Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Trabalho Nº2

Leonardo Soares da Costa Tanaka - DRE: 121067652
Engenharia de Controle e Automação/UFRJ
Rio de Janeiro, Brasil

Junho de 2023

Considerando um motor de corrente contínua (DC) controlado por corrente de armadura com entrada de tensão $V_a(t)$ (V), saída de velocidade angular $\omega_m(t)$ (rad/s), representado pelo circuito abaixo:

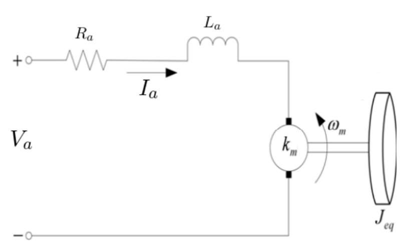


Figura 1: Circuito

O motor considerado tem as seguintes características dadas pelo fabricante:

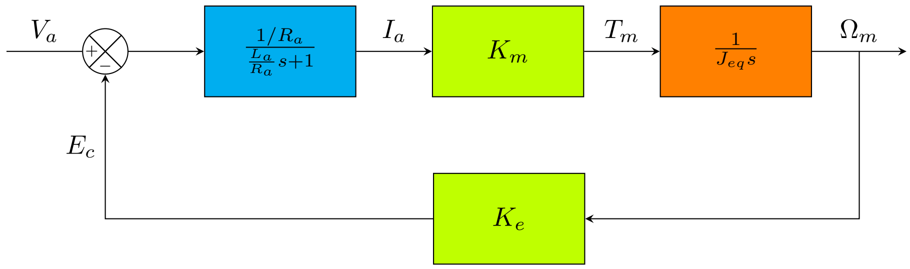
- Resistência de armadura: $R_a = 10.6\Omega$
- Indutância de armadura: $L_a = 0.82mH$
- Momento de Inércia do Rotor do Motor: $J_m = 1.16 \cdot 10^{-6} kgm^2$
- Constantes do Motor: $K_m = 0.0502Nm/A$, $K_e = 0.0502Vs$
- Tensão máxima: 15 volts
- Massa do disco de inércia: $0.068kg$
- Raio do disco de inércia: $0.0248m$

1 Modelagem teórica

Organizando as equações do sistema para obter o diagrama de blocos e a função de transferência. Utilizando a Lei de Kirchhoff das Tensões, Equação do Torque, Lei do Motor e Lei do Gerador. Depois, realizando a Transformada de Laplace das equações:

$$
\begin{aligned}
R_a \cdot i_a + L_a \frac{di_a}{dt} = V_a - e_c, \quad J_{eq}\frac{d\omega_m}{dt} = T_m, \quad T_m = K_m \cdot i_a, \quad e_c = K_e \cdot \omega_m \\
I_a(s) = \frac{1/R_a}{\frac{L_a}{R_a}s+1}(V_a(s) - e_c(s)), \quad \Omega(s) = \frac{1}{J_{eq}s}T_m(s), \quad T_m(s) = K_m \cdot I_a(s), \quad E_c(s) = K_e\Omega_m(s)
\end{aligned} \tag{1}
$$

1.1. Montando um diagrama de blocos do sistema (Desconsiderando o atrito do sistema). O bloco azul é o subsistema elétrico, o bloco laranja é o subsistema mecânico e os blocos verdes são interligações entre o sistema elétrico e mecânico:



1.2. Calculando a função de transferência do motor $G(s)$ de $V_a(s)$ para $\Omega_m(s)$ (Levando em consideração que é um sistema realimentado):

$$
G(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_m}{R_a \cdot J_{eq}}\frac{1}{s(\frac{L_a}{R_a}s+1)}}{1 + \frac{K_e \cdot K_m}{R_a \cdot J_{eq}}\frac{1}{s(\frac{L_a}{R_a}s+1)}} = \frac{k_m}{R_a \cdot J_{eq} \cdot s \cdot (\frac{L_a}{R_a}s+1) + K_e \cdot K_m} = \frac{\frac{k_m}{J_{eq} \cdot L_a}}{s^2 + \frac{R_a}{L_a}s + \frac{K_e \cdot K_m}{J_{eq} \cdot L_a}} \tag{2}
$$

1.3. Representando o sistema no espaço de estados com a realização canónica controlável:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_e \cdot K_m}{J_{eq} \cdot L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} \frac{k_m}{J_{eq} \cdot L_a} & 0 \end{bmatrix} x
\end{aligned} \tag{3}
$$

1.4. Calculando a inércia do disco (feito de alumínio):

$$
\begin{aligned}
J = \int r^2 dm, \quad \frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}, \quad J_d = \int_0^R \frac{r^2 M 2\pi r}{\pi R^2} dr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2Mr^4}{4R^2}\bigg|_0^R = \frac{MR^2}{2} \\
J_d = \frac{0.068 \cdot 0.0248^2}{2} = 20.91136\ 10^{-6}\ kgm^2
\end{aligned} \tag{4}
$$

Determinando momento de inércia total (rotor e disco), levando em consideração que estão conectadas no mesmo eixo de rotação e estão perfeitamente fixadas juntas. Podemos usar a seguinte fórmula e valores:

$$
J_{eq} = J_m + J_d = (1.16\ 10^{-6} + 20.91136\ 10^{-6})\ kgm^2 = 22.07136\ 10^{-6}\ kgm^2 \tag{5}
$$

1.5. Considerando que a função de transferência G(s) tenha a seguinte estrutura:

$$
G(s) = \frac{K}{(\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)} \tag{6}
$$

Utilizando a equação (2) e as características dadas pelo fabricante para calcular os pólos da função de transferência:

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{R_a}{L_a} \pm \sqrt{\frac{R_a^2}{L_a^2} - 4\frac{K_e \cdot K_m}{J_{eq} \cdot L_a}}}{2} = \frac{-\frac{10.6}{0.82 \cdot 10^{-3}} \pm \sqrt{\frac{10.6^2}{(0.82 \cdot 10^{-3})^2} - 4\frac{0.0502 \cdot 0.0502}{22.07136\ 10^{-6} \cdot 0.82 \cdot 10^{-3}}}}{2} = \frac{-12926.82927 \pm 12905.26847}{2}$$

$$p_1 = -12916.04887, \quad p_2 = -10.7804 \tag{7}$$

$$K = \frac{k_m}{J_{eq} \cdot L_a \cdot p_1 \cdot p_2} = 19.92031563, \quad \tau_e = -\frac{1}{p_1} = 7.742305794\ 10^{-5}, \quad \tau_m = -\frac{1}{p_2} = 0.09276093651$$

A constante de tempo elétrica τ_e pode ser considerada despressível comparada com a constante de tempo mecânica τ_m, porque a constante de tempo elétrica é pequena em relação aos tempos de interesse, isso significa que o sistema tem uma dinâmica inicial rápida devido ao polo rápido, mas em seguida, a resposta se estabiliza gradualmente devido ao polo lento. O efeito do polo lento será mais predominante à medida que o tempo avança.

1.6. Levando em consideração que não existe perturbação nem atrito, é possível determinar a velocidade máxima do motor ω_{max}:

$$e_{max} = K_e \cdot \omega_{max}, \quad \omega_{max} = \frac{e_{max}}{K_e} = \frac{15}{0.0502} = 298.8047809\ rad/s \tag{8}$$

1.7. Determinando a corrente máxima I_{max} e máximo de torque gerado T_{max}:

2 Identificação Experimental

2.1. Determinando experimentalmente no kit QET da Quanser, de forma estatística, as constantes utilizadas como parâmetros na modelagem teórica:

(a) Aplicando voltagem constante V_a e medindo a corrente I_a, levando em consideração que é mantido o eixo do motor parado e que o indutor de armadura se torna um curto-cicuito no momento da medição. Foi utilizado os dados obtidos experimentalmente para realizar uma Regressão Linear em Python com Scikit-Learn para obter o valor estimado da Resistência de armadura R_a:

```
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
# Dados de voltagem Va(V) em Volts e corrente Ia(A) que foram enviados em forma de tabela
voltagem = np.array([1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 4.9, 5.9, 6.9, 7.9, 8.9, 9.9])
corrente = np.array([0.076, 0.150, 0.225, 0.305, 0.425, 0.474, 0.550, 0.620, 0.720, 0.800])
# Ajuste da regressão linear
x = corrente.reshape(-1, 1)  # Converte corrente para formato adequado
y = voltagem
regressor = LinearRegression()
regressor.fit(x, y)
# Estimativa da resistência média (coeficiente angular da regressão linear)
```

```
resistencia_media = regressor.coef_[0]
# Exibindo os resultados
print("Resistência média:", resistencia_media, "ohms")
```

Valor estimado da Resistência de armadura R_a: 12.222223261373172 Ω

(b) Aplicando voltagem constante V_a e medindo corrente e velocidade. Considerando que a resistência de armadura é conhecida. Foi utilizado os dados obtidos experimentalmente

3 Validação dos modelos

Foram obtidas experimentalmente as respostas (rad/s) ao degrau (2, 4 e 10 volts) e senoidal (5 volts).