Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Trabalho Nº3

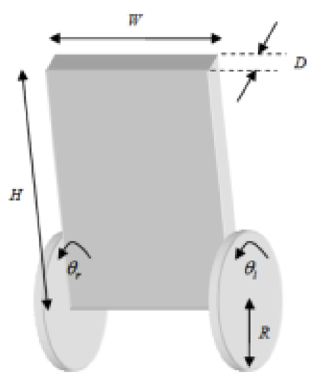
Leonardo Soares da Costa Tanaka - DRE: 121067652

Engenharia de Controle e Automação/UFRJ

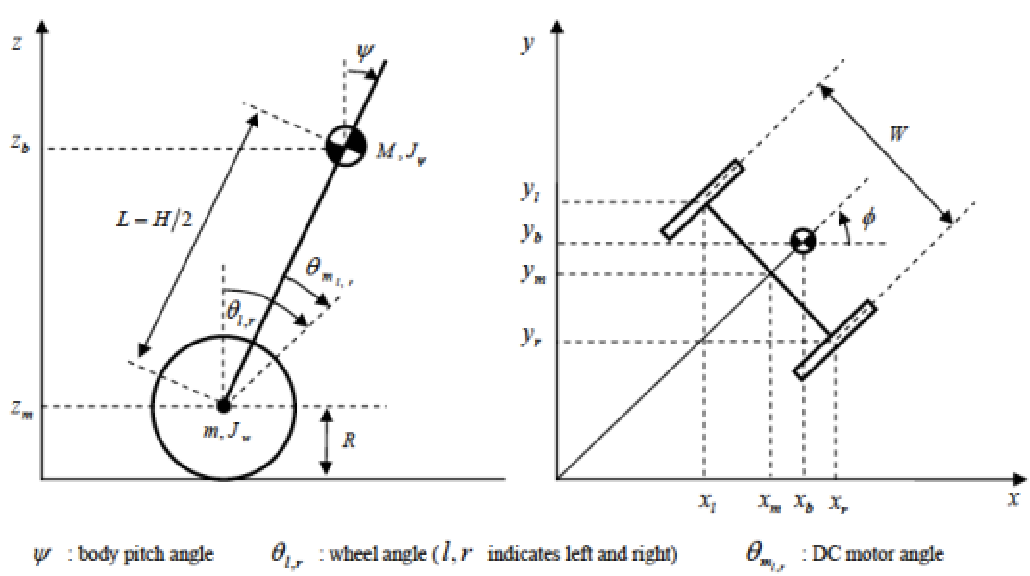
Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2023

Considerando um sistema de pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas:



A vista lateral e superior deste sistema com as variáveis associadas é mostrada na seguinte figura:



Os parâmetros físicos deste sistema são dados por:

- $g = 9.8\text{m/s}^2$: gravidade
- $m = 0.03\text{kg}$: peso da roda
- $R = 0.04\text{m}$: raio da roda
- $J_W = \frac{mR^2}{2}$: momento de inércia da roda
- $M = 0.6\text{kg}$: peso do corpo
- $W = 0.14\text{m}$: largura do corpo
- $D = 0.04\text{m}$: profundidade do corpo
- $H = 0.144\text{m}$: altura do corpo
- $L = \frac{H}{2}$: distância do centro de massa do corpo ao eixo da roda
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em pitch
- $J_\phi = \frac{M(W^2+D^2)}{12}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em rumo
- J_m: inércia do motor DC desprezível
- $R_m = 6.69\Omega$: resistência do motor DC
- L_m: indutância do motor desprezível
- $K_t = Ke = 0.4$: constante de torque (Nm/A) e constante de EMF (V s/rad)
- $f_m = 0.0022$: atrito entre o corpo e o motor
- $n = 1$: redução do motor

Considerando os graus de liberdade $\{\theta, \psi, \phi\}$ onde $\theta = (\theta_l + \theta_r)/2 \rightarrow \dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$.

A posição cartesiana do carrinho (composto pelas 2 rodas), no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ R \end{bmatrix} \tag{1}$$

Considerando que as rodas do carrinho não escorregam, o carrinho é um sistema com restrições não-holonômicas, sendo que a velocidade do carrinho é dada por:

$$\dot{X_m} = R \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \tag{2}$$

A posição cartesiana das rodas (esquerda e direita) no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$
\begin{aligned}
X_l = \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -sin(\phi) \\ cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\
X_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} sin(\phi) \\ -cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

A velocidade cartesiana das rodas é dada por:

$$
\begin{aligned}
\dot{X_l} = \dot{X_m} + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -cos(\phi) \\ -sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \\
\dot{X_r} = \dot{X_m} + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{4}
$$

A posição cartesiana do corpo no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$
X_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = X_m + L \begin{bmatrix} cos(\phi)sin(\psi) \\ sin(\phi)sin(\psi) \\ cos(\psi) \end{bmatrix} \tag{5}
$$

A velocidade cartesiana do corpo é dada por:

$$
\dot{X_b} = \dot{X_m} + L \begin{bmatrix} cos(\phi)cos(\psi) \\ sin(\phi)cos(\psi) \\ -sin(\psi) \end{bmatrix} \dot{\psi} + L \begin{bmatrix} -sin(\phi)sin(\psi) \\ cos(\phi)sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \tag{6}
$$

Levando em consideração que a massa do motor DC é desprezível e utilizando a fórmula de energia cinética translacional de um único corpo, a energia cinética translacional é dada por:

$$
K_{tra} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m\dot{X}_l^T\dot{X}_l + \frac{1}{2}m\dot{X}_r^T\dot{X}_r + \frac{1}{2}M\dot{X}_b^T\dot{X}_b = \\
&= \frac{1}{2}m\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\frac{1}{2}m\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\tfrac{1}{2}M\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + Lcos(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} - Lsin(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} + Lsin(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} + Lcos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} & -Lsin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + Lcos(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} - Lsin(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} + Lsin(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} + Lcos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} \\ -Lsin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}m\left[R^2cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WRcos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R^2sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WRsin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}sin(\phi)\dot{\phi}^2\right] + \\
&\frac{1}{2}m\left[R^2cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WRcos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R^2sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WRsin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}sin(\phi)\dot{\phi}^2\right] + \\
&\tfrac{1}{2}M\left[R^2cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 + L^2cos(\phi)^2cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2sin(\phi)^2sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\phi)^2cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} - 2L^2sin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} - 2RLsin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi}\right] + \\
&\tfrac{1}{2}M\left[R^2sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 + L^2sin(\phi)^2cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2cos(\phi)^2sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLsin(\phi)^2cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + 2L^2sin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} + 2RLsin(\phi)cos(\phi)sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi}\right] + \\
&\frac{1}{2}M = L^2sin(\psi)^2\dot{\psi}^2 = \\
&= \frac{m\left[R^2\dot{\theta}^2 - WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + L^2sin(\psi)^2\dot{\psi}^2\right]}{2} = \\
&= \frac{m\left[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi}\right]}{2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Utilizando a fórmula da energia cinética rotacional e considerando que $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$, a energia cinética rotacional pode ser aproximada, porque pode ser válido a seguinte equação $\dot{\theta}_r\dot{\theta}_l \approx \dot{\theta}^2$ e J_m é desprezível. Logo:

$$
\begin{aligned}
K_{rot} &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\vec{\omega} \\
T_2 &= \frac{J_\phi\dot{\phi}^2}{2} + \frac{J_\psi\dot{\psi}^2}{2} + \frac{J_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2)}{2} + \frac{J_mn^2(\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2}{2} + \frac{J_mn^2(\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2}{2} = \\
&= \frac{J_\phi\dot{\phi}^2}{2} + \frac{J_\psi\dot{\psi}^2}{2} + J_w(2\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_l\dot{\theta}_r) + \frac{J_mn^2(4\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}_l\dot{\theta}_r - 4\dot{\theta} + 2\dot{\psi}^2)}{2} = \\
&= J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 + n^2J_m(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 = \\
&= J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2
\end{aligned}
\tag{9}
$$

A energia potencial do sistema pode ser descrito pela soma das energias potenciais dos centros de massa das rodas e do corpo, tal que:

$$U = mgz_l + mgz_r + mgz_b = 2mgR + Mg(R + Lcos(\psi)) \tag{10}$$

1 Derivação e obtenção das equações dinâmicas

Levando em consideração que o Lagrangiano do sistema pode ser descrito pela seguinte equação e os valores de T_1, T_2 e U:

$$
\begin{gathered}
L = T_1 + T_2 - U = \\
= \frac{m\left[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2 sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi}\right]}{2} + J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 - 2mgR - Mg(R + Lcos(\psi))
\end{gathered} \tag{11}
$$

Temos que:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \psi} = ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\phi}^2 - MRLsin(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + MgLsin(\psi),\ \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mR^2\dot{\theta} + MR^2\dot{\theta} + 2J_w\dot{\theta} + MRLcos(\psi)\dot{\theta} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mR^2\ddot{\theta} + MR^2\ddot{\theta} + 2J_w\ddot{\theta} - MRLsin(\psi)\dot{\psi}^2 + MRLcos(\psi)\ddot{\psi} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = ML^2\dot{\psi} + MRLcos(\psi)\dot{\theta} + j_\psi\dot{\psi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = ML^2\ddot{\psi} + j_\psi\ddot{\psi} - MRLsin(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + MRLcos(\psi)\ddot{\theta} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\frac{W^2}{2}\dot{\phi} + ML^2 sin(\psi)^2\dot{\phi} + J_\phi\dot{\phi} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = m\frac{W^2}{2}\ddot{\phi} + ML^2 sin(\psi)^2\ddot{\phi} + 2ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} + J_\phi\ddot{\phi}
\end{gathered} \tag{12}
$$

(a) Utilizando a formulação de Lagrange foi determinado a dinâmica entre as coordenadas generalizadas $\lambda = \begin{bmatrix}\theta & \psi & \phi\end{bmatrix}^T$ e as forças (torques) generalizadas $F = \begin{bmatrix}F_\theta & F_\psi & F_\phi\end{bmatrix}^T$.

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = F \tag{13}
$$

Utilizando a fórmula acima e outras equações (12) para começar a montar a forma matricial:

$$
\begin{gathered}
\left[(2m + M)R^2 + J_w\right]\ddot{\theta} + MRLcos(\psi)\ddot{\psi} - MRLsin(\psi)\dot{\psi}^2 = F_\theta \\
MRLcos(\psi)\ddot{\theta} + (ML^2 + J_\psi)\ddot{\psi} - ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\phi}^2 - MgLsin(\psi) = F_\psi \\
\left(m\frac{W^2}{2} + ML^2 sin(\psi)^2 + J_\phi\right)\ddot{\phi} + 2ML^2 sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} = F_\phi
\end{gathered} \tag{14}
$$

Esta dinâmica pode ser escrita em forma matricial como:

$$
M(\lambda)\ddot{\lambda} + C(\lambda, \dot{\lambda}) + G(\lambda) = F \tag{15}
$$

onde $M(\cdot) \in \mathbb{R}^{3\times 3},\ C(\cdot,\cdot) \in \mathbb{R}^3,\ G(\cdot) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} (2m+M)R^2+2J_w & MRLcos(\psi) & 0 \\ MRLcos(\psi) & ML^2+J_\psi & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{W^2}{2}+ML^2sin(\psi)^2+J_\phi \end{bmatrix}\ddot{\lambda}+\begin{bmatrix} -MRLsin(\psi)\dot{\psi}^2 \\ -ML^2sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}^2 \\ 2ML^2sin(\psi)cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -MgLsin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}=F \tag{16}$$

(b) Determinando a relação entre as forças generalizadas e os torques de cada um das rodas $\{Fl, Fr\}$:

$$F=\begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\psi \\ F_\phi \end{bmatrix}=E\begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} \tag{17}$$

onde $E \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Observando o sistema de pêndulo invertido e os graus de liberdade, é possível determinar as seguintes relações:

$$\begin{gathered} F_\theta = F_l + F_r \\ F_\psi = -F_l - F_r \\ F_\phi = -\frac{W}{2R}F_l + \frac{W}{2R}F_r \\ F=\begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\psi \\ F_\phi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{18}$$

(c) Determinando a relação entre as forças (torques) generalizadas $\{F_\theta, F_\psi, F_\phi\}$ e a tensão elétrica aplicada em cada motor $\{Vl, Vr\}$ utilizando o modelo de um motor DC:

$$F=Q\dot{\lambda}+H\begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix} \tag{19}$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $H \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

Levando em consideração a Lei de Kirchhoff das Tensões, a Equação do Torque, a Lei do Motor e a Lei do Gerador. Além disso, o atrito entre o corpo e o motor e o indutância do motor DC L_m é desprezível:

$$\begin{gathered} F_{l,r} = nK_t i_{l,r} + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) \\ V_{l,r} + K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) = L_m \dot{i}_{l_r} + R_m i_{l,r} \\ i_{l,r} = \frac{V_{l,r} + K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r})}{R_m} \\ F_{l,r} = \left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right)(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) + \frac{nK_tV_{l,r}}{R_m} \end{gathered} \tag{20}$$

Pegando a relação (18) entre as forças generalizadas e os torques de cada um das rodas $\{Fl, Fr\}$ e substituindo $\{Fl, Fr\}$ pelos valores obtidos (20):

$$
\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right)(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) + \frac{nK_tV_r}{R_m} \\ \left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right)(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) + \frac{nK_tV_r}{R_m} \end{bmatrix} \\
F &= \begin{bmatrix} -2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & 2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & 0 \\ 2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & -2\left(\frac{nK_tK_e}{R_m} + f_m\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{nK_t}{R_m} & \frac{nK_t}{R_m} \\ -\frac{nK_t}{R_m} & -\frac{nK_t}{R_m} \\ -\frac{W}{2R}\frac{nK_t}{R_m} & \frac{W}{2R}\frac{nK_t}{R_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{21}
$$