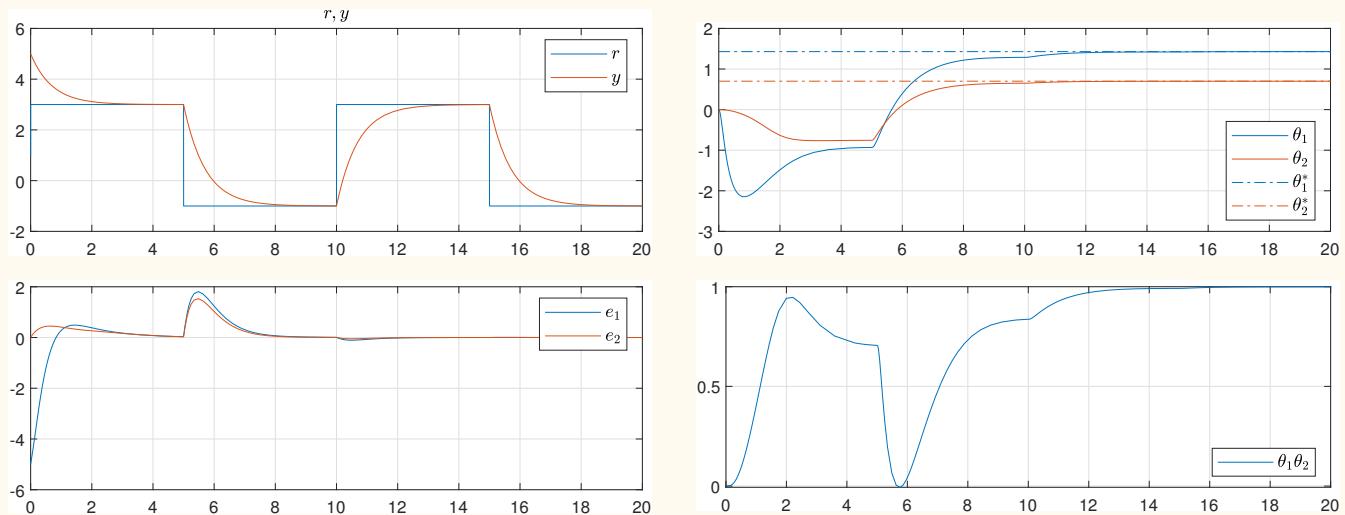


Figura 28: Normalized Gradient. Plant-11.

Case 2 First order plant, 2 unknown parameters.

Plant : $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0}{s + a_0}$

Filter : $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s + \lambda}$

★ As simulações utilizam o pacote ODE do Matlab.

Resumo das equações

Planta.....: $\dot{y} = -a_0 y + b_0 u$

Filtro.....: $\Lambda(s) = s + \lambda$

Parametrização 1: $\underbrace{y}_{Y_1} = b_0 u_f + (\lambda - a_0) y_f = [b_0 \quad (a_0 - \lambda)] \underbrace{\begin{bmatrix} u_f \\ -y_f \end{bmatrix}}_{\phi_1}$

Parametrização 2: $\underbrace{\dot{y}_f}_{Y_2} = b_0 u_f - a_0 y_f = [b_0 \quad a_0] \underbrace{\begin{bmatrix} u_f \\ -y_f \end{bmatrix}}_{\phi_2}$

Parametrização 3: $\underbrace{u_f}_{Y_3} = (1/b_0)\dot{y}_f + (a_0/b_0)y_f = [1/b_0 \quad a_0/b_0] \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_f \\ y_f \end{bmatrix}}_{\phi_3}$

Estimativa.....: $\hat{Y}_i = \theta_i^T \phi_i$

Erro.....: $\epsilon_i = \hat{Y}_i - Y_i$

Normalização.....: $m_i^2 = 1 + \kappa_i \phi_i^T \phi_i$

Lei de adaptação: $\dot{\theta}_i = -\gamma_i \frac{\phi_i \epsilon_i}{m_i^2}$

Simulation 1 Zero initial conditions, small gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_0 = 2$ $b_0 = 3$

$$\lambda = 1$$

$$\Gamma_i = 1 I$$

$$\kappa_i = 0$$

Initial conditions : $y(0) = 0$

$$\theta_i(0) = 0$$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1 \pi t))$

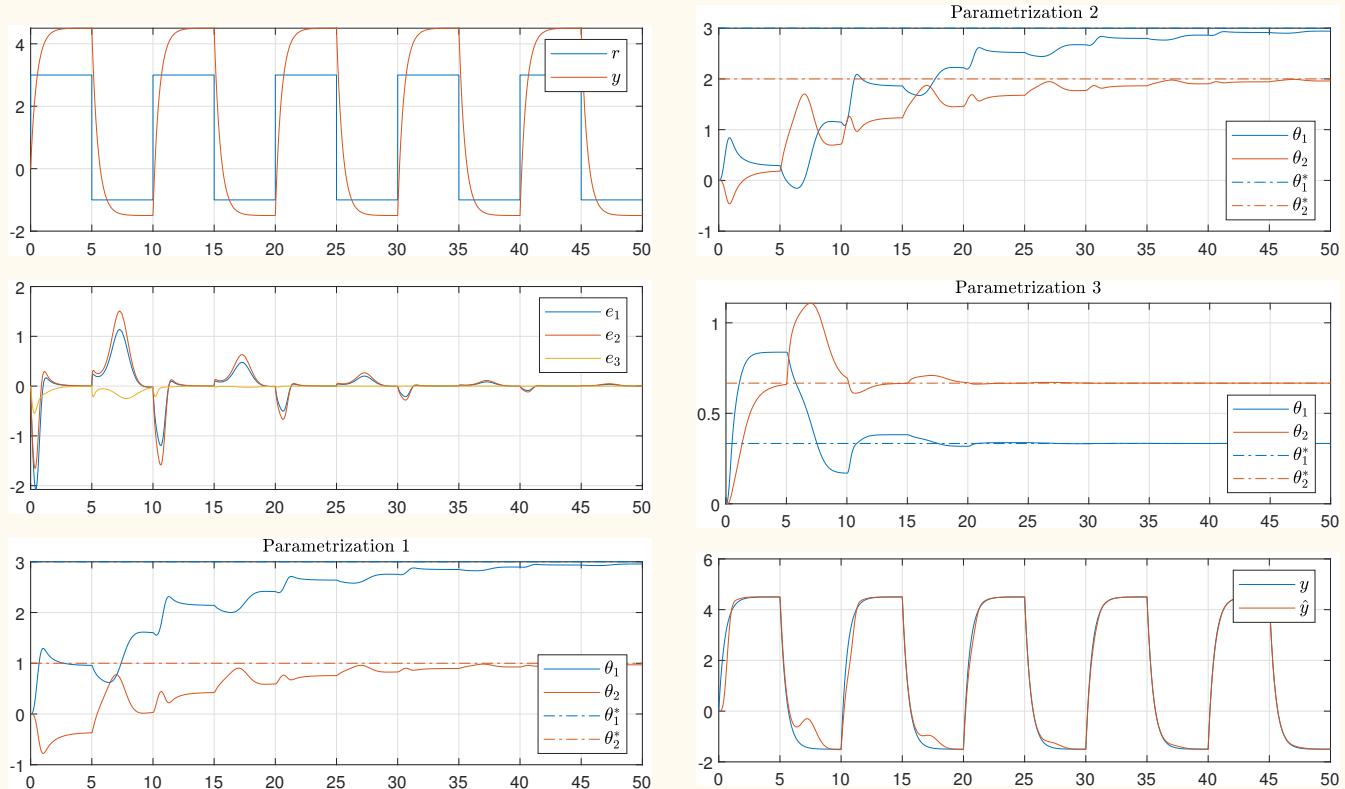


Figura 29: Normalized Gradient. Plant-12.

Simulation 2 Zero initial conditions, large gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_0 = 2$ $b_0 = 3$

$$\lambda = 1$$

$$\Gamma_i = 10 I$$

$$\kappa_i = 0$$

Initial conditions : $y(0) = 0$

$$\theta_i(0) = 0$$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

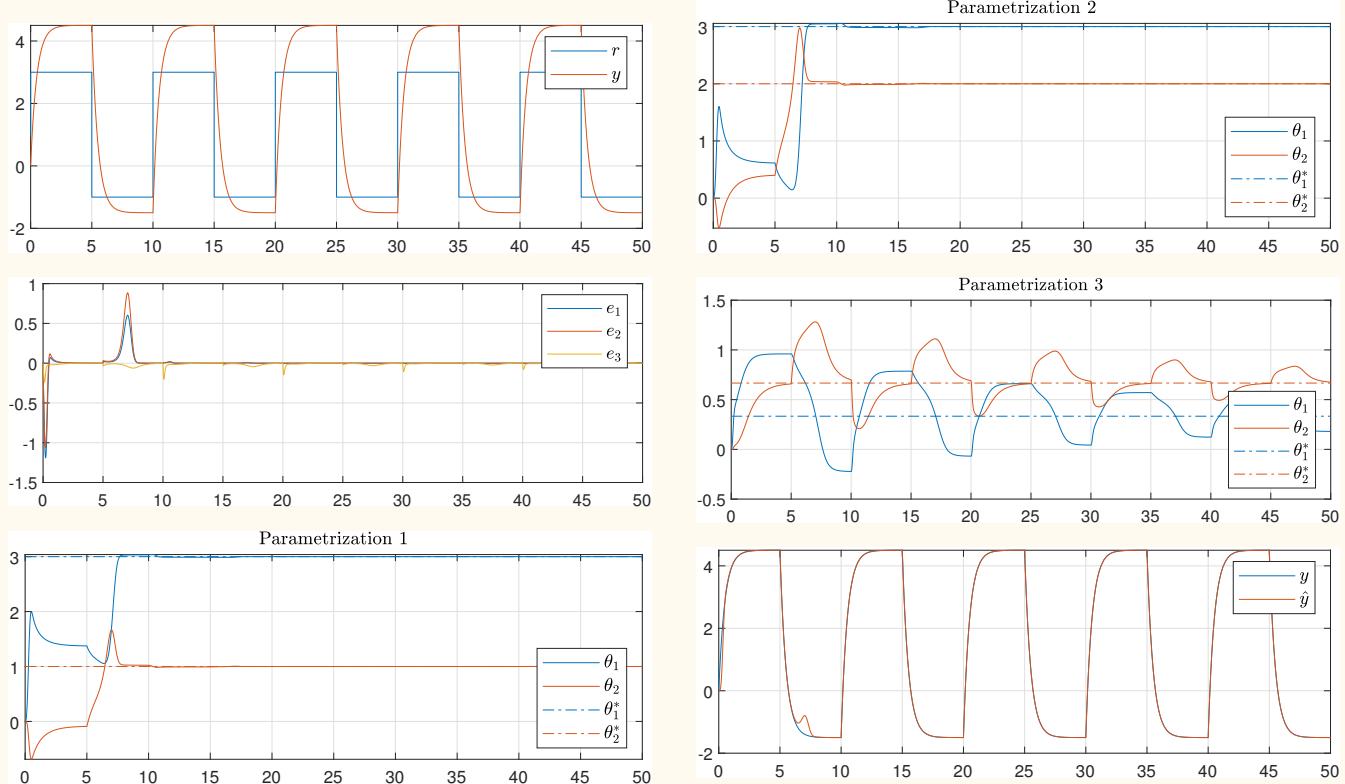


Figura 30: Normalized Gradient. Plant-12.

Simulation 3 Small initial conditions, large gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_0 = 2$ $b_0 = 3$

$$\lambda = 1$$

$$\Gamma_i = 10 I$$

$$\kappa_i = 0$$

Initial conditions : $y(0) = 5$

$$\theta_i(0) = 0$$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

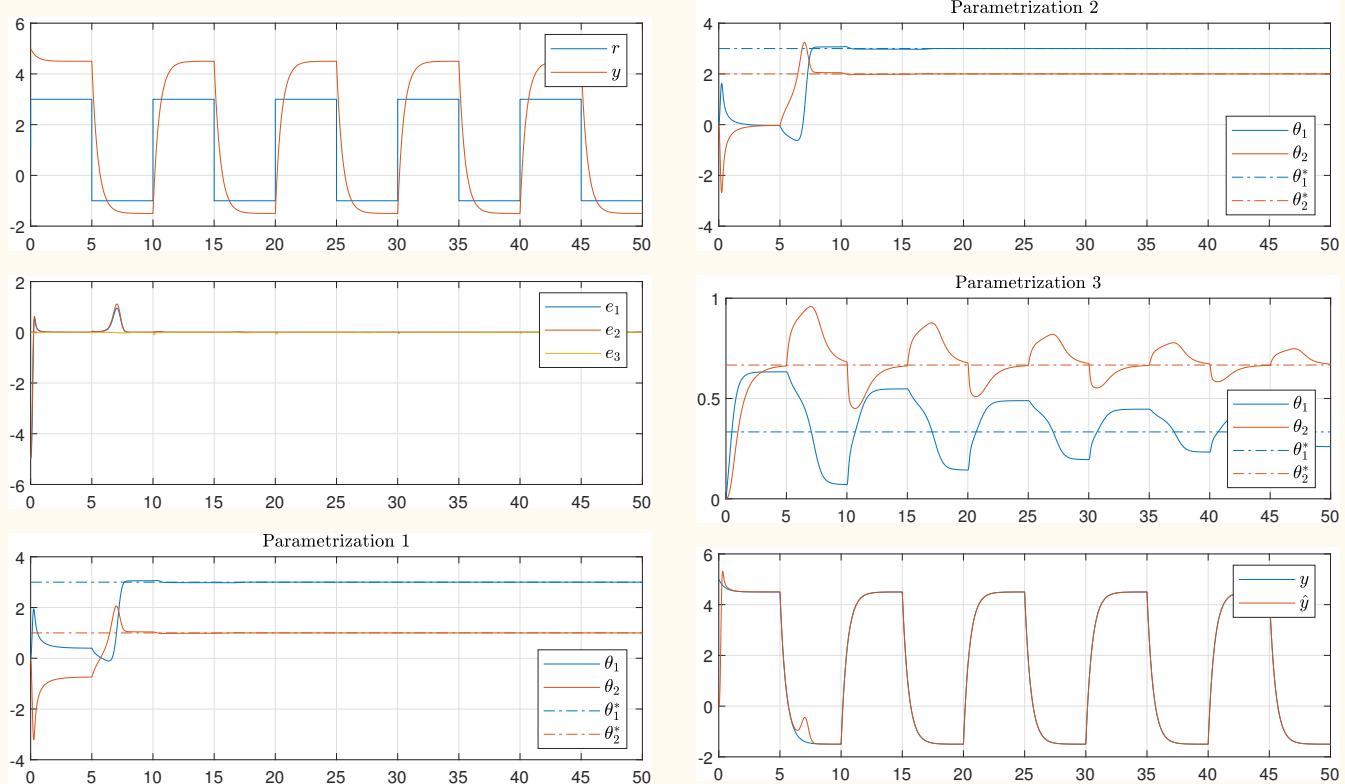


Figura 31: Normalized Gradient. Plant-12.

Simulation 4 Effect of normalization (large κ).Algorithm : **Normalized Gradient**Parameters : $a_0 = 2$ $b_0 = 3$

$$\lambda = 1$$

$$\Gamma_i = 10 I$$

$$\kappa_i = 10$$

Initial conditions : $y(0) = 5$

$$\theta_i(0) = 0$$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

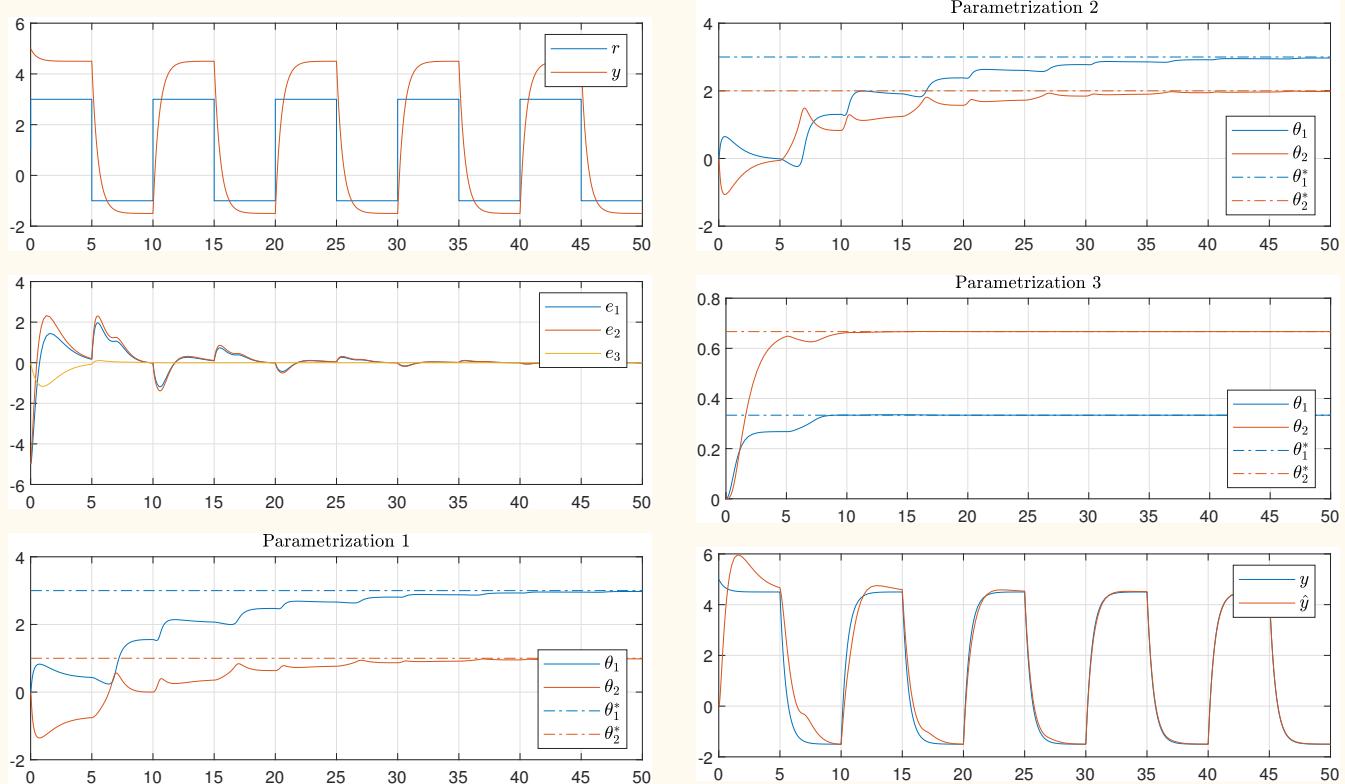


Figura 32: Normalized Gradient. Plant-12.

Simulation 5 Plant is an integrator.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_0 = 0$ $b_0 = 3$

$$\lambda = 1$$

$$\Gamma_i = 10 I$$

$$\kappa_i = 0$$

Initial conditions : $y(0) = 0$

$$\theta_i(0) = 0$$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

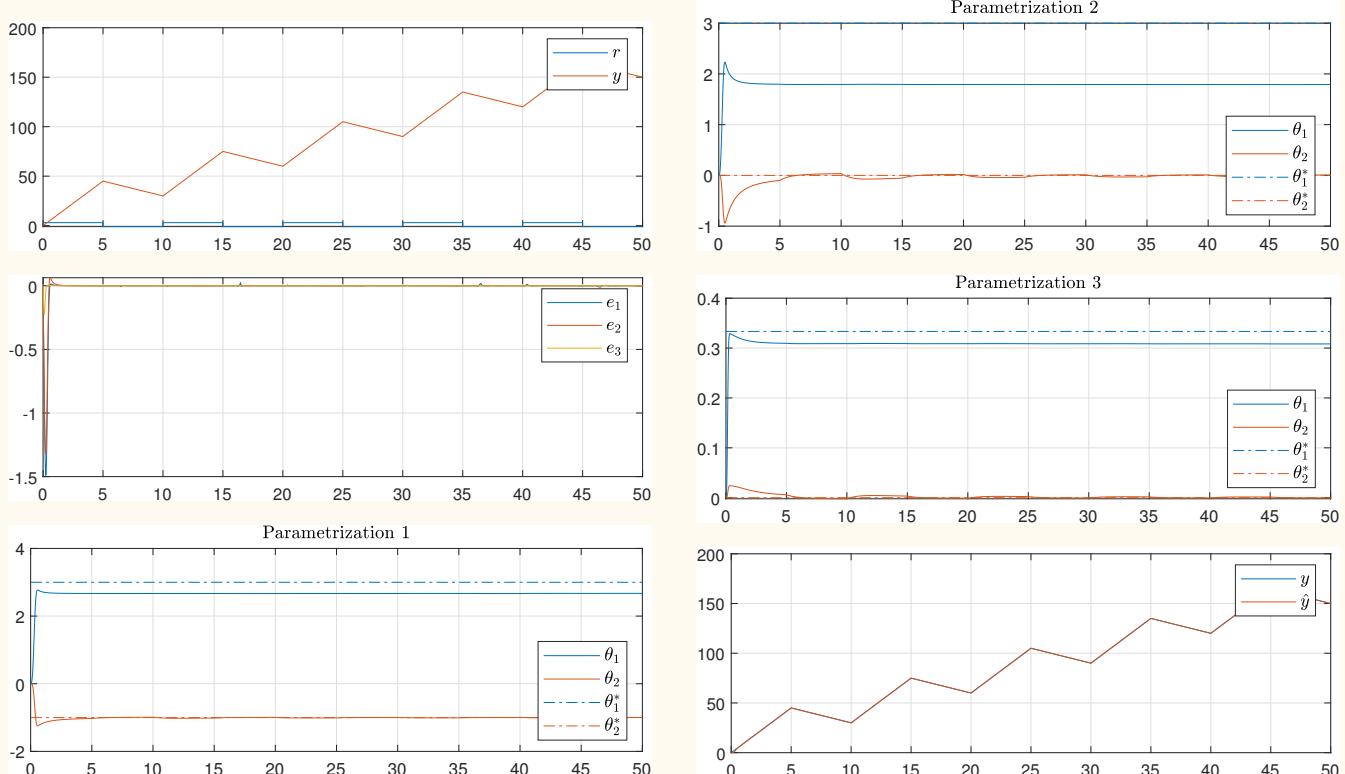


Figura 33: Normalized Gradient. Plant-12.

Case 3 2nd order plant, 4 unknown parameters.

Plant : $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$

Filter : $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0}$

★ As simulações utilizam o pacote ODE do Matlab.

Resumo das equações

Parametrização 1: $\underbrace{y}_{Y_1} = b_0 u_f + b_1 \dot{u}_f + (a_0 - \lambda_0) y_f + (a_1 - \lambda_1) \dot{y}_f = \theta_1^* \phi_1$

Regressor: $\phi_1 = [u_f \quad \dot{u}_f \quad -y_f \quad -\dot{y}_f]^T$

Parâmetros: $\theta_1^* = [b_0 \quad b_1 \quad (a_0 - \lambda_0) \quad (a_1 - \lambda_1)]^T$

Parametrização 2: $\underbrace{\dot{y}_f}_{Y_2} = b_0 u_f + b_1 \dot{u}_f - a_0 y_f - a_1 \dot{y}_f = \theta_1^* \phi_1$

Regressor: $\phi_2 = [u_f \quad \dot{u}_f \quad -y_f \quad -\dot{y}_f]^T$

Parâmetros: $\theta_2^* = [b_0 \quad b_1 \quad a_0 \quad a_1]^T$

Parametrização 3: $\underbrace{u_f}_{Y_3} = \frac{1}{b_0} \ddot{\textcolor{red}{y}_f} - \frac{b_1}{b_0} \dot{u}_f + \frac{a_0}{b_0} y_f + \frac{a_1}{b_0} \dot{y}_f$

Regressor: $\phi_3 = [\ddot{y}_f \quad -\dot{u}_f \quad y_f \quad \dot{y}_f]^T$

Parâmetros: $\theta_3^* = [1/b_0 \quad b_1/b_0 \quad a_0/b_0 \quad a_1/b_0]^T$

Estimativa: $\hat{Y}_i = \theta_i^T \phi_i$

Erro: $\epsilon_i = \hat{Y}_i - Y_i$

Normalização: $m_i^2 = 1 + \kappa_i \phi_i^T \phi_i$

Lei de adaptação: $\dot{\theta}_i = -\gamma_i \frac{\phi_i \epsilon_i}{m_i^2}$

Nota. $P(s)y_f = Z(s)u_f \Rightarrow \ddot{\textcolor{red}{y}_f} + a_1 \dot{y}_f + a_0 y_f = b_1 \dot{u}_f + b_0 u_f$

Simulation 1 Zero initial conditions, small gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_1 = 2.5$ $a_0 = 1.5$ $b_1 = 2$ $b_0 = 0.8$

$\lambda_0 = 1$ $\lambda_1 = 2$

$\Gamma_i = 1I$

$\kappa_i = 0$

Initial conditions : $x(0) = [0 \ 0]^T$

$\theta_i(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

Matching parameters: $\theta_1^* = [0.8 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]$

$\theta_2^* = [0.8 \ 2 \ 1.5 \ 2.5]$

$\theta_3^* = [1 \ 2.5 \ 1.875 \ 3.125]$

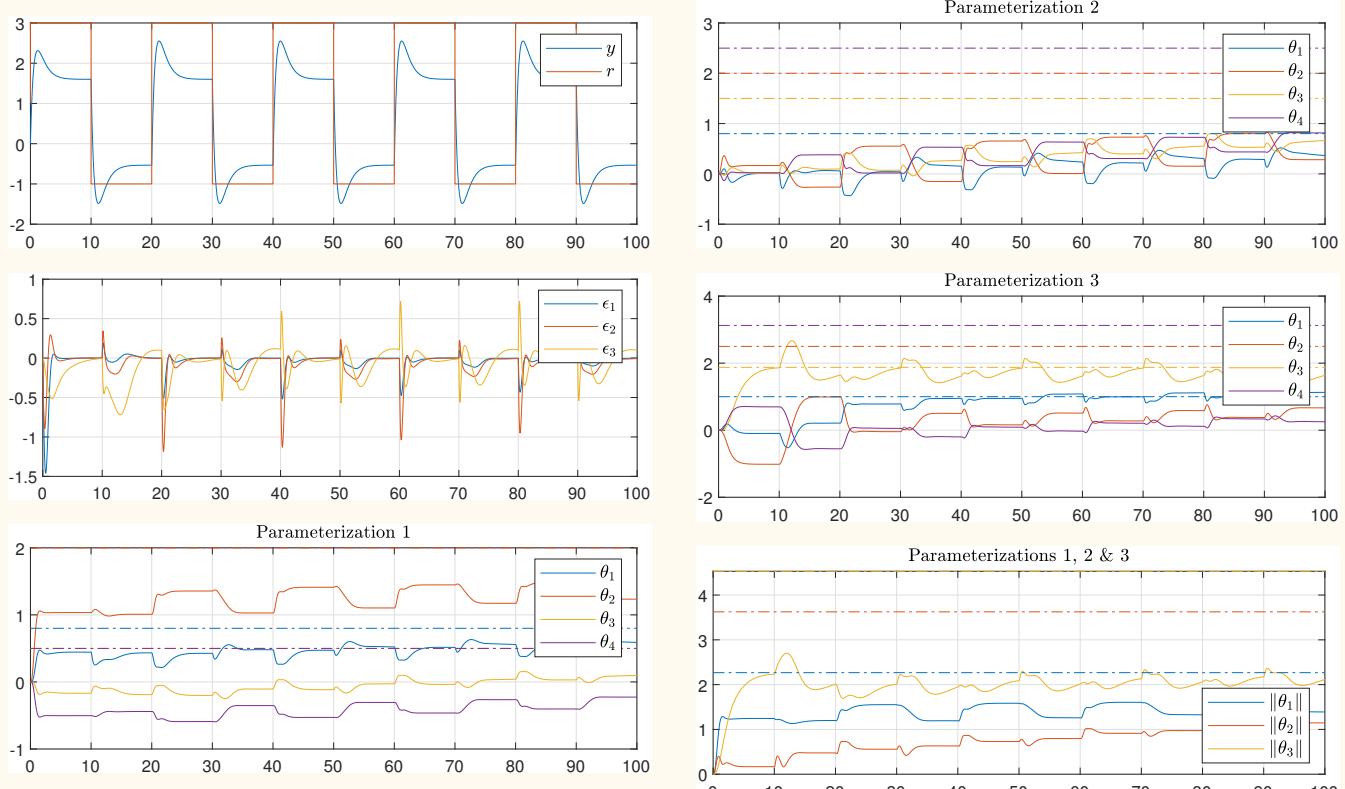


Figura 34: Normalized Gradient. Plant-24.

Simulation 2 Zero initial conditions, large gains.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_1 = 2.5$ $a_0 = 1.5$ $b_1 = 2$ $b_0 = 0.8$

$\lambda_0 = 1$ $\lambda_1 = 2$

$\Gamma_i = 10 I$

$\kappa_i = 0$

Initial conditions : $x(0) = [0 \ 0]^T$

$\theta_i(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

Matching parameters: $\theta_1^* = [0.8 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]$

$\theta_2^* = [0.8 \ 2 \ 1.5 \ 2.5]$

$\theta_3^* = [1 \ 2.5 \ 1.875 \ 3.125]$

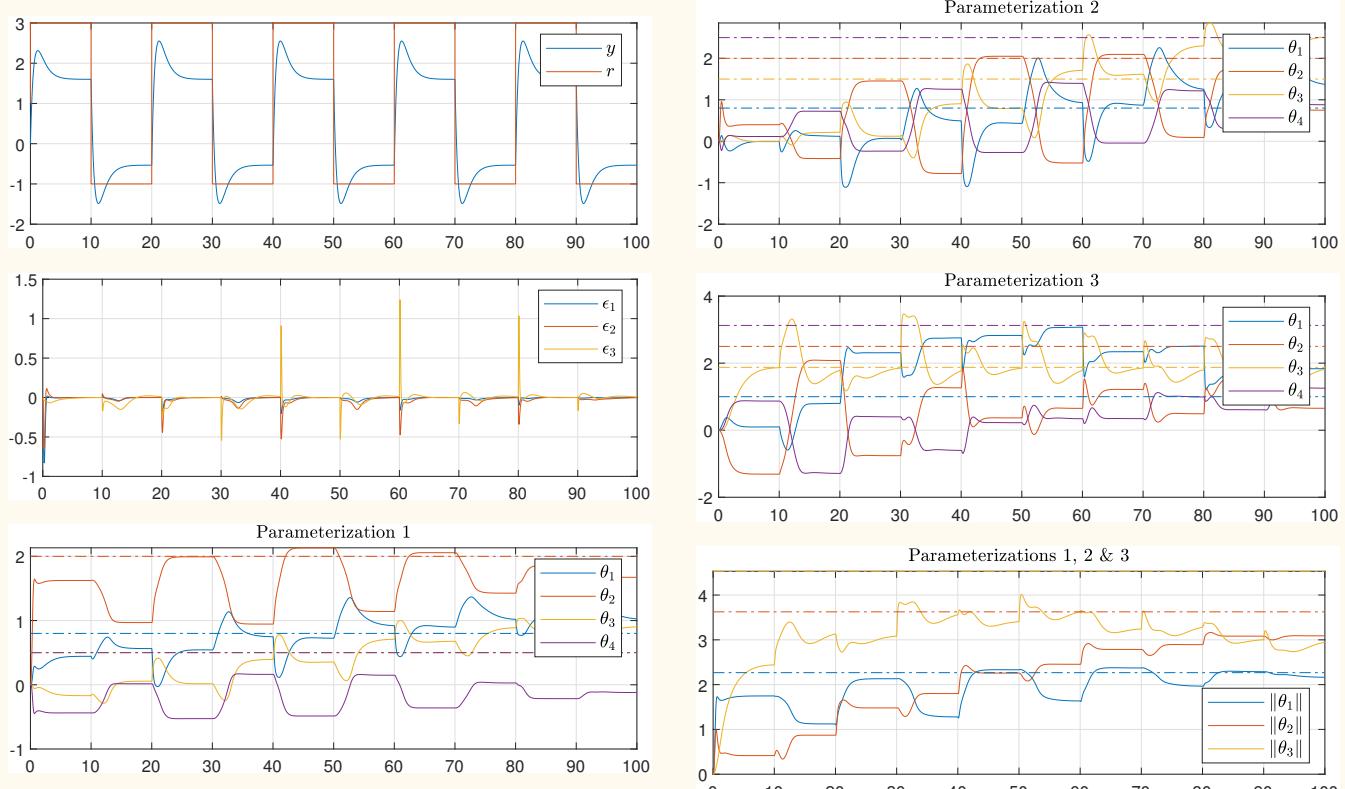


Figura 35: Normalized Gradient. Plant-24.

Simulation 3 Zero initial conditions, large gains & more excitation.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_1 = 2.5$ $a_0 = 1.5$ $b_1 = 2$ $b_0 = 0.8$

$\lambda_0 = 1$ $\lambda_1 = 2$

$\Gamma_i = 10 I$

$\kappa_i = 0$

Initial conditions : $x(0) = [0 \ 0]^T$

$\theta_i(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t)) + 2 \sin(2t)$

Matching parameters: $\theta_1^* = [0.8 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]$

$\theta_2^* = [0.8 \ 2 \ 1.5 \ 2.5]$

$\theta_3^* = [1 \ 2.5 \ 1.875 \ 3.125]$

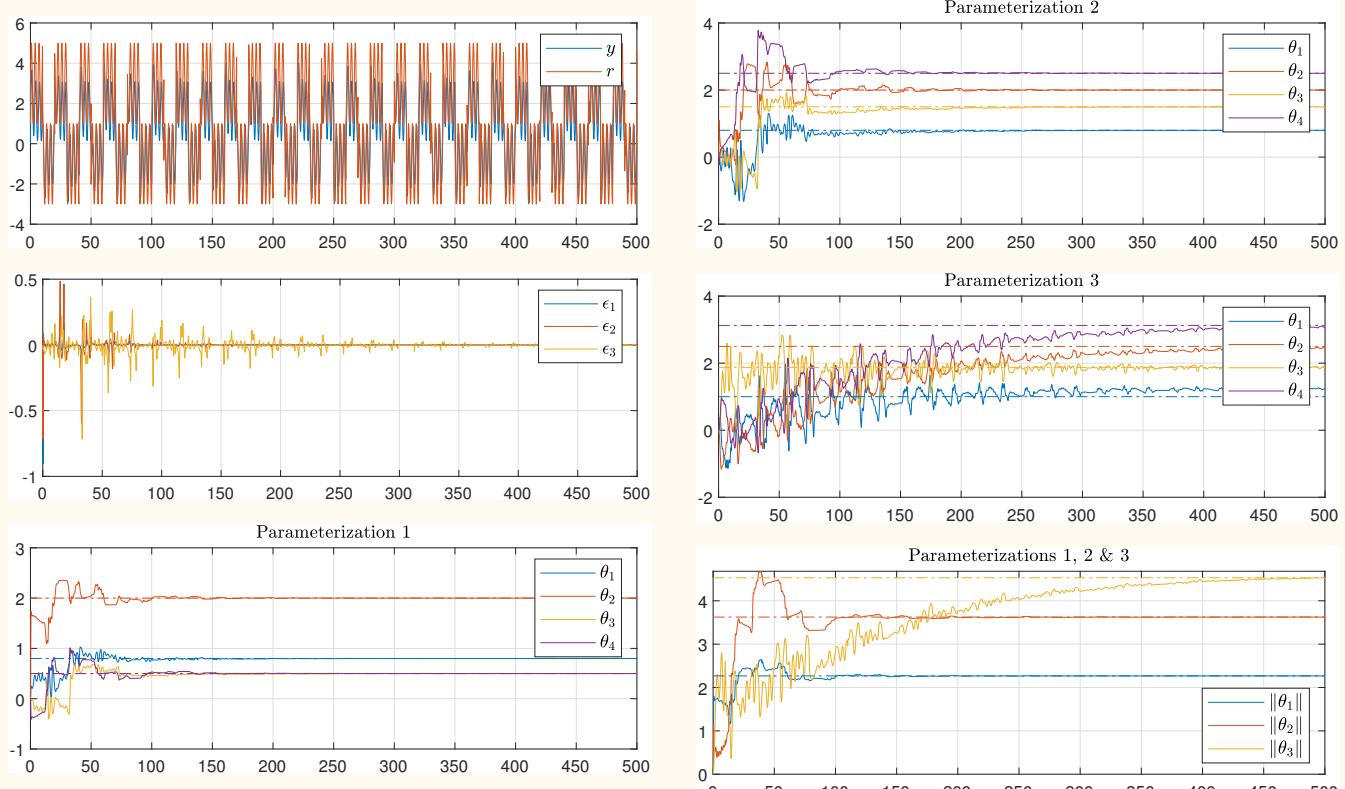


Figura 36: Normalized Gradient. Plant-24.

Simulation 4 Effect of a large initial condition.Algorithm : **Normalized Gradient**Parameters : $a_1 = 2.5$ $a_0 = 1.5$ $b_1 = 2$ $b_0 = 0.8$ $\lambda_0 = 1$ $\lambda_1 = 2$ $\Gamma_i = 10 I$ $\kappa_i = 0$ Initial conditions : $x(0) = [15 \ 0]^T$ $\theta_i(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t)) + 2 \sin(2t)$ Matching parameters: $\theta_1^* = [0.8 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]$ $\theta_2^* = [0.8 \ 2 \ 1.5 \ 2.5]$ $\theta_3^* = [1 \ 2.5 \ 1.875 \ 3.125]$

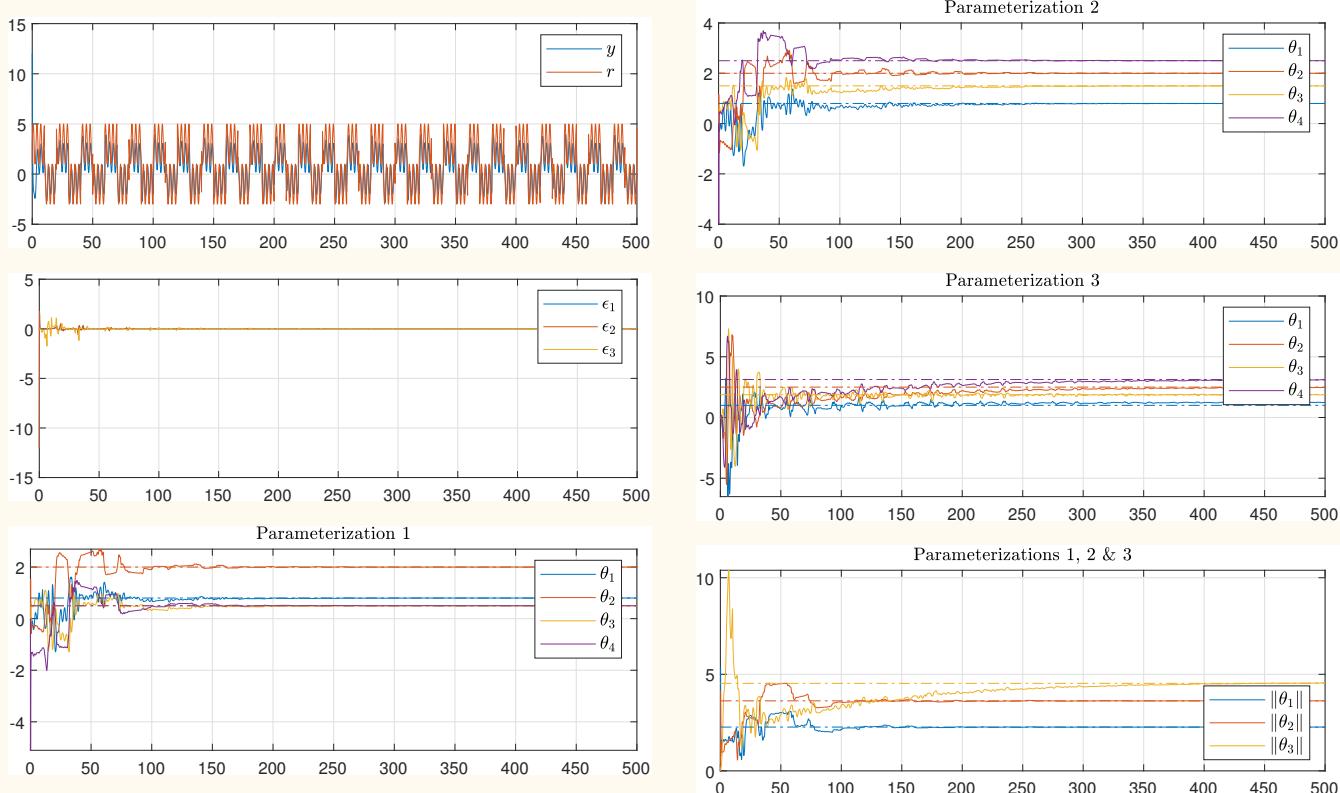


Figura 37: Normalized Gradient. Plant-24.

Simulation 5 Effect of the normalization.Algorithm : **Normalized Gradient**Parameters : $a_1 = 2.5$ $a_0 = 1.5$ $b_1 = 2$ $b_0 = 0.8$ $\lambda_0 = 1$ $\lambda_1 = 2$ $\Gamma_i = 10 I$ $\kappa_i = 1$ Initial conditions : $x(0) = [15 \ 0]^T$ $\theta_i(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t)) + 2 \sin(2t)$ Matching parameters: $\theta_1^* = [0.8 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]$ $\theta_2^* = [0.8 \ 2 \ 1.5 \ 2.5]$ $\theta_3^* = [1 \ 2.5 \ 1.875 \ 3.125]$

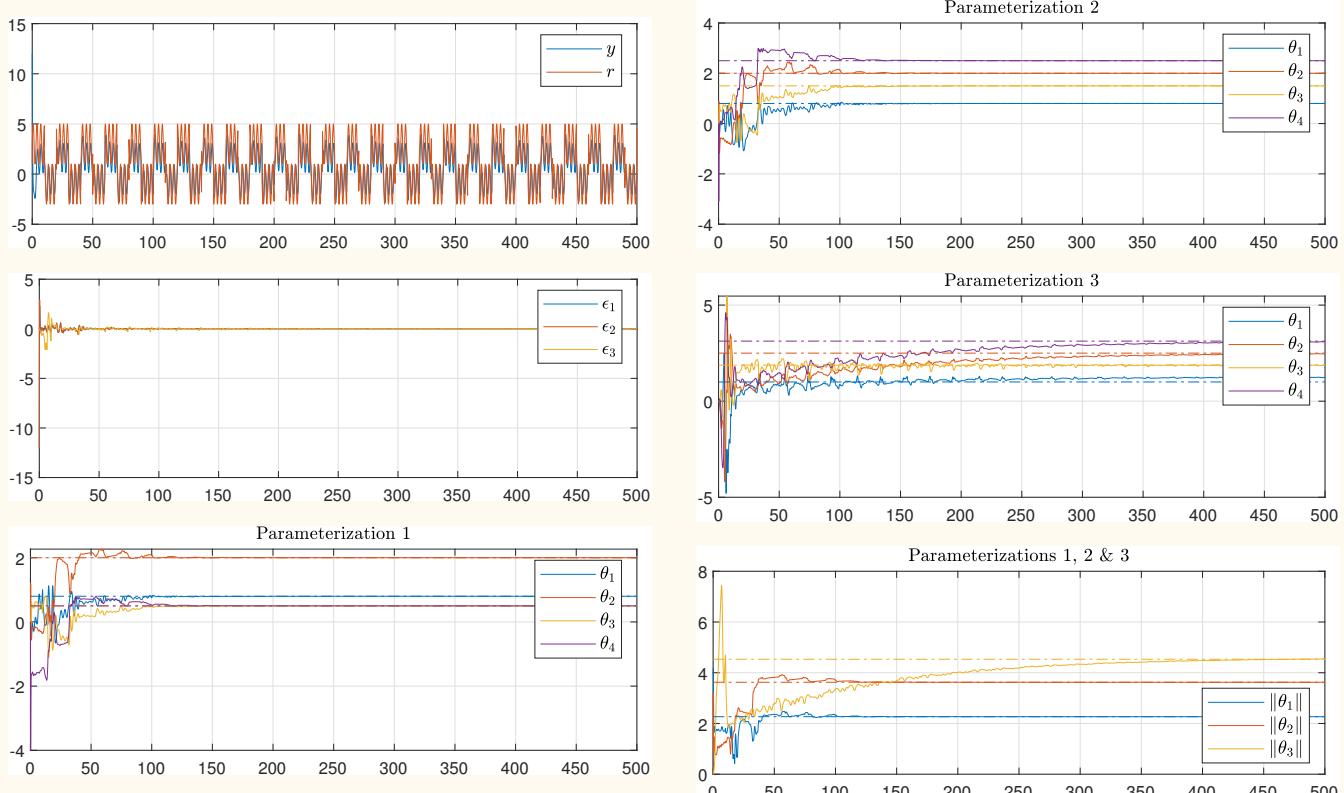


Figura 38: Normalized Gradient. Plant-24.

3.4 LEAST-SQUARES NORMALIZADO

Algoritmo:

$$\dot{\theta} = -\frac{P\phi\epsilon}{m^2}, \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad (2)$$

$$\dot{P} = -\frac{P\phi\phi^TP}{m^2}, \quad P(t_0) = P_0 > 0 \quad (3)$$

$$m^2 = 1 + \kappa \phi^T P \phi, \quad \kappa > 0$$

★ Note que P é um ganho de adaptação variante no tempo.

Lema. Estabilidade do algoritmo LS normalizado.

- $P(t) = P^T(t) > 0, \quad \forall t$
- $P, \dot{P} \in \mathcal{L}_\infty$
- $\theta, \frac{\epsilon}{m}, \frac{\epsilon}{\bar{m}} \in \mathcal{L}_\infty$
- $\dot{\theta}, \frac{\epsilon}{m}, \frac{\epsilon}{\bar{m}} \in \mathcal{L}_2$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_\infty$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_\infty$

$$\boxed{\bar{m}^2 = 1 + \phi^T \phi}$$

Prova. [Tao:2003], (pag. 105)

Como $P(t_0) > 0$, então para $t = t_0$

$$P(t)P^{-1}(t) = I$$

Derivando,

$$\dot{P}P^{-1} + P \frac{d}{dt}(P^{-1}) = 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(P^{-1}) &= -P^{-1}\dot{P}P^{-1} \\ &= -P^{-1} \left(-\frac{P\phi\phi^TP}{m^2} \right) P^{-1} = \frac{\phi\phi^T}{m^2} \geq 0\end{aligned}$$

Portanto,

- P^{-1} é monotonicamente crescente \Rightarrow

$$P^{-1}(t) \geq P^{-1}(t_0) > 0$$

- $P(t) > 0, \forall t$

- P^{-1} é monot. crescente $\Rightarrow P$ é monot. decrescente \Rightarrow

$$P(t) \in \mathcal{L}_\infty$$

- $\dot{P} = -\frac{P\phi\phi^TP}{m^2} = -\underbrace{Q}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{\frac{Q\phi\phi^TQ}{1 + \kappa\phi^TQQ\phi}}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{Q}_{\mathcal{L}_\infty} \Rightarrow$

$$\dot{P} \in \mathcal{L}_\infty$$

★ No item anterior, $P = QQ$.

Note que P pode $\rightarrow 0$ e, portanto, não se pode afirmar que $\frac{\phi\phi^T}{m^2} \in \mathcal{L}_\infty$.

Função de Lyapunov: $V(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T P^{-1} \tilde{\theta}$

Derivando,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\tilde{\theta}}^T P^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \dot{P}^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= 2\tilde{\theta}^T P^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T (-P^{-1} \dot{P} P^{-1}) \tilde{\theta} \\ &= 2\tilde{\theta}^T P^{-1} \left(-\frac{P\phi\epsilon}{m^2} \right) - \tilde{\theta}^T P^{-1} \left(-\frac{P\phi\phi^T P}{m^2} \right) P^{-1} \tilde{\theta} \\ &= -2\frac{\epsilon^2}{m^2} + \frac{\epsilon^2}{m^2} \\ &= -\frac{\epsilon^2}{m^2} \leq 0\end{aligned}$$

Portanto,

- $\boxed{\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty}$

- $\boxed{\frac{\epsilon}{m} \in \mathcal{L}_2}$

- $P \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \boxed{\frac{m}{\bar{m}} \in \mathcal{L}_\infty} \quad (P \rightarrow 0 \Rightarrow m \rightarrow 1)$

- $\frac{\epsilon}{\bar{m}} = \underbrace{\tilde{\theta}}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{\frac{\phi}{\bar{m}}}_{\mathcal{L}_\infty} \Rightarrow \boxed{\frac{\epsilon}{\bar{m}} \in \mathcal{L}_\infty}$

- $\frac{\epsilon}{\bar{m}} = \underbrace{\frac{\epsilon}{m}}_{\mathcal{L}_2} \underbrace{\frac{m}{\bar{m}}}_{\mathcal{L}_\infty} \Rightarrow \boxed{\frac{\epsilon}{\bar{m}} \in \mathcal{L}_2}$

- $\underbrace{\frac{\epsilon}{\bar{m}}}_{\mathcal{L}_\infty} = \frac{\epsilon}{m} \underbrace{\frac{m}{\bar{m}}}_{\mathcal{L}_\infty} \Rightarrow \boxed{\frac{\epsilon}{m} \in \mathcal{L}_\infty}$

- $\dot{\theta} = -\frac{P\phi\epsilon}{m^2} = -\underbrace{Q}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{\frac{Q\phi}{m}}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{\frac{\epsilon}{m}}_{\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty}$

★ Note que pode ocorrer $P \rightarrow 0$ e $\phi \rightarrow \infty$.

Portanto, pode ocorrer $m \rightarrow 1$ e $\bar{m} \rightarrow \infty$.

★ $\frac{\phi}{\bar{m}} \in \mathcal{L}_\infty$. Porém, $\frac{\phi}{m} \notin \mathcal{L}_\infty$.

Para provar que $P \rightarrow P_\infty$, integramos a expressão de P :

$$P(t) = \underbrace{P_0}_{>0} - \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{P\phi\phi^T P}{m^2} d\tau}_{\mathcal{I}} > 0$$

Então, para todo z ,

$$z^T P z = z^T P_0 z - z^T \mathcal{I} z > 0$$

Portanto,

- $z^T \mathcal{I} z > 0$ e monotonicamente crescente.
- $\underbrace{z^T P z}_{>0} = z^T P_0 z - \underbrace{z^T \mathcal{I} z}_{>0} > 0 \quad \Rightarrow \quad z^T \mathcal{I} z \leq z^T P_0 z.$

Fato. Se uma função $f(t)$ é monotonicamente crescente e limitada, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f_\infty < \infty.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z^T P z = z^T P_0 z - \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} z^T \mathcal{I} z}_{f_\infty} < \infty$$

- Para uma escolha adequada de z , tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_\infty$$

- ★ Exemplo de escolha de z : $z = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$.

- Agora vem a parte mais elaborada da prova: mostrar que $\theta \rightarrow \theta_\infty$.

O algoritmo LS minimiza a função custo

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon^2(\tau)}{m^2(\tau)} d\tau + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0) P_0^{-1} (\theta - \theta_0)$$

onde $\varepsilon(\tau) = \theta^T(t) \phi(\tau) - y(\tau)$.

Para encontrar o mínimo, fazemos

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon(\tau)}{m^2(\tau)} \phi(\tau) d\tau + P_0^{-1} (\theta - \theta_0) = 0$$

Resolvendo para θ , obtém-se

$$P_0^{-1} \theta = P_0^{-1} \theta_0 - \int_{t_0}^t \frac{\phi^T \theta - y}{m^2} \phi d\tau$$

Portanto,

$$P_0^{-1}\theta(t) = P_0^{-1}\theta_0 - \int_{t_0}^t \frac{\phi\phi^T}{m^2}\theta(t)d\tau + \int_{t_0}^t \frac{y\phi}{m^2}d\tau$$

★ Lembrar que $\varepsilon(\tau) = \theta^T(t)\phi(\tau) - y(\tau)$.

Então,

$$P_0^{-1}\theta(t) + \int_{t_0}^t \frac{\phi\phi^T}{m^2}d\tau\theta(t) = P_0^{-1}\theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{y\phi}{m^2}d\tau$$

$$\underbrace{\left(P_0^{-1} + \int_{t_0}^t \frac{\phi\phi^T}{m^2}d\tau \right)}_{P^{-1}}\theta(t) = P_0^{-1}\theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{y\phi}{m^2}d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = P \left(P_0^{-1}\theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{y\phi}{m^2}d\tau \right)}$$

Lembrando que $y = \phi^T \theta^*$, podemos escrever

$$\underbrace{\theta(t) - \theta^*}_{\tilde{\theta}} = P \left(P_0^{-1} \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{\phi \phi^T \theta^*}{m^2} d\tau \right) - \theta^*$$

Porém,

$$P^{-1} = P_0^{-1} + \int_{t_0}^t \frac{\phi \phi^T}{m^2} d\tau \quad \Rightarrow \quad P^{-1} - P_0^{-1} = \int_{t_0}^t \frac{\phi \phi^T}{m^2} d\tau$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} &= PP_0^{-1}\theta_0 + P(P^{-1} - P_0^{-1})\theta^* - \theta^* \\ &= PP_0^{-1}\theta_0 - PP_0^{-1}\theta^* \\ &= PP_0^{-1} \underbrace{(\theta_0 - \theta^*)}_{\tilde{\theta}(0)}\end{aligned}$$

Resumindo:

$$\tilde{\theta} = PP_0^{-1}\tilde{\theta}(0)$$

\Rightarrow

$$P^{-1}\tilde{\theta} = P_0^{-1}\tilde{\theta}(0)$$

= constante (!!)

★ Esta é uma relação surpreendente!

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta^* + \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)}_{P_\infty} P_0^{-1}\tilde{\theta}(0) = \underbrace{\theta^* + P_\infty P_0^{-1}\tilde{\theta}(0)}_{\theta_\infty}$$

-

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_\infty$$



3.4.1 SIMULAÇÕES

Case 1 2nd order plant, 4 unknown parameters.

Plant : $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$

Filter : $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0}$

★ As simulações utilizam o pacote ODE do Matlab.

Resumo das equações

Parametrização 1: $\underbrace{y}_Y = b_0 u_f + b_1 \dot{u}_f + (a_0 - \lambda_0) y_f + (a_1 - \lambda_1) \dot{y}_f = \theta^* \phi$

Regressor: $\phi = [u_f \quad \dot{u}_f \quad y_f \quad \dot{y}_f]^T$

Parâmetros: $\theta^* = [b_0 \quad b_1 \quad (a_0 - \lambda_0) \quad (a_1 - \lambda_1)]^T$

Estimativa: $\hat{Y} = \theta^T \phi$

Erro: $\epsilon = \hat{Y} - Y$

Sinal normalizante....: $m^2 = 1 + \kappa \phi^T P \phi, \quad \kappa > 0$

Lei de adaptação: $\dot{\theta} = -\frac{P \phi \epsilon}{m^2}$

Matriz de covariância: $\dot{P} = -\frac{P \phi \phi^T P}{m^2}, \quad P(0) > 0$

Simulation 1 Zero initial conditions, small gains.

Algorithm : Normalized Least-squares

Parameters : $P(s) = \frac{0.5s + 2}{s^2 + 3s + 1.25}$
 $\Lambda(s) = s^2 + 3s + 2$
 $\kappa = 0$

Initial conditions : $x(0) = [0 \ 0]^T$
 $\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
 $P(0) = 1 I$

Input signal : $r = 3 + 5 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

Matching parameters: $\theta^* = [2 \ 0.5 \ -0.75 \ 0]$

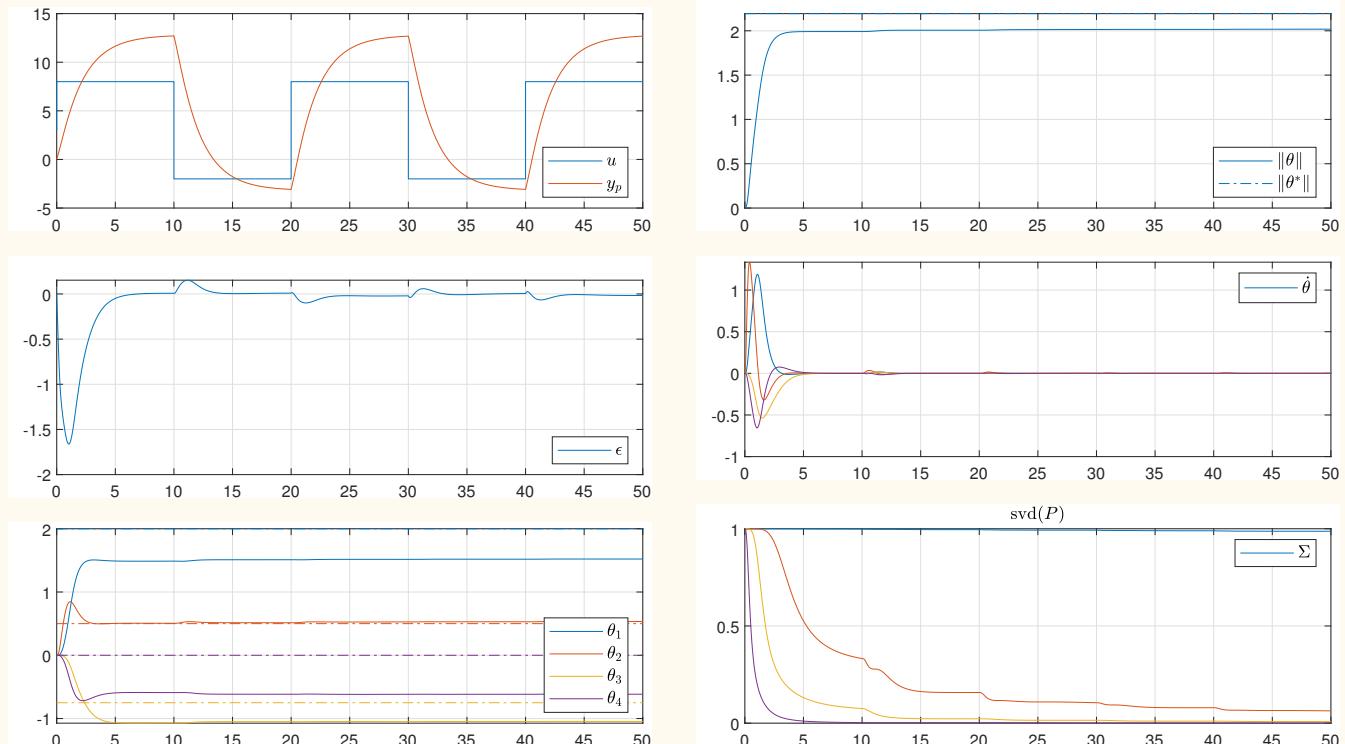


Figura 39: Normalized Least-squares. Plant-24.

Simulation 2 Zero initial conditions, large gains.

Algorithm : Normalized Least-squares

Parameters : $P(s) = \frac{0.5s + 2}{s^2 + 3s + 1.25}$
 $\Lambda(s) = s^2 + 3s + 2$
 $\kappa = 0$

Initial conditions : $x(0) = [0 \ 0]^T$
 $\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
 $P(0) = 10 I$

Input signal : $r = 3 + 5 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

Matching parameters: $\theta^* = [2 \ 0.5 \ -0.75 \ 0]$

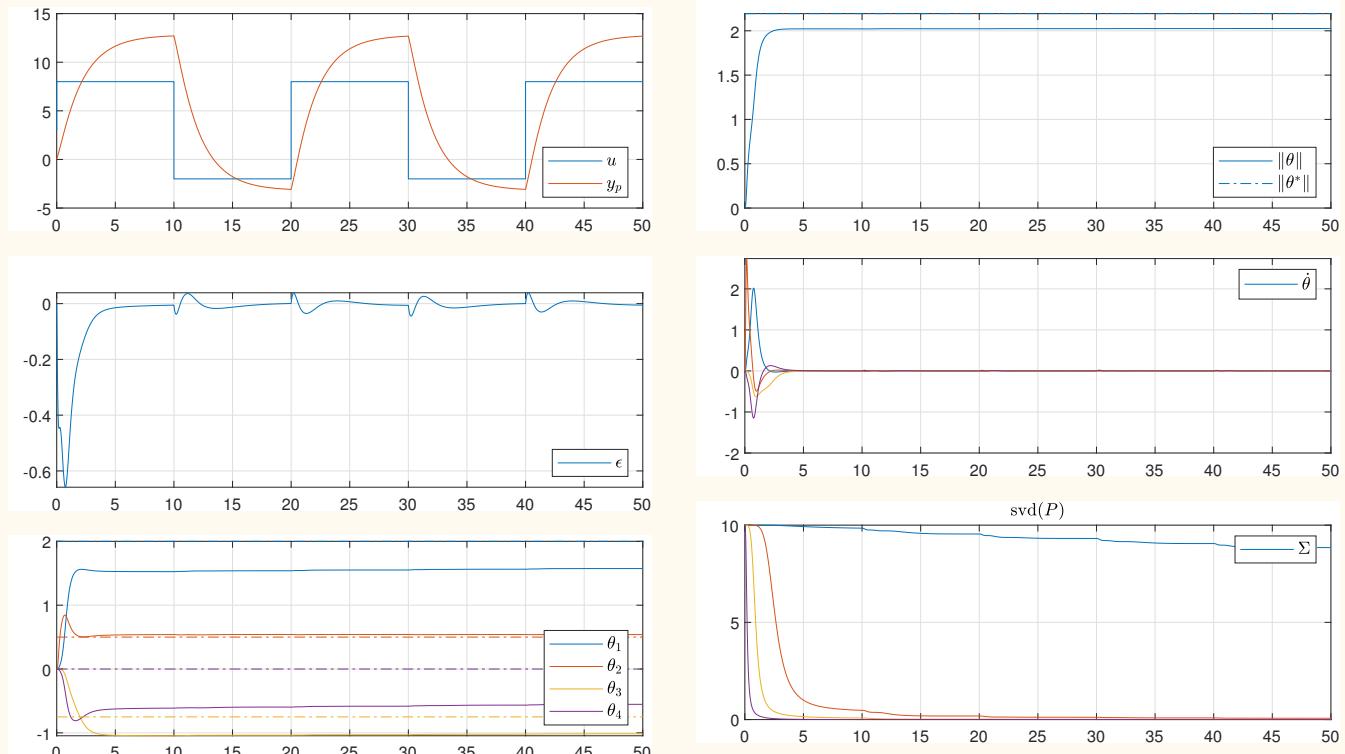


Figura 40: Normalized Least-squares. Plant-24.

Simulation 3 Effect of excitation frequencies.Algorithm : **Normalized Least-squares**

Parameters : $P(s) = \frac{0.5s + 2}{s^2 + 3s + 1.25}$
 $\Lambda(s) = s^2 + 3s + 2$
 $\kappa = 0$

Initial conditions : $x(0) = [0 \ 0]^T$
 $\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
 $P(0) = 10 I$

Input signal : $r = 3 + 5 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t)) + \sin(t) + 2 \sin(2.3t)$

Matching parameters: $\theta^* = [2 \ 0.5 \ -0.75 \ 0]$

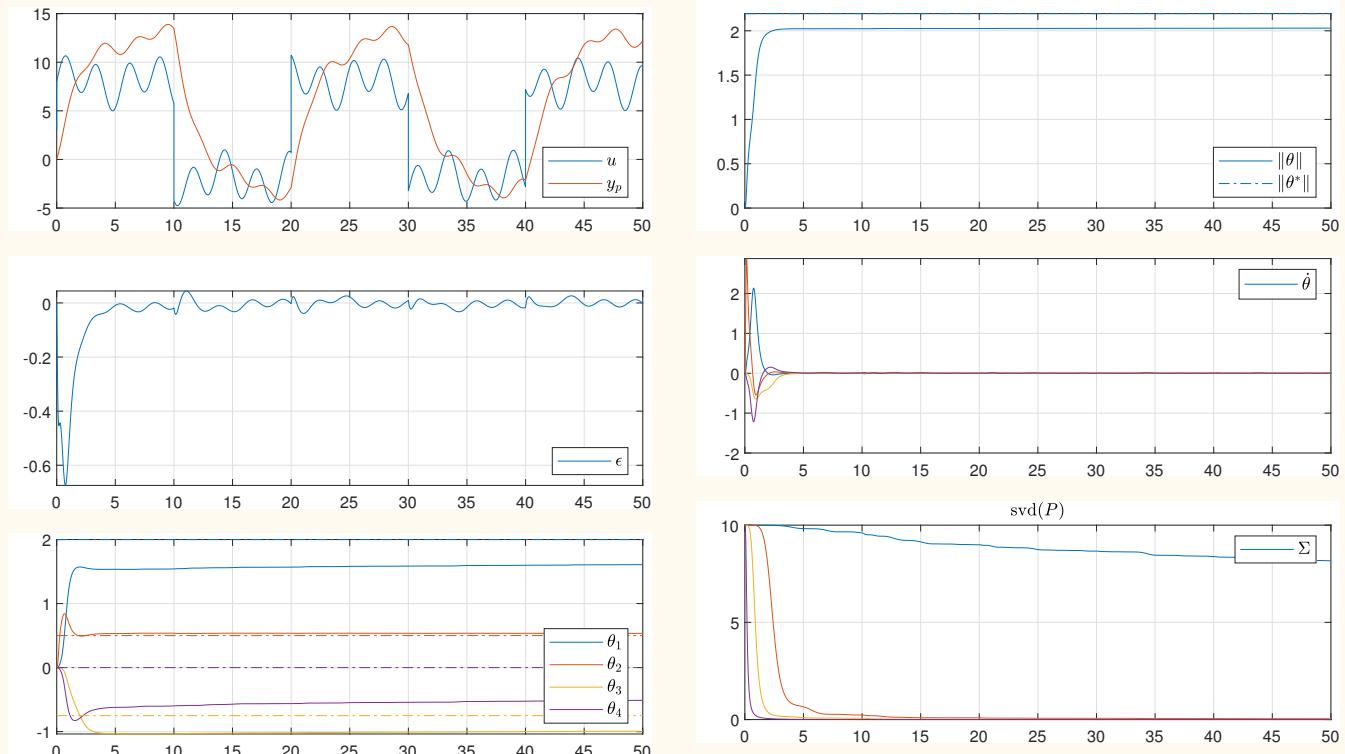


Figura 41: Normalized Least-squares. Plant-24.

Simulation 4 Effect of large initial condition.Algorithm : **Normalized Least-squares**

Parameters : $P(s) = \frac{0.5s + 2}{s^2 + 3s + 1.25}$
 $\Lambda(s) = s^2 + 3s + 2$
 $\kappa = 0$

Initial conditions : $x(0) = [10 \ 0]^T$
 $\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
 $P(0) = 10 I$

Input signal : $r = 3 + 5 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t)) + \sin(t) + 2 \sin(2.3t)$

Matching parameters: $\theta^* = [2 \ 0.5 \ -0.75 \ 0]$

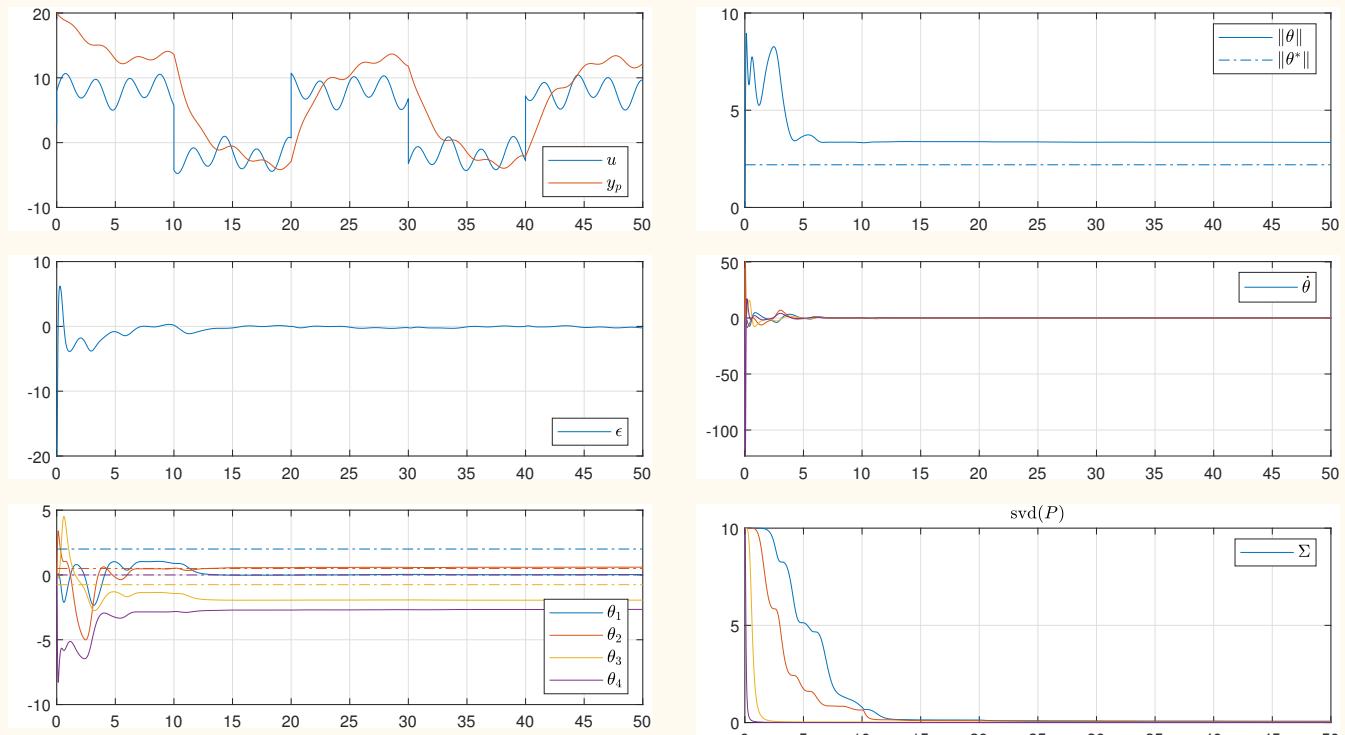


Figura 42: Normalized Least-squares. Plant-24.

Simulation 5 Effect of plant complex poles.

Algorithm : Normalized Least-squares

Parameters :

$$P(s) = \frac{0.5s + 2}{s^2 + s + 1.25} = \frac{0.5s + 2}{(s + 0.5 + i)(s + 0.5 - i)}$$
$$\Lambda(s) = s^2 + 3s + 2$$
$$\kappa = 0$$

Initial conditions :

$$x(0) = [0 \ 0]^T$$
$$\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$
$$P(0) = 1 I$$

Input signal :

$$r = 3 + 5 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$$

Matching parameters:

$$\theta^* = [2 \ 0.5 \ -0.75 \ -2]$$

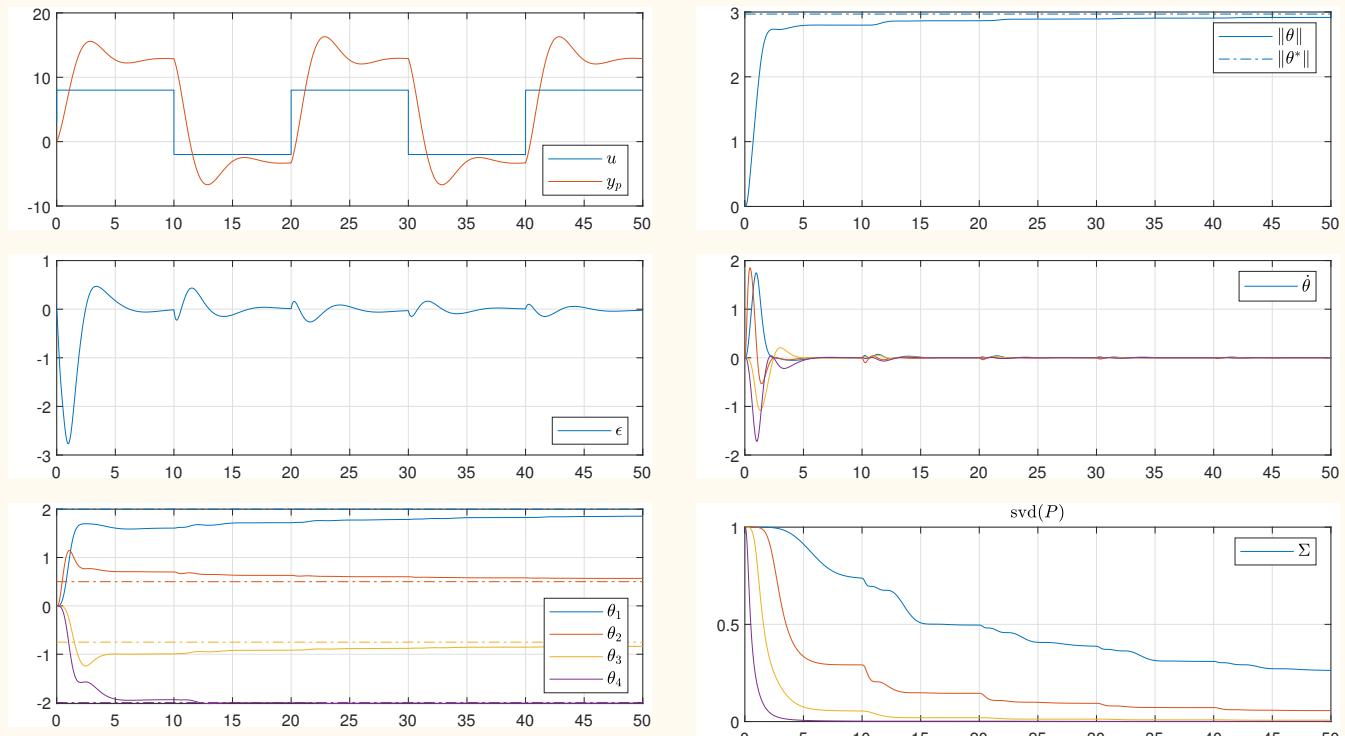


Figura 43: Normalized Least-squares. Plant-24.

Simulation 6 Effect of large gains.

Algorithm : Normalized Least-squares

Parameters : $P(s) = \frac{0.5s + 2}{s^2 + s + 1.25} = \frac{0.5s + 2}{(s + 0.5 + i)(s + 0.5 - i)}$

$$\Lambda(s) = s^2 + 3s + 2$$
$$\kappa = 0$$

Initial conditions : $x(0) = [0 \ 0]^T$

$$\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$
$$P(0) = 10 I$$

Input signal : $r = 3 + 5 \operatorname{sign}(\sin(0.1\pi t))$

Matching parameters: $\theta^* = [2 \ 0.5 \ -0.75 \ -2]$

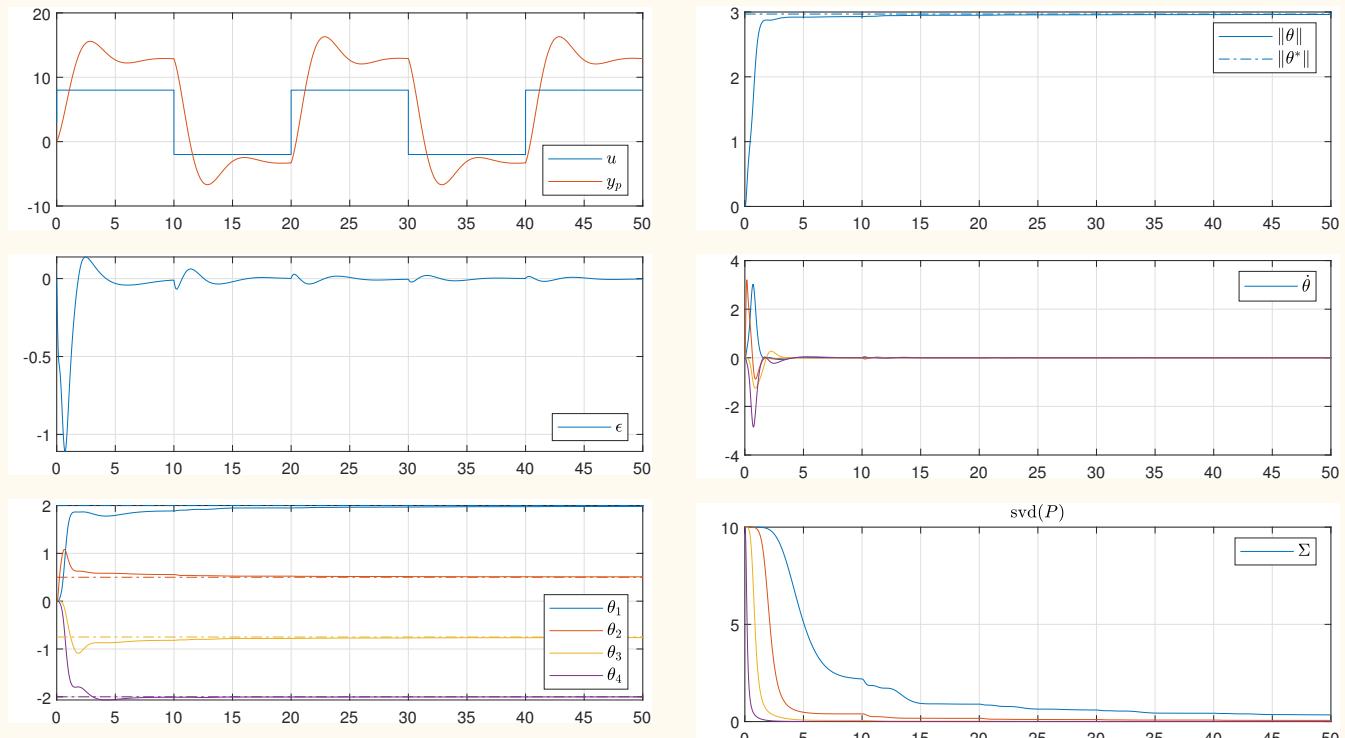


Figura 44: Normalized Least-squares. Plant-24.

3.4.2 PROBLEMAS & EXERCÍCIOS

(1) Mostre que a equação (??),

$$\theta(t) = P \left(P_0^{-1} \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{y\phi}{m^2} d\tau \right) ,$$

satisfaz a equação diferencial (2),

$$\dot{\theta} = -\frac{P\phi\epsilon}{m^2}, \quad \theta(t_0) = \theta_0 .$$

Solução:

3.5 PARAMETER CONVERGENCE

Ref.: [Tao:2003], (pag. 108)

(...)

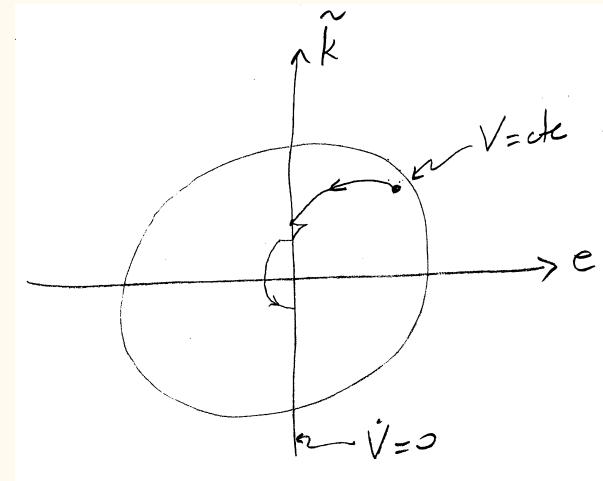


Figura 45: Interpretation: Condition for parameter convergence.

3.5.1 IMPROVING CONVERGENCE

Ref.: Adaptive observers with exponential rate of convergence,
G. Kreisselmeier, 1977.

Idea: Use filters to generate multiple parameterizations.

Consider a 1st order plant with 2 unknown parameters

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0}{s + a_0}$$

and 2nd order filters

$$\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0}$$

Filters implementation:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = A\omega_1 + bu \\ \dot{\omega}_2 = A\omega_2 + by \end{cases}$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Filters variables:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} u_f \\ \dot{u}_f \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} y_f \\ \dot{y}_f \end{bmatrix}$$

We can write 2 parameterizations

Parameterization 1 : $\underbrace{\dot{y}_f}_{Y_1} = b_0 u_f - a_0 y_f = [b_0 \ a_0] \underbrace{\begin{bmatrix} u_f \\ -y_f \end{bmatrix}}_{\phi_1}$

Regressor 1 : $\phi_1 = [u_f \ -y_f]^T$

Parameters : $\theta^* = [b_0 \ a_0]^T$

Parameterization 2 : $\underbrace{\ddot{y}_f}_{Y_2} = b_0 \dot{u}_f - a_0 \dot{y}_f = [b_0 \ a_0] \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_f \\ -\dot{y}_f \end{bmatrix}}_{\phi_1}$

Regressor 2 : $\phi_2 = [\dot{u}_f \ -\dot{y}_f]^T$

Parameters : $\theta^* = [b_0 \ a_0]^T$

★ Notice that the parameters are the same!

Estimates.....: $\hat{Y}_1 = \theta^T \phi_1$

$$\hat{Y}_2 = \theta^T \phi_2$$

Erros.....: $\epsilon_1 = \hat{Y}_1 - Y_1 = \tilde{\theta}^T \phi_1$

$$\epsilon_2 = \hat{Y}_2 - Y_2 = \tilde{\theta}^T \phi_2$$

Normalization.....: $m_1^2 = 1 + \kappa_1 \phi_1^T \phi_1$

$$m_2^2 = 1 + \kappa_2 \phi_2^T \phi_2$$

Gradient update law.:
$$\dot{\theta} = -\gamma_1 \frac{\phi_1 \epsilon_1}{m_1^2} - \gamma_2 \frac{\phi_2 \epsilon_2}{m_2^2}$$

Using the Lyapunov function

$$2V(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$$

we get

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\theta}) &= \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\ &= \tilde{\theta}^T \left(-\gamma_1 \frac{\phi_1 \epsilon_1}{m_1^2} - \gamma_2 \frac{\phi_2 \epsilon_2}{m_2^2} \right) \\ &= -\tilde{\theta}^T \underbrace{\left(\gamma_1 \frac{\phi_1 \phi_1^T}{m_1^2} + \gamma_2 \frac{\phi_2 \phi_2^T}{m_2^2} \right)}_{A(t)} \tilde{\theta} \quad \leq 0\end{aligned}$$

★ Note that now $\text{rank}(A) \leq 2$!

3.5.2 SIMULATIONS

Case 1 First order plant, 2 unknown parameters.

Plant : $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0}{s + a_0}$

Filter : $\frac{k}{\Lambda(s)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$

Summary of the equations

Plant : $\dot{y} = -a_0 y + b_0 u$

Filter : $\frac{k}{\Lambda(s)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$

Parameterization 1 : $\underbrace{\dot{y}_f}_{Y_1} = b_0 u_f - a_0 y_f = [b_0 \ a_0] \underbrace{\begin{bmatrix} u_f \\ -y_f \end{bmatrix}}_{\phi_1}$

Regressor 1 : $\phi_1 = [u_f \ -y_f]^T$

Parameterization 2 : $\underbrace{\ddot{y}_f}_{Y_2} = b_0 \dot{u}_f - a_0 \dot{y}_f = [b_0 \ a_0] \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_f \\ -\dot{y}_f \end{bmatrix}}_{\phi_1}$

Regressor 2 : $\phi_2 = [\dot{u}_f \ -\dot{y}_f]^T$

Estimates: $\hat{Y}_i = \theta^T \phi_i$

Errors: $\epsilon_i = \hat{Y}_i - Y_i$

Normalization: $m_i^2 = 1 + \kappa_i \phi_i^T \phi_i$

Update law:

$$\dot{\theta} = -\gamma_1 \frac{\phi_1 \epsilon_1}{m_1^2} - \gamma_2 \frac{\phi_2 \epsilon_2}{m_2^2}$$

Simulation 1 Zero initial conditions.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_0 = 3.3$ $b_0 = 5$
 $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = -2$
 $\gamma_1 = 20$ $\gamma_2 = 20$
 $\kappa_1 = 0$ $\kappa_2 = 0$

Initial conditions : $y(0) = 0$
 $\theta_i(0) = 0$

Input signal : $r = 1.5 + 1 \operatorname{sign}(\sin(0.2\pi t))$

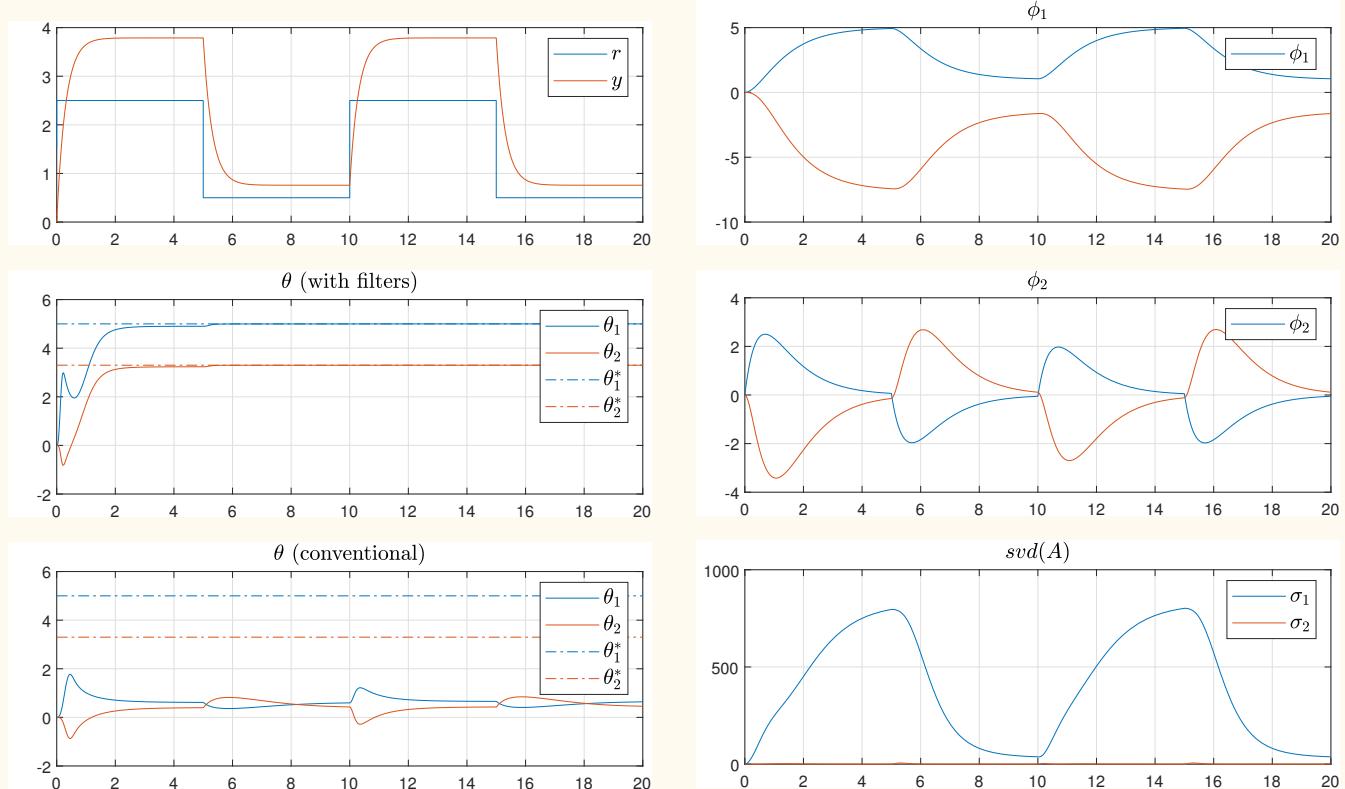


Figura 46: Normalized Gradient with filters. Plant-12.

Simulation 2 Zero initial conditions. New filter.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_0 = 3.3$ $b_0 = 5$

$$\lambda_1 = -1 - i \quad \lambda_2 = -1 + i$$

$$\gamma_1 = 20 I \quad \gamma_2 = 20$$

$$\kappa_1 = 0 \quad \kappa_2 = 0$$

Initial conditions : $y(0) = 0$

$$\theta_i(0) = 0$$

Input signal : $r = 1.5 + 1 \operatorname{sign}(\sin(0.2\pi t))$

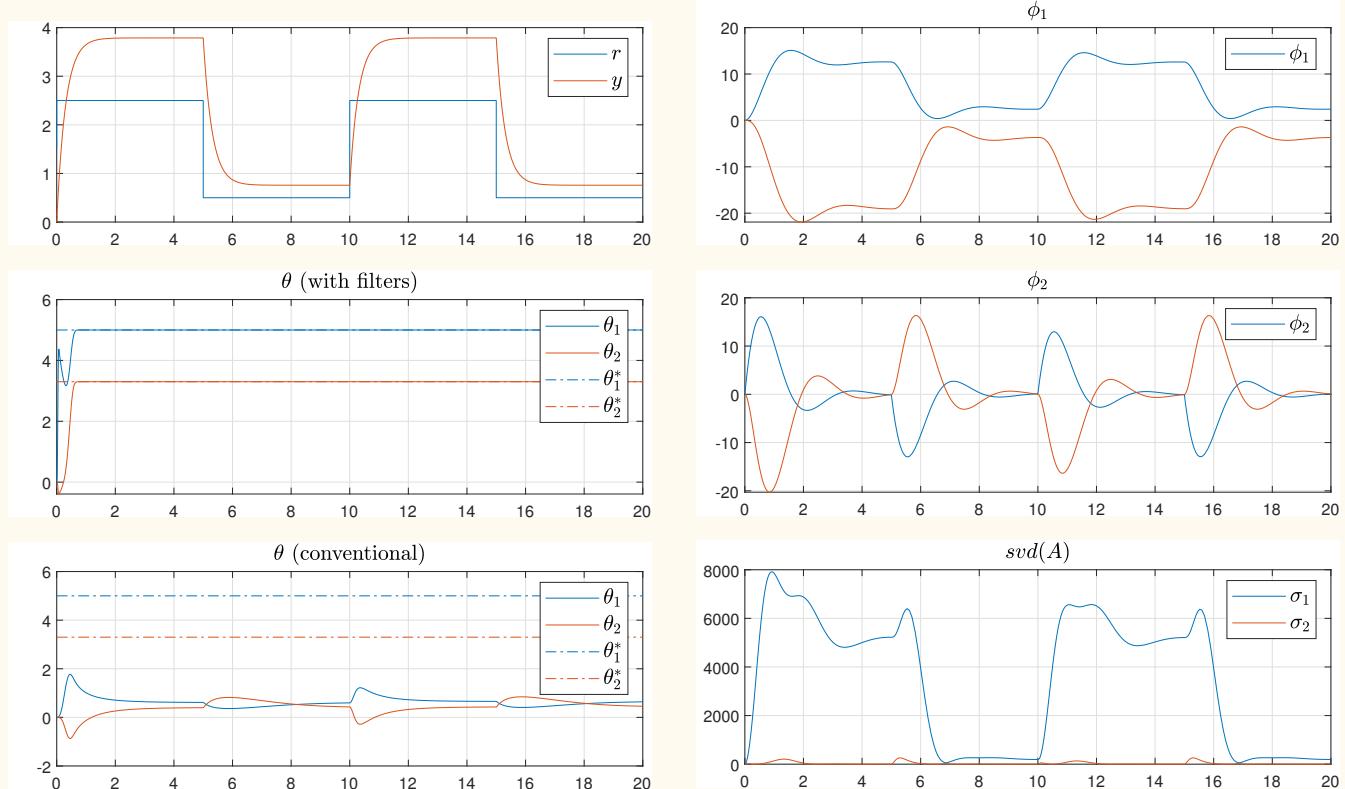


Figura 47: Normalized Gradient with filters. Plant-12.

Simulation 3 Zero initial conditions. New reference.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $a_0 = 3.3$ $b_0 = 5$
 $\lambda_1 = -1 - i$ $\lambda_2 = -1 + i$
 $\gamma_1 = 20$ $\gamma_2 = 20$
 $\kappa_1 = 0$ $\kappa_2 = 0$

Initial conditions : $y(0) = 0$
 $\theta_i(0) = 0$

Input signal : $r = 1 + 2 \operatorname{sign}(\sin(0.2\pi t))$

★ Better convergence of the conventional algorithm! Why?

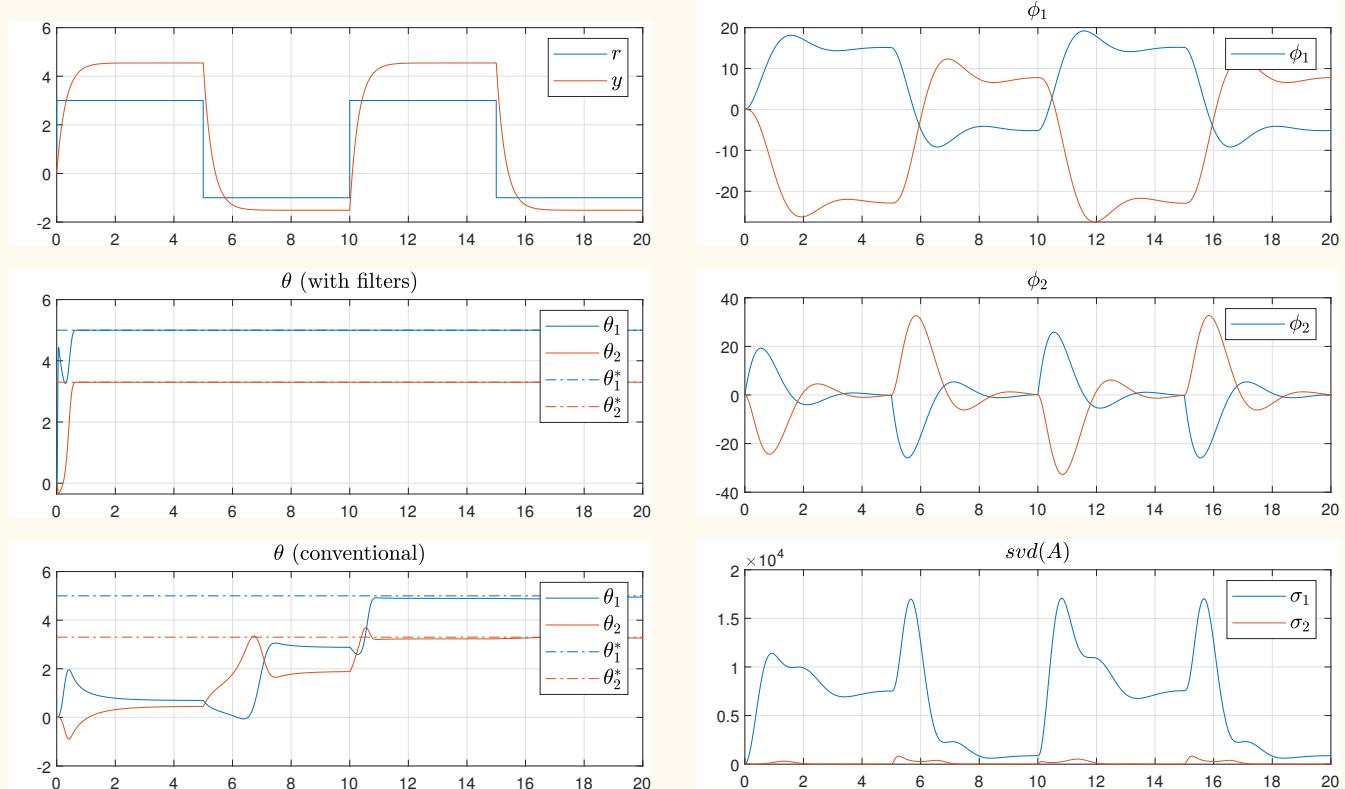


Figura 48: Normalized Gradient with filters. Plant-12.

Case 2 2nd order plant, 4 unknown parameters.

Plant : $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_p(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$

Filter : $\frac{k}{\Lambda(s)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4)(s - \lambda_5)}$

Summary of the equations

Regressor 1 : $\phi_1 = [u_f \quad \dot{u}_f \quad -y_f \quad -\dot{y}_f]^T$

Regressor 2 : $\phi_2 = [\dot{u}_f \quad \ddot{u}_f \quad -\dot{y}_f \quad -\ddot{y}_f]^T$

Regressor 3 : $\phi_3 = [\ddot{u}_f \quad u_f^{(3)} \quad -\ddot{y}_f \quad -y_f^{(3)}]^T$

Regressor 4 : $\phi_4 = [u_f^{(3)} \quad u_f^{(4)} \quad -y_f^{(3)} \quad -y_f^{(4)}]^T$

Estimates : $\hat{Y}_i = \theta^T \phi_i$

Errors : $\epsilon_i = \hat{Y}_i - Y_i$

Normalization : $m_i^2 = 1 + \kappa_i \phi_i^T \phi_i$

Update law :

$$\dot{\theta} = - \sum_{i=1}^4 \gamma_i \frac{\phi_i \epsilon_i}{m_i^2}$$

Simulation 1 Zero initial conditions.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $p_1 = -1.3$ $p_2 = -2.1$ $z_1 = -4$ $k_p = 2$

$$\lambda = \{-0.5 + i, -0.5 - i, -1, -1 + 2i, -1 - 2i\}$$

$$\gamma_i = 100$$

$$\kappa_i = 0$$

Initial conditions : $y(0) = 0$

$$\theta_i(0) = 0$$

Input signal : $r = 1.5 + 1 \operatorname{sign}(\sin(0.2\pi t))$

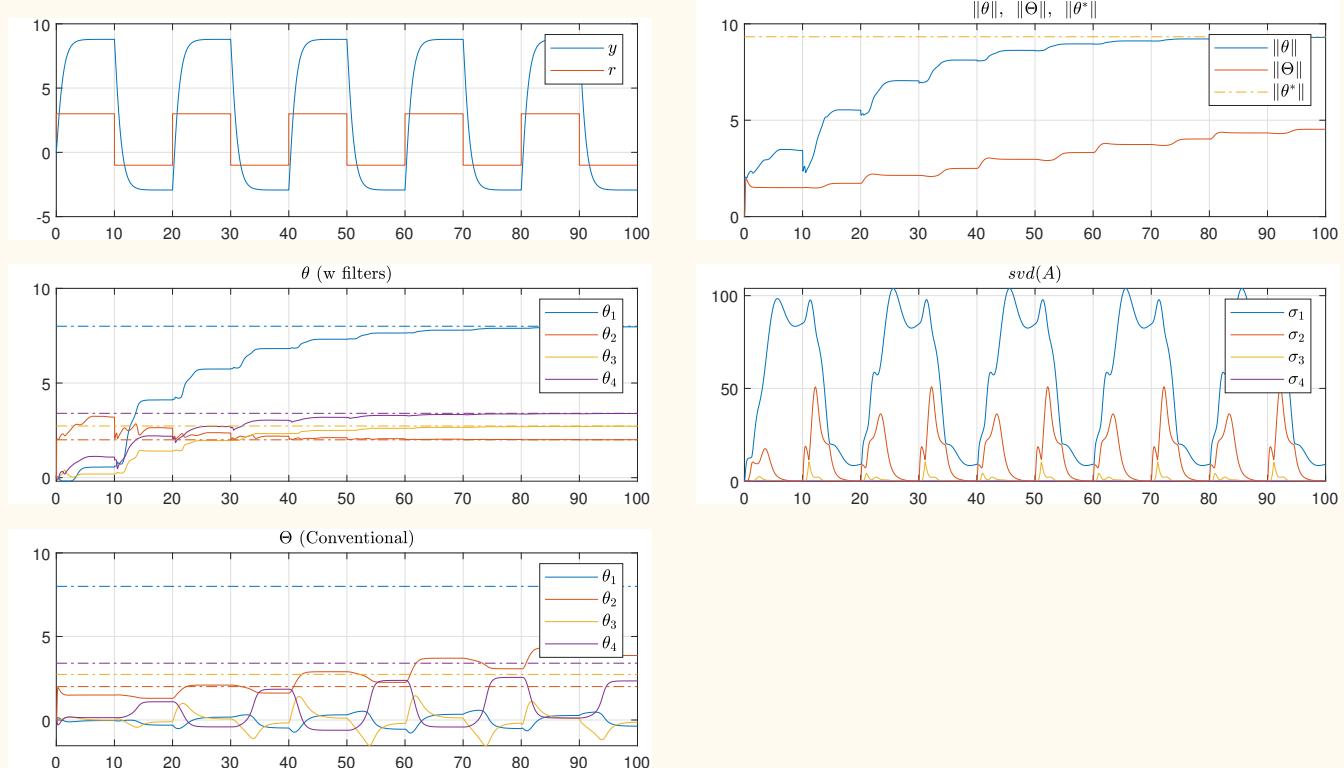


Figura 49: Normalized Gradient with filters. Plant-214.

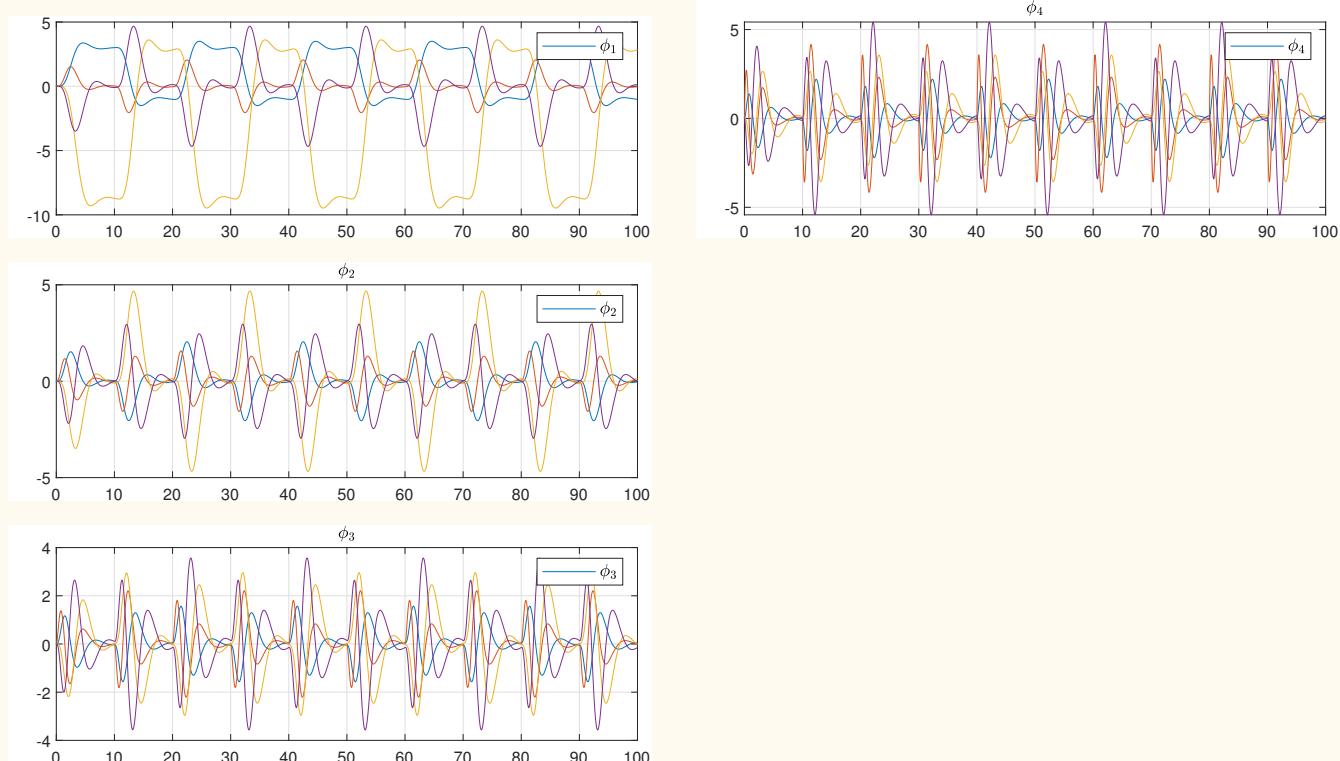


Figura 50: Normalized Gradient with filters. Plant-214.

Simulation 2 Zero initial conditions. New plant.

Algorithm : Normalized Gradient

Parameters : $p_1 = -3$ $p_2 = -5$ $z_1 = -4$ $k_p = -5$
 $\lambda = \{-0.5 + i, -0.5 - i, -1, -1 + 2i, -1 - 2i\}$
 $\gamma_i = 1e5$
 $\kappa_i = 0$

Initial conditions : $y(0) = 0$
 $\theta_i(0) = 0$

Input signal : $r = 1.5 + 1 \operatorname{sign}(\sin(0.2\pi t))$

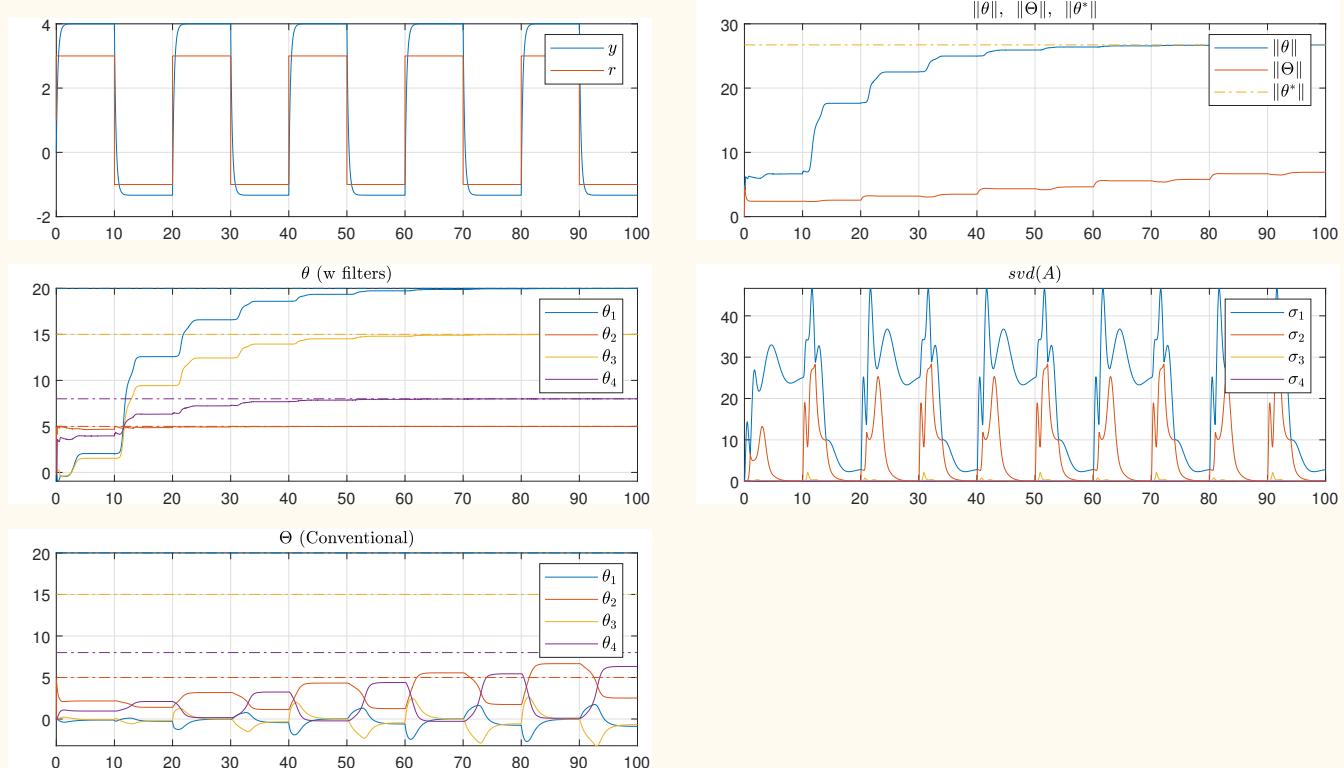


Figura 51: Normalized Gradient with filters. Plant-214.

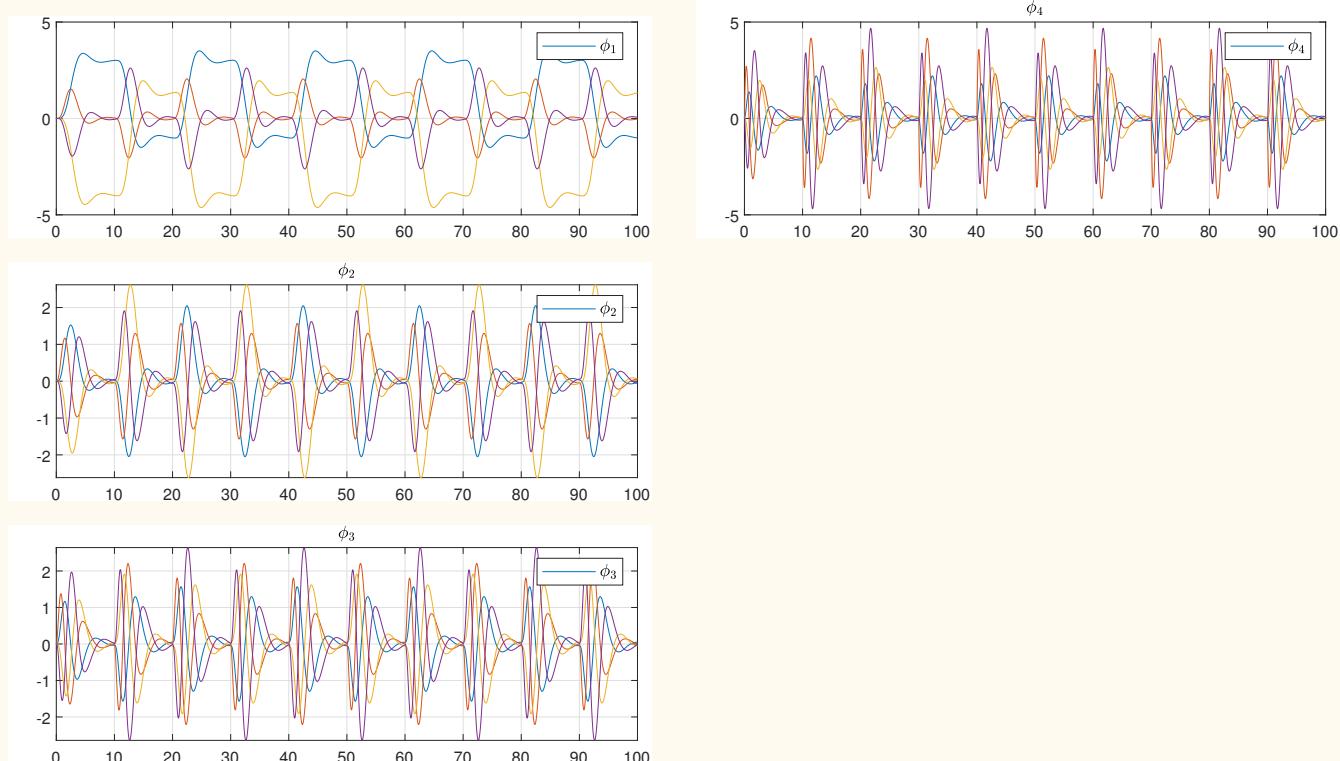


Figura 52: Normalized Gradient with filters. Plant-214.

3.6 ADAPTAÇÃO ROBUSTA

Ref.: [Tao:2003], (pag. 128)

Problema: Incerteza na planta.

- ★ Muitas modificações foram propostas para garantir as propriedades dos algoritmos.

Planta com incerteza :

$$y = \theta^{*T} \phi - \delta(t)$$

Hipótese :

$$|\delta(t)| \leq \delta_1(t) \|\phi(t)\| + \delta_2(t)$$

Lei de adaptação do gradiente modificada:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2} + f(t)$$

Normalização :

$$m^2 = 1 + \kappa \phi^T \phi$$

★ $f(t)$ = modificação.

3.6.1 MODIFICAÇÃO ZONA-MORTA

Algoritmo :

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2} + f(t)$$

$$f(t) = \Gamma \frac{\phi f_0(\epsilon)}{m^2}$$

$$f_0(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon & \text{se } \frac{|\epsilon|}{m} < d_1 + \frac{d_2}{m} \\ 0 & \text{se } \frac{|\epsilon|}{m} \geq d_1 + \frac{d_2}{m} \end{cases}$$

3.6.2 MODIFICAÇÃO σ

Algoritmo :

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2} + f(t)$$

$$f(t) = -\sigma \Gamma \theta$$

3.6.3 MODIFICAÇÃO σ COM SWITCHING

Algoritmo :

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2} + f(t)$$

$$f(t) = -\sigma(t)\Gamma\theta$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \\ \sigma_0 \left(\frac{\|\theta\|}{M_\theta} - 1 \right) & \text{se } M_\theta \leq \|\theta\| < 2M_\theta \\ \sigma_0 & \text{se } \|\theta\| \geq 2M_\theta \end{cases}$$

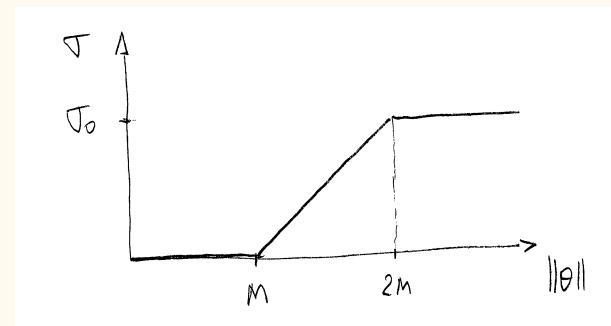


Figura 53: σ function.

3.6.4 PROJEÇÃO

Algoritmo :

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2} + f(t)$$

$$f(t) = -\sigma(t)\theta$$

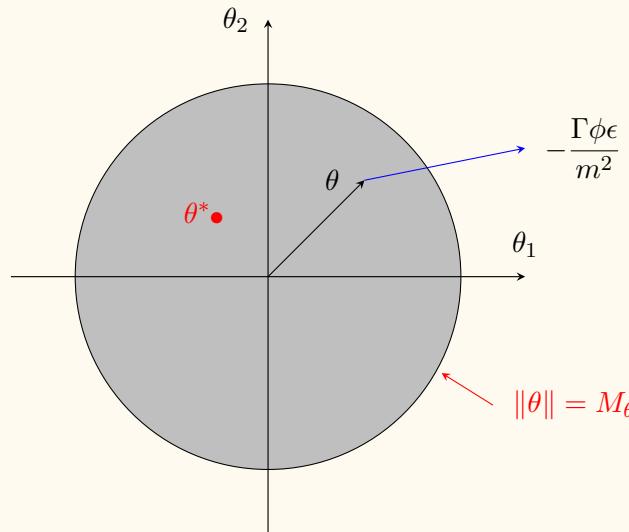
$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \quad \text{ou} \quad \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ \sigma_{eq} & \text{se } \|\theta\| \geq M_\theta \quad \text{e} \quad \sigma_{eq} \geq \sigma_0 \end{cases}$$

$$\sigma_{eq} = -\frac{\theta^T \Gamma \phi \epsilon}{\|\theta\|^2 m^2}$$

Interpretação

No caso em que $\sigma_0 = 0$, se $\|\theta\| < M_\theta$, então

$$f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi \epsilon}{m^2}$$



Se $\|\theta\| = M_\theta$,

$$f(t) = -\sigma\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\phi\epsilon}{m^2} - \sigma\theta}$$

Podemos determinar o valor de σ para que $\dot{\theta}$ seja perpendicular ao vetor θ ,

$$\theta^T \perp \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta^T \dot{\theta} = 0$$

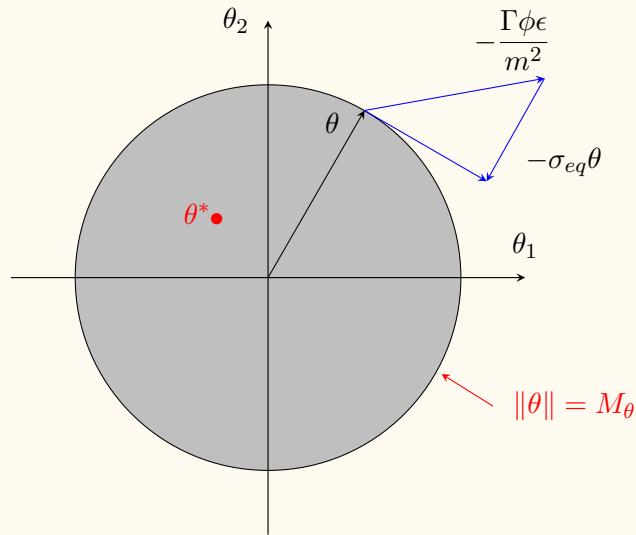
Portanto,

$$\theta^T \dot{\theta} = -\theta^T \Gamma \frac{\phi\epsilon}{m^2} - \sigma \theta^T \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{\theta^T \Gamma \phi\epsilon}{\|\theta\|^2 m^2}$$

Por conveniência, vamos chamar este valor particular de σ_{eq} ,

$$\boxed{\sigma_{eq} = -\frac{\theta^T \Gamma \phi\epsilon}{\|\theta\|^2 m^2}}$$

A figura abaixo mostra a interpretação geométrica dessa expressão.



Note que os vetores θ e $\sigma_{eq}\theta$ são colineares.

Portanto,

$$\sigma_{eq} > 0 \Rightarrow -\Gamma \frac{\phi\epsilon}{m^2} \text{ aponta para fora da bola.}$$

$$\sigma_{eq} < 0 \Rightarrow -\Gamma \frac{\phi\epsilon}{m^2} \text{ aponta para dentro da bola.}$$



4 MRAC

Contents

4.1	Solução do controle 2DOF	298
4.1.1	Examples	311
4.1.2	<i>Matching equation</i>	334
4.2	Caso $n^* = 1$	339
4.2.1	Error equation	344
4.2.2	Meyer–Kalman–Yakubovich Lemma	351
4.2.3	Lyapunov design	354
4.2.4	Auxiliary error	358
4.2.5	Lyapunov design with e_a	360
4.2.6	Simulações	364
4.3	Caso $n^* = 2$	392
4.3.1	Lyapunov design	397
4.3.2	Simulações	404
4.4	Caso geral $n^* > 1$	420
4.4.1	Método por Lyapunov ($n^* > 1$)	421
4.4.2	Reduced order filters	433

4.4.3	Simulações	438
4.4.4	Método do Gradiente ($n^* > 1$)	448
4.4.5	Simulações	458

4.1 SOLUÇÃO DO CONTROLE 2DOF

★ Revisão...

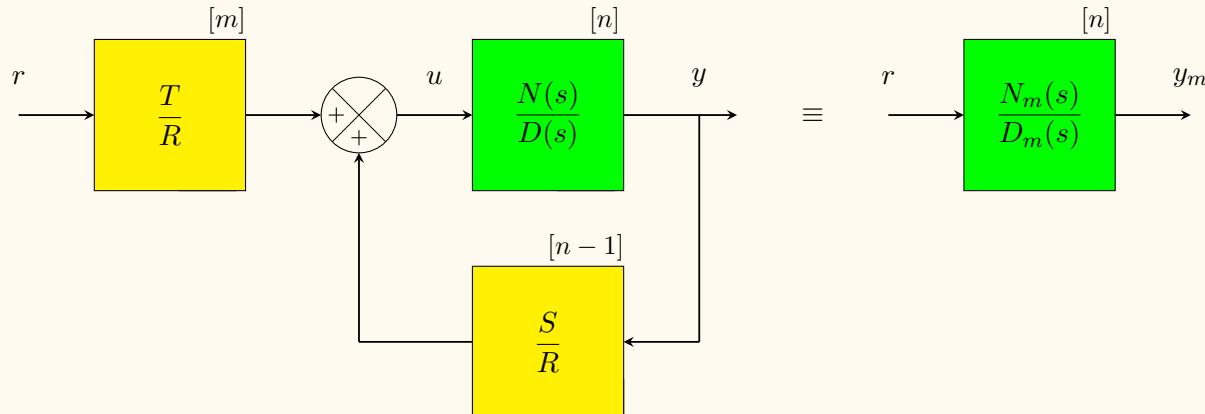


Figura 54: Estrutura do controlador 2DOF.

Lei de controle linear:

$$Ru = Tr + Sy$$

$$\Rightarrow u = \frac{T}{R}r + \frac{S}{R}y$$

$$\text{Feedforward (para o caso } n^* = 1\text{):} \quad \frac{T}{R} = \frac{N_m}{N} \quad \Rightarrow \quad R = N$$

Problema: Como implementar?

- ★ $N(s)$ é desconhecido e será identificado.
- ★ $N(s)$ não pode aparecer no denominador!

Solução: Utilizar estrutura com filtros (semelhante ao caso do identificador).

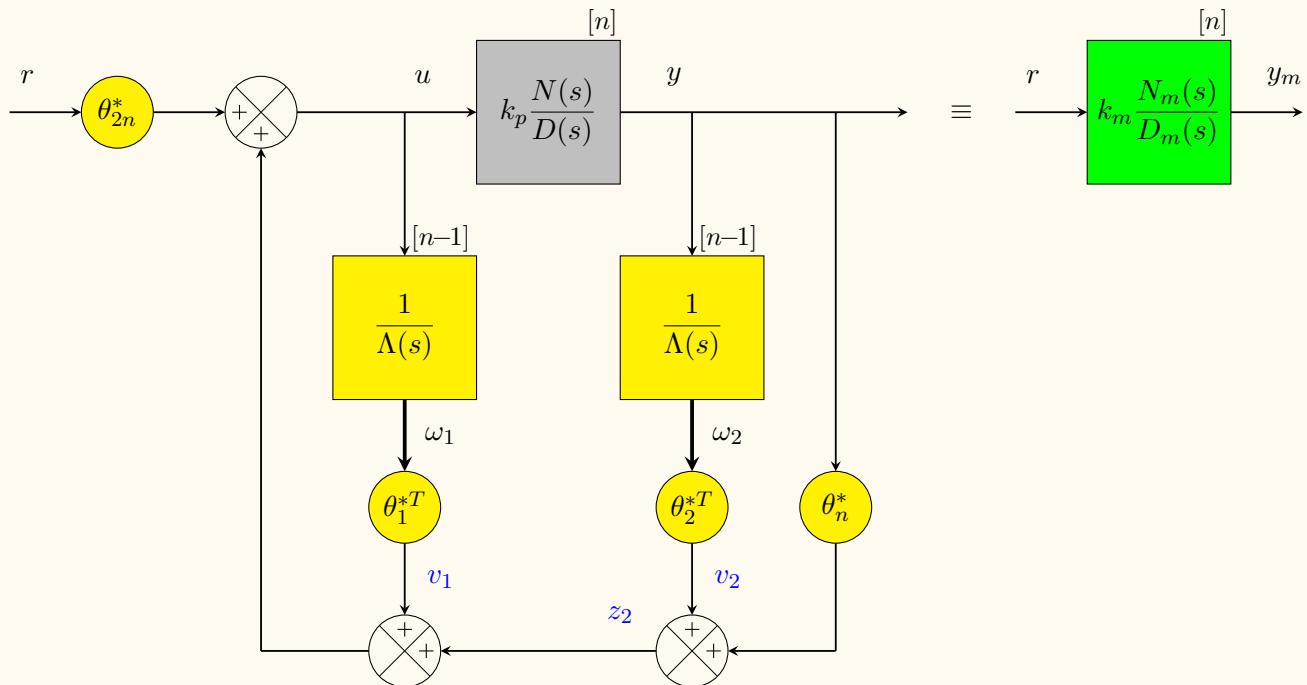


Figura 55: Estrutura do MRAC.

Podemos verificar que esta estrutura é equivalente à 2DOF.

Filtro 1:
$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = A_f \omega_1 + b_f u \\ v_1 = \theta_1^{*T} \omega_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{| \quad v_1 = \frac{F}{\Lambda} u}$$

- $\boxed{| \quad \text{grau}(F) = n - 2}$

★ Note que não há ramo direto no filtro de u (geraria um loop algébrico).

Filtro 2:
$$\begin{cases} \dot{\omega}_2 = A_f \omega_2 + b_f y \\ z_2 = \theta_2^{*T} \omega_2 + \theta_n^* y \end{cases} \Rightarrow \boxed{| \quad z_2 = \frac{G}{\Lambda} y}$$

- $\boxed{| \quad \text{grau}(G) = n - 1}$

★ Note que há um ramo direto.

Lei de controle:

$$u = \theta^{*T} \omega$$

Parâmetros:

$$\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \quad \theta_n^* \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_{2n}] \quad \theta^* \in \mathbb{R}^{2n}$$

Regressor:

$$\omega^T = [\omega_1^T \quad y \quad \omega_2^T \quad r] \quad \omega \in \mathbb{R}^{2n}$$

★ A ordem é arbitrária!

Podemos simplificar o diagrama de blocos.

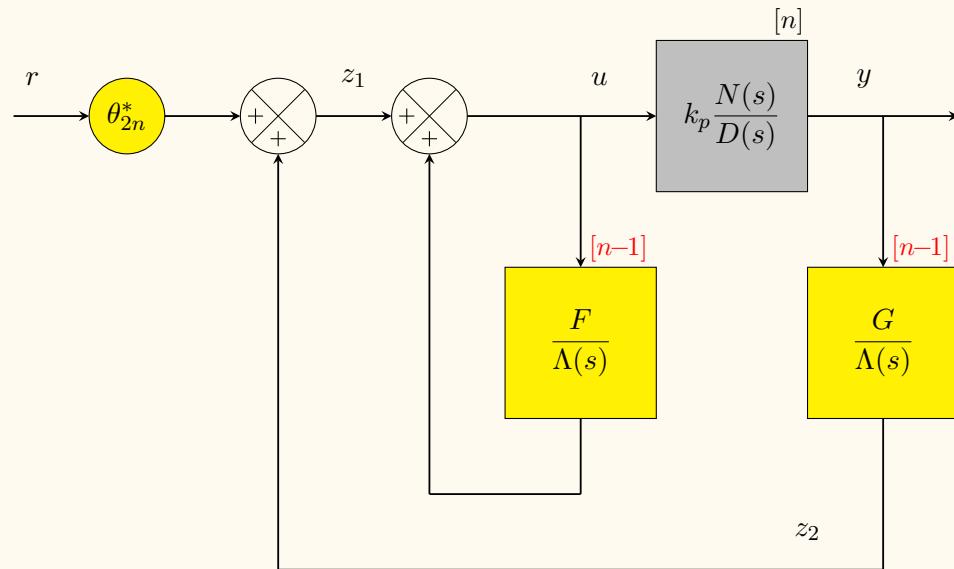


Figura 56: Estrutura do MRAC.

Note que: $u = z_1 + \frac{F}{\Lambda} u \Rightarrow (\Lambda - F)u = \Lambda z_1$

Portanto,

$$u = \frac{\Lambda}{\Lambda - F} z_1$$

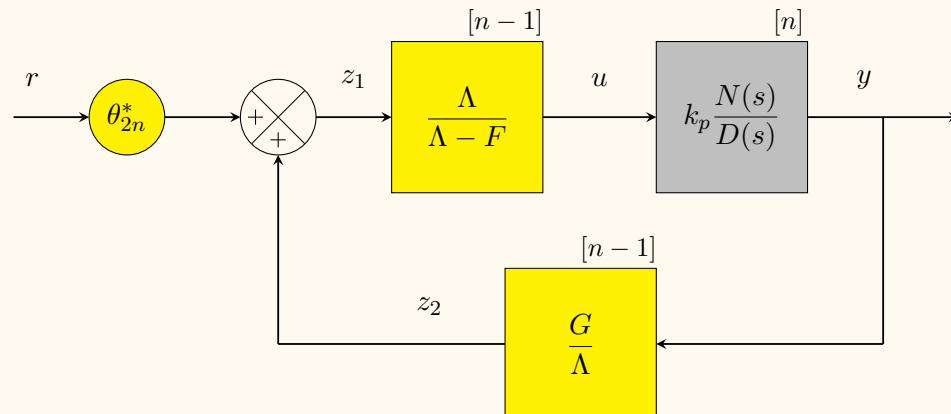


Figura 57: Estrutura do MRAC.

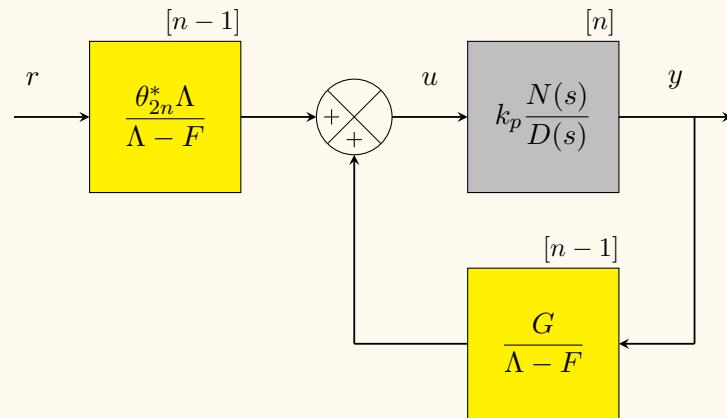


Figura 58: Estrutura do MRAC.

Malha fechada:

$$y = k_p \frac{N}{D} \left(\frac{\theta_{2n}^* \Lambda}{\Lambda - F} r + \frac{G}{\Lambda - F} y \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(\Lambda - F) y = \theta_{2n}^* k_p \Lambda N r + k_p N G y \Rightarrow$$

$$y = \frac{\theta_{2n}^* k_p \Lambda N}{(\Lambda - F)D - k_p N G} r$$

Matching antes dos cancelamentos:

$$\boxed{\frac{\theta_{2n}^* k_p \Lambda N}{(\Lambda - F)D - k_p NG} = \frac{k_m N_m \textcolor{blue}{NA}_0}{D_m \textcolor{blue}{NA}_0}}$$

- ★ A_0 : **polinômio do observador**.
- ★ Cancelamentos necessários: $\textcolor{blue}{N}$ e $\textcolor{blue}{A}_0$.

Condições necessárias para a solução:

- $\boxed{\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}} \Rightarrow \theta_{2n}^* k_p = k_m$
- $\boxed{\Lambda = N_m A_0}$ (Para o *matching* do numerador.)
- $\boxed{\begin{cases} \text{grau}(\Lambda) = n - 1 \\ \text{grau}(N_m) = m \end{cases} \Rightarrow \text{grau}(A_0) = n - m - 1 = n^* - 1}$

Para o cancelamento de N é necessário que

- $(\Lambda - F) = NH$ (N deve ser fator de $\Lambda - F$)

- $\begin{cases} \text{grau}(\Lambda) = n - 1 \\ \text{grau}(F) = n - 2 \\ \text{grau}(N) = m \end{cases} \Rightarrow \text{grau}(H) = n - m - 1 = n^* - 1$

Hipótese: $P(s)$ é controlável e observável.

★ $N(s)$ e $D(s)$ são primos!

Após o cancelamento de N , tem-se a equação

$$| HD - k_p G = D_m A_0 | \quad (\text{Equação Diophantina.})$$

- grau(HD) = grau(H) + grau(D) = $(n - m - 1) + n = 2n - m - 1$
 - grau(G) = $n - 1$
 - grau($D_m A_0$) = grau(D_m) + grau(A_0) = $n + (n - m - 1) = 2n - m - 1$
- ★ $H(s)$ é **mônico**.

Hipótese: Grau relativo de $P(s)$ = Grau relativo de $M(s)$.

- $\boxed{\text{grau}(D) - \text{grau}(N) = \text{grau}(D_m) - \text{grau}(N_m) = n^*}$

★ O grau relativo é invariante.

Resumo do algoritmo

(1) Determinar $\text{grau}(A_0)$ e $\text{grau}(G)$.

(2) Achar a solução $H(s)$ e $G(s)$ da equação *Diophantina*

$$H(s)D(s) - k_p G(s) = D_m(s)A_0(s)$$

(3) Obter θ_2^* e θ_n^* a partir de $G(s)$.

(4) Calcular $F(s)$ usando a relação

$$F = \Lambda(s) - N(s)H(s)$$

(5) Obter θ_1^* a partir de $F(s)$.

$$(6) \theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}.$$

4.1.1 EXAMPLES

Example 9

Classificação do sistema: $n = 2$ (ordem)
 $n^* = 1$ (grau relativo)
 $n_p = 4$ (# de parâmetros)

Planta.....: $y = \frac{k_p(s + b)}{s^2 + a_1s + a_0}u$

Modelo.....: $y_m = \frac{k_m(s + b_m)}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}}r$

- grau(A_0) = $n^* - 1 = 0 \Rightarrow A_0(s) = 1$

- $\Lambda(s) = N_m(s)A_0(s) \Rightarrow \Lambda(s) = s + b_m$

- grau(H) = $n^* - 1 = 0 \Rightarrow H(s) = 1$

- grau(G) = $n - 1 = 1 \Rightarrow G(s) = g_1s + g_0$

- Equação *Diophantina*: $HD - k_pG = D_mA_0$

$$(1) (s^2 + a_1s + a_0) - k_p(g_1s + g_0) = (s^2 + a_{1m}s + a_{0m})(1)$$

$$s^2 + \underbrace{(a_1 - k_p g_1)}_{a_{1m}} s + \underbrace{(a_0 - k_p g_0)}_{a_{0m}} = s^2 + a_{1m}s + a_{0m}$$

- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -k_p & 0 \\ a_0 & 0 & -k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{0m} \end{bmatrix}$$

- Solução da equação *Diophantina*:

$$\begin{cases} a_1 - k_p g_1 = a_{1m} \\ a_0 - k_p g_0 = a_{0m} \end{cases} \Rightarrow \boxed{| \quad g_1 = \frac{a_1 - a_{1m}}{k_p}} \quad \boxed{| \quad g_0 = \frac{a_0 - a_{0m}}{k_p}}$$

- $\frac{G}{\Lambda} = \frac{\theta_2^*}{(s + b_m)} + \theta_n^* = \frac{\theta_2^* + \theta_n^*(s + b_m)}{s + b_m} \Rightarrow G = \underbrace{\theta_n^*}_{g_1} s + \underbrace{(\theta_2^* + \theta_n^* b_m)}_{g_0}$

- $\theta_n^* = g_1 \Rightarrow \boxed{| \quad \theta_n^* = \frac{a_1 - a_{1m}}{k_p}}$

- $g_0 = \theta_2^* + \theta_n^* b_m \Rightarrow \boxed{| \quad \theta_2^* = \frac{(a_0 - a_{0m}) - b_m(a_1 - a_{1m})}{k_p}}$

- $\text{grau}(F) = n - 2 = 0$

- $F = \Lambda - NH \Rightarrow F(s) = (s + b_m) - (s + b) \Rightarrow F(s) = b_m - b$

- $\theta_1^* = b_m - b$

- $\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}$



Example 10

Classificação do sistema: $n = 2$ (ordem)
 $n^* = 2$ (grau relativo)
 $n_p = 4$ (# de parâmetros)

Planta.....: $y = \frac{k_p}{s^2 + a_1 s + a_0} u$

Modelo.....: $y_m = \frac{k_m}{s^2 + a_{1m} s + a_{0m}} r$

- grau(A_0) = $n^* - 1 = 1 \Rightarrow A_0(s) = s + \lambda_0$

★ grau(Λ) = $n - 1 = 1$

- $\Lambda = N_m A_0 \Rightarrow \Lambda(s) = (s + \lambda_0)$

- grau(H) = $n^* - 1 = 1 \Rightarrow H(s) = s + h_0$

- grau(G) = $n - 1 = 1 \Rightarrow G(s) = g_1 s + g_0$

- Equação Diophantina:

$$HD - k_p G = D_m A_0$$

$$(s + h_0)(s^2 + a_1 s + a_0) - k_p(g_1 s + g_0) = (s^2 + a_{1m} s + a_{0m})(s + \lambda_0)$$

$$s^3 + (a_1 + h_0)s^2 + (a_0 + h_0 a_1 - k_p g_1)s + (h_0 a_0 - k_p g_0) = s^3 + (\lambda_0 + a_{1m})s^2 + (a_{1m}\lambda_0 + a_{0m})s + a_{0m}\lambda_0$$

- Sistema de equações lineares (3 equações & 3 incógnitas):

$$\begin{cases} a_1 + \textcolor{blue}{h}_0 = \lambda_0 + a_{1m} \\ a_0 + \textcolor{blue}{h}_0 a_1 - k_p \textcolor{blue}{g}_1 = a_{1m} \lambda_0 + a_{0m} \\ \textcolor{blue}{h}_0 a_0 - k_p \textcolor{blue}{g}_0 = a_{0m} \lambda_0 \end{cases}$$

A equação *Diophantina* pode ser escrita na forma:

$$(s + h_0)D - k_p G = D_m A_0 \quad \Rightarrow \quad h_0 D - k_p G = -sD + D_m A_0$$

Resultado:

$$h_0 s^2 + (h_0 a_1 - k_p g_1) s + (h_0 a_0 - k_p g_0) = (\lambda_0 + a_{1m} - a_1) s^2 + (a_{1m} \lambda_0 + a_{0m} - a_0) s + a_{0m} \lambda_0$$

★ Note que o termo s^3 é cancelado.

- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & -k_p & 0 \\ a_0 & 0 & -k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 + a_{1m} - a_1 \\ a_{1m} \lambda_0 + a_{0m} - a_0 \\ a_{0m} \lambda_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1m} & 1 & a_1 \\ a_{0m} & a_{1m} & a_0 \\ 0 & a_{0m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

★ Note que existe uma regra de formação.

- Solução da equação *Diophantina*:

$$\begin{cases} h_0 = \lambda_0 + a_{1m} - a_1 \\ g_1 = [a_0 + a_1 h_0 - a_{1m} \lambda_0 - a_{0m}] / k_p \\ g_0 = [a_0 h_0 - a_{0m} \lambda_0] / k_p \end{cases}$$

ou melhor,

$$\begin{cases} h_0 = \lambda_0 - (a_1 - a_{1m}) \\ g_1 = [(a_0 - a_{0m}) + (\lambda_0 - a_1)(a_1 - a_{1m})] / k_p \\ g_0 = [\lambda_0(a_0 - a_{0m}) - a_0(a_1 - a_{1m})] / k_p \end{cases}$$

$$\bullet \frac{G}{\Lambda} = \frac{\theta_2^*}{(s + \lambda_0)} + \theta_n^* = \frac{\theta_2^* + \theta_n^*(s + \lambda_0)}{s + \lambda_0} \Rightarrow G = \underbrace{\theta_n^*}_{g_1} s + \underbrace{(\theta_2^* + \theta_n^* \lambda_0)}_{g_0}$$

$$\bullet \theta_n^* = g_1 \Rightarrow \boxed{\theta_n^* = \frac{(a_0 - a_{0m}) + (\lambda_0 - a_1)(a_1 - a_{1m})}{k_p}}$$

$$\bullet g_0 = \theta_2^* + \theta_n^* \lambda_0 \Rightarrow \boxed{\theta_2^* = \frac{-(a_0 + \lambda_0(\lambda_0 - a_1))(a_1 - a_{1m})}{k_p}}$$

- $\text{grau}(F) = n - 2 = 0$

- $F = \Lambda - NH \Rightarrow F(s) = (s + \lambda_0) - (s + h_0) \Rightarrow F(s) = \lambda_0 - h_0$

- $\theta_1^* = \lambda_0 - h_0 \Rightarrow \theta_1^* = a_1 - a_{1m}$

- $\theta_{2n}^* = \frac{k_m}{k_p}$



Example 11

Classificação do sistema: $n = 3$ (ordem)
 $n^* = 2$ (grau relativo)
 $n_p = 5$ (# de parâmetros)

Planta.....: $y = \frac{k_p(s + b_0)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}u$

Modelo.....: $y_m = \frac{k_m}{s^2 + a_{1m}s + a_{0m}}r$

- grau(A_0) = $n^* - 1 = 1 \Rightarrow A_0(s) = s + \lambda_0$

- $\Lambda = N_m A_0 = s + \lambda_0 \Rightarrow \text{grau}(\Lambda) = 1 \quad (?)$

★ Porém, sabemos que $\text{grau}(\Lambda) = n - 1 = 2$

\Rightarrow Aumentar o modelo para: $M(s) = \frac{k_m(s + \lambda_1)}{(s^2 + a_{1m}s + a_{0m})(s + \lambda_1)}$ (!)

- $\Lambda = N_m A_0 \Rightarrow \Lambda(s) = (s + \lambda_0)(s + \lambda_1)$

- $\text{grau}(H) = n^* - 1 = 1 \Rightarrow H(s) = s + h_0$

- $\text{grau}(G) = n - 1 = 2 \Rightarrow G(s) = g_2 s^2 + g_1 s + g_0$

- Equação Diophantina:

$$HD - k_p G = D_m A_0$$

$$\begin{aligned}(s + h_0)(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) - k_p(g_2 s^2 + g_1 s + g_0) &= \\ &= (s^2 + a_{1m} s + a_{0m})(s + \lambda_1)(s + \lambda_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^4 + (h_0 + a_2)s^3 + (a_1 + h_0 a_2 - k_p g_2)s^2 + (a_0 + h_0 a_1 - k_p g_1)s + (h_0 a_0 - k_p g_0) &= \\ &= s^4 + (\lambda_0 + \lambda_1 + a_{1m})s^3 + (\lambda_0 \lambda_1 + a_{1m}(\lambda_0 + \lambda_1) + a_{0m})s^2 + \\ &\quad + (a_{1m}\lambda_0\lambda_1 + a_{0m}(\lambda_0 + \lambda_1))s + a_{0m}\lambda_0\lambda_1\end{aligned}$$

- Sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} h_0 + a_2 = \lambda_0 + \lambda_1 + a_{1m} \\ a_1 + h_0 a_2 - k_p g_2 = \lambda_0 \lambda_1 + a_{1m}(\lambda_0 + \lambda_1) + a_{0m} \\ a_0 + h_0 a_1 - k_p g_1 = a_{1m} \lambda_0 \lambda_1 + a_{0m}(\lambda_0 + \lambda_1) \\ h_0 a_0 - k_p g_0 = a_{0m} \lambda_0 \lambda_1 \end{cases}$$

A equação *Diophantina* pode ser escrita na forma:

$$(s + h_0)D - k_p G = D_m A_0 \quad \Rightarrow \quad h_0 D - k_p G = -s D + D_m A_0$$

★ Note que o termo s^4 é cancelado.

- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -k_p & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & -k_p & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & -k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ g_2 \\ g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 + \lambda_1 + a_{1m} - a_2 \\ \lambda_0\lambda_1 + a_{1m}(\lambda_0 + \lambda_1) + a_{0m} - a_1 \\ a_{1m}\lambda_0\lambda_1 + a_{0m}(\lambda_0 + \lambda_1) - a_0 \\ a_{0m}\lambda_0\lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1m} & 1 & 0 & a_2 \\ a_{0m} & a_{1m} & 1 & a_1 \\ 0 & a_{0m} & a_{1m} & a_0 \\ 0 & 0 & a_{0m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_0 + \lambda_1 \\ \lambda_0\lambda_1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

★ Note que existe uma regra de formação.

- Solução da equação *Diophantina*:

$$\begin{cases} h_0 = \lambda_0 + \lambda_1 + a_{1m} - a_2 \\ g_2 = [a_1 + a_2 h_0 - \lambda_0 \lambda_1 - a_{1m}(\lambda_0 + \lambda_1) - a_{0m}] / k_p \\ g_1 = [a_0 + a_1 h_0 - a_{1m} \lambda_0 \lambda_1 - a_{0m}(\lambda_0 + \lambda_1)] / k_p \\ g_0 = [a_0 h_0 - a_{0m} \lambda_0 \lambda_1] / k_p \end{cases}$$



Example 12

Classificação do sistema: $n = 4$ (ordem)
 $n^* = 1$ (grau relativo)
 $n_p = 8$ (# de parâmetros)

Plant : $y = \frac{k_p(s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0)}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} u$

Model : $y_m = \frac{k_m(s^3 + b_{2m}s^2 + b_{1m}s + b_{0m})}{s^4 + a_{3m}s^3 + a_{2m}s^2 + a_{1m}s + a_{0m}} r$

★ The model here is the *augmented model*.

Solution

$$\theta_1^* = \begin{bmatrix} b_{0m} - b_0 \\ b_{1m} - b_1 \\ b_{2m} - b_2 \end{bmatrix}, \quad \theta_2^* = \begin{bmatrix} (a_0 - a_{0m})/k_p - \theta_n^* b_{0m} \\ (a_1 - a_{1m})/k_p - \theta_n^* b_{1m} \\ (a_2 - a_{2m})/k_p - \theta_n^* b_{2m} \end{bmatrix},$$

$$\theta_n^* = (a_3 - a_{3m})/k_p, \quad \theta_{2n}^* = k_m/k_p.$$

★ Note that the **plant parameter** can be easily retrieved.

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0m} \\ b_{1m} \\ b_{2m} \end{bmatrix} - \theta_1^*, \quad k_p = k_m/\theta_{2n}^*,$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = k_p \theta_2^* + k_p \theta_n^* \begin{bmatrix} b_{0m} \\ b_{1m} \\ b_{2m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0m} \\ a_{1m} \\ a_{2m} \end{bmatrix}, \quad a_3 = k_p \theta_n^* + a_{3m}.$$

Matlab code for $n^* = 1$ and any n

Vector notation:

$$A_p = [a_{n-1} \ \dots \ a_2 \ \ a_1 \ \ a_0]$$

$$B_p = [b_{n-1} \ \dots \ b_2 \ \ b_1 \ \ b_0]$$

$$A_m = [a_{m_{n-1}} \ \dots \ a_{m_2} \ \ a_{m_1} \ \ a_{m_0}]$$

$$B_m = [b_{m_{n-1}} \ \dots \ b_{m_2} \ \ b_{m_1} \ \ b_{m_0}]$$

```
ks = kp/km;  
  
for i=1:n-1  
    k = n + 1 - i;  
    thetas(i) = Bm(k) - Bp(k);  
end  
  
thetas(n) = (Ap(1) - Am(1))/kp;  
  
for i=1:n-1  
    k = n + 1 - i;  
    thetas(n+i) = (Ap(k) - Am(k))/kp - thetas(n)*Bm(k);  
end  
  
thetas(2*n) = km/kp;  
  
thetas
```



Verificação usando Matlab

Example 13 4nd order plant.

Classificação do sistema: $n = 4$ (ordem)
 $n^* = 2$ (grau relativo)
 $n_p = 8$ (# de parâmetros)

Planta.....: $P(s) = \frac{0.3(s+2)^2}{s^4}$

Modelo.....: $M(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

Filtro.....: $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{(s+1)^3}$

Matching.....: $\theta^{*T} = [-19 -21 -6 -30 27 75 60 3]$
 $\|\theta^*\| = 119.37$

Script:

```
syms s
P = (1/3)*(s+2)^2/(s^4)
S = [1 ; s ; s^2]

theta1 = [-19 -21 -6]
thetan = -30
theta2 = [27 75 60]
theta2n = 3

%Filters
Lambda = (s+1)^3
F = (theta1*S)
G = (theta2*S) + thetan*Lambda

%Feedforward & feedback
Hfb = G/(Lambda - F)
Hff = theta2n*Lambda/(Lambda - F)

%Closed-loop transfer function
M = P*Hff/(1 - P*Hfb)

M = simplify(M)
pretty(M)
```

Result:

```
>> verification
```

```
M =
```

```
1/(s + 1)^2
```

$$\frac{1}{(s + 1)^2}$$



4.1.2 MATCHING EQUATION

Referência. [Tao:2003], (pag. 197)

A referência utiliza uma notação diferente:

$$\omega_1 = \frac{a(s)}{\Lambda} u$$

$$\omega_2 = \frac{a(s)}{\Lambda} y$$

$$a(s) = [1 \ s \ s^2 \ \dots \ s^{n-2}]$$

★ Note que com essa notação $F(s)$ e $G(s)$ são escritas como

$$F(s) = \frac{\theta_1^T a(s)}{\Lambda(s)} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{\theta_2^T a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_n$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u &= \theta_1^T \omega_1 + \theta_2^T \omega_2 + \theta_{20} y + \theta_3 r \\ &= \frac{\theta_1^T a}{\Lambda} u + \frac{\theta_2^T a}{\Lambda} y + \theta_{20} y + \theta_3 r \\ \Rightarrow (\Lambda - \theta_1^T a)u &= \theta_2^T a y + \Lambda \theta_{20} y + \Lambda \theta_3 r \end{aligned}$$

Da equação da planta, tem-se

$$\begin{aligned} Py &= k_p Z u \\ \Rightarrow (\Lambda - \theta_1^T a)Py &= k_p Z (\Lambda - \theta_1^T a)u \\ &= k_p Z (\theta_2^T a y + \Lambda \theta_{20} y + \Lambda \theta_3 r) \end{aligned}$$

Ou melhor,

$$[(\Lambda - \theta_1^T a)P - k_p Z(\theta_2^T a + \theta_{20}\Lambda)]y = k_p Z\Lambda\theta_3 r$$

$$\Lambda P y + [-\theta_1^T a P - k_p Z(\theta_2^T a + \theta_{20}\Lambda)]y = k_p Z\Lambda\theta_3 r$$

$$[\theta_1^T a P + k_p Z(\theta_2^T a + \theta_{20}\Lambda)]y = \Lambda P y - k_p Z\Lambda\theta_3 r$$

Como

$$P_m y_m = r$$

$$[\theta_1^T a P + k_p Z(\theta_2^T a + \theta_{20}\Lambda)]y = \Lambda P y - k_p Z\Lambda\theta_3 P_m y_m$$

Quando $\theta = \theta^*$, temos que $y = y_m$, e assim

$$\theta_1^{*T} a P + k_p Z(\theta_2^{*T} a + \theta_{20}^* \Lambda) = \Lambda P - k_p Z\Lambda\theta_3^* P_m$$

Matching equation

Escolhemos:

$$\theta_3^* = \frac{1}{k_p}$$

Dessa forma, somente o lado direito contém θ^* :

$$\theta_1^{*T} aP + k_p Z(\theta_2^{*T} a + \theta_{20}^* \Lambda) = \Lambda P - Z \Lambda P_m$$

Se:

$$P_m y_m = k_m Z_m \textcolor{red}{r}$$

$$[\theta_1^T a P + k_p Z (\theta_2^T a + \theta_{20} \Lambda)] k_m Z_m y = k_m Z_m \Lambda P y - k_p Z \Lambda \theta_3 k_m Z_m \textcolor{red}{r}$$

$$\Rightarrow [\theta_1^{*T} a P + k_p Z (\theta_2^{*T} a + \theta_{20}^* \Lambda)] Z_m = \Lambda P Z_m - \frac{k_p}{k_m} \theta_3^* Z \Lambda P_m$$

Podemos simplificar fazendo:

$$\Lambda = Z_m A_0$$

Resultado:

$$\theta_1^{*T} a P + k_p Z (\theta_2^{*T} a + \theta_{20}^* \Lambda) = \Lambda P - \frac{k_p}{k_m} \theta_3^* Z A_0 P_m$$

★ Note que $Z(s)$ não foi cancelado.

4.2 CASO $n^* = 1$

Referência. [Tao:2003], (pag. 195)

Plant:

$$y = P(s)u$$

$$P(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

Reference model:

$$y_m = M(s)r$$

$$M(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}$$

Output error:

$$e_0 = y - y_m$$

★ Without loss of generality, $k_m = 1$, thus

$$M(s) = \frac{N_m(s)}{D_m(s)}$$

Basic assumptions

Prior available information regarding $P(s)$:

- (1) The order of the plant n is known ⁽¹⁾.
- (2) The relative degree n^* is known.
- (3) $N_p(s)$ is Hurwitz, i.e., $P(s)$ is **minimum phase**.
- (4) $\text{sign}(k_p)$ is known.

★ ⁽¹⁾ Otherwise unicity of the solution cannot be assured.

★ Unicity is not mandatory for stability !

Objective: Find a control law $u(t)$ such that

- The closed-loop system is stable and
- $\lim_{t \rightarrow \infty} e_0 = 0$ for arbitrary initial conditions.

★ The reference signal $r(t)$ is piece-wise continuous and uniformly bounded.

Structure of the controller

State variable filters (SVF's):

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= A_f \omega_1 + b_f u & \omega_1 &\in \mathbb{R}^{n-1} \\ \dot{\omega}_2 &= A_f \omega_2 + b_f y & \omega_2 &\in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

★ Λ is chosen such that $N_m(s)$ is a factor of $\det(sI - \Lambda)$.

Regressor vector:

$$\omega^T = [\omega_1^T \ y \ \omega_2^T \ r] \quad \omega \in \mathbb{R}^{2n}$$

Control law:

$$u = \theta^T \omega \quad \theta^T = [\theta_1^T \ \theta_n \ \theta_n^T \ \theta_{2n}] \in \mathbb{R}^{2n}$$

Fact: There exists a unique $\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \ \theta_n^* \ \theta_n^{*T} \ \theta_{2n}^*]$ such that

$$y = P(s)u^* = P(s)\theta^{*T}\omega = M(s)r$$

(Matching!)

Parameter error:

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$$

Control mismatch:

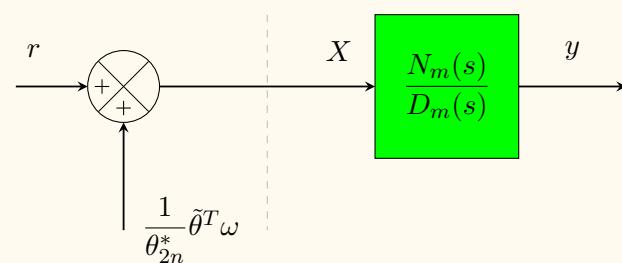
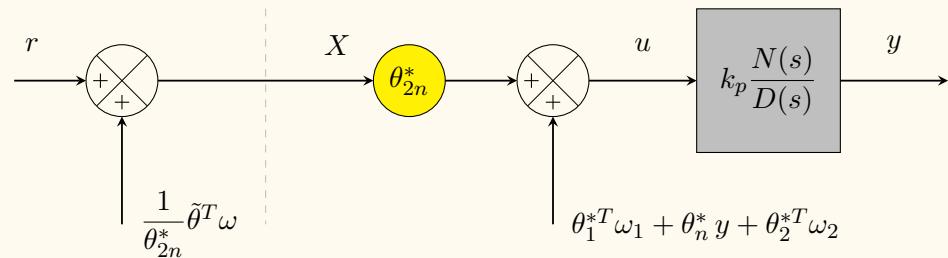
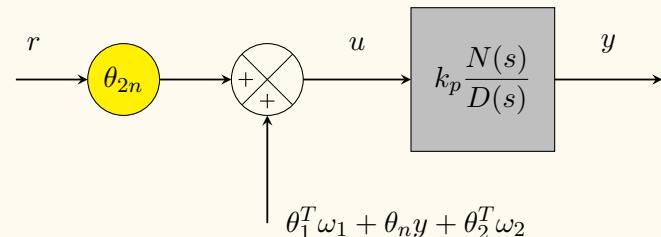
$$\tilde{u} = \tilde{\theta}^T\omega$$

4.2.1 ERROR EQUATION

Ref.: [Slotine & Li:1991], (pag. 345)

Simple derivation of the error equation:

$$\begin{aligned} u &= \theta^T \omega - \theta^{*T} \omega + \theta^{*T} \omega \\ &= \tilde{\theta}^T \omega + \theta_1^{*T} \omega_1 + \theta_n^* y + \theta_2^{*T} \omega_2 + \theta_{2n}^* r \\ &= \underbrace{\theta_{2n}^* \left[r + \frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega \right]}_{\text{external signal } X} + \theta_1^{*T} \omega_1 + \theta_n^* y + \theta_2^{*T} \omega_2 \end{aligned}$$



From the figure, one has

$$y = P(s)[u] = M(s)[X] \Rightarrow \boxed{y = M(s)\left[r + \frac{1}{\theta_{2n}^*} \tilde{\theta}^T \omega\right]}$$

★ Recall that

$$\boxed{\frac{1}{\theta_{2n}^*} = k_p}$$

Error equation:

$$e_0 = y - y_m$$

$$= M(s)\left[r + k_p \tilde{\theta}^T \omega\right] - M(s)[r] \Rightarrow \boxed{e_0 = k_p M(s)[\tilde{\theta}^T \omega]}$$

The same error equation is obtained in the case of a more general control law

$$| \quad u = \theta^T \omega + v$$

- ★ This is the case, for example, when $n^* = 2$.

The derivation is similar:

$$\begin{aligned} u &= \theta^T \omega - \theta^{*T} \omega + \theta^{*T} \omega + v \\ &= \tilde{\theta}^T \omega + \theta_1^{*T} \omega_1 + \theta_n^* y + \theta_2^{*T} \omega_2 + \theta_{2n}^* r + v \\ &= \theta_{2n}^* \underbrace{[r + k_p \tilde{\theta}^T \omega + k_p v]}_{\text{external signal } X} + \theta_1^{*T} \omega_1 + \theta_n^* y + \theta_2^{*T} \omega_2 \end{aligned}$$

This gives

$$y = P(s)[u] = M(s)[X] = M(s)[r + k_p \tilde{\theta}^T \omega + k_p v]$$

Error equation:

$$\begin{aligned} e_0 &= y - y_m = M(s)[r + k_p \tilde{\theta}^T \omega + k_p v] - M(s)[r] \\ &= k_p M(s)[(\theta - \theta^*)^T \omega + v] \\ &= k_p M(s)[u - \theta^{*T} \omega] \end{aligned}$$

Error equation:

$$e_0 = k_p M(s) [u - \theta^{*T} \omega] + \varepsilon$$

- ★ ε is an exponentially decaying term due to the initial conditions.

State space representation:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + k_p B[u - \theta^{*T} \omega] \\ e_0 = Ce \end{cases}$$

- ★ The error vector $e \in \mathbb{R}^{3n-2}$.
- ★ $\{A, B, C\}$ is a non-minimal realization of $M(s)$.
- ★ The initial condition $e(0)$ is responsible for the term ε !

Question: Non-minimal realization? $e \in \mathbb{R}^{3n-2}$?

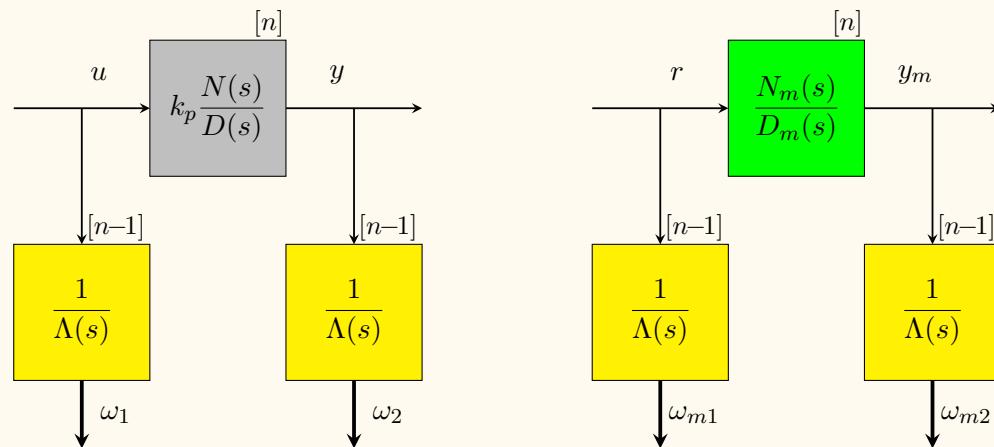


Figura 59: Non-minimal realization.

4.2.2 MEYER–KALMAN–YAKUBOVICH LEMMA

Hypothesis: $M(s)$ is strictly positive real (SPR).

★ This is **fundamental** for the stability analysis (and implementation).

Lemma (Meyer–Kalman–Yakubovich)

If the system $\{A, B, C\}$ is SPR then

$$\exists \begin{cases} P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \end{cases} \text{ such that}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^T P + PA &= -2Q \\ PB &= C^T \end{aligned}}$$

Ref.: [Tao:2003], (pag. 77)

Ref.: [Ioannou & Sun:1996], (pag. 126)

Sufficient condition for an SPR transfer function: alternate poles and zeros !

Example 14 3rd order model

$$M(s) = \left(\frac{15}{8}\right) \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

Example 15

Step response of an SPR transfer function

Model: $M(s) = \frac{k_m(s+z)}{(s+1)(s+2)}$, $k_m = \frac{2}{z}$

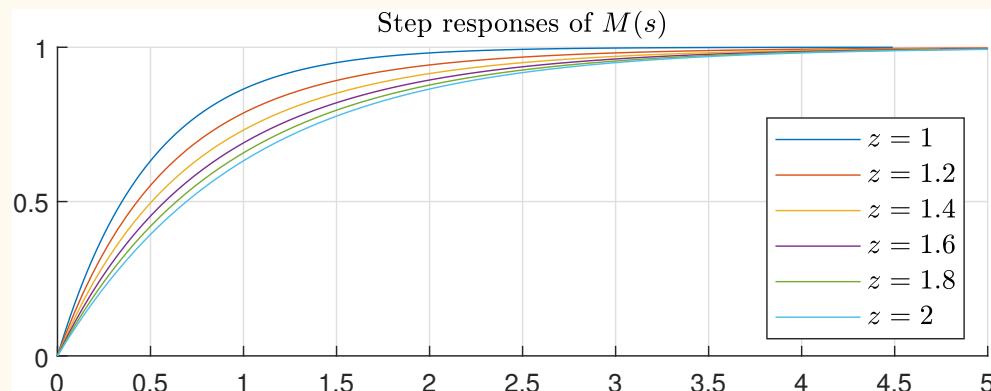


Figura 60: Step responses for $z = \{1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2\}$.

4.2.3 LYAPUNOV DESIGN

Set of equations:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + \textcolor{violet}{k}_p B[\tilde{\theta}^T \omega], & e_0 = Ce \\ \dot{\tilde{\theta}} = ? \end{cases}$$

Lyapunov function:

$$2V(e, \tilde{\theta}) = e^T \textcolor{blue}{P} e + |\textcolor{violet}{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad \Gamma = \Gamma^T > 0$$

Time derivative:

$$\begin{aligned}
 2\dot{V} &= \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e} + |\mathbf{k}_p| (\dot{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}) \\
 &= (Ae + \mathbf{k}_p B \tilde{\theta}^T \omega)^T Pe + e^T P(Ae + \mathbf{k}_p B \tilde{\theta}^T \omega) + 2|\mathbf{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= e^T A^T Pe + \mathbf{k}_p \tilde{\theta}^T \omega B^T Pe + e^T PAe + \mathbf{k}_p e^T PB \tilde{\theta}^T \omega + 2|\mathbf{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= e^T \left(\underbrace{A^T P + PA}_{-2Q} \right) e + 2\mathbf{k}_p \tilde{\theta}^T \omega B^T Pe + 2|\mathbf{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= -2e^T Qe + 2\mathbf{k}_p \tilde{\theta}^T \omega B^T Pe + 2|\mathbf{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}
 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -e^T Qe + \mathbf{k}_p \tilde{\theta}^T \omega B^T Pe + |\mathbf{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= -e^T Qe + |\mathbf{k}_p| \tilde{\theta}^T \left[\text{sign}(\mathbf{k}_p) \omega \underbrace{B^T Pe}_{Ce=e_0} + \Gamma^{-1} \dot{\theta} \right]
 \end{aligned}$$

We choose the update law:

$$\dot{\theta} = -\text{sign}(\textcolor{violet}{k}_p) \Gamma \omega e_0$$

Result.

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0$$

- $V(t)$ is monotone non-increasing, bounded above by $V(0)$ and below by 0.
- $e, \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$
- Integrating $\dot{V} \Rightarrow e \in \mathcal{L}_2$
- $r(t) \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$
- $\begin{cases} e \in \mathcal{L}_2 \\ \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty \end{cases} \Rightarrow e \rightarrow 0$

- Convergence of $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ requires the *persistent excitation* condition

$$\boxed{\int_t^{t+T} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I} \quad T, \alpha > 0, \quad \forall t \geq t_0$$

★ Note that $\omega(\cdot)$ is an internal signal of the system.

4.2.4 AUXILIARY ERROR

For convenience, define the auxiliary error

$$e_a = \text{sign}(\mathbf{k}_p) e_0$$

Then, the error equation can be rewritten as

$$\underbrace{\text{sign}(\mathbf{k}_p) e_0}_{e_a} = \underbrace{|\mathbf{k}_p| M(s)}_{\text{SPR}} [u - \theta^{*T} \omega]$$



$M(s)$ is SPR

\Rightarrow

$|\mathbf{k}_p| M(s)$ is SPR !

State space representation:

$$\begin{cases} \dot{e} = A_m e + B_m [u - \theta^{*T} \omega] \\ e_a = C_m e \end{cases}$$

where

$$|\textcolor{violet}{k}_p| M(s) = C_m (sI - A_m)^{-1} B_m$$

- ★ The unknown term $|\textcolor{violet}{k}_p|$ is absorbed by the matrices $\{A_m, B_m, C_m\}$.

Since the system $\{A_m, B_m, C_m\}$ is SPR then

$$\exists \begin{cases} P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \end{cases} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} A_m^T P + P A_m = -2Q \\ P B_m = C_m^T \end{cases}$$

4.2.5 LYAPUNOV DESIGN WITH e_a

Set of equations:

$$\begin{cases} \dot{e} = A_m e + B_m [\tilde{\theta}^T \omega], & e_a = C_m e \\ \dot{\tilde{\theta}} = ? \end{cases}$$

Lyapunov function:

$$2V(e, \tilde{\theta}) = e^T \textcolor{blue}{P} e + \tilde{\theta}^T \textcolor{blue}{\Gamma^{-1}} \tilde{\theta} \quad \Gamma = \Gamma^T > 0$$

★ k_p disappears from the analysis!

Time derivative:

$$\begin{aligned}
 2\dot{V} &= \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e} + (\dot{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}) \\
 &= (A_m e + B_m \tilde{\theta}^T \omega)^T Pe + e^T P(A_m e + B_m \tilde{\theta}^T \omega) + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= e^T A_m^T Pe + \tilde{\theta}^T \omega B_m^T Pe + e^T P A_m e + e^T P B_m \tilde{\theta}^T \omega + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= e^T \underbrace{(A_m^T P + P A_m)}_{-2Q} e + 2\tilde{\theta}^T \omega B_m^T Pe + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= -2e^T Q e + 2\tilde{\theta}^T \omega B_m^T Pe + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}
 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -e^T Q e + \tilde{\theta}^T \omega B_m^T Pe + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= -e^T Q e + \tilde{\theta}^T \left[\omega \underbrace{B_m^T Pe}_{C_m^T e = e_a} + \Gamma^{-1} \dot{\theta} \right]
 \end{aligned}$$

We choose the update law:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \omega e_a$$

Result.

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0$$

★ In fact, same result!

Resumo do algoritmo

Subsistema	Equação	Ordem
Planta	$y = P(s) u$	n
Modelo	$y_m = M(s) r$	n
Erro	$e_a = \text{sign}(\textcolor{violet}{k}_p) (y - y_m)$	
Controle	$u = \theta^T \omega$	
Λ -Filters	$\dot{\omega}_1 = A_f \omega_1 + b_f u$ $\dot{\omega}_2 = A_f \omega_2 + b_f y$	$n - 1$ $n - 1$
Regressor	$\omega^T = [\omega_1^T \ y \ \omega_2^T \ r]$	
Adaptação	$\dot{\theta} = -\Gamma \omega e_a$	$2n$

Ordem total do sistema:

$$N = 6n - 2$$

4.2.6 SIMULAÇÕES

Example 16 2nd order plant.

Classificação do sistema: $n = 2$ (ordem)
 $n^* = 1$ (grau relativo)
 $n_p = 4$ (# de parâmetros)

Planta.....: $P(s) = \frac{s + 1}{s^2 - 2s}$

Modelo.....: $M(s) = \frac{1.5(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)}$

Filtro.....: $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s + 2}$

Matching.....: $\theta^{*T} = [1 \ -6 \ 9 \ 1.5]$
 $\|\theta^*\| = 10.9659$

Simulação #1 Condição inicial pequena & $\theta(0) \approx \theta^*$.

Condições iniciais.....: $y(0) = 1$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0.95\theta^*$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

★ Esta simulação mostra que a parte linear do sistema está correta !

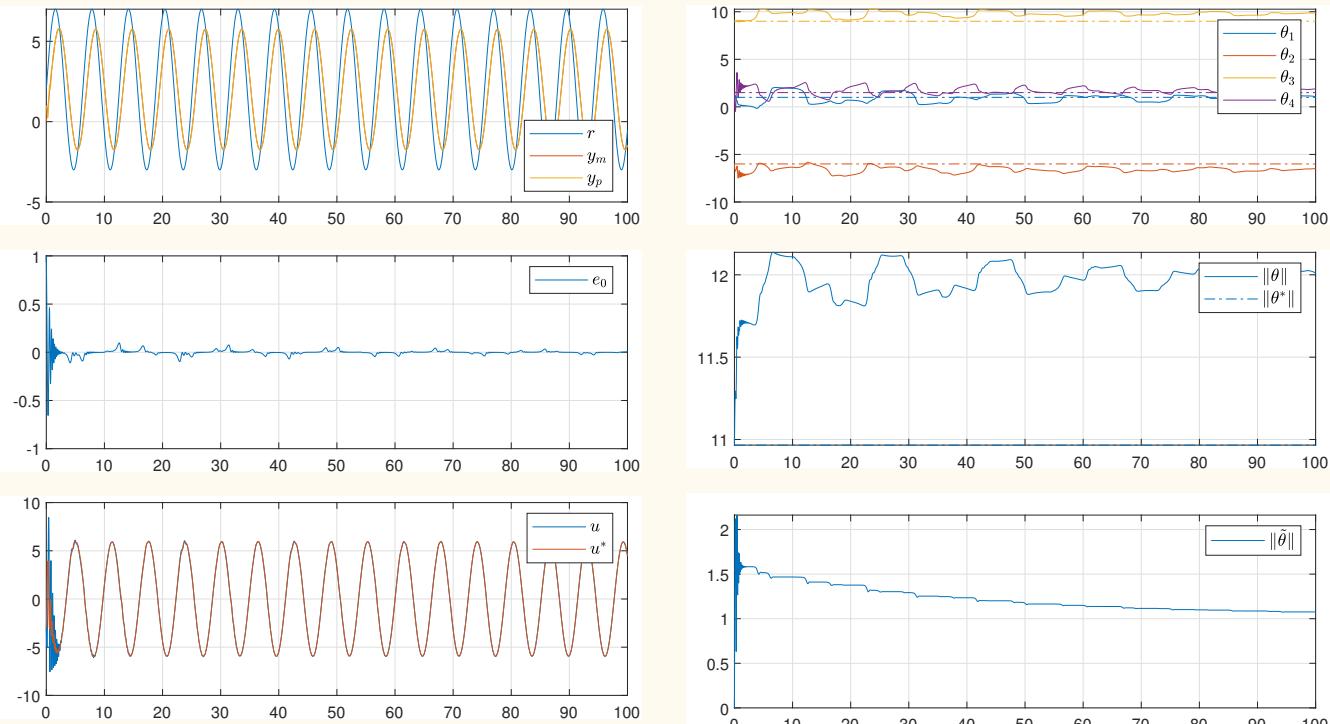


Figura 61: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig01.m`)

Simulação #2 Condição inicial pequena.

Condições iniciais.....: $y(0) = 1$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

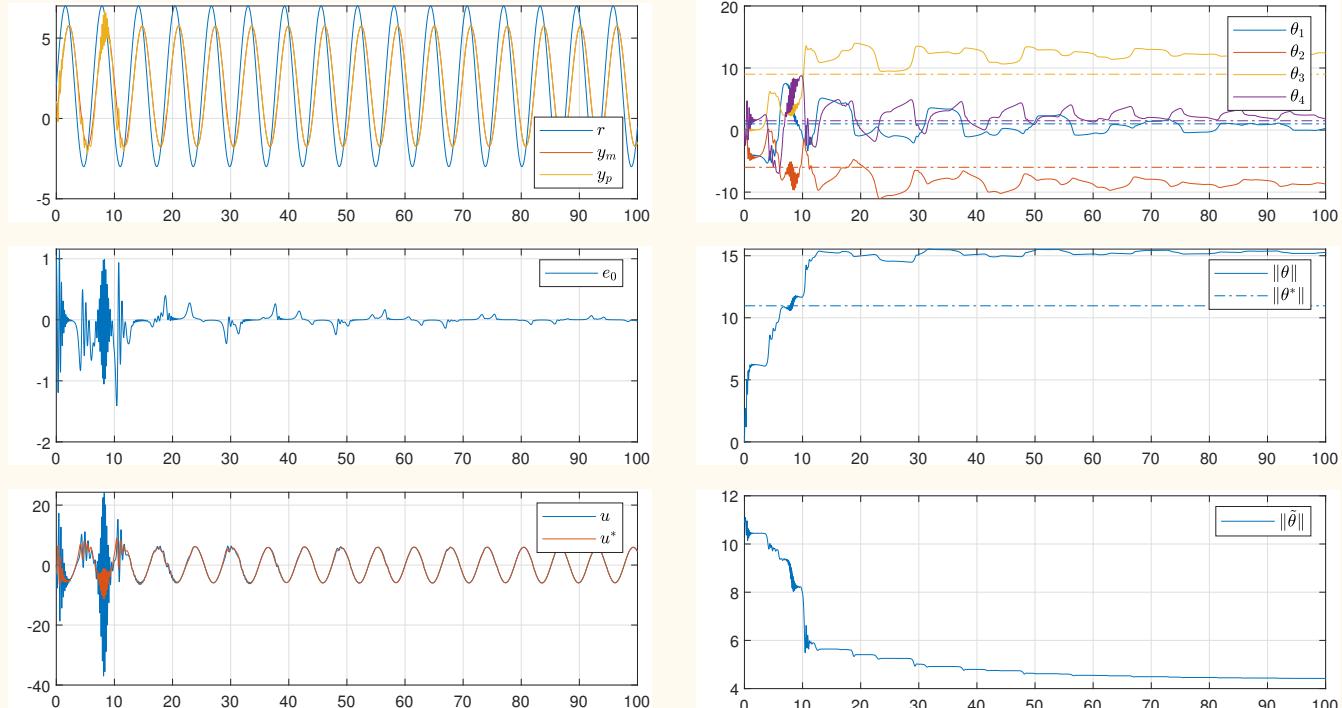


Figura 62: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig02.m`)

Simulação #3 Condição inicial grande.

Condições iniciais.....: $y(0) = 5$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

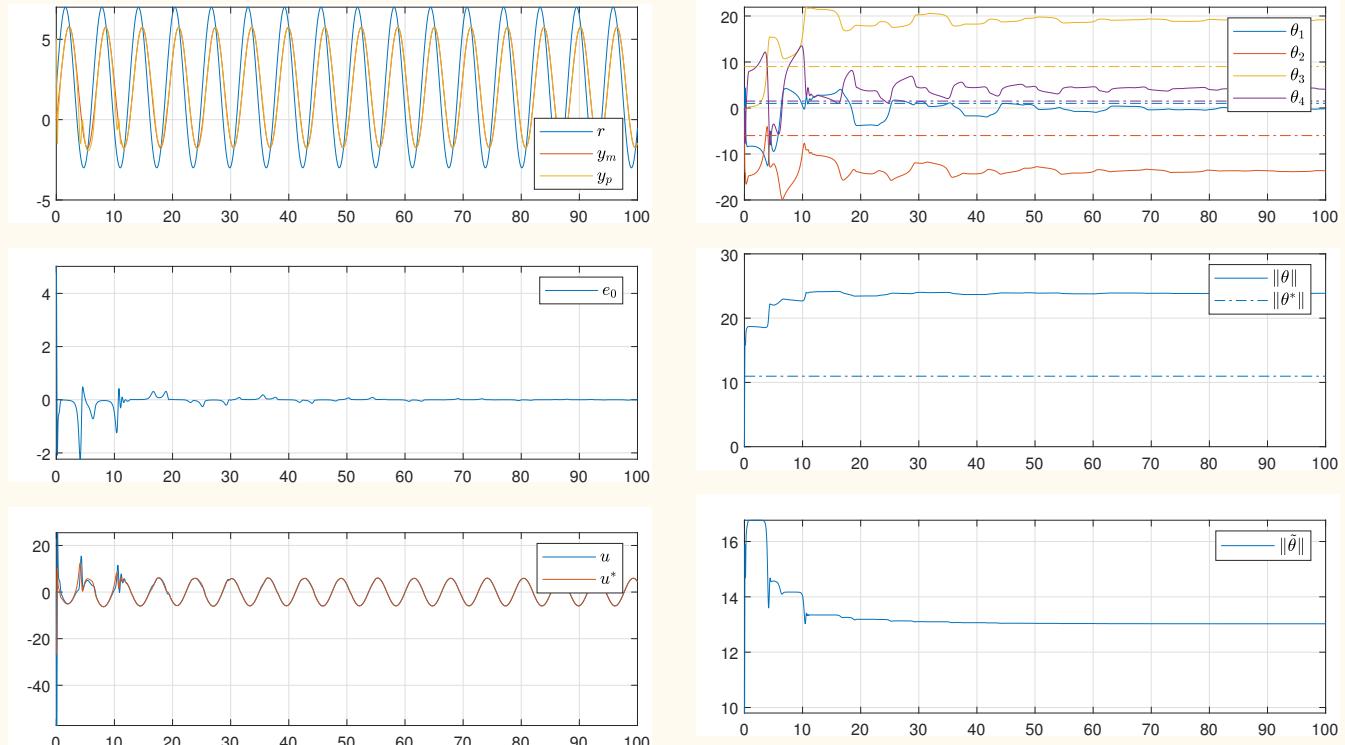


Figura 63: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig03.m`)

Simulação #4 Idem com excitação por onda quadrada.

Condições iniciais.....: $y(0) = 5$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5\text{sqw}(\pi t/10)$

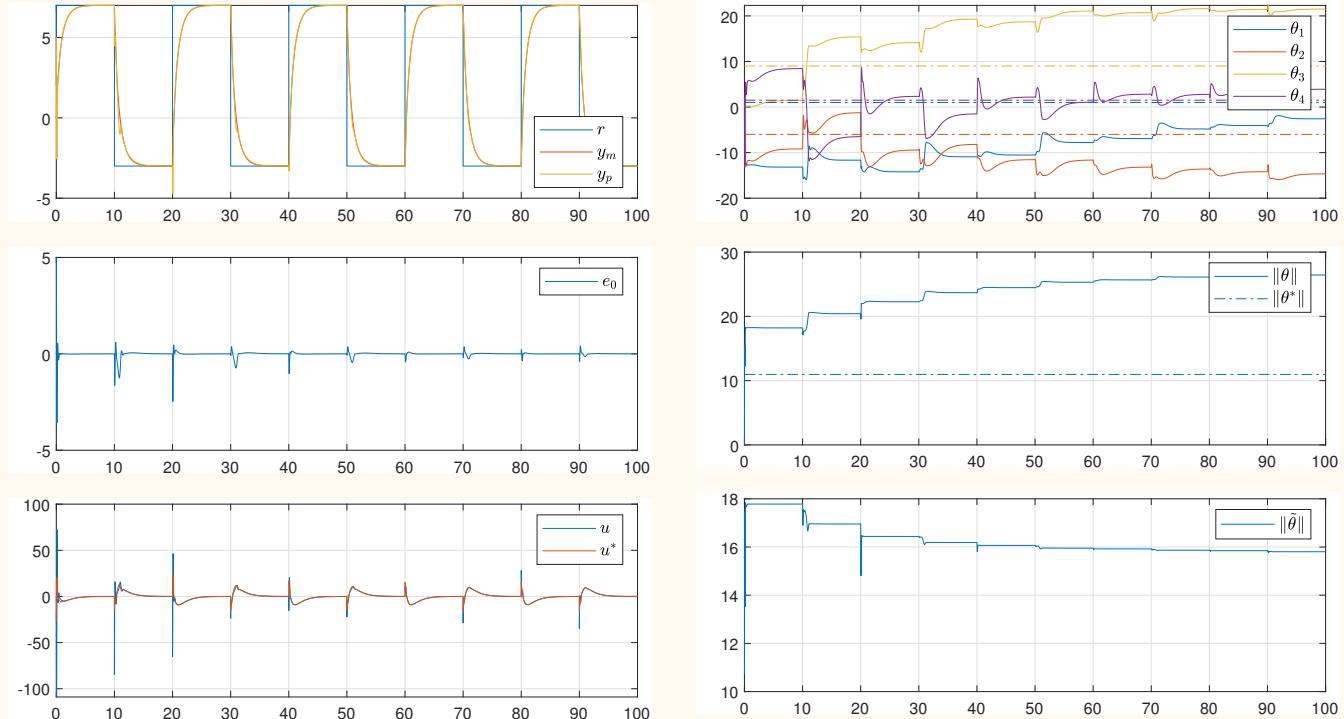


Figura 64: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig04.m`)

Example 17 4th order plant.

Classificação do sistema: $n = 4$ (ordem)
 $n^* = 1$ (grau relativo)
 $n_p = 8$ (# de parâmetros)

Planta.....: $P(s) = \frac{0.1(s + 2)^3}{s^4}$

Modelo.....: $M(s) = \frac{1}{s + 1}$

Filtro.....: $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{(s + 0.5)(s + 1.5)(s + 2)}$

Matching.....: $\theta^{*T} = [-6.5 \ -7.25 \ -2 \ -50 \ 60 \ 175 \ 112.5 \ 10]$

$$\|\theta^*\| = 222.6658$$

$$\|\theta_{ff}^*\| = 14.1, \quad \|\theta_{fb}^*\| = 222.22$$

Simulação #1 Condição inicial nula & $\theta(0) \approx \theta^*$.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0.99\theta^*$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 1 I$

Sinal de referência....: $r = 3 + 10\text{sqw}(\pi t/10)$

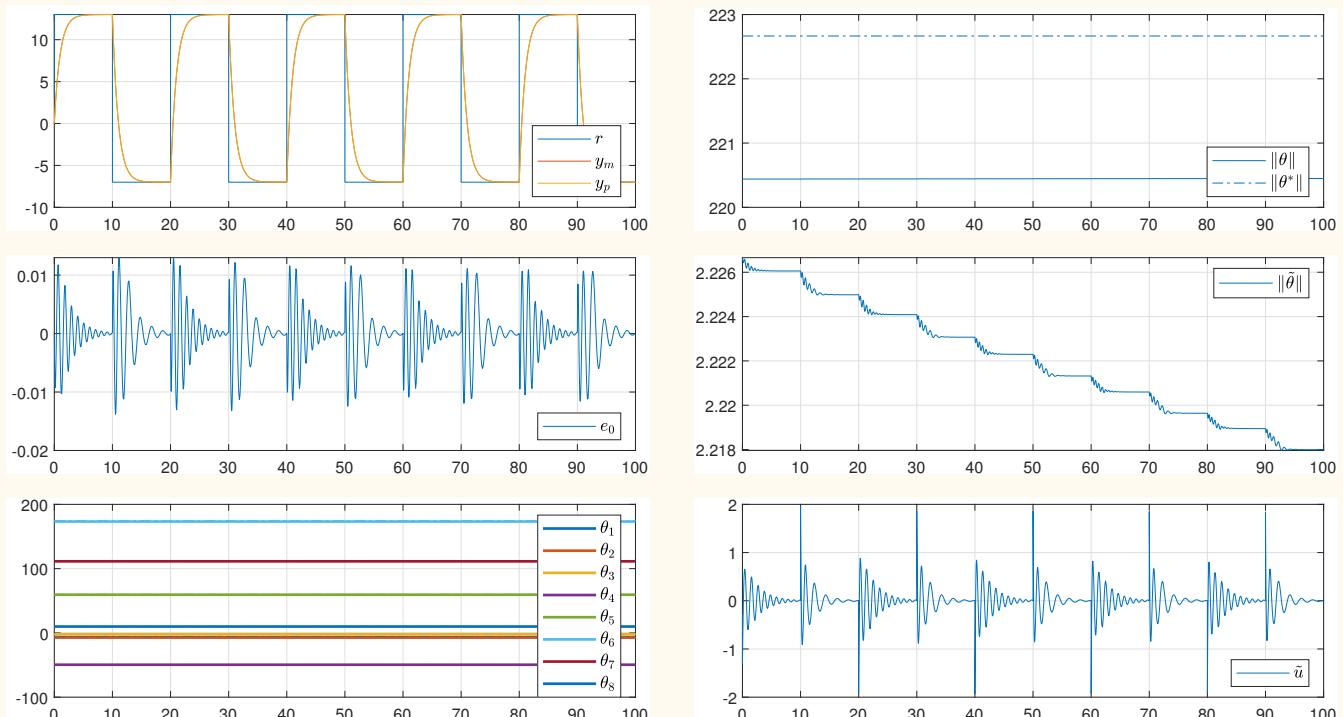


Figura 65: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig01.m`)

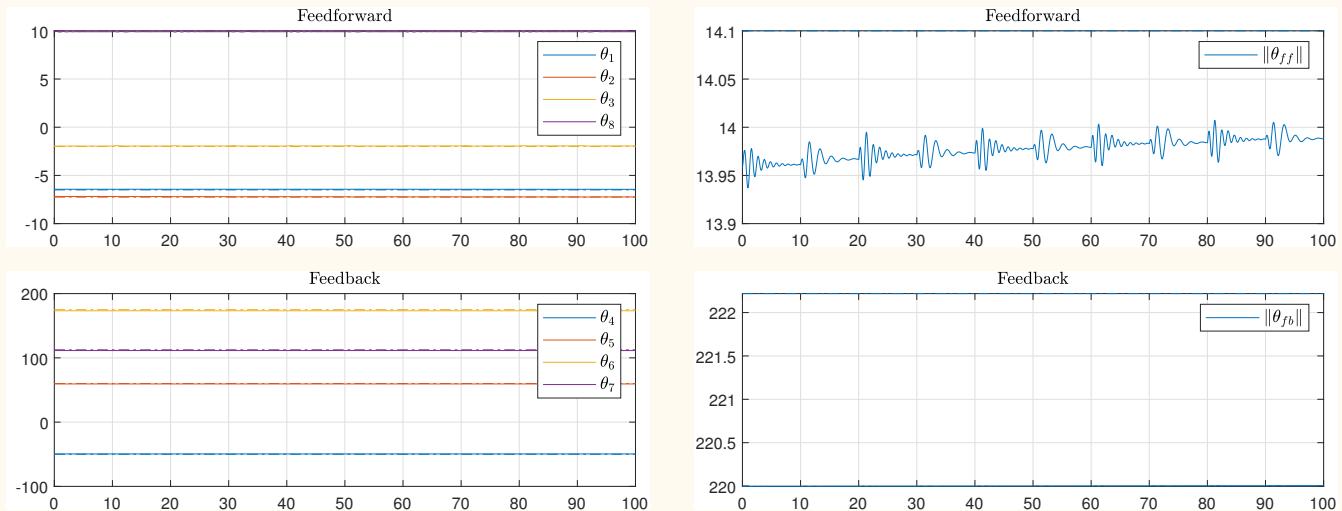


Figura 66: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig01.m`)

Simulação #2 Condições iniciais nulas. Ganho pequeno.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 1 I$

Sinal de referência....: $r = 3 + 10\text{sqw}(\pi t/10)$

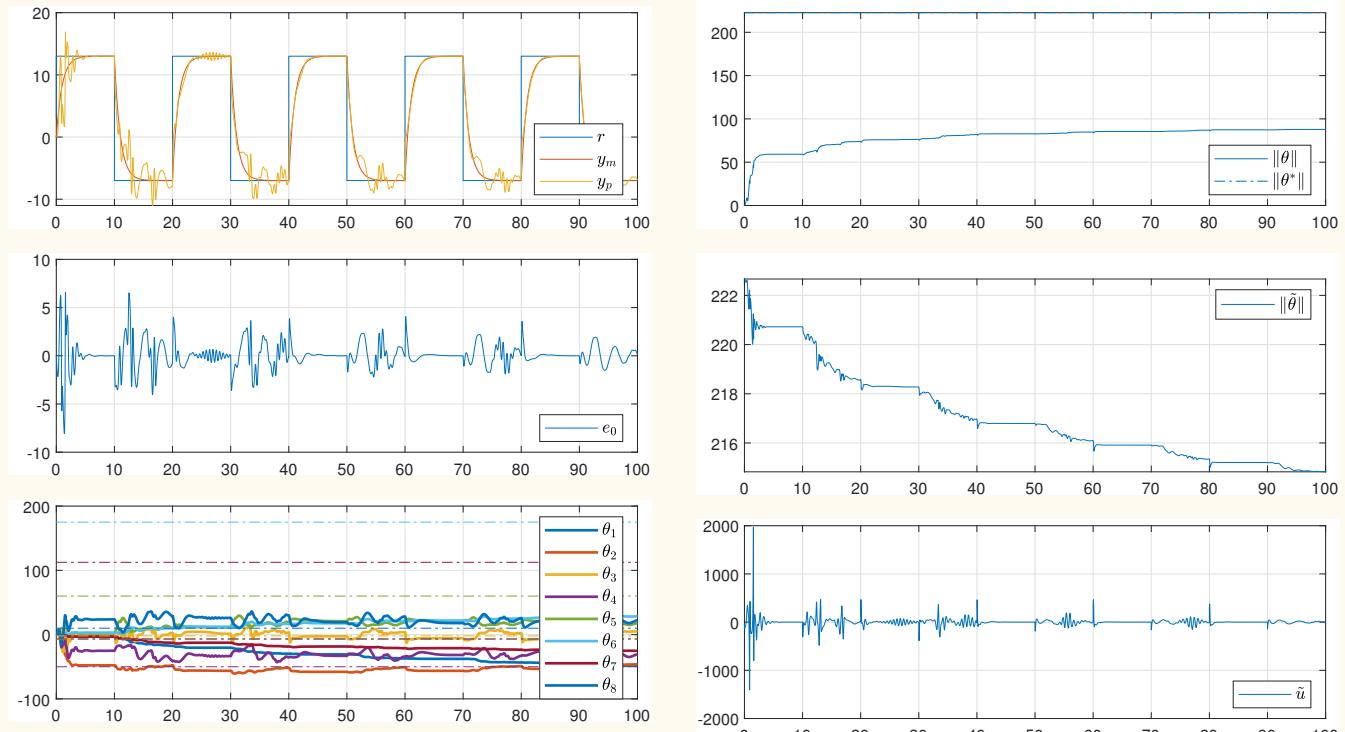


Figura 67: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig02.m`)

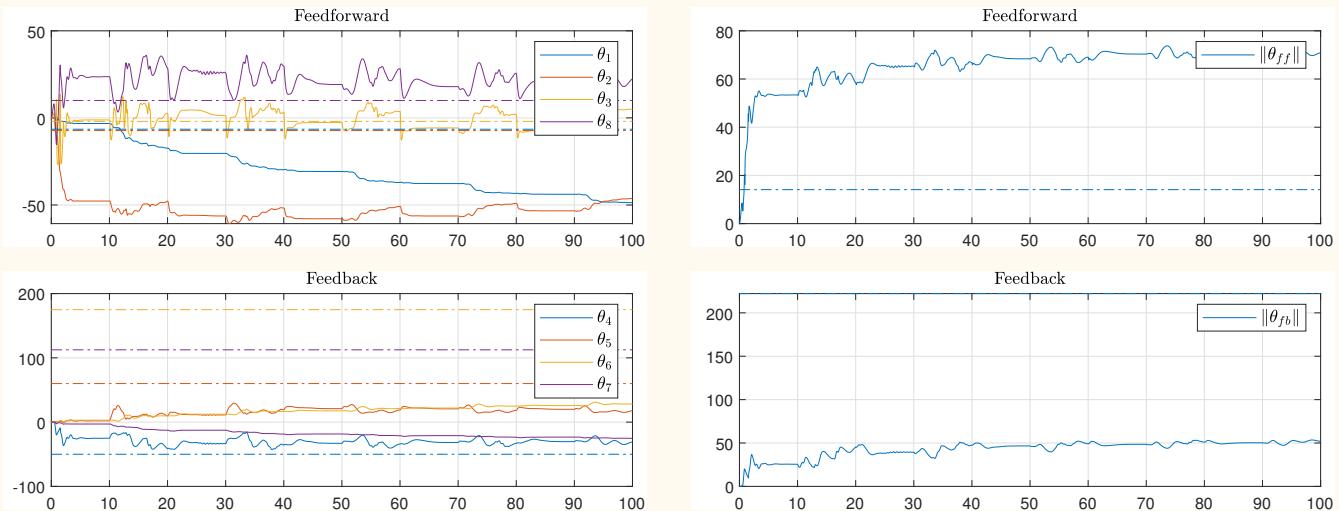


Figura 68: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig02.m`)

Simulação #3 Condições iniciais nulas. Ganho grande.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 3 + 10\text{sqw}(\pi t/10)$

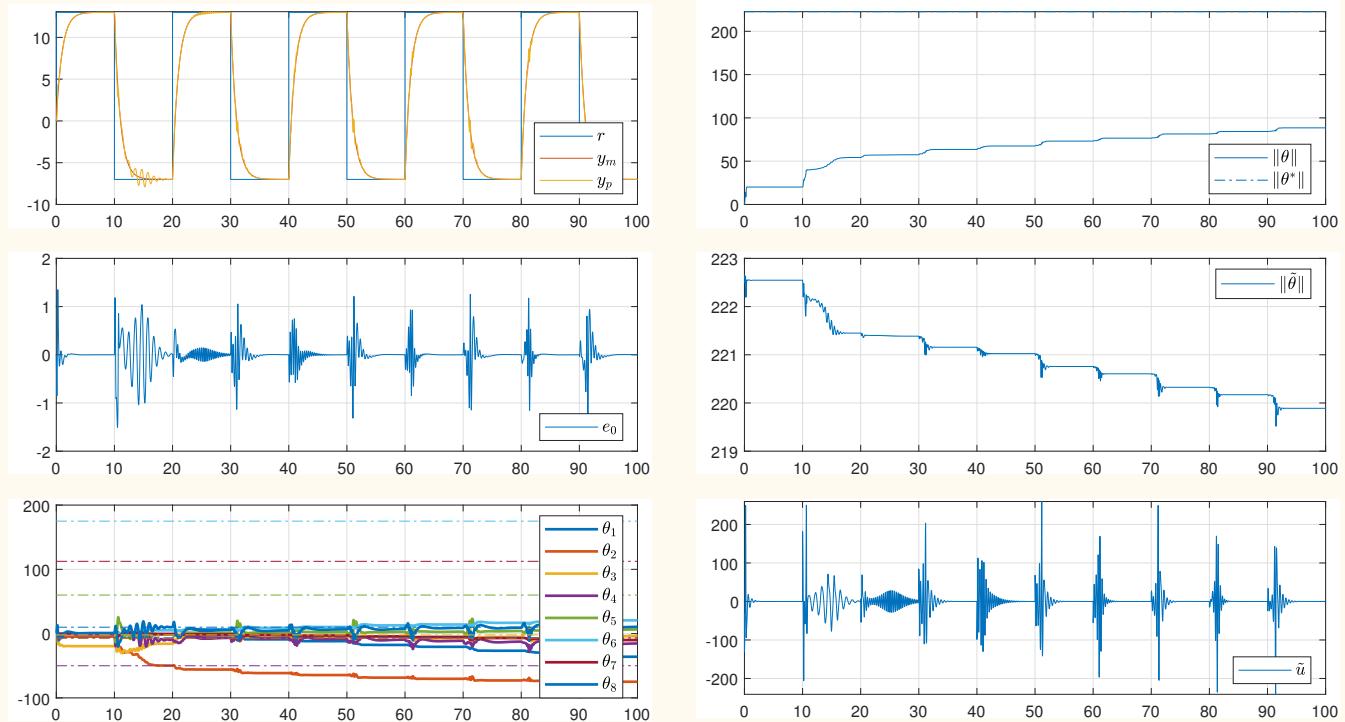


Figura 69: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig03.m`)

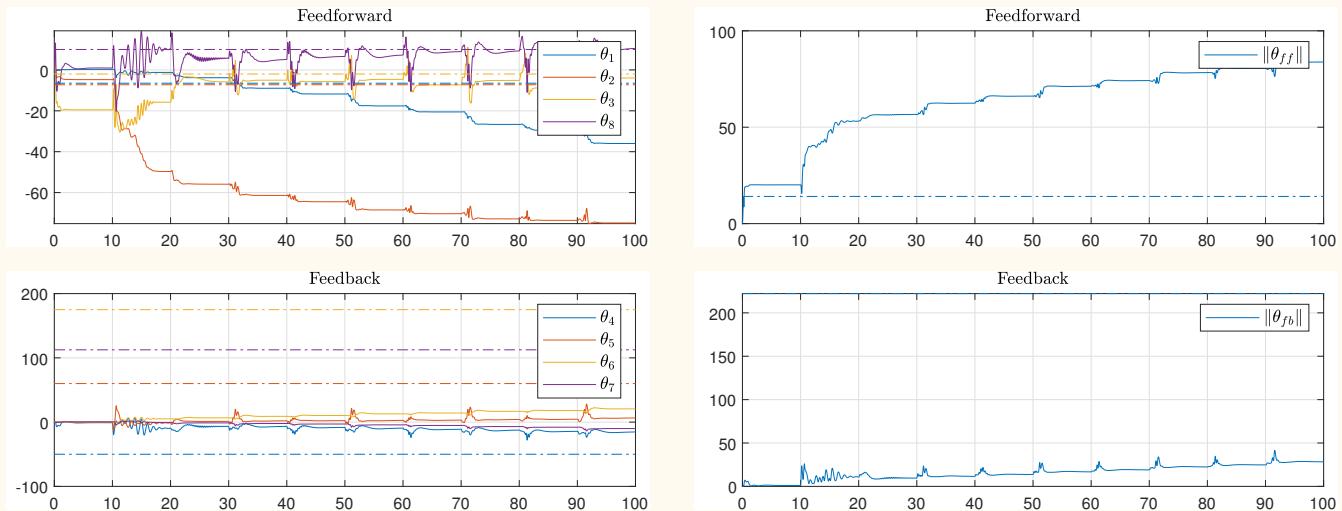


Figura 70: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig03.m`)

Simulação #4 Efeito da excitação contendo senóides.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 3 + 10\text{sqw}(\pi t/10) + S$

$$S = 2 \sin(0.5t) + 2 \sin(t) + 2 \sin(2t) + 2 \sin(3t)$$

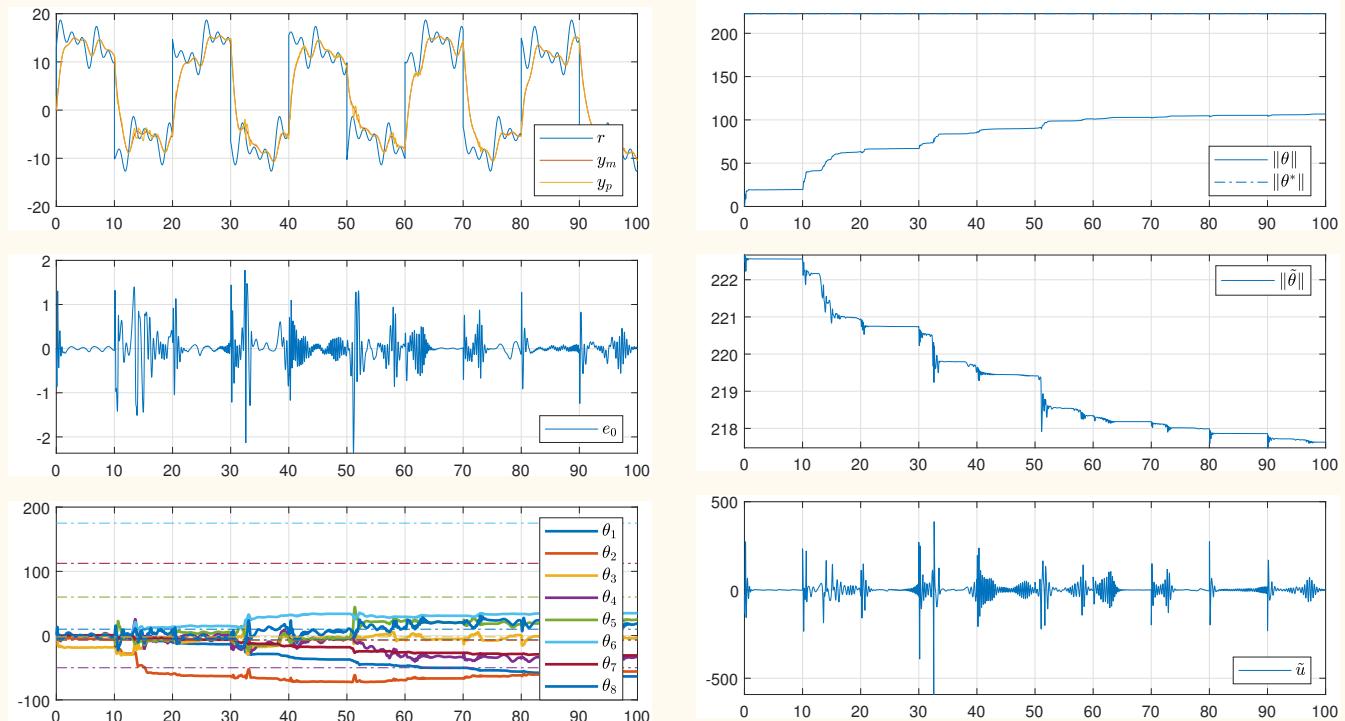


Figura 71: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig04.m`)

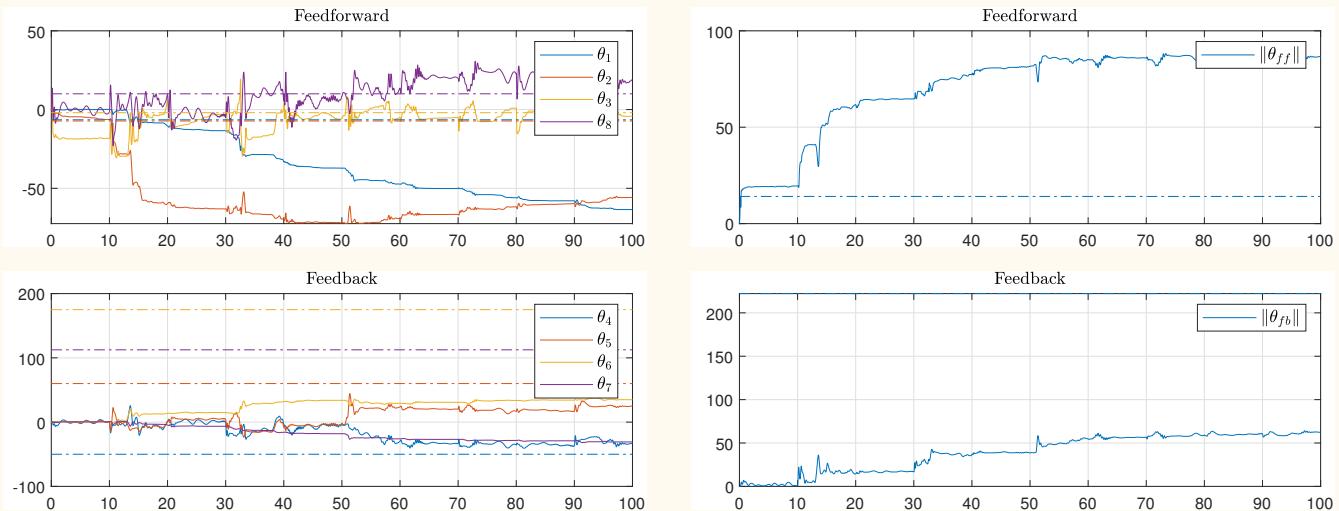


Figura 72: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig04.m`)

Simulação #5 Idem com condição inicial grande.

Condições iniciais.....: $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 3 + 10\text{sqw}(\pi t/10) + S$

$$S = \sum \sin(.)$$

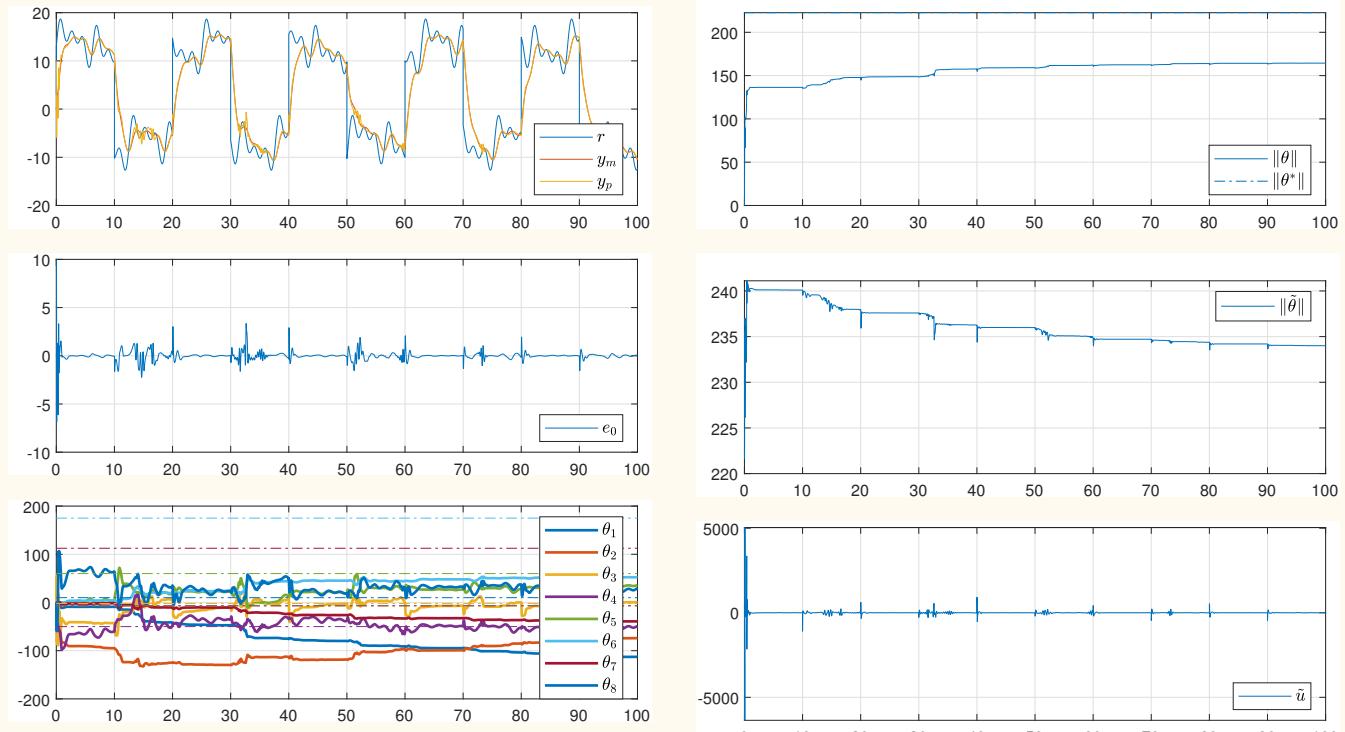


Figura 73: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig05.m`)

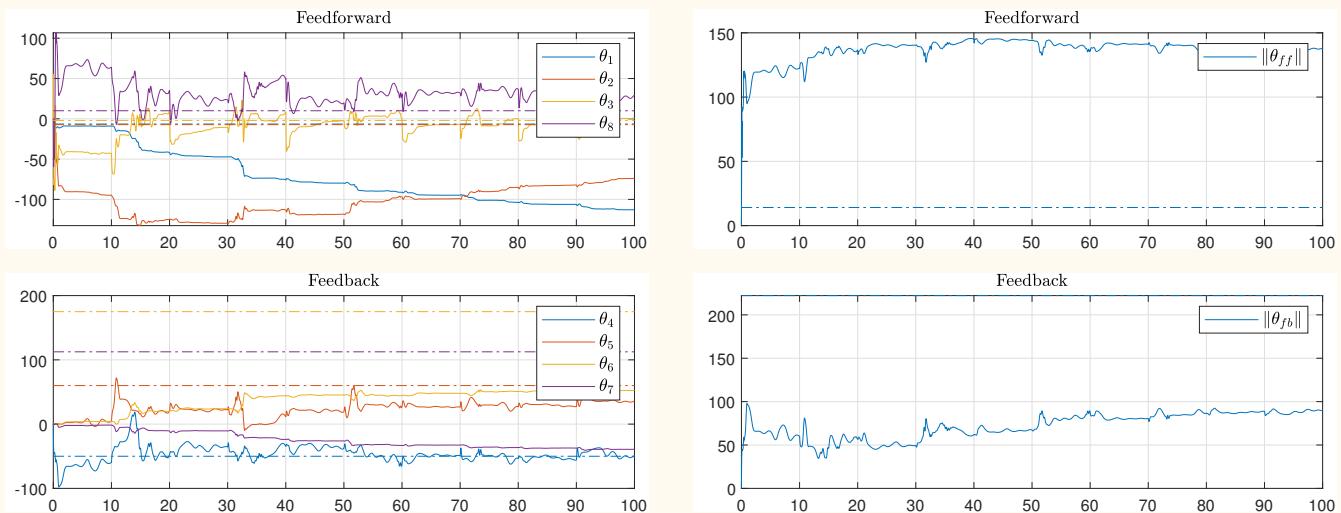


Figura 74: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig05.m`)

- ★ Note que $\|\theta\|$ é praticamente constante para $t > 50$.
No entanto, $\|\theta_{ff}\|$ e $\|\theta_{fb}\|$ variam.

Simulação #6 Idem com excitação por uma única senóide.

Condições iniciais.....: $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

Sinal de referência....: $r = 3 + 5 \sin(t)$

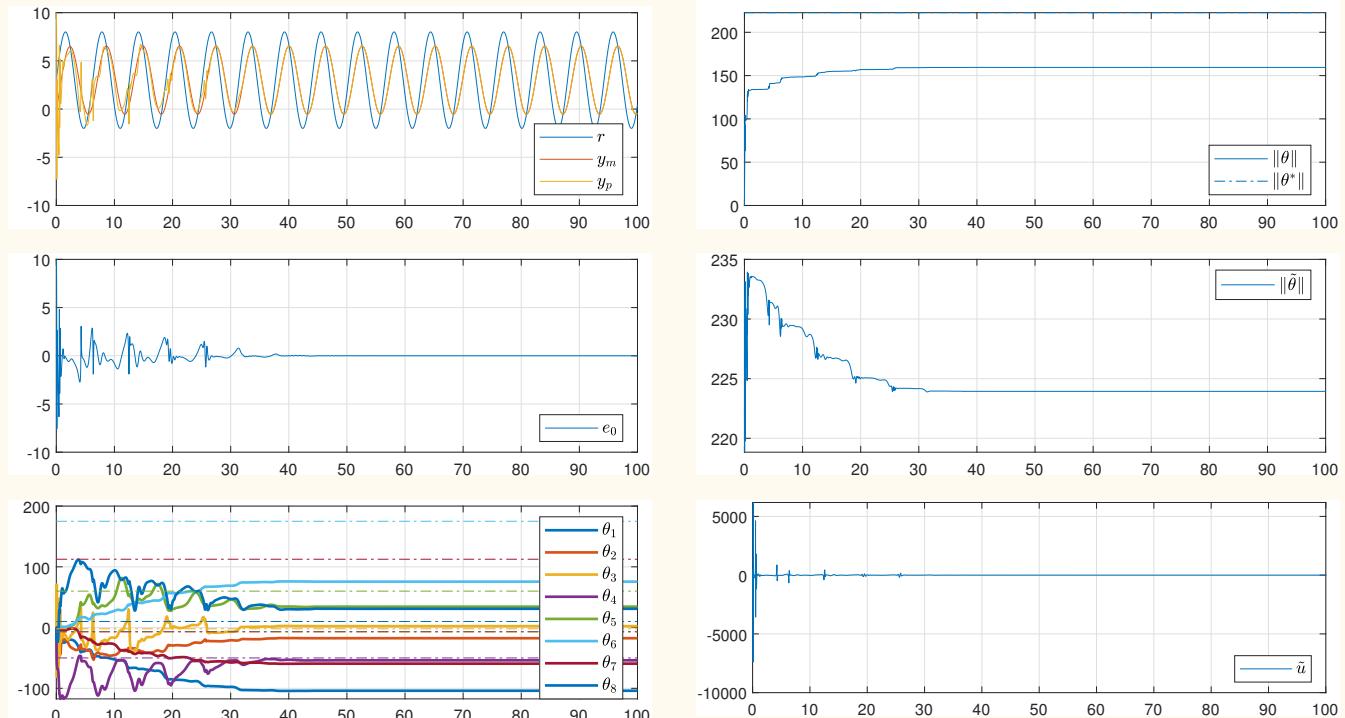


Figura 75: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig06.m`)

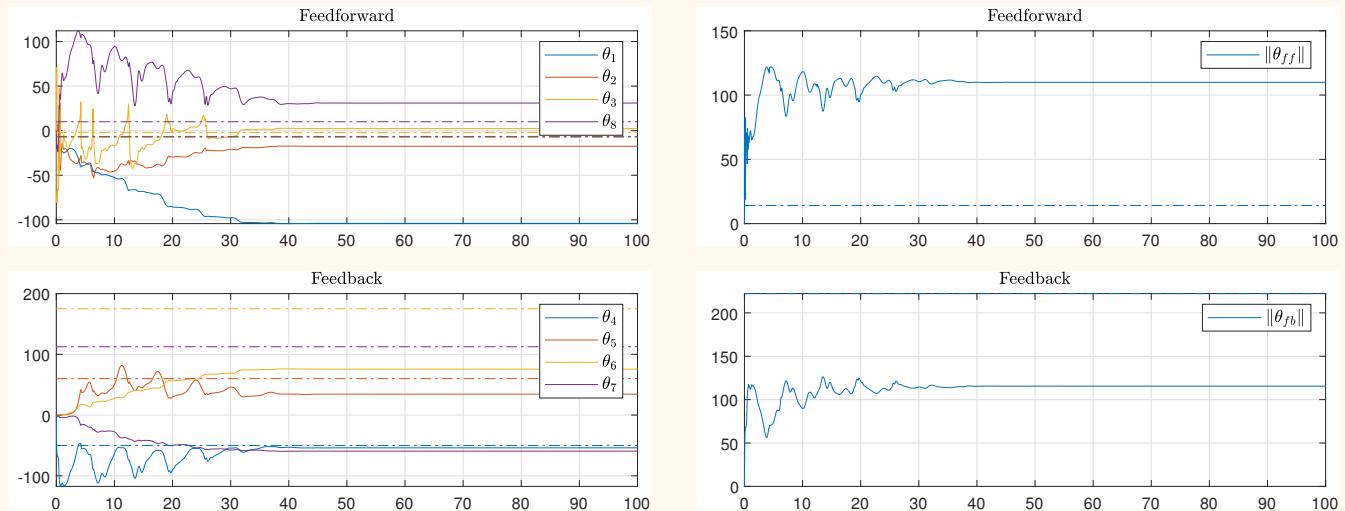


Figura 76: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig06.m`)

4.3 CASO $n^* = 2$

Problem: $M(s)$ cannot be chosen SPR.

Solution: (Monopoli multiplier)

Select a polynomial $L(s)$ such that $M(s)L(s)$ is SPR.

$$\Rightarrow \boxed{L(s) = (s + \ell_0)} \quad [\text{degree}(L) = 1]$$

Example 18

2nd order model.

$$M(s) = \frac{k_m}{(s+a)(s+b)}$$

$$L(s) = (s + \ell_0)$$

$$M(s)L(s) = \frac{k_m(s + \ell_0)}{(s+a)(s+b)}$$

Sufficient condition for SPR:

$$a \leq \ell_0 \leq b$$

★ Poles and zeros are alternated.

The idea.

The equation error can be written as

$$\begin{aligned} e_a &= \text{sign}(k_p)e_0 = |k_p| M \underbrace{\mathbf{L} \mathbf{L}^{-1}}_1 [u - \theta^{*T} \omega] \\ &= \underbrace{|k_p| M \mathbf{L}}_{\text{SPR}} [\mathbf{L}^{-1} u - \theta^{*T} \underbrace{\mathbf{L}^{-1} \omega}_{\xi}] \\ &= \underbrace{|k_p| M \mathbf{L}}_{\text{SPR}} [\underbrace{\mathbf{L}^{-1} u}_{\zeta} - \theta^{*T} \xi] \end{aligned}$$

Then, we select the control

$$\boxed{\zeta = \theta^T \xi} \Rightarrow \boxed{u = L(s)[\theta^T \xi]}$$

Filtered signal:

$$\boxed{\xi = L(s)^{-1}[\omega]} \quad (\text{Vector})$$

The equation error renders

$$e_a = \underbrace{|k_p| M L}_{\text{SPR}} [\theta^T \xi - \theta^{*T} \xi]$$

$$\Rightarrow e_a = |k_p| M L [\tilde{\theta}^T \xi]$$

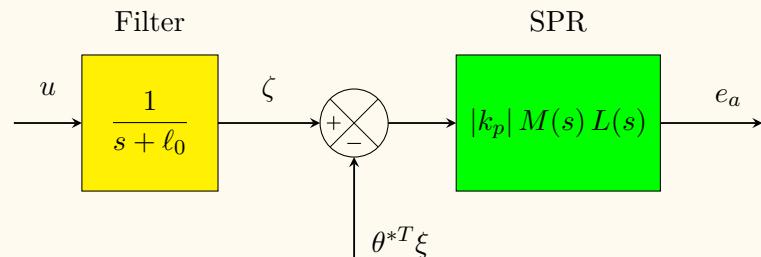


Figura 77: Interpretation.

Result: The update law for θ can be designed as in the case $n^* = 1$!

Important: The control u is easily implemented! (By *backstepping!*)

Recall that

$$\xi = \frac{1}{s + \ell_0} \omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\xi} + \ell_0 \xi = \omega$$

The control u is

$$\begin{aligned} u &= (s + \ell_0) \theta^T \xi = (\dot{\theta}^T \xi + \theta^T \dot{\xi}) + \ell_0 (\theta^T \xi) \\ &= \dot{\theta}^T \xi + \theta^T (\underbrace{\dot{\xi} + \ell_0 \xi}_{\omega}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \theta^T \omega + \dot{\theta}^T \xi} \end{aligned}$$

where $\dot{\theta}$ is available!

★ Note that no differentiator is used to obtain the control u !

4.3.1 LYAPUNOV DESIGN

The derivation of the update law is similar to the previous case.

Error equation: \Rightarrow

$$e_a = \underbrace{|k_p| M L}_{\text{SPR}} [\tilde{\theta}^T \xi]$$

State space representation:

$$\begin{cases} \dot{e} = A_m e + B_m [\tilde{\theta}^T \xi] \\ e_a = C_m e \end{cases}$$

★ $\{A_m, B_m, C_m\}$ is a non-minimal realization of $|k_p|M(s)L(s)$.

★ The error vector $e \in \mathbb{R}^{5n-2}$.

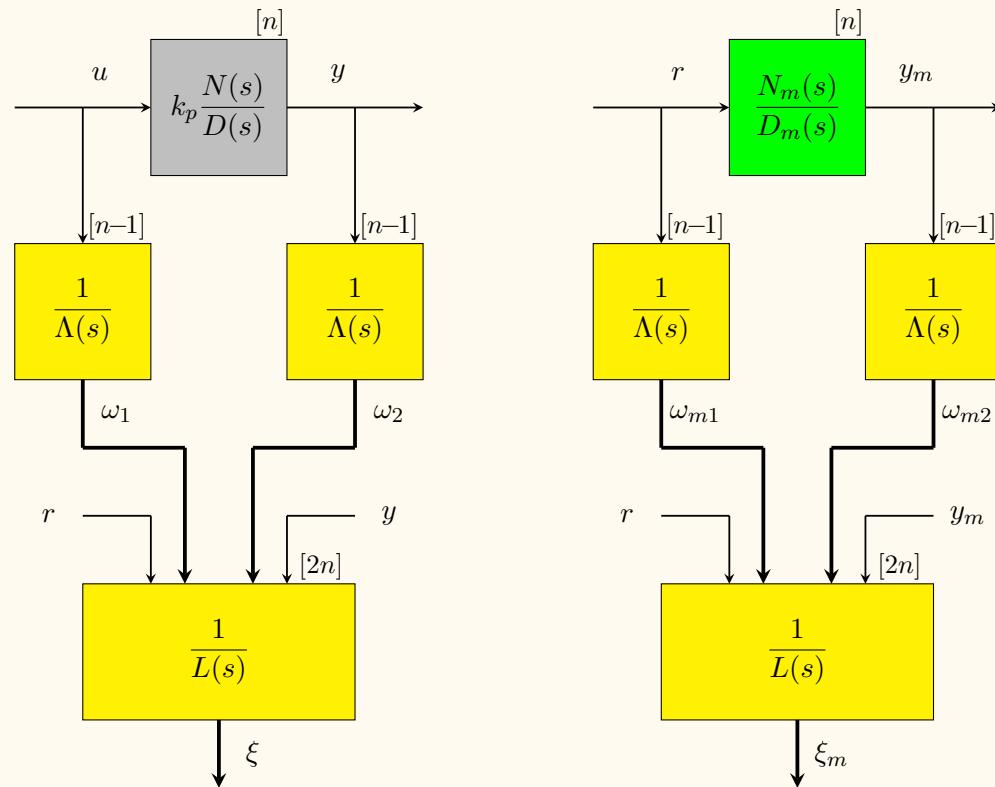


Figura 78: Non-minimal realization with $e \in \mathbb{R}^{5n-2}$.

Since the system $\{A_m, B_m, C_m\}$ is SPR then

$$\exists \begin{cases} P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \end{cases} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} A_m^T P + PA_m = -2Q \\ PB_m = C_m^T \end{cases}$$

Set of equations:

$$\begin{cases} \dot{e} = A_m e + B_m [\tilde{\theta}^T \underline{\xi}] , & e_a = C_m e \\ \dot{\tilde{\theta}} = ? \end{cases}$$

Now, consider the Lyapunov function

$2V(e, \tilde{\theta}) = e^T \textcolor{blue}{P} e + \tilde{\theta}^T \textcolor{blue}{\Gamma^{-1}} \tilde{\theta}$

 $\quad \Gamma = \Gamma^T > 0$

Time derivative:

$$\begin{aligned}
 2\dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + (\dot{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}) \\
 &= (A_m e + B_m \tilde{\theta}^T \xi)^T P e + e^T P (A_m e + B_m \tilde{\theta}^T \xi) + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= e^T A_m^T P e + \tilde{\theta}^T \xi B_m^T P e + e^T P A_m e + e^T P B_m \tilde{\theta}^T \xi + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= e^T \left(\underbrace{A_m^T P + P A_m}_{-2Q} \right) e + 2\tilde{\theta}^T \xi B_m^T P e + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= -2e^T Q e + 2\tilde{\theta}^T \xi B_m^T P e + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta}
 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -e^T Q e + \tilde{\theta}^T \xi B_m^T P e + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} \\
 &= -e^T Q e + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left[\Gamma \xi \underbrace{B_m^T P e}_{C_m e = e_a} + \dot{\theta} \right]
 \end{aligned}$$

We choose the update law:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \xi e_a$$

Result.

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0$$

- ★ The previous regressor ω has been replaced by ξ .
- ★ The dynamics of the filter $L^{-1}(s)$ has been included.

From the above analysis, we have that

$$\omega \in \mathcal{L}_\infty$$

Since $L^{-1}(s)$ is BIBO, then

$$\xi = \underbrace{L^{-1}(s)}_{\text{BIBO}} \underbrace{\omega}_{\mathcal{L}_\infty} \Rightarrow \xi \in \mathcal{L}_\infty$$

Comments

- The control signal is modified! It is not only $\theta^T \omega$!
- Note that the extra term $\dot{\theta}^T \xi \rightarrow 0$ as $\theta \rightarrow \theta^*$.
- The extra term acts only during the identification transient.

Summary

Subsystem	Equation	Dimension
Plant	$y = P(s) u$	n
Model	$y_m = M(s) r$	n
Tracking error	$e_a = \text{sign}(k_p)(y - y_m)$	
Control law	$u = \theta^T \omega + \dot{\theta}^T \xi$	
SV filters	$\dot{\omega}_1 = A_f \omega_1 + b_f u$	$n - 1$
	$\dot{\omega}_2 = A_f \omega_2 + b_f y$	$n - 1$
Regressor	$\omega^T = [\omega_1^T \ y \ \omega_2^T \ r]$	
ξ -Filter	$\dot{\xi} = -\ell_0 \xi + \omega, \quad \ell_0 > 0$	$2n$
Update law	$\dot{\theta} = -\Gamma \xi e_a$	$2n$

System total dimension:

$$N = 8n - 2$$

4.3.2 SIMULAÇÕES

Example 19 2nd order plant.

Classificação do sistema:
 $n = 2$ (ordem)
 $n^* = 2$ (grau relativo)
 $n_p = 4$ (# de parâmetros)

Planta.....: $P(s) = \frac{k_p}{s^2 - 2s}$

Modelo.....: $M(s) = \frac{3}{(s + 1)(s + 3)}$

Filtros.....: $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s + 1}$

Polinômio.....: $L(s) = s + \ell_0$

Matching : $\theta^{*T} = [-6 \ -21 \ 18 \ 3]$
 $\|\theta^*\| = 28.4605$

Simulação #1 Condição inicial nula & $\theta(0) \approx \theta^*$.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0.9\theta^*$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 1 I$

$$\ell_0 = 1$$

$$k_p = 1$$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

★ Esta simulação mostra que a parte linear está correta.

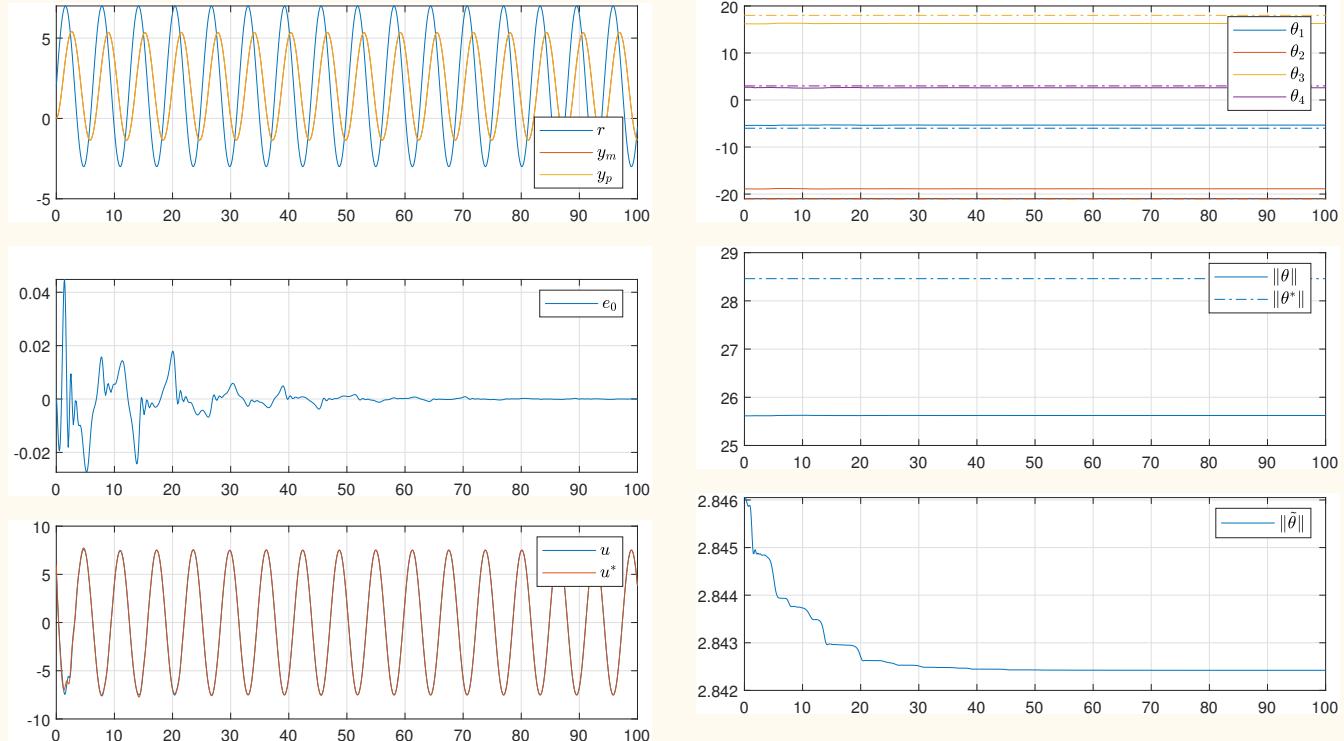


Figura 79: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig01.m`)

Simulação #2 Condições iniciais nulas & ganho pequeno.

Condições iniciais.....: $y(0) = 0$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 1I$

$$\ell_0 = 1$$

$$k_p = 1$$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

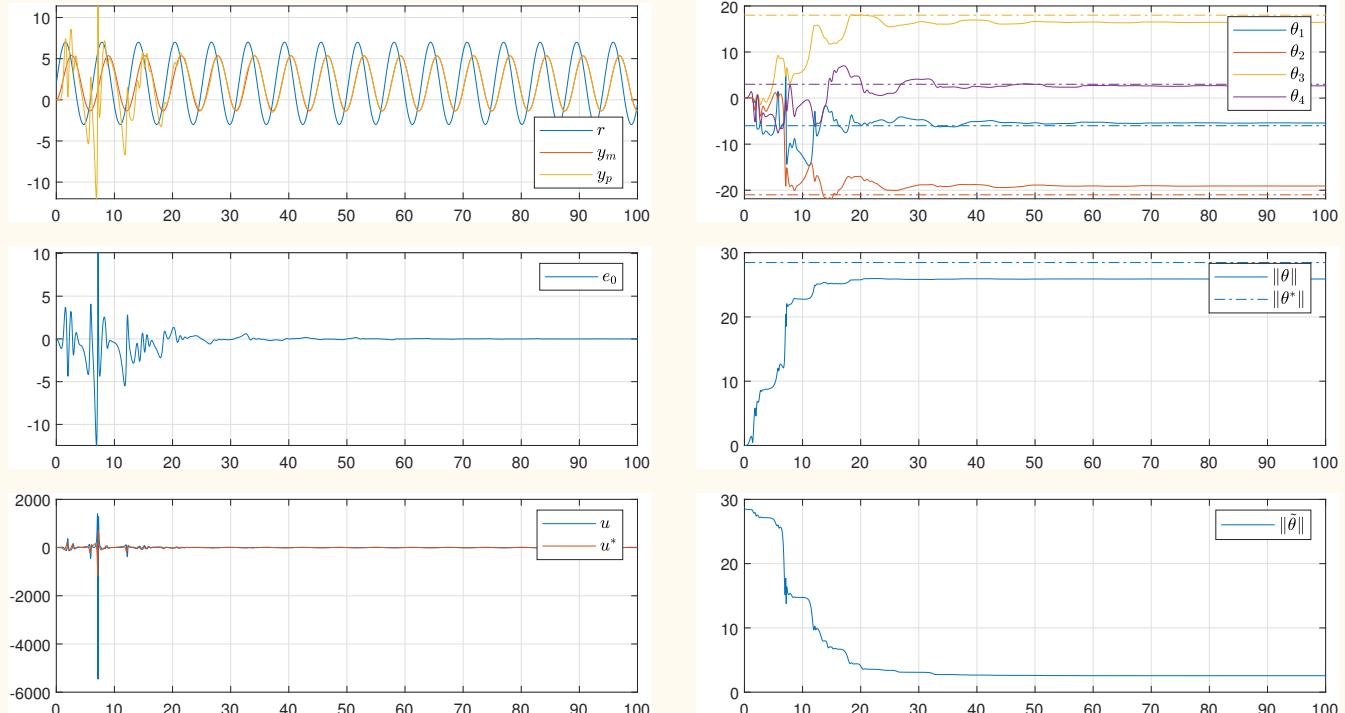


Figura 80: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig02.m`)

Simulação #3 Condições iniciais pequenas & ganho pequeno.

Condições iniciais.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 1I$

$$\ell_0 = 1$$

$$k_p = 1$$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

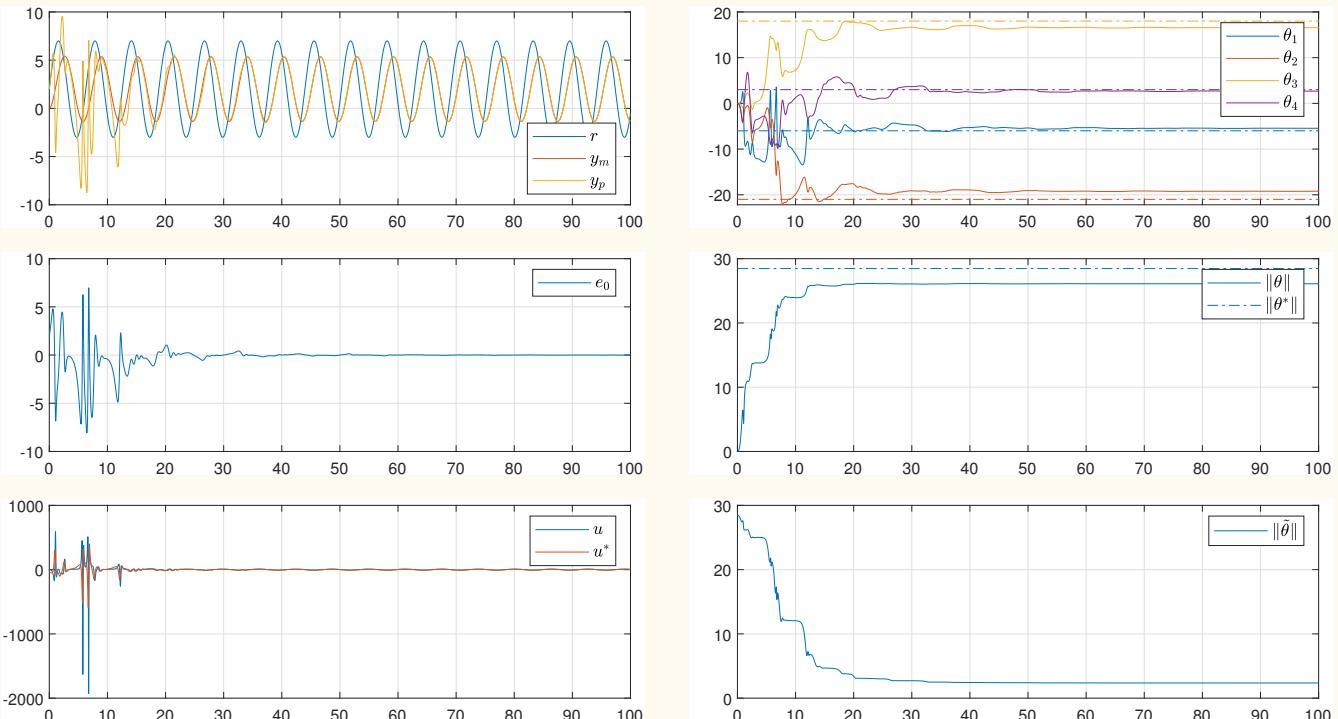


Figura 81: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig03.m`)

Simulação #4 Condições iniciais pequenas & ganho grande.

Condições iniciais.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

$$\ell_0 = 1$$

$$k_p = 1$$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

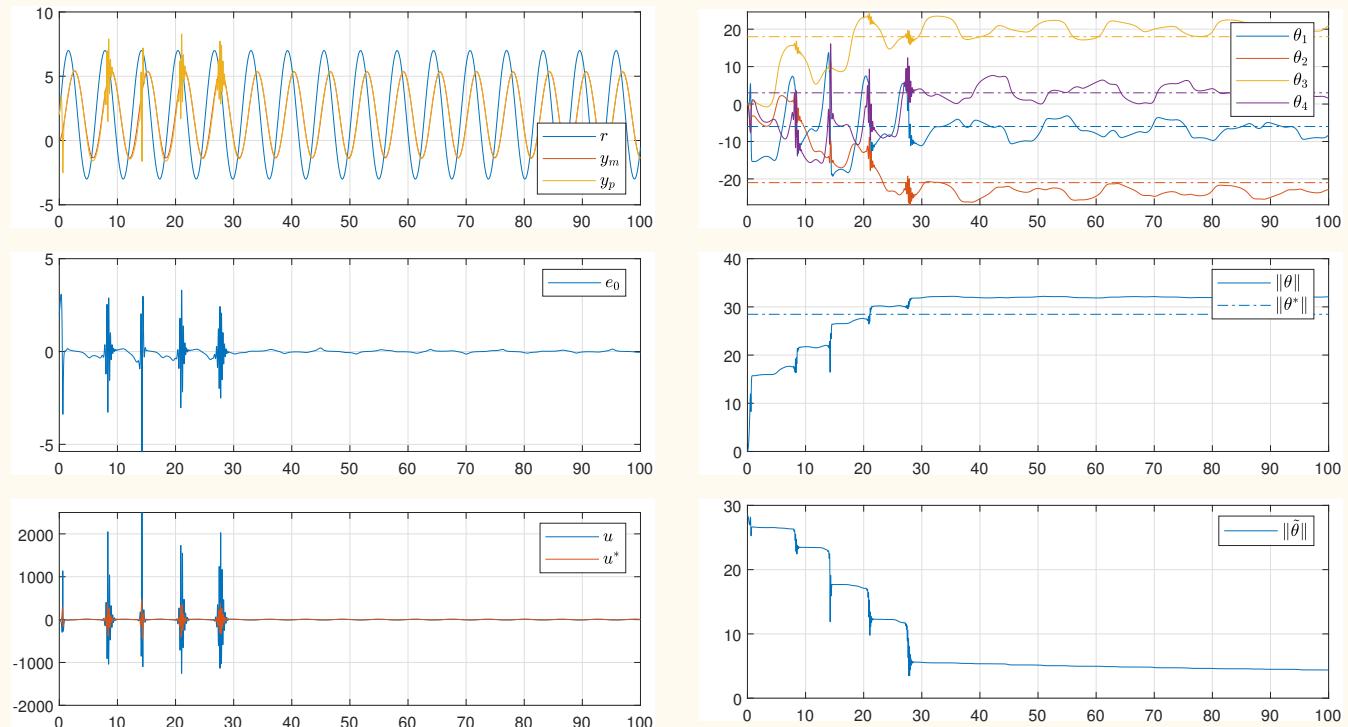


Figura 82: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig04.m`)

Simulação #5 Condição inicial grande & ganho grande.

Condições iniciais.....: $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

$$\ell_0 = 1$$

$$k_p = 1$$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5 \sin(t)$

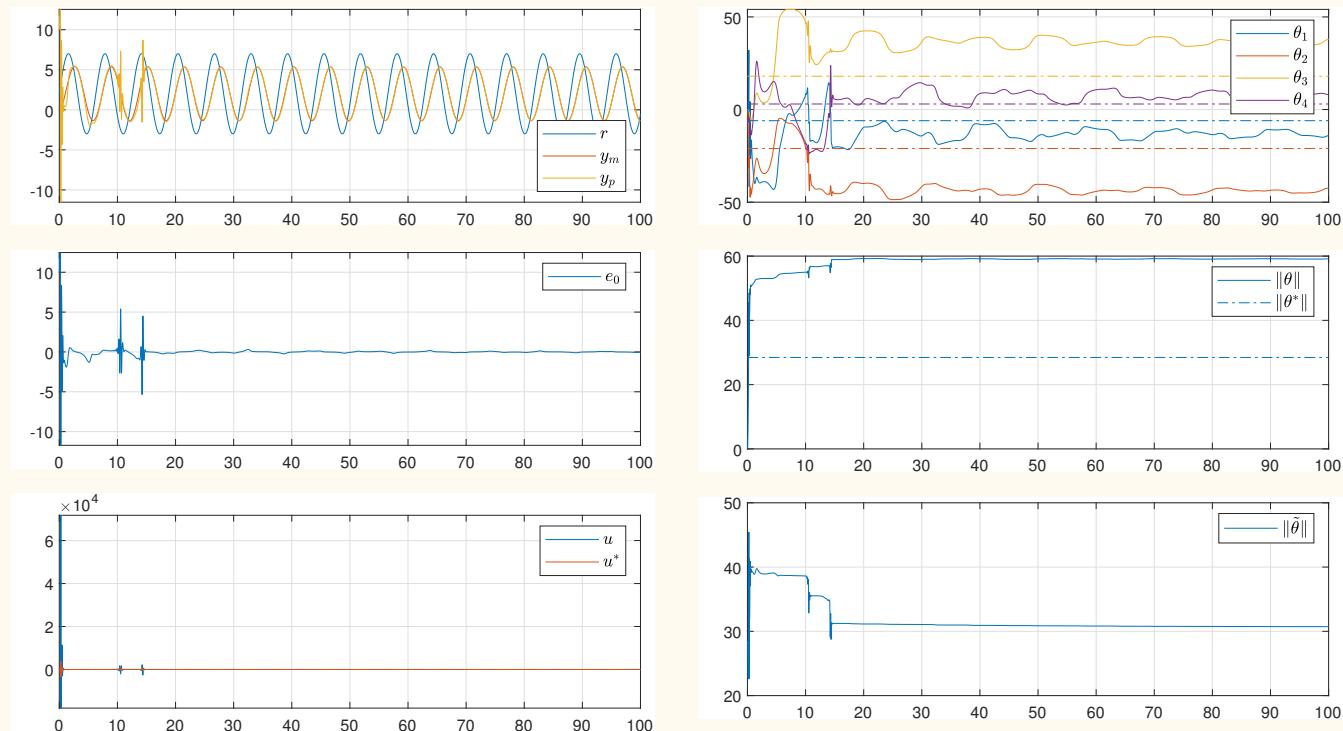


Figura 83: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig05.m`)

Simulação #6 Idem com excitação por onda quadrada.

Condições iniciais.....: $y(0) = 10$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = 10 I$

$$\ell_0 = 1$$

$$k_p = 1$$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5\text{sqw}(\pi t/10)$

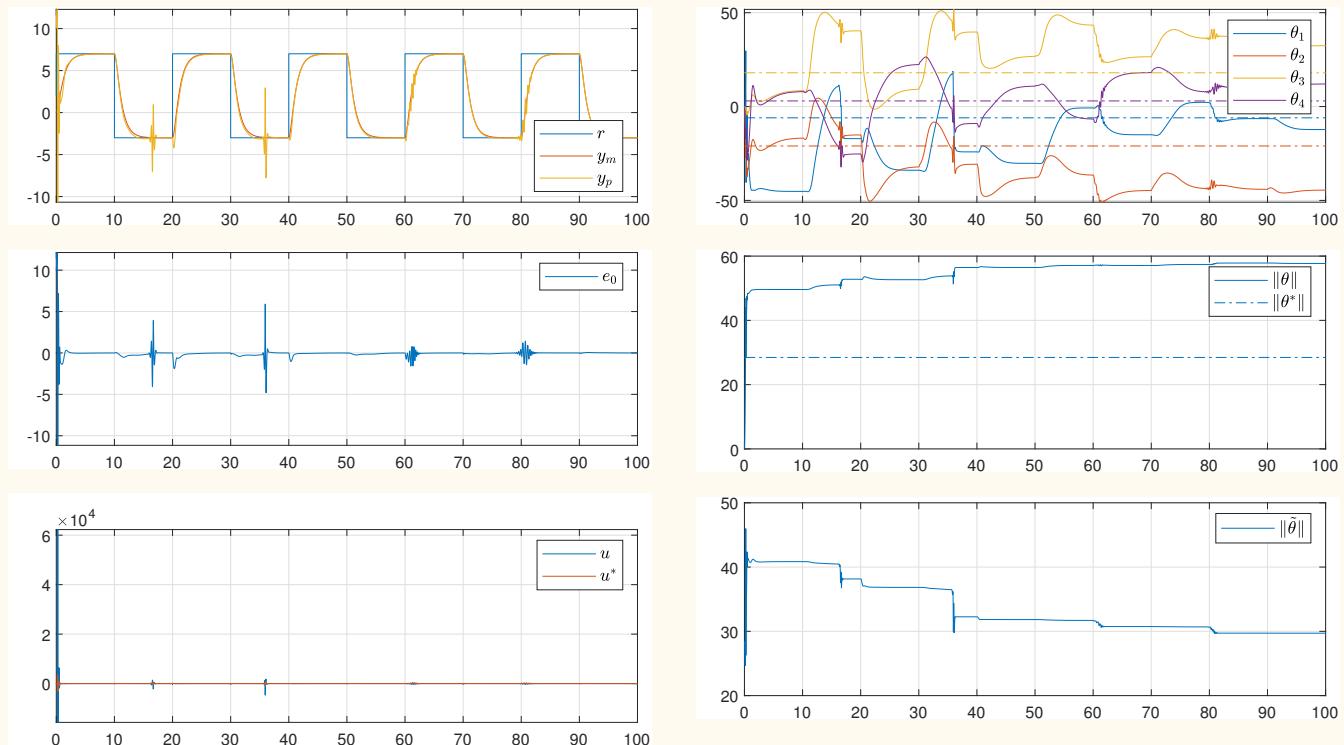


Figura 84: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig06.m`)

Simulação #7 Efeito da escolha **inadequada** do ganho de adaptação.

Condições iniciais.....: $y(0) = 2$

$$y_m(0) = 0$$

$$\theta^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Parâmetros.....: $\Gamma = \text{diag}\{10, 0.01, 10, 10\}$

$$\ell_0 = 3$$

$$k_p = 1$$

Sinal de referência....: $r = 2 + 5\text{sqw}(\pi t/10) + 5 \sin(t)$

★ A teoria garante estabilidade do sistema $\forall \Gamma > 0$!

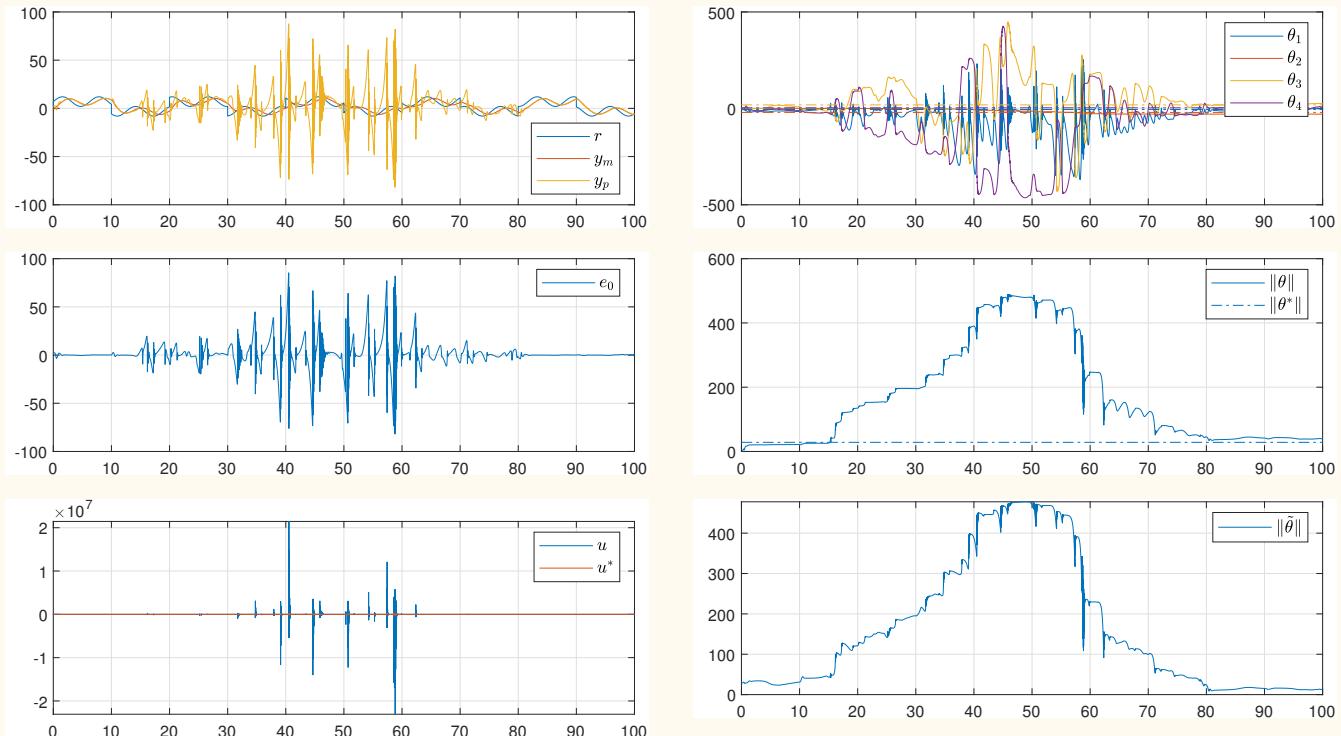


Figura 85: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto.

(Script: `fig07.m`)

4.4 CASO GERAL $n^* > 1$

Problem:

- ★ The previous algorithm cannot be generalized to the case $n^* > 2$.
- ★ Monopoli multiplier trick fails.
- ★ The control u could not be implemented since $\ddot{\theta}, \ddot{\dot{\theta}}, \dots$ are not available.
- ★ The update law is driven by a prediction error.
- The solution discussed in this section was developed in the 80's.

4.4.1 MÉTODO POR LYAPUNOV ($n^* > 1$)

Ref.: [Tao:2003], (pag. 204)

Plant:

$$y = P(s) u$$

Model:

$$y_m = M(s) r$$

Solution: Select a polynomial $L(s)$ (Monopoli multiplier) such that

$M(s)L(s)$ is SPR

$$\text{degree}(L) = n^* - 1$$

Error equation:

$$e_0 = \textcolor{violet}{k_p} M [u - \theta^{*T} \omega]$$

★ The unknown $\textcolor{violet}{k_p}$ will be estimated. \Rightarrow It cannot be absorbed by the model.

Then, we can rewrite the equation as:

$$e_0 = M \textcolor{blue}{L} \left[\underbrace{\textcolor{violet}{k_p} (\underbrace{L^{-1} u}_{\zeta} - \theta^{*T} \underbrace{L^{-1} \omega}_{\xi})}_{\text{Scalar}} \right]$$

Filters:

$$\zeta = L^{-1} u \quad (\text{Scalar})$$

$$\xi = L^{-1} \omega \quad (\text{Vector})$$

Error equation: $e_0 = ML \left[\textcolor{violet}{k}_p (\zeta - \theta^{*T} \xi) \right]$

- ★ A prediction can be obtained from the estimates ρ and θ .
- ★ An estimate ρ of $\textcolor{violet}{k}_p$ is essential for the prediction.

Prediction: $\hat{e}_0 = ML \left[\rho (\zeta - \theta^T \xi) + \kappa \epsilon m_0^2 \right]$

$$\boxed{\kappa > 0}$$

- ★ $\kappa \epsilon m_0^2$ is a stabilizing term required to prove convergence of e_0 .

★ Normalizing signal: $m_0^2 = \xi^T \xi + \chi^2$

Definition: $\boxed{\chi = \zeta - \theta^T \xi} = L^{-1}u - \theta^T L^{-1}\omega$

Tracking error: $e_0 = ML \left[\textcolor{violet}{k}_p (\zeta - \theta^{*T} \xi) \right]$

Prediction: $\hat{e}_0 = ML \left[\rho \chi + \textcolor{red}{\kappa \epsilon m_0^2} \right]$

Prediction error:

$$\boxed{\epsilon = e_0 - \hat{e}_0}$$

Dynamics of the prediction error:

$$\epsilon = e_0 - \hat{e}_0$$

$$= ML \left[\textcolor{violet}{k}_p \left(\zeta - \underbrace{\theta^{*T} \xi}_{(\theta - \tilde{\theta})^T \xi} \right) - \rho \chi - \textcolor{red}{\kappa \epsilon m_0^2} \right]$$

$$= ML \left[\textcolor{violet}{k}_p \tilde{\theta}^T \xi + \textcolor{violet}{k}_p \left(\underbrace{\zeta - \theta^T \xi}_{\chi} \right) - \rho \chi - \textcolor{red}{\kappa \epsilon m_0^2} \right]$$

$$= ML \left[\textcolor{violet}{k}_p \tilde{\theta}^T \xi - \tilde{\rho} \chi - \textcolor{red}{\kappa \epsilon m_0^2} \right]$$

★ The block diagram shows the stabilizing term.

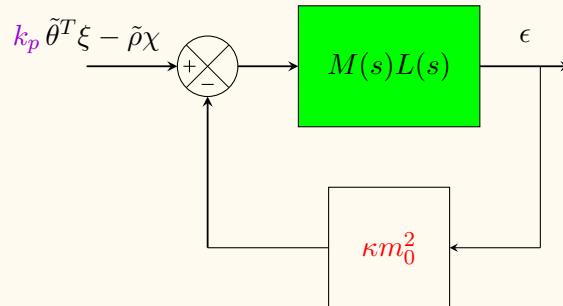


Figura 86: Stabilizing term.

State space representation:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae + B[k_p \tilde{\theta}^T \xi - \tilde{\rho} \chi - \kappa \epsilon m_0^2] \\ \epsilon = Ce \end{cases}$$

★ $\{A, B, C\}$ is a **non-minimal realization** of $M(s)L(s)$.

Since the system $\{A, B, C\}$ is SPR then

$$\exists \begin{cases} P = P^T > 0 \\ Q = Q^T > 0 \end{cases} \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} A^T P + PA = -2Q \\ PB = C^T \end{cases}$$

Lyapunov function:

$$2V(e, \tilde{\theta}, \tilde{\rho}) = e^T P e + |\textcolor{violet}{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \gamma^{-1} \tilde{\rho}^2$$

Time derivative:

$$\begin{aligned} 2\dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + |\textcolor{violet}{k}_p| (\dot{\tilde{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}) + 2\gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} \\ &= (Ae + \textcolor{blue}{B} [\textcolor{violet}{k}_p \tilde{\theta}^T \xi - \tilde{\rho} \chi - \kappa \epsilon m_0^2])^T P e + e^T P (Ae + \textcolor{blue}{B} [\textcolor{violet}{k}_p \tilde{\theta}^T \xi - \tilde{\rho} \chi - \kappa \epsilon m_0^2]) + \\ &\quad + 2|\textcolor{violet}{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + 2\gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} \end{aligned}$$

After rearranging the terms,

$$2\dot{V} = e^T \underbrace{(A^T P + PA)}_{-2Q} e + 2e^T P B \left[k_p \tilde{\theta}^T \xi - \tilde{\rho} \chi - \kappa \epsilon m_0^2 \right] + 2|k_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} + 2\gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\rho}$$

Using the relation $B^T Pe = Ce = \epsilon$,

$$\dot{V} = -e^T Q e - \kappa \epsilon^2 m_0^2 + |k_p| \tilde{\theta}^T \left[\underbrace{\text{sign}(k_p) \xi \epsilon + \Gamma^{-1} \dot{\theta}}_{\text{sign}(k_p) \Gamma \xi \epsilon + \Gamma^{-1} \dot{\theta}} \right] + \tilde{\rho} \left[\underbrace{-\chi \epsilon}_{-\chi \epsilon} + \underbrace{\gamma^{-1} \dot{\rho}}_{\gamma^{-1} \dot{\rho}} \right]$$

We choose the update laws

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = -\text{sign}(k_p) \Gamma \xi \epsilon \\ \dot{\rho} = \gamma \chi \epsilon \end{array} \right.$$

which gives

$$\dot{V} = -e^T Q e - \kappa \epsilon^2 m_0^2 \leq 0$$

Result:

- $V(t)$ is monotone non-increasing, bounded above by $V(0)$ and below by 0.
- $e, \theta, \rho \in \mathcal{L}_\infty$
- $e \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \epsilon \in \mathcal{L}_\infty \quad (\text{since } \epsilon = Ce)$
- Integrating $\dot{V} \Rightarrow e, \epsilon m_0 \in \mathcal{L}_2$
- $e \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \epsilon \in \mathcal{L}_2$
- $\dot{\theta} = -\text{sign}(\underline{k_p}) \Gamma \underbrace{\frac{\xi}{m_0}}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{\epsilon m_0}_{\mathcal{L}_2} \Rightarrow \dot{\theta} \in \mathcal{L}_2$
- $\dot{\rho} = \gamma \underbrace{\frac{\chi}{m_0}}_{\mathcal{L}_\infty} \underbrace{\epsilon m_0}_{\mathcal{L}_2} \Rightarrow \dot{\rho} \in \mathcal{L}_2$

★ We cannot conclude that $\dot{\theta}, \dot{\rho} \in \mathcal{L}_\infty$.

Technical difficulty : How to show convergence of e_0 .

Problem: $\epsilon \in \mathcal{L}_\infty \not\Rightarrow e_0, \hat{e}_0 \in \mathcal{L}_\infty$!!

Required steps for a demonstration:

- $y \in \mathcal{L}_\infty$ (hard part)
- $u \in \mathcal{L}_\infty$
- $\epsilon \rightarrow 0$
- $\chi \rightarrow 0$
- $e_0 \rightarrow 0$

Problems of this algorithm:

- (1) It is not possible to assure that $\tilde{\rho} \rightarrow 0$ even under PE!

Note that if $\theta \equiv \theta^*$ then,

$$\begin{aligned}\chi &= \zeta - \theta^T \xi = L^{-1} \theta^T \omega - \theta^T L^{-1} \omega \\ &= L^{-1} \theta^{*T} \omega - \theta^{*T} L^{-1} \omega = 0\end{aligned}$$

Therefore, $\theta \equiv \theta^* \Rightarrow \chi \equiv 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\dot{\rho} = 0}$$

- (2) The control law $u(t)$ seems to play no role in the analysis !

It is selected as $u = \theta^T \omega$.

However, for any other selection, the analysis holds the same.

Ideally, the control should be $u = L \theta^T \xi$, but this cannot be implemented.

Summary

Subsystem	Equation	Dimension
Plant	$y = P(s) u$	n
Model	$y_m = M(s) r$	n
Tracking error	$e_0 = y - y_m$	
Control law	$u = \theta^T \omega$	
SV filters	$\dot{\omega}_1 = A_f \omega_1 + b_f u$	$n - 1$
	$\dot{\omega}_2 = A_f \omega_2 + b_f y$	$n - 1$
Regressor	$\omega^T = [\omega_1^T \ y \ \omega_2^T \ r]$	
ξ -Filter	$\xi = L^{-1}(s)[\omega]$	$2n(n^* - 1)$
ζ -Filter	$\zeta = L^{-1}(s)[u]$	$n^* - 1$

Subsystem	Equation	Dimension
Prediction	$\hat{e}_0 = M(s)L(s)[\rho\chi + \kappa\epsilon m_0^2]$ $\chi = \zeta - \theta^T\xi$ $m_0^2 = \xi^T\xi + \chi^2$	n
Prediction error	$\epsilon = e_0 - \hat{e}_0$	
Update law	$\dot{\theta} = -\text{sign}(k_p)\Gamma\epsilon\xi$ $\dot{\rho} = \gamma\epsilon\chi$	$2n$ 1

System total dimension:

$$N = (2n + 1)(n^* - 1) + 7n - 1$$

Warning: The signal of χ is swapped in [Tao:2003], (pag. 204) .

As a result, the sign of $\dot{\rho}$ is also swapped.

★ ξ may be obtained from much lower order filters.

4.4.2 REDUCED ORDER FILTERS

The order of the filters in the above table are:

SV filters	$\dot{\omega}_1 = A_f\omega_1 + b_f u$ $\dot{\omega}_2 = A_f\omega_2 + b_f y$	$n - 1$ $n - 1$
ξ -filter	$\xi = L^{-1}(s)[\omega]$	$2n(n^* - 1)$
ζ -filter	$\zeta = L^{-1}(s)[u]$	$n^* - 1$

Total order:

$$N = 2(n - 1) + (2n + 1)(n^* - 1)$$

However, they can be implemented more efficiently.

Example 20 Plant with $n = n^* = 3$.

In this case

$$\begin{cases} \Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0 \\ L(s) = s^2 + \ell_1 s + \ell_0 \end{cases}$$

Recall that

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_f \\ \dot{u}_f \\ y_f \\ \dot{y}_f \end{bmatrix} = \frac{1}{\Lambda(s)} \begin{bmatrix} u \\ s u \\ y \\ s y \end{bmatrix}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\Lambda(s)} \begin{bmatrix} u \\ s u \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\Lambda(s)} \begin{bmatrix} y \\ s y \end{bmatrix}$$

$$\xi = \frac{1}{L(s)} \omega = \frac{1}{L(s)\Lambda(s)} \begin{bmatrix} u \\ s u \\ y \\ s y \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = \frac{1}{L(s)\Lambda(s)} \begin{bmatrix} u \\ s u \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{L(s)\Lambda(s)} \begin{bmatrix} y \\ s y \end{bmatrix}$$

Define a 4th order filter

$$\frac{1}{H(s)} = \frac{1}{L(s)\Lambda(s)} = \frac{1}{s^4 + h_3s^3 + h_2s^2 + h_1s + h_0}$$

State-space realization:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = A\Omega_1 + Bu \\ \dot{\Omega}_2 = A\Omega_2 + By \end{cases}$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h_0 & -h_1 & -h_2 & -h_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{L(s)\Lambda(s)} \begin{bmatrix} u \\ su \\ s^2 u \\ s^3 u \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{L(s)\Lambda(s)} \begin{bmatrix} y \\ sy \\ s^2 y \\ s^3 y \end{bmatrix}$$

Then,

$$\omega_1 = \frac{L(s)}{H(s)} \begin{bmatrix} u \\ su \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_0 & \ell_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_0 & \ell_1 & 1 \end{bmatrix} \Omega_1, \quad \omega_2 = \frac{L(s)}{H(s)} \begin{bmatrix} y \\ sy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_0 & \ell_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_0 & \ell_1 & 1 \end{bmatrix} \Omega_2$$

$$\xi_1 = \frac{1}{H(s)} \begin{bmatrix} u \\ su \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega_1, \quad \xi_2 = \frac{1}{H(s)} \begin{bmatrix} y \\ sy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega_2$$

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{H(s)} \begin{bmatrix} su \\ s^2 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega_1, \quad \dot{\xi}_2 = \frac{1}{H(s)} \begin{bmatrix} sy \\ s^2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega_2$$

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{1}{H(s)} \begin{bmatrix} s^2 u \\ s^3 u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega_1, \quad \ddot{\xi}_2 = \frac{1}{H(s)} \begin{bmatrix} s^2 y \\ s^3 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Omega_2$$

The total order of the filters according to the table is

$$N = 2(n - 1) + (2n + 1)(n^* - 1) = 4 + 14 = \boxed{18}$$

The efficient implementation requires only

Ω -filters	$\dot{\Omega}_1 = A\Omega_1 + Bu$	$(n - 1) + (n^* - 1)$
	$\dot{\Omega}_2 = A\Omega_2 + By$	$(n - 1) + (n^* - 1)$

Total order: $N = 2(n - 1) + 2(n^* - 1) = 4 + 4 = \boxed{8}$

4.4.3 SIMULAÇÕES

Example 21 3rd order plant.

Classificação do sistema: $n = 3$ (ordem)

$n^* = 3$ (grau relativo)

$n_p = 6$ (# de parâmetros)

Planta.....: $P(s) = \frac{k_p}{s^2(s + a)}$

Modelo.....: $M(s) = \frac{k_m}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$

Filtro de estado: $\frac{1}{\Lambda(s)} = \frac{1}{(s + 1)^2}$

Polinômio.....: $L(s) = (s + 1.5)(s + 2.5)$ $\left(\Rightarrow M(s)L(s) = \frac{k_m(s + 1.5)(s + 2.5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}\right)$

Simulação #1 Condições iniciais nulas & $\theta(0) \approx \theta^*$.

Condições iniciais.....: $y_p(0) = 0$ $\theta(0) = 0.95 \theta^*$

$y_m(0) = 0$ $\rho(0) = 0.95 k_p$

$\hat{e}_0(0) = 0$

Parâmetros.....: $k_p = 1$ $\Gamma = 10 I$

$a = 0.5$ $\gamma = 10$

$k_m = 6$ $\kappa = 1$

Sinal de referência....: $r = dc + 5\text{sqw}(\pi t/11) + 2\text{sqw}(\pi t/3) + 2 \sin(t)$

Matching: $\theta^{*T} = [-19.25 \ -5.5 \ -23.875 \ 17.875 \ 24.75 \ 6]$

$\|\theta^*\| = 44.033$

★ O transitório piora com $a \rightarrow 0$.

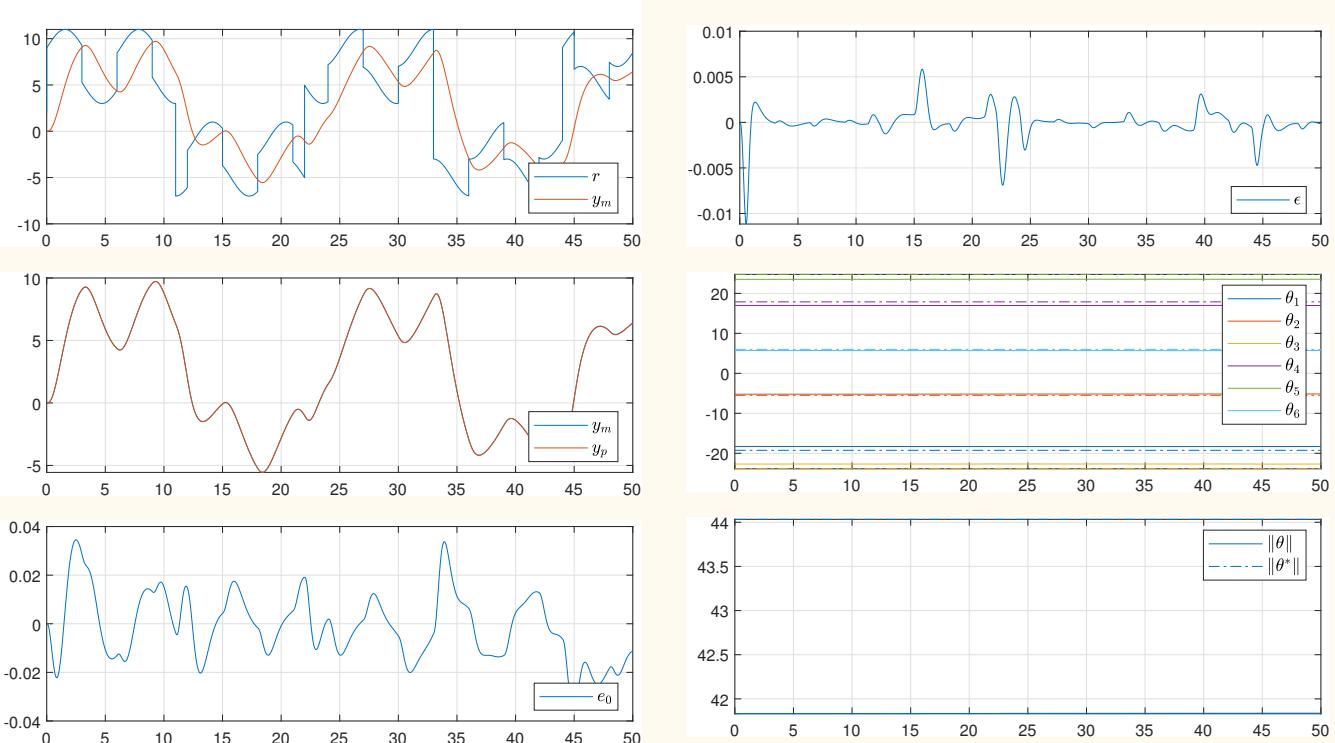


Figura 87: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto (caso $n^* = 3$).

(fig01.m)

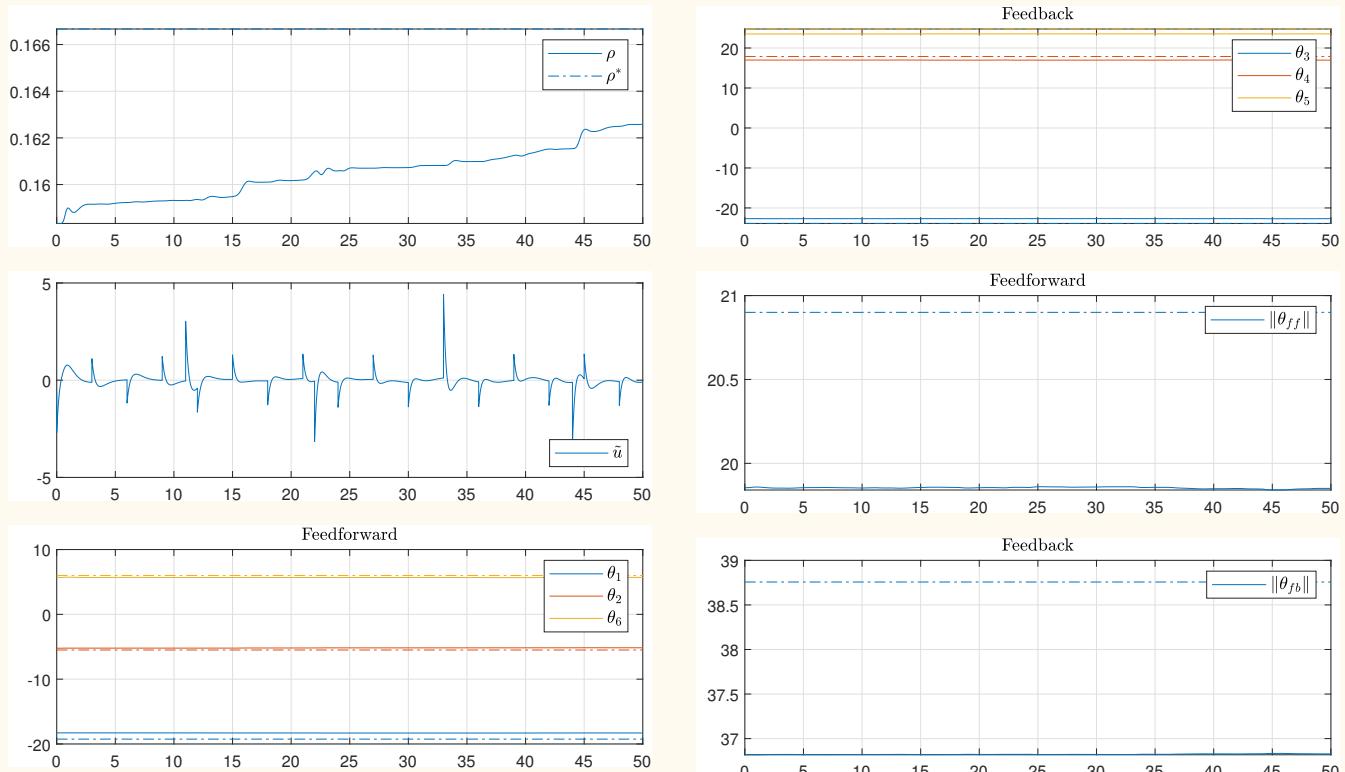


Figura 88: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto (caso $n^* = 3$).

([fig01.m](#))

Simulação #2 Condições iniciais pequenas.

Condições iniciais.....: $y_p(0) = 2$ $\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
 $y_m(0) = 0$ $\rho(0) = 0$
 $\hat{e}_0(0) = 0$

Parâmetros.....: $k_p = 1$ $\Gamma = 10 I$
 $a = 0.5$ $\gamma = 10$
 $k_m = 6$ $\kappa = 1$

Sinal de referência....: $r = dc + 5\text{sqw}(\pi t/11) + 2\text{sqw}(\pi t/3) + 2\sin(t)$

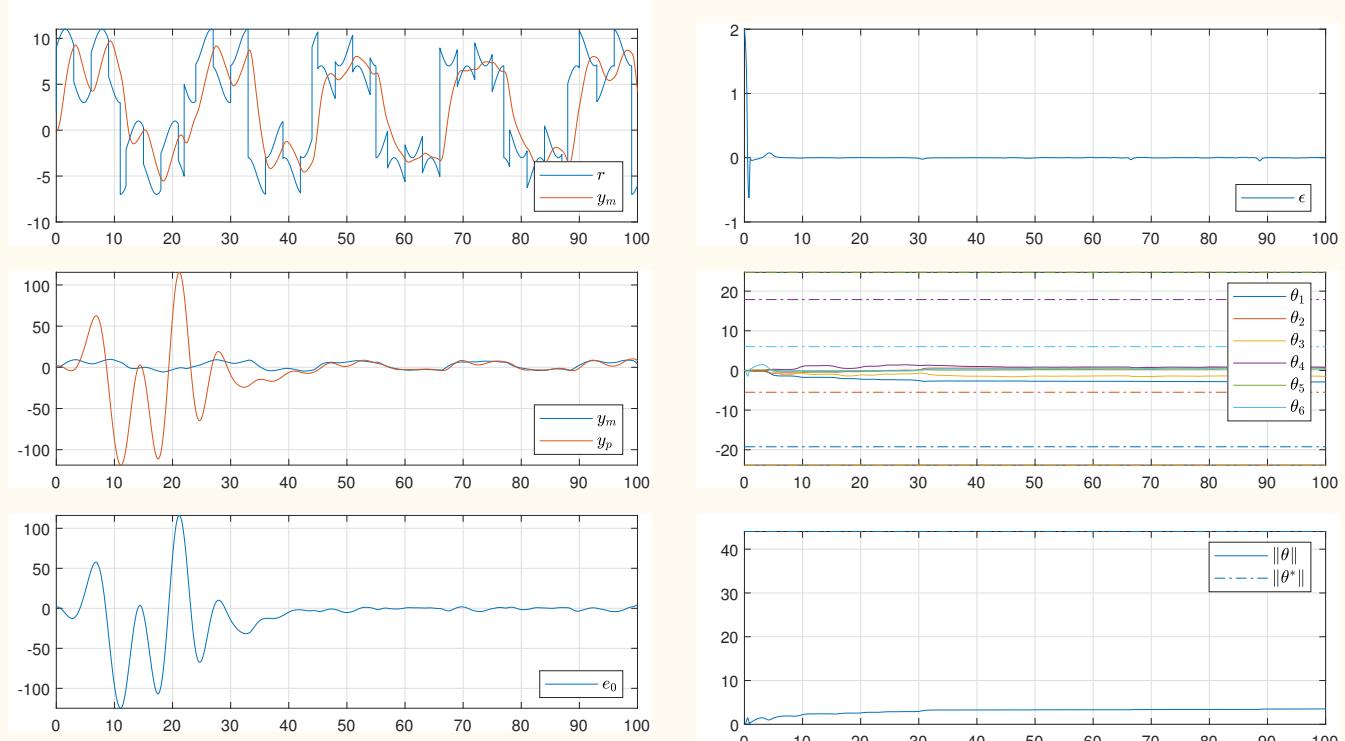


Figura 89: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto (caso $n^* = 3$).

[fig02.m]

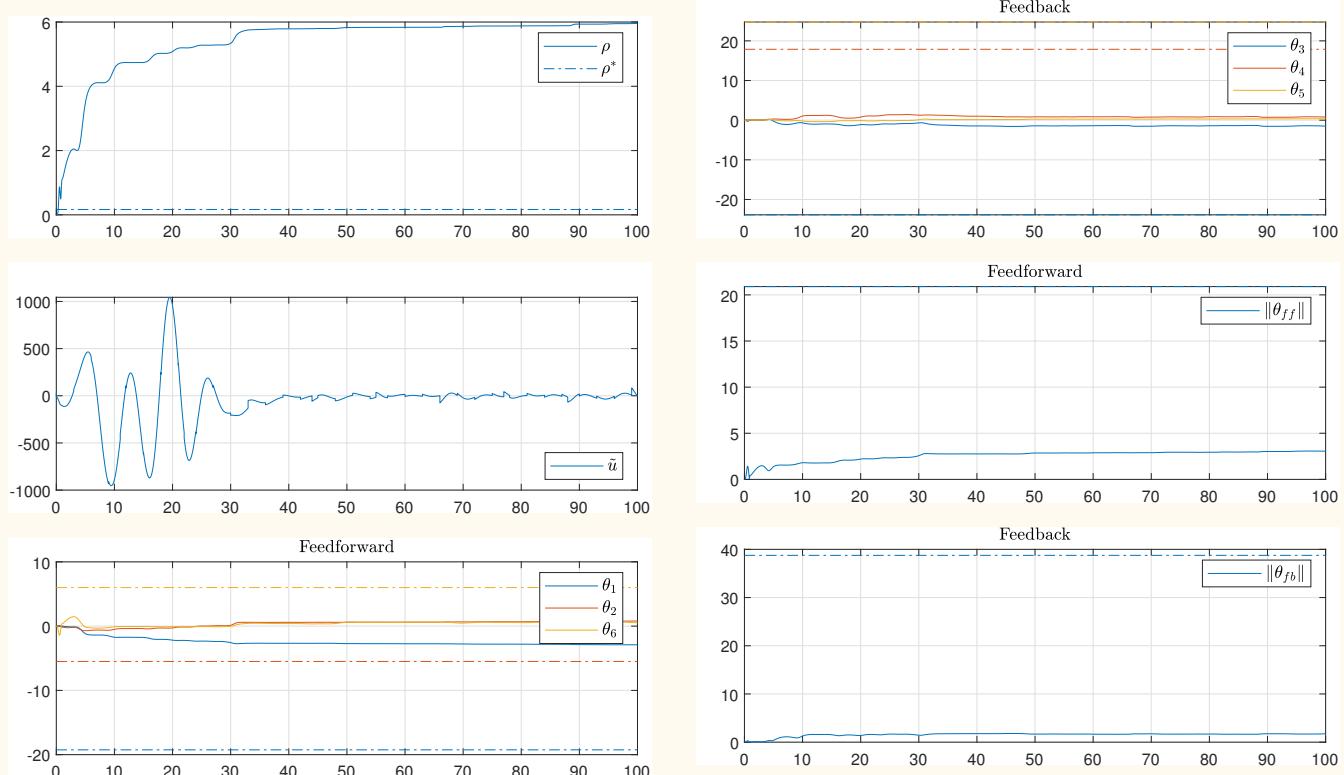


Figura 90: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto (caso $n^* = 3$).

(fig02.m)

Simulação #3 Condições iniciais grandes.

Condições iniciais.....: $y_p(0) = 10$ $\theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
 $y_m(0) = 0$ $\rho(0) = 0$
 $\hat{e}_0(0) = 0$

Parâmetros.....: $k_p = 1$ $\Gamma = 10 I$
 $a = 0.5$ $\gamma = 10$
 $k_m = 6$ $\kappa = 1$

Sinal de referência....: $r = dc + 5\text{sqw}(\pi t/11) + 2\text{sqw}(\pi t/3) + 2\sin(t)$

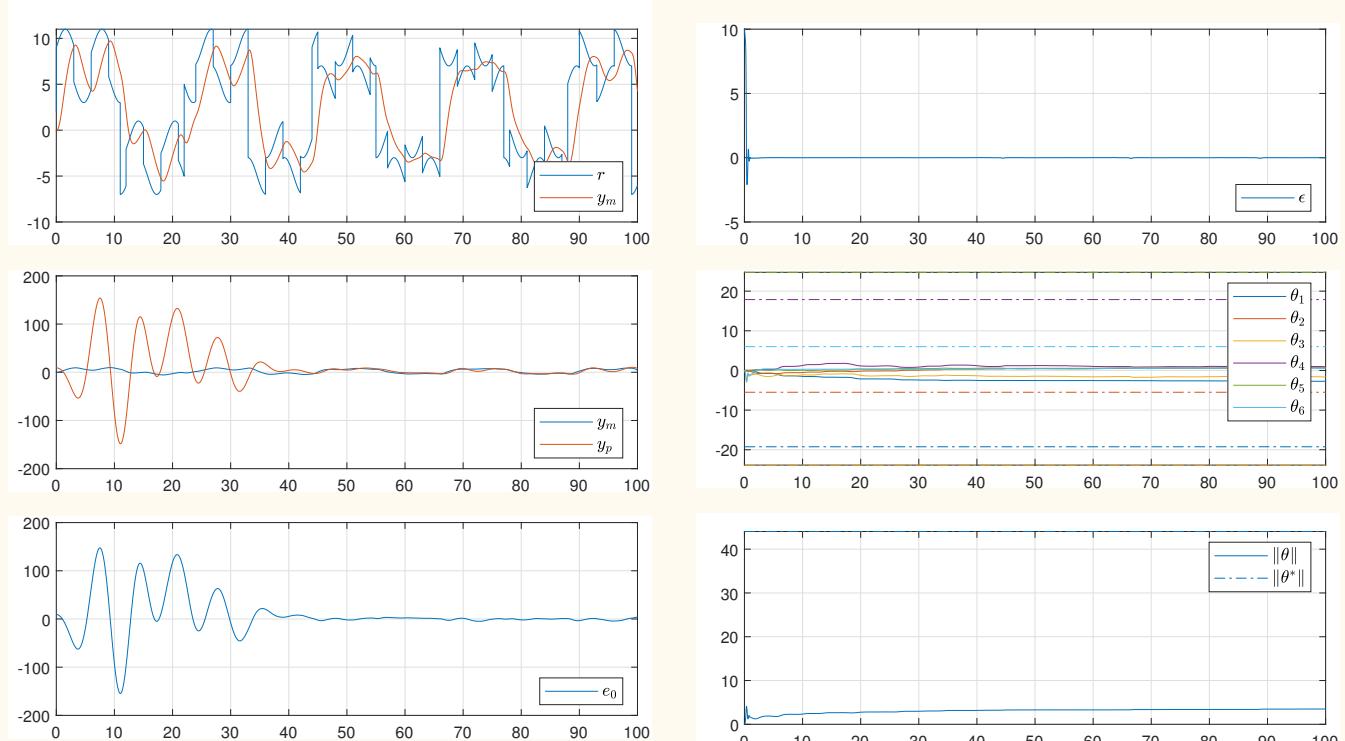


Figura 91: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto (caso $n^* = 3$).

[fig03.m]

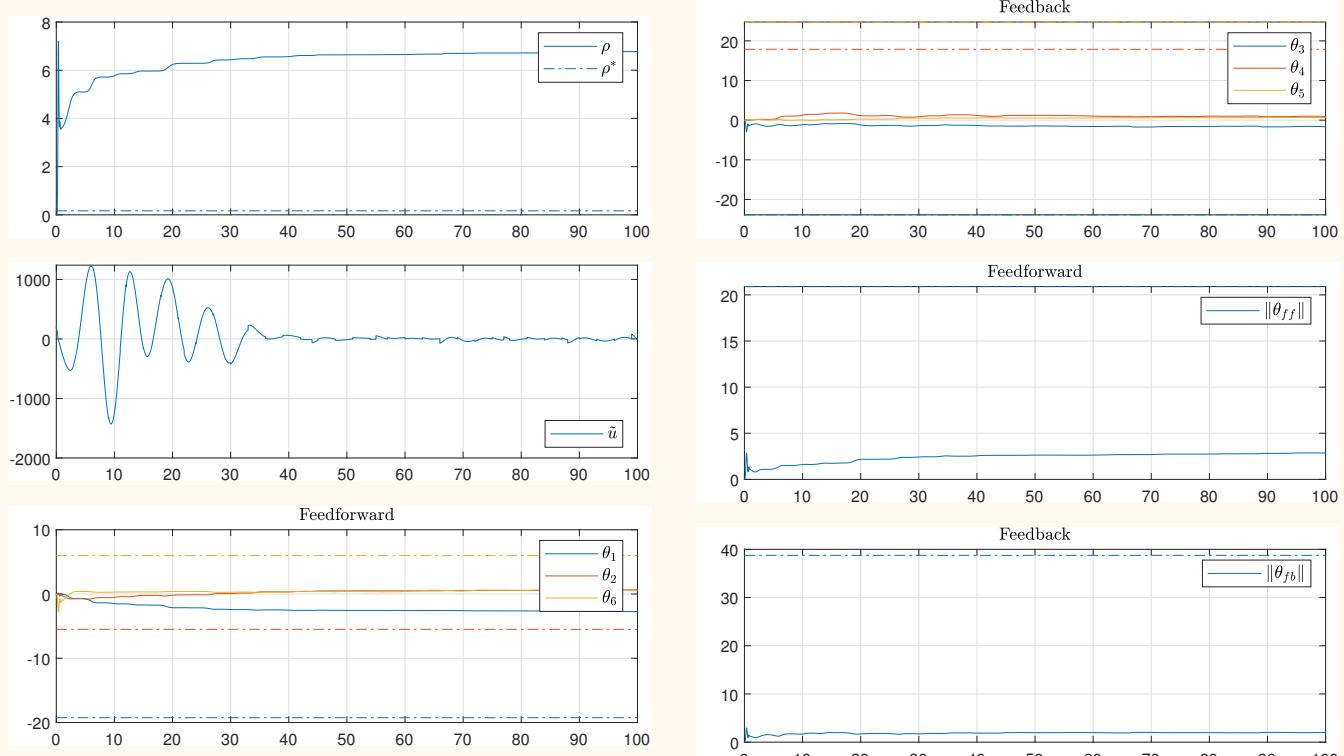


Figura 92: Resultado da simulação com algoritmo MRAC direto (caso $n^* = 3$).

([fig03.m](#))

4.4.4 MÉTODO DO GRADIENTE ($n^* > 1$)

Ref.: [Tao:2003], (pag. 211)

Planta:

$$y = P(s) u$$

Modelo:

$$y_m = M(s) r$$

Controle:

$$u = \theta^T \omega$$

A equação do erro pode ser escrita como:

$$e_0 = k_p M(s) [u - \theta^{*T} \omega]$$

$$= k_p \left[\underbrace{M u}_{\zeta} - \theta^{*T} \underbrace{M \omega}_{\xi} \right]$$

Filtros:

$$\boxed{\zeta = Mu}$$

$$\boxed{\xi = M\omega}$$

Portanto:

$$\boxed{e_0 = k_p [\zeta - \theta^{*T} \xi]}$$

★ Neste esquema k_p também será adaptado.

Utilizando estimas ρ e θ , calculamos a predição: $\hat{e}_0 = \rho \left[\underbrace{\zeta - \theta^T \xi}_{-\chi} \right]$

Definindo o sinal:

$$\boxed{\chi = -\zeta + \theta^T \xi}$$

A predição é escrita como:

$$\boxed{\hat{e}_0 = -\rho \chi}$$

Erro de predição:

$$\begin{aligned}\epsilon &= e_0 - \hat{e}_0 \\&= k_p [\zeta - \theta^{*T} \xi] + \rho \chi \\&= k_p [\zeta - (\theta - \tilde{\theta})^T \xi] + \rho \chi \\&= k_p \tilde{\theta}^T \xi + k_p [\underbrace{\zeta - \theta^T \xi}_{-\chi}] + \rho \chi \\&= k_p \tilde{\theta}^T \xi + \tilde{\rho} \chi\end{aligned}$$

★ Note que não é uma equação dinâmica.

As leis de adaptação são dadas por:

$$\dot{\theta} = -\frac{\text{sign}(k_p)\Gamma\xi\epsilon}{m^2}$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\gamma\chi\epsilon}{m^2}$$

Onde:

$$m^2 = 1 + \xi^T\xi + \chi^2 \quad (\text{Sinal normalizante.})$$

Análise de estabilidade

Considere a função de Lyapunov (parcial):

$$2V(\tilde{\theta}, \tilde{\rho}) = |\textcolor{violet}{k}_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \gamma^{-1} \tilde{\rho}^2$$

Derivando,

$$\dot{V} = -\frac{\epsilon^2}{m^2} \leq 0$$

Teorema. O algoritmo do Gradiente assegura que:

- $\theta, \rho \in \mathcal{L}_\infty$
- $\frac{\epsilon}{m} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$
- $\dot{\theta} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$
- $\dot{\rho} \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$

★ Lembrar que \mathcal{L}_2 significa “quase convergência”.

Dificuldade técnica: Mostrar convergência de e .

Problema:

$$\epsilon \in \mathcal{L}_\infty$$



$$e, \hat{e} \in \mathcal{L}_\infty$$

!!

Passos necessários para a demonstração:

- $e \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$
- $\xi \in \mathcal{L}_\infty$ (parte difícil)
- $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$

- Usando Barbalat,

$$e \rightarrow 0$$

Problems of this algorithm:

- (1) It is not possible to assure that $\tilde{\rho} \rightarrow 0$ even under PE!
- (2) The control law $u(t)$ seems to play no role in the analysis !

Resumo do algoritmo

Subsistema	Equação	Ordem
Planta	$y = P(s) u$	n
Modelo	$y_m = M(s) r$	n
Erro	$e = y - y_m$	
Controle	$u = \theta^T \omega$	
Λ -Filters	$\dot{\omega}_1 = A_f \omega_1 + b_f u$	$n - 1$
	$\dot{\omega}_2 = A_f \omega_2 + b_f y$	$n - 1$
Regressor	$\omega^T = [\omega_1^T \ y \ \omega_2^T \ r]$	
ξ -Filter	$\xi = M(s)[\omega]$	$2n^2$
ζ -Filter	$\zeta = M(s)[u]$	n

Subsistema	Equação	Ordem
Predição	$\hat{e} = \rho\chi$ $\chi = \theta^T\xi - \zeta$	
Erro de predição	$\epsilon = e_0 - \hat{e}_0$	
Adaptação	$\dot{\theta} = -\frac{\text{sign}(k_p)\Gamma\epsilon\xi}{m^2}$ $\dot{\rho} = -\frac{\gamma\epsilon\chi}{m^2}$ $m^2 = 1 + \xi^T\xi + \chi^2$	2n 1

Ordem total do sistema:

$$N = 2n^2 + 7n - 1$$

4.4.5 SIMULAÇÕES

(...)

REFERÊNCIAS

Anuradha M. Annaswamy and Alexander L. Fradkov. A historical perspective of adaptive control and learning. *Annual Reviews in Control*, 2021.

Girish Chowdhary and Eric Johnson. Least squares based modification for adaptive control. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1767–1772. IEEE, 2010.

Ramon R. Costa. Lyapunov design of least-squares model reference adaptive control. In *1st Virtual IFAC World Congress (IFAC-V 2020)*, Berlin, Germany, July 11-17 2020.

Ramon R. Costa. Model-reference adaptive control with high-order parameter tuners. In *American Control Conference (ACC2022)*, Atlanta, USA, June 08-10 2022.

Ramon R. Costa. Composite model-reference adaptive control with least-squares estimator. In *IFAC World Congress*, Yokohama, Japan, July 09-14 2023.

Ramon R. Costa. Least-squares model-reference adaptive control with high-order parameter tuners. *Automatica*, 163: 111544, 2024.

Ramon R. Costa, Liu Hsu, Alvaro K. Imai, and Petar Kokotović. Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems. *Automatica*, 39(7):1251–1257, Jul. 2003. [\[doi\]](#).

Dimitrios Dimogianopoulos and Rogelio Lozano. Adaptive control for linear time-varying systems using direct least squares estimation. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3309–3314. IEEE, 1999.

- Manuel A. Duarte and Kumpati S. Narendra. Combined direct and indirect approach to adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(10):1071–1075, 1989.
- S. Evesque, A. M. Annaswamy, S. Niculescu, and A. P. Dowling. Adaptive control of a class of time-delay systems. *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 125(2):186–193, 2003.
- Thor I. Fossen and Jann Peter Strand. Passive nonlinear observer design for ships using lyapunov methods: Full-scale experiments with a supply vessel. *Automatica*, 35(1):3–16, 1999.
- Joseph E. Gaudio, Anuradha M. Annaswamy, José M. Moreu, Michael A. Bolender, and Travis E. Gibson. Accelerated learning with robustness to adversarial regressors. In *Learning for Dynamics and Control*, pages 636–650. PMLR, 2021.
- G. C. Goodwin and D. Q. Mayne. A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control. *Automatica*, 3(1):57–70, 1987.
- Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall PTR, 1996.
- Iasson Karafyllis and Miroslav Krstic. Adaptive certainty-equivalence control with regulation-triggered finite-time least-squares identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(10):3261–3275, 2018.
- Gerhard Kreisselmeier. Adaptive observers with exponential rate of convergence. *IEEE transactions on automatic control*, 22(1):2–8, 1977. [\[doi\]](#).
- M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotović. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, 1995.
- Miroslav Krstic. On using least-squares updates without regressor filtering in identification and adaptive control of nonlinear systems. *Automatica*, 45(3):731–735, 2009.
- Wuquan Li and Miroslav Krstic. Stochastic adaptive nonlinear control with filterless least-squares. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020.

- R. V. Monopoli. Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 19(5):474–484, Oct. 1974. [\[doi\]](#).
- José M. Moreu and Anuradha M. Annaswamy. A stable high-order tuner for general convex functions. *IEEE Control Systems Letters*, 6:566–571, 2021.
- A. Stephen Morse. High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems. In *Systems, Models and Feedback: Theory and Applications*, pages 339–364. Springer, 1992.
- D. R. Mudgett. High-order parameter adjustment laws for adaptive stabilization. In *Proc. 1987 Conf. Info. Sci. Sys.*, 1987.
- David Richard Mudgett. *Problems in parameter adaptive control*. PhD thesis, Yale University, 1988.
- Kumpati S. Narendra and Anuradha M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice-Hall, 1989.
- Kumpati S. Narendra and Lena S. Valavani. Stable adaptive controller design - direct control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 23(8):570–583, 1978. [\[doi\]](#).
- Vladimir O. Nikiforov, Dmitry Gerasimov, and Artem Pashenko. Modular adaptive backstepping design with a high-order tuner. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021.
- R. Ortega. On Morse's new adaptive controller: Parameter convergence and transient performance. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 38(8), Aug. 1993.
- Yongping Pan, Tairen Sun, and Haoyong Yu. On parameter convergence in least squares identification and adaptive control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 29(10):2898–2911, 2019.

- Patrick C. Parks. A new proof of the Routh-Hurwitz stability criterion using the second method of Liapunov. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 58, pages 694–702. Cambridge University Press, 1962.
- N. N. Puri and C. N. Weygandt. Second method of Liapunov and Routh’s canonical form. *Journal of the Franklin Institute*, 276(5):365–384, 1963.
- S. S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, 1989.
- J. J. E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice–Hall International, Inc., 1991.
- Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. Adaptive robot control: A new perspective. In *26th IEEE conference on decision and control*, volume 26, pages 192–198. IEEE, 1987.
- Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. Composite adaptive control of robot manipulators. *Automatica*, 25(4):509–519, 1989.
- Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 5th edition, 2016.
- Gang Tao. *Adaptive Control Design and Analysis*. John Wiley & Sons, 2003.
- Li Wang and David R. Mudgett. Improvement of transient response in adaptive control using modified high order tuning. In *Proc. American Contr. Conf.*, pages 282–286, San Francisco, June 1993.
- Fuzhen Zhang. *The Schur Complement and Its Applications*. Springer, 2005.
- Yang Zhu, Miroslav Krstic, Hongye Su, and Chao Xu. Linear backstepping output feedback control for uncertain linear systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10):1080–1098, 2016. [\[doi\]](#).