

Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Trabalho N^o3

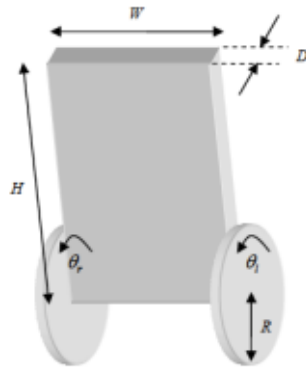
Leonardo Soares da Costa Tanaka - DRE: 121067652

Engenharia de Controle e Automação/UFRJ

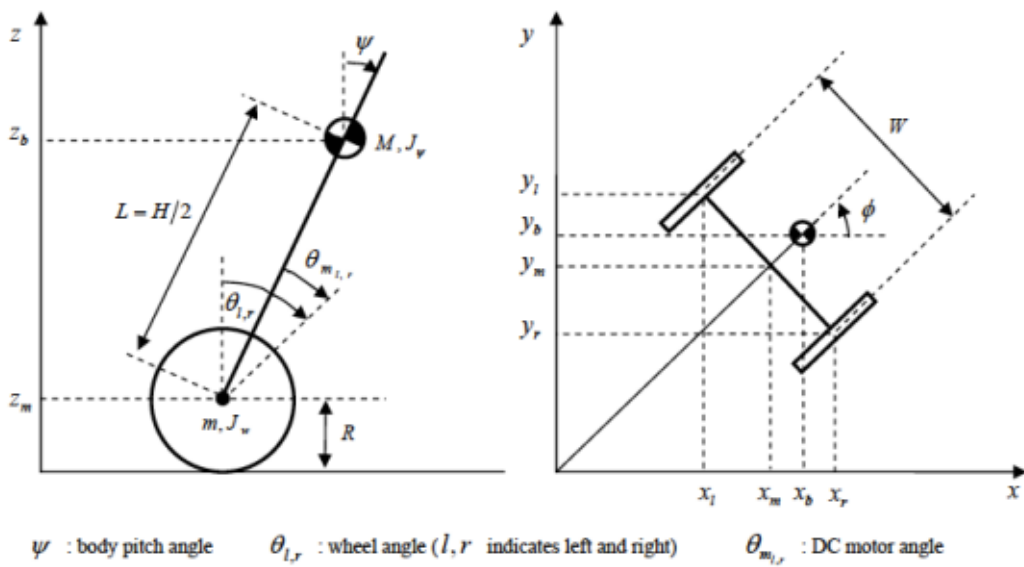
Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2023

Considerando um sistema de pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas:



A vista lateral e superior deste sistema com as variáveis associadas é mostrada na seguinte figura:



Os parâmetros físicos deste sistema são dados por:

- $g = 9.8\text{m/s}^2$: gravidade
- $m = 0.03\text{kg}$: peso da roda
- $R = 0.04\text{m}$: raio da roda
- $J_W = \frac{mR^2}{2}$: momento de inércia da roda
- $M = 0.6\text{kg}$: peso do corpo
- $W = 0.14\text{m}$: largura do corpo
- $D = 0.04\text{m}$: profundidade do corpo
- $H = 0.144\text{m}$: altura do corpo
- $L = \frac{H}{2}$: distância do centro de massa do corpo ao eixo da roda
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em pitch
- $J_\phi = \frac{M(W^2+D^2)}{12}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em rumo
- J_m : inércia do motor DC desprezível
- $R_m = 6.69\Omega$: resistência do motor DC
- L_m : indutância do motor desprezível
- $K_t = Ke = 0.4$: constante de torque (Nm/A) e constante de EMF (V s/rad)
- $f_m = 0.0022$: atrito entre o corpo e o motor
- $n = 1$: redução do motor

Considerando os graus de liberdade $\{\theta, \psi, \phi\}$ onde $\theta = (\theta_l + \theta_r)/2 \rightarrow \dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$.

A posição cartesiana do carrinho (composto pelas 2 rodas), no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ R \end{bmatrix} \quad (1)$$

Considerando que as rodas do carrinho não escorregam, o carrinho é um sistema com restrições não-holonômicas, sendo que a velocidade do carrinho é dada por:

$$\dot{X}_m = R \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (2)$$

A posição cartesiana das rodas (esquerda e direita) no sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$, é dada por:

$$\begin{aligned} X_l &= \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_r &= \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ -\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

A velocidade cartesiana das rodas é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_l &= \dot{X}_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{X}_r &= \dot{X}_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

A posição cartesiana do corpo no sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$, é dada por:

$$X_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = X_m + L \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

A velocidade cartesiana do corpo é dada por:

$$\dot{X}_b = \dot{X}_m + L \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \end{bmatrix} \dot{\psi} + L \begin{bmatrix} -\sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (6)$$

Levando em consideração que a massa do motor DC é desprezível e utilizando a fórmula de energia cinética translacional de um único corpo, a energia cinética translacional é dada por:

$$K_{tra} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m\dot{X}_l^T\dot{X}_l + \frac{1}{2}m\dot{X}_r^T\dot{X}_r + \frac{1}{2}M\dot{X}_b^T\dot{X}_b = \\
&= \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2}M \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + L\cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - L\sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} + L\sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} + L\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & -L\sin(\psi)\dot{\psi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} + L\sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} + L\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & R\cos(\phi)\dot{\theta} + L\cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - L\sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & -L\sin(\psi)\dot{\psi} \\ -L\sin(\psi)\dot{\psi} & -L\sin(\psi)\dot{\psi} & L^2\sin^2(\psi)\dot{\psi}^2 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}m \left[R^2\cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WR\cos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\cos(\phi)^2\dot{\phi}^2 + R^2\sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WR\sin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\sin(\phi)^2\dot{\phi}^2 \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}m \left[R^2\cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WR\cos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\cos(\phi)^2\dot{\phi}^2 + R^2\sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WR\sin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\sin(\phi)^2\dot{\phi}^2 \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}M \left[R^2\cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 + L^2\cos(\phi)^2\cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2\sin(\phi)^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\cos(\phi)^2\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} - 2L^2\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} - 2RL\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}M \left[R^2\sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 + L^2\sin(\phi)^2\cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2\cos(\phi)^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\sin(\phi)^2\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + 2L^2\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} + 2RL\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}M = L^2\sin(\psi)^2\dot{\psi}^2 = \\
&= \frac{m \left[R^2\dot{\theta}^2 - WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2 \right] + M \left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + L^2\sin(\psi)^2\dot{\psi}^2 \right]}{2} = \\
&= \frac{m \left[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2 \right] + M \left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} \right]}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

Utilizando a fórmula da energia cinética rotacional:

$$\begin{aligned}
K_{rot} &= \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \\
T_2 &= \frac{J_\phi\dot{\phi}^2}{2} + \frac{J_\psi\dot{\psi}^2}{2} + \frac{J_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2)}{2} + \frac{J_m n^2(\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2}{2} + \frac{J_m n^2(\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2}{2}
\end{aligned} \tag{9}$$

Considerando que $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$, temos que:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2 &= 2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2R^2}\dot{\phi}^2, \quad (\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2 + (\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2 = 2(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 + \frac{W^2}{2R^2}\dot{\phi}^2 \\
\dot{\phi} &= \frac{R}{W}(\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_l)
\end{aligned} \tag{10}$$

Levando em consideração que J_m é desprezível e utilizando as fórmulas acima, então:

$$\begin{aligned}
T_2 &= J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w + \frac{W^2}{2R^2}n^2J_m \right) \dot{\phi}^2 + n^2J_m(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 \\
T_2 &= J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w \right) \dot{\phi}^2
\end{aligned} \tag{11}$$

A energia potencial do sistema pode ser descrito pela soma das energias potenciais dos centros de massa das rodas e do corpo, tal que:

$$U = mgz_l + mgz_r + mgz_b = 2mgR + Mg(R + L\cos(\psi)) \quad (12)$$

1 Derivação e obtenção das equações dinâmicas

Levando em consideração que o Lagrangiano do sistema pode ser descrito pela seguinte equação e os valores de T_1 , T_2 e U :

$$L = T_1 + T_2 - U \quad (13)$$

$$L = \frac{m[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2] + M[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi}]}{2} + J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right)\dot{\phi}^2 - 2mgR - Mg(R + L\cos(\psi))$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} &= ML^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\phi}^2 - MRL\sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + MgL\sin(\psi), \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2mR^2\dot{\theta} + MR^2\dot{\theta} + 2J_w\dot{\theta} + MRL\cos(\psi)\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= 2mR^2\ddot{\theta} + MR^2\ddot{\theta} + 2J_w\ddot{\theta} - MRL\sin(\psi)\dot{\psi}^2 + MRL\cos(\psi)\ddot{\psi} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= ML^2\dot{\psi} + MRL\cos(\psi)\dot{\theta} + j_\psi\dot{\psi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) &= ML^2\ddot{\psi} + j_\psi\ddot{\psi} - MRL\sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + MRL\cos(\psi)\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= m\frac{W^2}{2}\dot{\phi} + ML^2\sin(\psi)^2\dot{\phi} + \left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right)\dot{\phi} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) &= m\frac{W^2}{2}\ddot{\phi} + ML^2\sin(\psi)^2\ddot{\phi} + 2ML^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} + \left(J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right)\ddot{\phi} \end{aligned} \quad (14)$$

(a) Utilizando a formulação de Lagrange foi determinado a dinâmica entre as coordenadas generalizadas $\lambda = [\theta \quad \psi \quad \phi]^T$ e as forças (torques) generalizadas $F = [F_\theta \quad F_\psi \quad F_\phi]^T$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = F \quad (15)$$

Utilizando a fórmula acima e outras equações (14) para começar a montar a forma matricial:

$$\begin{aligned} [(2m + M)R^2 + J_w]\ddot{\theta} + MRL\cos(\psi)\ddot{\psi} - MRL\sin(\psi)\dot{\psi}^2 &= F_\theta \\ MRL\cos(\psi)\ddot{\theta} + (ML^2 + J_\psi)\ddot{\psi} - ML^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\phi}^2 - MgL\sin(\psi) &= F_\psi \\ \left[m\frac{W^2}{2} + ML^2\sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w\right]\ddot{\phi} + 2ML^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} &= F_\phi \end{aligned} \quad (16)$$

Esta dinâmica pode ser escrita em forma matricial como:

$$M(\lambda)\ddot{\lambda} + C(\lambda, \dot{\lambda}) + G(\lambda) = F \quad (17)$$

onde $M(\cdot) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $C(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^3$, $G(\cdot) \in \mathbb{R}^3$.

Utilizando as equações (16) em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (2m+M)R^2 + 2J_w & MRL\cos(\psi) & 0 \\ MRL\cos(\psi) & ML^2 + J_\psi & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{W^2}{2} + ML^2\sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w \end{bmatrix} \ddot{\lambda} + \begin{bmatrix} -MRL\sin(\psi)\dot{\psi}^2 \\ -ML^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi}^2 \\ 2ML^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -MgL\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} = F \quad (18)$$

(b) Determinando a relação entre as forças generalizadas e os torques de cada um das rodas $\{F_l, F_r\}$:

$$F = \begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\psi \\ F_\phi \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde $E \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

Observando o sistema de pêndulo invertido e os graus de liberdade, é possível determinar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} F_\theta &= F_l + F_r \\ F_\psi &= -F_l - F_r \\ F_\phi &= -\frac{W}{2R}F_l + \frac{W}{2R}F_r \end{aligned} \quad (20)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_\theta \\ F_\psi \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix}$$

(c) Determinando a relação entre as forças (torques) generalizadas $\{F_\theta, F_\psi, F_\phi\}$ e a tensão elétrica aplicada em cada motor $\{V_l, V_r\}$ utilizando o modelo de um motor DC:

$$F = Q\dot{\lambda} + H \begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $H \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

Levando em consideração a Lei de Kirchhoff das Tensões, a Equação do Torque, a Lei do Motor e a Lei do Gerador. Além disso, o atrito entre o corpo e o motor e o indutância do motor DC L_m é desprezível:

$$\begin{aligned}
F_{l,r} &= nK_t \dot{i}_{l,r} + f_m(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) \\
V_{l,r} + K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) &= L_m \dot{i}_{l,r} + R_m i_{l,r} \\
i_{l,r} &= \frac{V_{l,r} + K_e(\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r})}{R_m} \\
F_{l,r} &= \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) (\dot{\psi} - \dot{\theta}_{l,r}) + \frac{nK_t V_{l,r}}{R_m}
\end{aligned} \tag{22}$$

Pegando a relação (20) entre as forças generalizadas e os torques de cada um das rodas $\{Fl, Fr\}$ e substituindo $\{Fl, Fr\}$ pelos valores obtidos (22):

$$\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_l \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -\frac{W}{2R} & \frac{W}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) (\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) + \frac{nK_t V_r}{R_m} \\ \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) (\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) + \frac{nK_t V_r}{R_m} \end{bmatrix} \\
F &= \begin{bmatrix} -2 \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) & 2 \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) & 0 \\ 2 \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) & -2 \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{W^2}{2R^2} \left(\frac{nK_t K_e}{R_m} + f_m \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{nK_t}{R_m} & \frac{nK_t}{R_m} \\ -\frac{nK_t}{R_m} & -\frac{nK_t}{R_m} \\ -\frac{W}{2R} \frac{nK_t}{R_m} & \frac{W}{2R} \frac{nK_t}{R_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_l \\ V_r \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{23}$$

2 Derivação e obtenção das equações de estado

Definindo as variáveis de estado do sistema:

$$x_1 = \lambda = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix}, \quad x_2 = \dot{\lambda} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Derivando as variáveis de estado do sistema e utilizando as representação (24) como base:

$$\dot{x}_1 = \dot{\lambda} = x_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Para calcular o $M(\lambda)^{-1}$, será necessário calcular o determinante:

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} (2m+M)R^2 + 2J_w & MRL\cos(\psi) & 0 \\ MRL\cos(\psi) & ML^2 + J_\psi & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{W^2}{2} + ML\sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w \end{vmatrix} = \\
&= [(2m+M)R^2 + 2J_w](ML^2 + J_\psi)(m\frac{W^2}{2} + ML\sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w) - M^2R^2L^2\cos(\psi)^2(m\frac{W^2}{2} + ML\sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2}J_w)
\end{aligned} \tag{26}$$

Além disso, é necessário calcular a matriz adjunta:

$$M_{adj} = \begin{bmatrix} (ML^2 + J_\psi)(m\frac{W^2}{2} + ML^2 \sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2} J_w) & -MRL \cos(\psi)(m\frac{W^2}{2} + ML^2 \sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2} J_w) & 0 \\ -MRL \cos(\psi)(m\frac{W^2}{2} + ML^2 \sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2} J_w) & [(2m + M)R^2 + 2J_w](m\frac{W^2}{2} + ML^2 \sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2} J_w) & 0 \\ 0 & 0 & [(2m + M)R^2 + 2J_w](ML^2 + J_\psi) - M^2 R^2 L^2 \cos(\psi)^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Utilizando o determinante e a matriz adjunta para encontrar $M(\lambda)^{-1}$:

$$M(\lambda)^{-1} = \frac{M_{adj}}{\det(M)} = \begin{bmatrix} \frac{ML^2 + J_\psi}{[(2m + M)R^2 + 2J_w](ML^2 + J_\psi) - M^2 R^2 L^2 \cos(\psi)^2} & -\frac{MRL \cos(\psi)}{[(2m + M)R^2 + 2J_w](ML^2 + J_\psi) - M^2 R^2 L^2 \cos(\psi)^2} & 0 \\ -\frac{MRL \cos(\psi)}{[(2m + M)R^2 + 2J_w](ML^2 + J_\psi) - M^2 R^2 L^2 \cos(\psi)^2} & \frac{(2m + M)R^2 + 2J_w}{[(2m + M)R^2 + 2J_w](ML^2 + J_\psi) - M^2 R^2 L^2 \cos(\psi)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m\frac{W^2}{2} + ML \sin(\psi)^2 + J_\phi + \frac{W^2}{2R^2} J_w} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Com isso, tenho tudo que é preciso para preencher a seguinte equação:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{\lambda} = M(\lambda)^{-1} \left[-C(\lambda, \dot{\lambda}) - G(\lambda) + F(\dot{\lambda}, V) \right] \quad (29)$$

3 Determinação dos pontos de equilíbrio do sistema

Considerando $V_l = V_r = 0$, é possível determinar os pontos de equilíbrio de forma trivial. Já que um pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas só estará em equilíbrio sem a diferença de potencial nos motores, quando estiver em pé ou de cabeça para baixo verticalmente e sem nenhuma velocidade angular em nenhuma das direções. Logo:

$$\bar{\psi} = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi\}, n \in \mathbb{N}$$

$$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Então, o $\bar{\theta}$ e o $\bar{\phi}$ podem ser quaisquer valores porque não afetam no equilíbrio do sistema.