

Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Trabalho N^o3

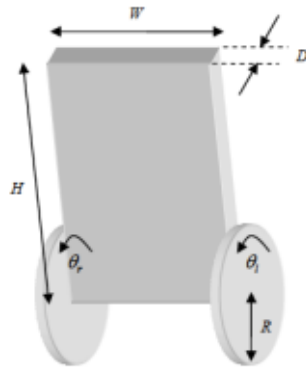
Leonardo Soares da Costa Tanaka - DRE: 121067652

Engenharia de Controle e Automação/UFRJ

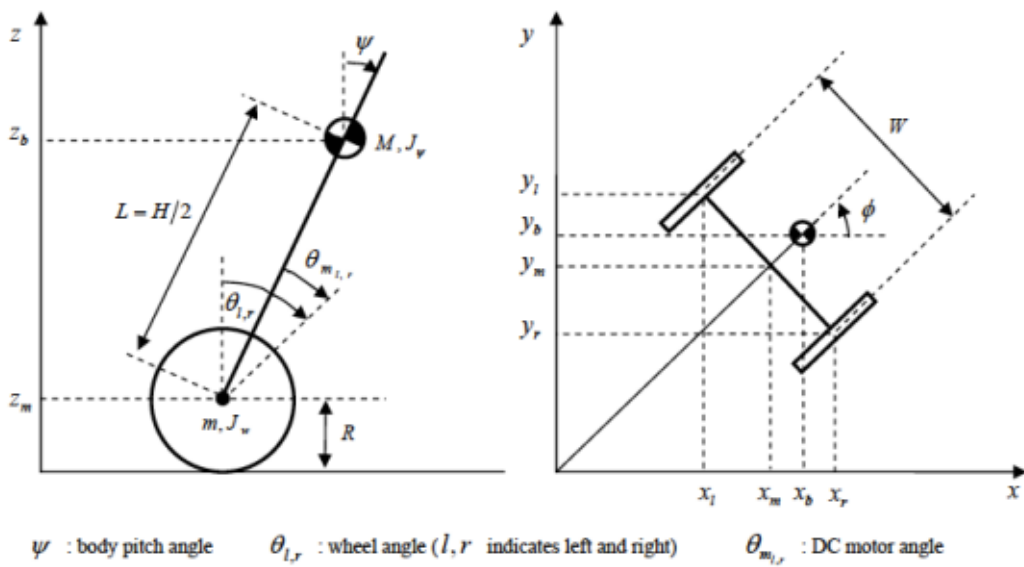
Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2023

Considerando um sistema de pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas:



A vista lateral e superior deste sistema com as variáveis associadas é mostrada na seguinte figura:



Os parâmetros físicos deste sistema são dados por:

- $g = 9.8\text{m/s}^2$: gravidade
- $m = 0.03\text{kg}$: peso da roda
- $R = 0.04\text{m}$: raio da roda
- $J_W = \frac{mR^2}{2}$: momento de inércia da roda
- $M = 0.6\text{kg}$: peso do corpo
- $W = 0.14\text{m}$: largura do corpo
- $D = 0.04\text{m}$: profundidade do corpo
- $H = 0.144\text{m}$: altura do corpo
- $L = \frac{H}{2}$: distância do centro de massa do corpo ao eixo da roda
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em pitch
- $J_\phi = \frac{M(W^2+D^2)}{12}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em rumo
- J_m : inércia do motor DC desprezível
- $R_m = 6.69\Omega$: resistência do motor DC
- L_m : indutância do motor desprezível
- $K_t = Ke = 0.4$: constante de torque (Nm/A) e constante de EMF (V s/rad)
- $f_m = 0.0022$: atrito entre o corpo e o motor
- $n = 1$: redução do motor

Considerando os graus de liberdade $\{\theta, \psi, \phi\}$ onde $\theta = (\theta_l + \theta_r)/2 \rightarrow \dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$.

A posição cartesiana do carrinho (composto pelas 2 rodas), no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ R \end{bmatrix} \quad (1)$$

Considerando que as rodas do carrinho não escorregam, o carrinho é um sistema com restrições não-holonômicas, sendo que a velocidade do carrinho é dada por:

$$\dot{X}_m = R \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (2)$$

A posição cartesiana das rodas (esquerda e direita) no sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$, é dada por:

$$\begin{aligned} X_l &= \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_r &= \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ -\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

A velocidade cartesiana das rodas é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_l &= \dot{X}_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{X}_r &= \dot{X}_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (4)$$

A posição cartesiana do corpo no sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$, é dada por:

$$X_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = X_m + L \begin{bmatrix} \cos(\phi)\sin(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (5)$$

A velocidade cartesiana do corpo é dada por:

$$\dot{X}_b = \dot{X}_m + L \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \end{bmatrix} \dot{\psi} + L \begin{bmatrix} -\sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \quad (6)$$

Levando em consideração que a massa do motor DC é desprezível e utilizando a fórmula de energia cinética translacional de um único corpo, a energia cinética translacional é dada por:

$$K_{tra} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m\dot{X}_l^T\dot{X}_l + \frac{1}{2}m\dot{X}_r^T\dot{X}_r + \frac{1}{2}M\dot{X}_b^T\dot{X}_b = \\
&= \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2}m \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\cos(\phi)\dot{\phi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}\sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2}M \begin{bmatrix} R\cos(\phi)\dot{\theta} + L\cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - L\sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & R\sin(\phi)\dot{\theta} + L\sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} + L\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & -L\sin(\psi)\dot{\psi} \\ R\sin(\phi)\dot{\theta} + L\sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} + L\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & R\cos(\phi)\dot{\theta} + L\cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - L\sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} & -L\sin(\psi)\dot{\psi} \\ -L\sin(\psi)\dot{\psi} & -L\sin(\psi)\dot{\psi} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}m \left[R^2\cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WR\cos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\cos(\phi)^2\dot{\phi}^2 + R^2\sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WR\sin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\sin(\phi)^2\dot{\phi}^2 \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}m \left[R^2\cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WR\cos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\cos(\phi)^2\dot{\phi}^2 + R^2\sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WR\sin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\sin(\phi)^2\dot{\phi}^2 \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}M \left[R^2\cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 + L^2\cos(\phi)^2\cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2\sin(\phi)^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\cos(\phi)^2\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} - 2L^2\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} - 2RL\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}M \left[R^2\sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 + L^2\sin(\phi)^2\cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2\cos(\phi)^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\sin(\phi)^2\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + 2L^2\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi}\dot{\psi} + 2RL\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\theta}\dot{\phi} \right] + \\
&\quad \frac{1}{2}M = L^2\sin(\psi)^2\dot{\psi}^2 = \\
&= \frac{m \left[R^2\dot{\theta}^2 - WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2 \right] + M \left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + L^2\sin(\psi)^2\dot{\psi}^2 \right]}{2} = \\
&= \frac{m \left[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2 \right] + M \left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2\sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RL\cos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} \right]}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

Utilizando a fórmula da energia cinética rotacional e considerando que $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$, a energia cinética rotacional pode ser aproximada, porque pode ser válido a seguinte equação $\dot{\theta}_r\dot{\theta}_l \approx \dot{\theta}^2$ e J_m é desprezível. Logo:

$$\begin{aligned}
K_{rot} &= \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \\
T_2 &= \frac{J_\phi\dot{\phi}^2}{2} + \frac{J_\psi\dot{\psi}^2}{2} + \frac{J_w(\dot{\theta}_r^2 + \dot{\theta}_l^2)}{2} + \frac{J_m n^2(\dot{\theta}_l - \dot{\psi})^2}{2} + \frac{J_m n^2(\dot{\theta}_r - \dot{\psi})^2}{2} = \\
&= \frac{J_\phi\dot{\phi}^2}{2} + \frac{J_\psi\dot{\psi}^2}{2} + J_w(2\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_l\dot{\theta}_r) + \frac{J_m n^2(4\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}_l\dot{\theta}_r - 4\dot{\theta} + 2\dot{\psi}^2)}{2} = \\
&= J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2 + n^2J_m(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 = \\
&= J_w\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_\phi\dot{\phi}^2
\end{aligned} \tag{9}$$

A energia potencial do sistema pode ser descrito pela soma das energias potenciais dos centros de massa das rodas e do corpo, tal que:

$$U = mgz_l + mgz_r + mgz_b = 2mgR + Mg(R + L\cos(\psi)) \tag{10}$$

1 Derivação e obtenção das equações dinâmicas

Levando em consideração que o Lagrangiano do sistema pode ser descrito pela seguinte equação e os valores de T_1 , T_2 e U :

$$L = T_1 + T_2 - U = \frac{m \left[2R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2} \dot{\phi}^2 \right] + M \left[R^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\psi}^2 + L^2 \sin(\psi)^2 \dot{\phi}^2 + 2RL \cos(\psi) \dot{\theta} \dot{\psi} \right]}{2} + J_w \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\psi \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_\phi \dot{\phi}^2 - 2mgR - Mg(R + L \cos(\psi)) \quad (11)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = ML^2 \sin(\psi) \cos(\psi) \dot{\phi}^2 - MRL \sin(\psi) \dot{\theta} \dot{\psi} + MgL \sin(\psi), \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 2mR^2 \dot{\theta} + MR^2 \dot{\theta} + 2J_w \dot{\theta} + MRL \cos(\psi) \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 2mR^2 \ddot{\theta} + MR^2 \ddot{\theta} + 2J_w \ddot{\theta} - MRL \sin(\psi) \dot{\psi}^2 + MRL \cos(\psi) \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= ML^2 \dot{\psi} + MRL \cos(\psi) \dot{\theta} + j_\psi \dot{\psi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= ML^2 \ddot{\psi} + j_\psi \ddot{\psi} - MRL \sin(\psi) \dot{\theta} \dot{\psi} + MRL \cos(\psi) \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= m \frac{W^2}{2} \dot{\phi} + ML^2 \sin(\psi)^2 \dot{\phi} + J_\phi \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= m \frac{W^2}{2} \ddot{\phi} + ML^2 \sin(\psi)^2 \ddot{\phi} + 2L^2 \sin(\psi) \cos(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi} + J_\phi \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (12)$$

Utilizando a formulação de Lagrange foi determinado a dinâmica entre as coordenadas generalizadas $\lambda = \begin{bmatrix} \theta & \psi & \phi \end{bmatrix}^T$ e as forças (torques) generalizadas $F = \begin{bmatrix} F_\theta & F_\psi & F_\phi \end{bmatrix}^T$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = F \quad (13)$$

Utilizando a fórmula acima e outras equações (12) para começar a montar a forma matricial:

$$\begin{aligned} [(2m + M)R^2 + J_w] \ddot{\theta} + MRL \cos(\psi) \ddot{\psi} - MRL \sin(\psi) \dot{\psi}^2 &= F_\theta \\ MRL \cos(\psi) \ddot{\theta} + (ML^2 + J_\psi) \ddot{\psi} - ML^2 \sin(\psi) \cos(\psi) \dot{\phi}^2 - MgL \sin(\psi) &= F_\psi \\ \left(m \frac{W^2}{2} + ML^2 \sin(\psi)^2 + J_\phi \right) \ddot{\phi} + 2L^2 \sin(\psi) \cos(\psi) \dot{\psi} \dot{\phi} &= F_\phi \end{aligned} \quad (14)$$

Esta dinâmica pode ser escrita em forma matricial como:

$$M(\lambda) \ddot{\lambda} + C(\lambda, \dot{\lambda}) + G(\lambda) = F \quad (15)$$

onde $M(\cdot) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $C(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^3$, $G(\cdot) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} (2m+M)R^2 + 2J_w & MRL\cos(\psi) & 0 \\ MRL\cos(\psi) & ML^2 + J_\psi & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{W^2}{2} + ML^2\sin(\psi)^2 + J_\phi \end{bmatrix} \ddot{\lambda} + \begin{bmatrix} -MRL\sin(\psi)\dot{\psi}^2 \\ -ML^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi}^2 \\ 2L^2\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi}\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -MgL\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} = F \quad (16)$$