Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Trabalho Nº3

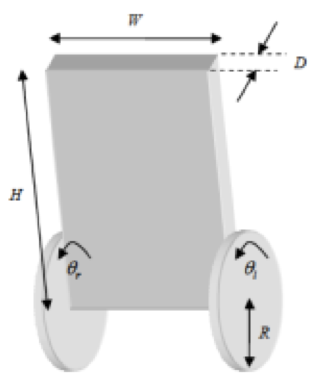
Leonardo Soares da Costa Tanaka - DRE: 121067652

Engenharia de Controle e Automação/UFRJ

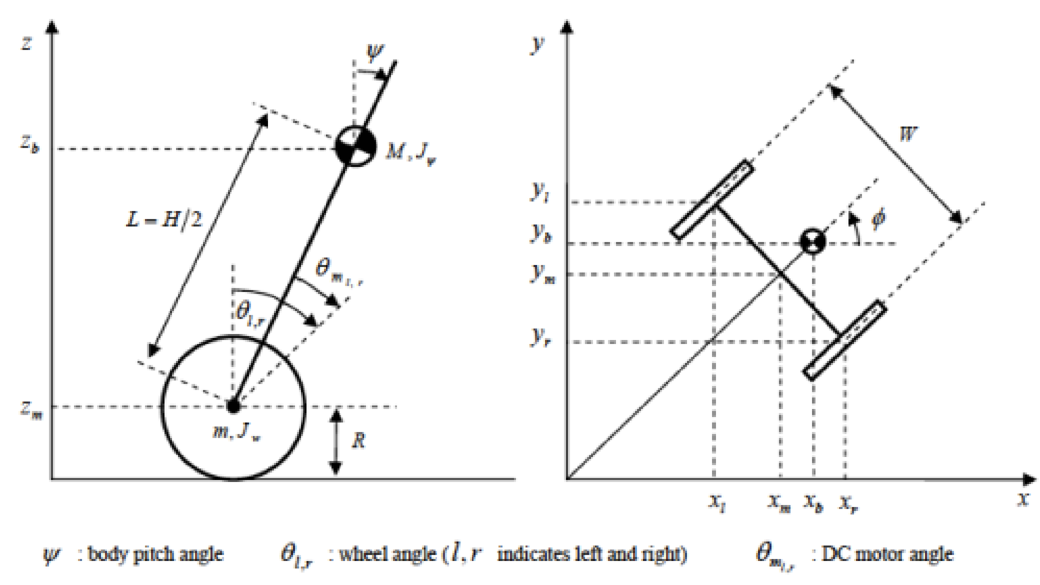
Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2023

Considerando um sistema de pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas:



A vista lateral e superior deste sistema com as variáveis associadas é mostrada na seguinte figura:



ψ : body pitch angle $\theta_{l,r}$: wheel angle (l, r indicates left and right) $\theta_{m_{l,r}}$: DC motor angle

Os parâmetros físicos deste sistema são dados por:

- $g = 9.8\text{m/s}^2$: gravidade
- $m = 0.03\text{kg}$: peso da roda
- $R = 0.04\text{m}$: raio da roda
- $J_W = \frac{mR^2}{2}$: momento de inércia da roda
- $M = 0.6\text{kg}$: peso do corpo
- $W = 0.14\text{m}$: largura do corpo
- $D = 0.04\text{m}$: profundidade do corpo
- $H = 0.144\text{m}$: altura do corpo
- $L = \frac{H}{2}$: distância do centro de massa do corpo ao eixo da roda
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em pitch
- $J_\phi = \frac{M(W^2+D^2)}{12}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em rumo
- J_m: inércia do motor DC desprezível
- $R_m = 6.69\Omega$: resistência do motor DC
- L_m: indutância do motor desprezível
- $K_t = Ke = 0.4$: constante de torque (Nm/A) e constante de EMF (V s/rad)
- $f_m = 0.0022$: atrito entre o corpo e o motor
- $n = 1$: redução do motor

Considerando os graus de liberdade $\{\theta, \psi, \phi\}$ onde $\theta = (\theta_l + \theta_r)/2 \rightarrow \dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$.

A posição cartesiana do carrinho (composto pelas 2 rodas), no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ R \end{bmatrix} \tag{1}$$

Considerando que as rodas do carrinho não escorregam, o carrinho é um sistema com restrições não-holonômicas, sendo que a velocidade do carrinho é dada por:

$$\dot{X_m} = R \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \tag{2}$$

A posição cartesiana das rodas (esquerda e direita) no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$\begin{aligned} X_l = \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -sin(\phi) \\ cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} sin(\phi) \\ -cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

A velocidade cartesiana das rodas é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{X_l} = \dot{X_m} + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -cos(\phi) \\ -sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{X_r} = \dot{X_m} + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \end{aligned} \tag{4}$$

A posição cartesiana do corpo no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = X_m + L \begin{bmatrix} cos(\phi)sin(\psi) \\ sin(\phi)sin(\psi) \\ cos(\psi) \end{bmatrix} \tag{5}$$

A velocidade cartesiana do corpo é dada por:

$$\dot{X_b} = \dot{X_m} + L \begin{bmatrix} cos(\phi)cos(\psi) \\ sin(\phi)cos(\psi) \\ -sin(\psi) \end{bmatrix} \dot{\psi} + L \begin{bmatrix} -sin(\phi)sin(\psi) \\ cos(\phi)sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \tag{6}$$

Levando em consideração que a massa do motor DC é desprezível e utilizando a fórmula de energia cinética translacional de um único corpo, a energia cinética translacional é dada por:

$$K_{tra} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
T_1 = \frac{1}{2} m \dot{X}_l^T \dot{X}_l + \frac{1}{2} m \dot{X}_r^T \dot{X}_r + \frac{1}{2} M \dot{X}_b^T \dot{X}_b = \\
= \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2} cos(\phi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2} sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2} cos(\phi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2} sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
\frac{1}{2} m \begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2} cos(\phi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2} sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2} cos(\phi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2} sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
\tfrac{1}{2} M \begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + Lcos(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} - Lsin(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} + Lsin(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} + Lcos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} & -Lsin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + Lcos(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} - Lsin(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} + Lsin(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} + Lcos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} \\ -Lsin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix} = \\
= \frac{1}{2} m \left[R^2 cos(\phi)^2 \dot{\theta}^2 - WRcos(\phi)^2 \dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4} cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R^2 sin(\phi)^2 \dot{\theta}^2 - WRsin(\phi)^2 \dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4} sin(\phi)\dot{\phi}^2 \right] + \\
\frac{1}{2} m \left[R^2 cos(\phi)^2 \dot{\theta}^2 + WRcos(\phi)^2 \dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4} cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R^2 sin(\phi)^2 \dot{\theta}^2 + WRsin(\phi)^2 \dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4} sin(\phi)\dot{\phi}^2 \right] + \\
\tfrac{1}{2} M \left[R^2 cos(\phi)^2 \dot{\theta}^2 + L^2 cos(\phi)^2 cos(\psi)^2 \dot{\psi}^2 + L^2 sin(\phi)^2 sin(\psi)^2 \dot{\phi}^2 + 2RLcos(\phi)^2 cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} - 2L^2 sin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} - 2RLsin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + \\
\tfrac{1}{2} M \left[R^2 sin(\phi)^2 \dot{\theta}^2 + L^2 sin(\phi)^2 cos(\psi)^2 \dot{\psi}^2 + L^2 cos(\phi)^2 sin(\psi)^2 \dot{\phi}^2 + 2RLsin(\phi)^2 cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + 2L^2 sin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} + 2RLsin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + \\
\frac{1}{2} M = L^2 sin(\psi)^2 \dot{\psi}^2 = \\
= \frac{m\left[R^2\dot{\theta}^2 - WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2 cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2 sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + L^2 sin(\psi)^2\dot{\psi}^2\right]}{2} = \\
= \frac{m\left[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2 sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi}\right]}{2}
\end{gathered} \tag{8}
$$

Utilizando a fórmula da energia cinética rotacional:

$$
\begin{gathered}
K_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \\
T_2 = \frac{J_\phi \dot{\phi}^2}{2} + \frac{J_\psi \dot{\psi}^2}{2} + \frac{J_w (\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2)}{2} + \frac{J_m n^2 (\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2}{2} + \frac{J_m n^2 (\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2}{2}
\end{gathered} \tag{9}
$$

Considerando que $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$, temos que:

$$
\begin{gathered}
\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2 = 2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2}\dot{\phi}^2, \quad (\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2 + (\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2 = 2(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 + \frac{W^2}{2R^2}\dot{\phi}^2 \\
\dot{\phi} = \frac{R}{W}\left(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l\right)
\end{gathered} \tag{10}
$$

Levando em consideração que J_m é desprezível e utilizando as fórmulas acima, então:

$$
\begin{gathered}
T_2 = J_w \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2} J_w + \frac{W^2}{2R^2} n^2 J_m\right)\dot{\phi}^2 + n^2 J_m (\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 \\
T_2 = J_w \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2} J_w\right)\dot{\phi}^2
\end{gathered} \tag{11}
$$

A energia potencial do sistema pode ser descrito pela soma das energias potenciais dos centros de massa das rodas e do corpo, tal que:

$$U = mgz_l + mgz_r + mgz_b = 2mgR + Mg(R + Lcos(\psi)) \tag{12}$$

1 Derivação e obtenção das equações dinâmicas

Levando em consideração que o Lagrangiano do sistema pode ser descrito pela seguinte equação e os valores de T_1, T_2 e U:

$$\begin{gathered} L = T_1 + T_2 - U \\ L = \frac{m\left[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2 sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi}\right]}{2} + J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right)\dot{\phi}^2 - 2mgR - Mg(R + Lcos(\psi)) \end{gathered} \tag{13}$$

Temos que:

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \psi} = ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\phi}^2 - MRLsin(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + MgLsin(\psi),\ \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mR^2\dot{\theta} + MR^2\dot{\theta} + 2J_w\dot{\theta} + MRLcos(\psi)\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mR^2\ddot{\theta} + MR^2\ddot{\theta} + 2J_w\ddot{\theta} - MRLsin(\psi)\dot{\psi}^2 + MRLcos(\psi)\ddot{\psi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = ML^2\dot{\psi} + MRLcos(\psi)\dot{\theta} + j_\psi\dot{\psi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = ML^2\ddot{\psi} + j_\psi\ddot{\psi} - MRLsin(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + MRLcos(\psi)\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\frac{W^2}{2}\dot{\phi} + ML^2 sin(\psi)^2\dot{\phi} + \left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right)\dot{\phi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = m\frac{W^2}{2}\ddot{\phi} + ML^2 sin(\psi)^2\ddot{\phi} + 2ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} + \left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right)\ddot{\phi} \end{gathered} \tag{14}$$

(a) Utilizando a formulação de Lagrange foi determinado a dinâmica entre as coordenadas generalizadas $\lambda = \begin{bmatrix}\theta & \psi & \phi\end{bmatrix}^T$ e as forças (torques) generalizadas $F = \begin{bmatrix}F_\theta & F_\psi & F_\phi\end{bmatrix}^T$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = F \tag{15}$$

Utilizando a fórmula acima e outras equações (14) para começar a montar a forma matricial:

$$\begin{gathered} \left[(2m + M)R^2 + J_w\right]\ddot{\theta} + MRLcos(\psi)\ddot{\psi} - MRLsin(\psi)\dot{\psi}^2 = F_\theta \\ MRLcos(\psi)\ddot{\theta} + (ML^2 + J_\psi)\ddot{\psi} - ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\phi}^2 - MgLsin(\psi) = F_\psi \\ \left[m\frac{W^2}{2} + ML^2 sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right]\ddot{\phi} + 2ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} = F_\phi \end{gathered} \tag{16}$$

Esta dinâmica pode ser escrita em forma matricial como:

$$M(\lambda)\ddot{\lambda} + C(\lambda, \dot{\lambda}) + G(\lambda) = F \tag{17}$$

onde $M(\cdot) \in \mathbb{R}^{3\times3},\ C(\cdot,\cdot) \in \mathbb{R}^3,\ G(\cdot) \in \mathbb{R}^3$.

Utilizando as equações (16) em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (2m+M)R^2 + 2J_w & MRLcos(\psi) & 0 \\ MRLcos(\psi) & ML^2 + J_\psi & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{W^2}{2} + ML^2 sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w \end{bmatrix}\ddot{\lambda} + \begin{bmatrix} -MRLsin(\psi)\dot{\psi}^2 \\ -ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}^2 \\ 2ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -MgLsin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} = F \tag{18}$$

(b) Determinando a relação entre as forças generalizadas e os torques de cada um das rodas $\{Fl, Fr\}$:

$$F = \begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\psi \\ F_\phi \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} \tag{19}$$

onde $E \in \mathbb{R}^{3\times2}$

Observando o sistema de pêndulo invertido e os graus de liberdade, é possível determinar as seguintes relações:

$$\begin{gathered} F_\theta = F_l + F_r \\ F_\psi = -F_l - F_r \\ F_\phi = -\frac{W}{2R}F_l + \frac{W}{2R}F_r \\ F = \begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\psi \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{20}$$

(c) Determinando a relação entre as forças (torques) generalizadas $\{F_\theta, F_\psi, F_\phi\}$ e a tensão elétrica aplicada em cada motor $\{Vl, Vr\}$ utilizando o modelo de um motor DC:

$$F = Q\dot{\lambda} + H \begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix} \tag{21}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{3\times3}$ e $H \in \mathbb{R}^{3\times2}$.

Levando em consideração a Lei de Kirchhoff das Tensões, a Equação do Torque, a Lei do Motor e a Lei do Gerador. Além disso, o atrito entre o corpo e o motor e o indutância do motor DC L_m é desprezível:

$$
\begin{aligned}
F_{l,r} &= nK_t i_{l,r} + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) \\
V_{l,r} + K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) &= L_m \dot{i}_{l_r} + R_m i_{l,r} \\
i_{l,r} &= \frac{V_{l,r} + K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r})}{R_m} \\
F_{l,r} &= \left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right)(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) + \frac{nK_tV_{l,r}}{R_m}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Pegando a relação (20) entre as forças generalizadas e os torques de cada um das rodas $\{Fl, Fr\}$ e substituindo $\{Fl, Fr\}$ pelos valores obtidos (22):

$$
\begin{gathered}
F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right)(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) + \frac{nK_tV_r}{R_m} \\ \left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right)(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) + \frac{nK_tV_r}{R_m} \end{bmatrix} \\
F = \begin{bmatrix} -2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & 2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & 0 \\ 2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & -2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{W^2}{2R^2}\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{nK_t}{R_m} & \frac{nK_t}{R_m} \\ -\frac{nK_t}{R_m} & -\frac{nK_t}{R_m} \\ -\frac{W}{2R}\frac{nK_t}{R_m} & \frac{W}{2R}\frac{nK_t}{R_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix}
\end{gathered}
\tag{23}
$$

2 Derivação e obtenção das equações de estado

Definindo as variáveis de estado do sistema:

$$
x_1 = \lambda = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix}, \quad x_2 = \dot{\lambda} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}
\tag{24}
$$

Derivando as variáveis de estado do sistema e utilizando as representação (24) como base:

$$
\dot{x_1} = \dot{\lambda} = x_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}
\tag{25}
$$

Para calcular o $M(\lambda)^{-1}$, será necessário calcular o determinante:

$$
\begin{gathered}
det(M) = \begin{vmatrix} (2m+M)R^2 + 2J_w & MRLcos(\psi) & 0 \\ MRLcos(\psi) & ML^2 + J_\psi & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{W^2}{2} + MLsin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w \end{vmatrix} = \\
= [(2m+M)R^2 + 2J_w](ML^2 + J_\psi)(m\frac{W^2}{2} + MLsin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w) - M^2R^2L^2cos(\psi)^2(m\frac{W^2}{2} + MLsin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w)
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Além disso, é necessário calcular a matriz adjunta:

$$M_{adj} = \begin{bmatrix} (ML^2+J_\psi)(m\frac{W^2}{2}+ML^2sin(\psi)^2+J_\phi+\frac{W^2}{2R^2}J_w) & -MRLcos(\psi)(m\frac{W^2}{2}+ML^2sin(\psi)^2+J_\phi+\frac{W^2}{2R^2}J_w) & 0 \\ -MRLcos(\psi)(m\frac{W^2}{2}+ML^2sin(\psi)^2+J_\phi+\frac{W^2}{2R^2}J_w) & [(2m+M)R^2+2J_w](m\frac{W^2}{2}+ML^2sin(\psi)^2+J_\phi+\frac{W^2}{2R^2}J_w) & 0 \\ 0 & 0 & [(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2cos(\psi)^2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Utilizando o determinante e a matriz adjunta para encontrar $M(\lambda)^{-1}$:

$$M(\lambda)^{-1} = \frac{M_{adj}}{det(M)} = \begin{bmatrix} \frac{ML^2+J_\psi}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2cos(\psi)^2} & -\frac{MRLcos(\psi)}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2cos(\psi)^2} & 0 \\ -\frac{MRLcos(\psi)}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2cos(\psi)^2} & \frac{(2m+M)R^2+2J_w}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2cos(\psi)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m\frac{W^2}{2}+MLsin(\psi)^2+J_\phi+\frac{W^2}{2R^2}J_w} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Com isso, tenho tudo que é preciso para preencher a seguinte equação:

$$\dot{x_2} = \ddot{\lambda} = M(\lambda)^{-1}\left[-C(\lambda,\dot{\lambda}) - G(\lambda) + F(\dot{\lambda}, V)\right] \tag{29}$$

3 Determinação dos pontos de equilíbrio do sistema

Considerando $V_l = V_r = 0$, é possível determinar os pontos de equilíbrio de forma trivial. Já que um pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas só estará em equilíbro sem a diferença de potencial nos motores, quando estiver em pé ou de cabeça para baixo verticalmente e sem nenhuma velocidade angular em nenhuma das direções. Logo:

$$\begin{gathered} \bar{\psi} = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..., \pm n\pi\}, n \in \mathbb{N} \\ \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{30}$$

Então, o $\bar{\theta}$ e o $\bar{\phi}$ podem ser quaisquer valores porque não afetam no equilíbrio do sistema.

4 Simulação do sistema não linear com $V_l = V_r = 0$

Podemos simular numericamente o sistema através da função ode45 no matlab ou de uma S-functions com um bloco do mesmo nome no Simulink

(a) Função ode45($\cdot$)

(b) S-functions

5 Linearização do sistema com $\psi = 0$

O sistema será linearizado em relação ao ponto de equilíbrio quando $\psi = 0$. Logo, teremos as seguintes aproximações:

$$\begin{gathered}\widetilde{\theta}=\theta-\bar{\theta},\widetilde{\psi}=\psi-\bar{\psi},\widetilde{\phi}=\phi-\bar{\phi}\\ \dot{\widetilde{\theta}}=\dot{\theta}-\dot{\bar{\theta}},\dot{\widetilde{\psi}}=\dot{\psi}-\dot{\bar{\psi}},\dot{\widetilde{\phi}}=\dot{\phi}-\dot{\bar{\phi}}\\ sin\psi=\widetilde{\psi}\\ cos\psi=1\end{gathered}\tag{31}$$

Assim, obtemos a linearização do sistema:

$$\begin{gathered}M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{ML^2+J_\psi}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2} & -\frac{MRL}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2} & 0\\ -\frac{MRL}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2} & \frac{(2m+M)R^2+2J_w}{[(2m+M)R^2+2J_w](ML^2+J_\psi)-M^2R^2L^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{m\frac{W^2}{2}+\frac{W^2}{2R^2}J_w}\end{bmatrix}\\ C=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\\ G(\lambda)=\begin{bmatrix}0\\-MgL\widetilde{\psi}\\0\end{bmatrix}\\ \dot{\widetilde{x}}_1=\begin{bmatrix}\dot{\widetilde{\theta}}\\ \dot{\widetilde{\psi}}\\ \dot{\widetilde{\phi}}\end{bmatrix}\\ \dot{\widetilde{x}}_2=M^{-1}\left[-G(\widetilde{\lambda})+F(\dot{\widetilde{\lambda}},\widetilde{V})\right]\end{gathered}\tag{32}$$

6 Simulação do sistema linearizado com $F=0$

7 Controle realimentado

O sistema considerado é instável em $\psi=0$. Desta forma é projetado o seguinte controlerealimentado:

$$u=-Kx+Nr\tag{33}$$

onde $u^T=[V_l\quad V_r]$, $x^T=[\theta\quad\psi\quad\phi\quad\dot{\theta}\quad\dot{\psi}\quad\dot{\phi}]$, r é uma entrada de referências para comandar sistema para frente, $N^T=[-0.7071\quad 0.7071]$ e

$$K=\begin{bmatrix}-0.0224 & -25.4867 & -0.7071 & -1.0362 & -2.2530 & -0.0076\\ -0.0224 & -25.4867 & 0.7071 & -1.0362 & -2.2530 & 0.0076\end{bmatrix}\tag{34}$$

Foi simulado a resposta do sistema não linear com este controle realimentado, considerando diferentes condições iniciais.