

Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Trabalho N^o3

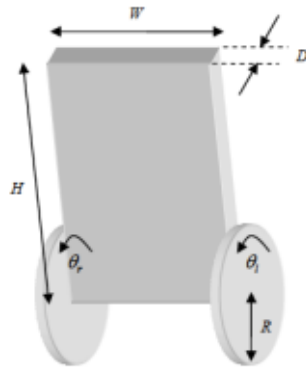
Leonardo Soares da Costa Tanaka - DRE: 121067652

Engenharia de Controle e Automação/UFRJ

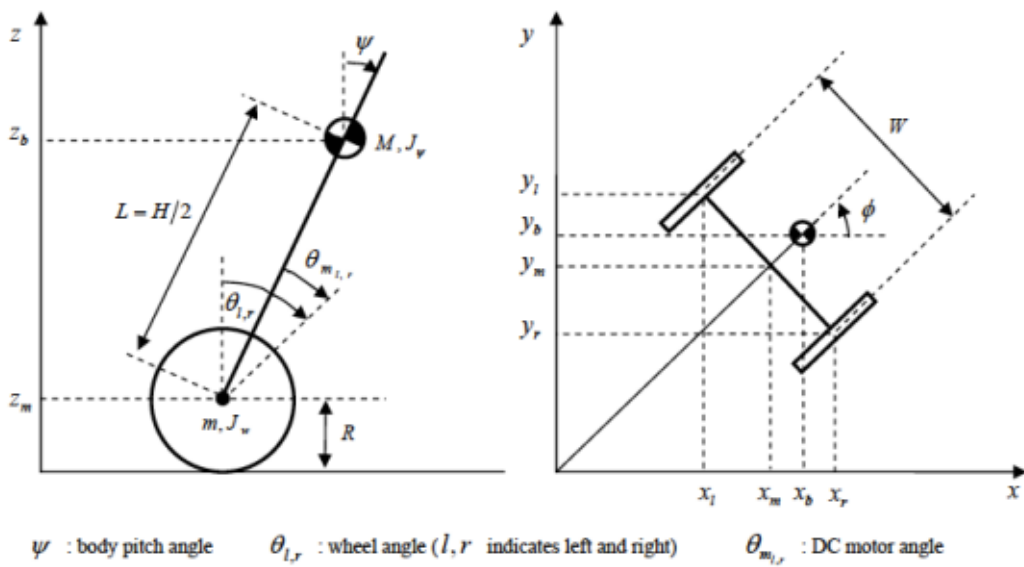
Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2023

Considerando um sistema de pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas:



A vista lateral e superior deste sistema com as variáveis associadas é mostrada na seguinte figura:



Os parâmetros físicos deste sistema são dados por:

- $g = 9.8\text{m/s}^2$: gravidade
- $m = 0.03\text{kg}$: peso da roda
- $R = 0.04\text{m}$: raio da roda
- $J_W = \frac{mR^2}{2}$: momento de inércia da roda
- $M = 0.6\text{kg}$: peso do corpo
- $W = 0.14\text{m}$: largura do corpo
- $D = 0.04\text{m}$: profundidade do corpo
- $H = 0.144\text{m}$: altura do corpo
- $L = \frac{H}{2}$: distância do centro de massa do corpo ao eixo da roda
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em pitch
- $J_\phi = \frac{M(W^2+D^2)}{12}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em rumo
- J_m : inércia do motor DC desprezível
- $R_m = 6.69\Omega$: resistência do motor DC
- L_m : indutância do motor desprezível
- $K_t = Ke = 0.4$: constante de torque (Nm/A) e constante de EMF (V s/rad)
- $f_m = 0.0022$: atrito entre o corpo e o motor
- $n = 1$: redução do motor

Considerando os graus de liberdade $\{\theta, \psi, \phi\}$ onde $\theta = (\theta_l + \theta_r)/2 \rightarrow \dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$.

A posição cartesiana do carrinho (composto pelas 2 rodas), no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ R \end{bmatrix} \quad (1)$$

Considerando que as rodas do carrinho não escorregam, o carrinho é um sistema com restrições não-holonômicas, sendo que a velocidade do carrinho é dada por:

$$\dot{X}_m = R \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (2)$$

A posição cartesiana das rodas (esquerda e direita) no sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$, é dada por:

$$\begin{aligned} X_l &= \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_r &= \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ -\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

A velocidade cartesiana das rodas é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_l &= \dot{X}_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{X}_r &= \dot{X}_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

A posição cartesiana do corpo no sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$, é dada por:

$$X_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = X_m + L \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

A velocidade cartesiana do corpo é dada por:

$$\dot{X}_b = \dot{X}_m + L \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \end{bmatrix} \dot{\psi} + L \begin{bmatrix} -\sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (6)$$

Levando em consideração que a massa do motor DC é desprezível e utilizando a fórmula de energia cinética translacional de um único corpo, a energia cinética translacional é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m\dot{X}_l^T\dot{X}_l + \frac{1}{2}m\dot{X}_r^T\dot{X}_r + \frac{1}{2}M\dot{X}_b^T\dot{X}_b = \\
&= \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2}M \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + L\cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - L\sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} + L\sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} + L\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & -L\sin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + L\cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - L\sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} + L\sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} + L\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} \\ -L\sin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix} =
\end{aligned} \tag{8}$$

1 Derivação e obtenção das equações dinâmicas