Modelagem de Sistemas Dinâmicos - Trabalho Nº3

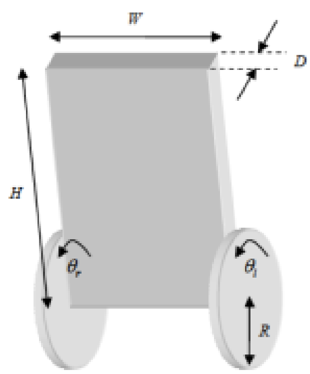
Leonardo Soares da Costa Tanaka - DRE: 121067652

Engenharia de Controle e Automação/UFRJ

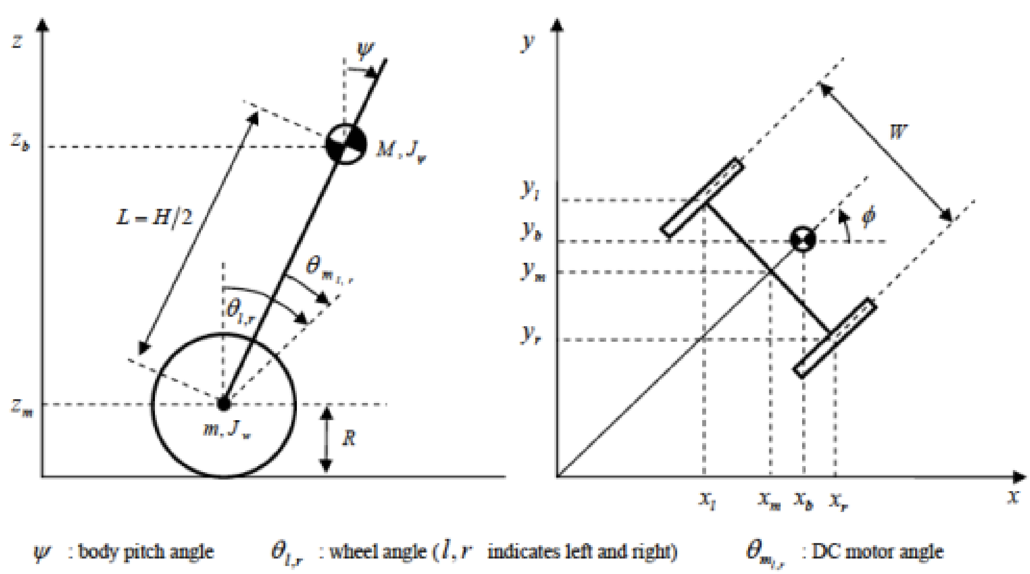
Rio de Janeiro, Brasil

Julho de 2023

Considerando um sistema de pêndulo invertido montado numa plataforma de 2 rodas:



A vista lateral e superior deste sistema com as variáveis associadas é mostrada na seguinte figura:



Os parâmetros físicos deste sistema são dados por:

- $g = 9.8\text{m/s}^2$: gravidade
- $m = 0.03\text{kg}$: peso da roda
- $R = 0.04\text{m}$: raio da roda
- $J_W = \frac{mR^2}{2}$: momento de inércia da roda
- $M = 0.6\text{kg}$: peso do corpo
- $W = 0.14\text{m}$: largura do corpo
- $D = 0.04\text{m}$: profundidade do corpo
- $H = 0.144\text{m}$: altura do corpo
- $L = \frac{H}{2}$: distância do centro de massa do corpo ao eixo da roda
- $J_\psi = \frac{ML^2}{3}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em pitch
- $J_\phi = \frac{M(W^2+D^2)}{12}\text{kgm}^2$: momento de inércia do corpo em rumo
- J_m: inércia do motor DC desprezível
- $R_m = 6.69\Omega$: resistência do motor DC
- L_m: indutância do motor desprezível
- $K_t = Ke = 0.4$: constante de torque (Nm/A) e constante de EMF (V s/rad)
- $f_m = 0.0022$: atrito entre o corpo e o motor
- $n = 1$: redução do motor

Considerando os graus de liberdade $\{\theta, \psi, \phi\}$ onde $\theta = (\theta_l + \theta_r)/2 \rightarrow \dot{\theta} = (\dot{\theta}_l + \dot{\theta}_r)/2$.

A posição cartesiana do carrinho (composto pelas 2 rodas), no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ R \end{bmatrix} \tag{1}$$

Considerando que as rodas do carrinho não escorregam, o carrinho é um sistema com restrições não-holonômicas, sendo que a velocidade do carrinho é dada por:

$$\dot{X_m} = R \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \tag{2}$$

A posição cartesiana das rodas (esquerda e direita) no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_l = \begin{bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -sin(\phi) \\ cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$X_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = X_m + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} sin(\phi) \\ -cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

A velocidade cartesiana das rodas é dada por:

$$\dot{X_l} = \dot{X_m} + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} -cos(\phi) \\ -sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$
$$\dot{X_r} = \dot{X_m} + \frac{W}{2} \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \tag{4}$$

A posição cartesiana do corpo no sistema de coordenadas $\{x, y, x\}$, é dada por:

$$X_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = X_m + L \begin{bmatrix} cos(\phi)sin(\psi) \\ sin(\phi)sin(\psi) \\ cos(\psi) \end{bmatrix} \tag{5}$$

A velocidade cartesiana do corpo é dada por:

$$\dot{X_b} = \dot{X_m} + L \begin{bmatrix} cos(\phi)cos(\psi) \\ sin(\phi)cos(\psi) \\ -sin(\psi) \end{bmatrix} \dot{\psi} + L \begin{bmatrix} -sin(\phi)sin(\psi) \\ cos(\phi)sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi} \tag{6}$$

Levando em consideração que a massa do motor DC é desprezível e utilizando a fórmula de energia cinética translacional de um único corpo, a energia cinética translacional é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
T_1 = \frac{1}{2}m\dot{X_l^T}\dot{X}_l + \frac{1}{2}m\dot{X_r^T}\dot{X}_r + \frac{1}{2}M\dot{X_b^T}\dot{X}_b = \\
= \frac{1}{2}m\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} - \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
\frac{1}{2}m\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}cos(\phi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} + \frac{W}{2}sin(\phi)\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
\frac{1}{2}M\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + Lcos(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} - Lsin(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} & Rsin(\phi)\dot{\theta} + Lsin(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} + Lcos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} & -Lsin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Rcos(\phi)\dot{\theta} + Lcos(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} - Lsin(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} \\ Rsin(\phi)\dot{\theta} + Lsin(\phi)cos(\psi)\dot{\psi} + Lcos(\phi)sin(\psi)\dot{\phi} \\ -Lsin(\psi)\dot{\psi} \end{bmatrix} = \\
= \frac{1}{2}m\left[R^2cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WRcos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R^2sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 - WRsin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}sin(\phi)\dot{\phi}^2\right] + \\
\frac{1}{2}m\left[R^2cos(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WRcos(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R^2sin(\phi)^2\dot{\theta}^2 + WRsin(\phi)^2\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}sin(\phi)\dot{\phi}^2\right] + \\
\frac{1}{2}M \\
= \frac{m\left[R^2\dot{\theta}^2 - WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + WR\dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{W^2}{4}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2cos(\psi)^2\dot{\psi}^2 + L^2sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi} + L^2sin(\psi)^2\dot{\psi}^2\right]}{2} = \\
= \frac{m\left[2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{W^2}{2}\dot{\phi}^2\right] + M\left[R^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\psi}^2 + L^2sin(\psi)^2\dot{\phi}^2 + 2RLcos(\psi)\dot{\theta}\dot{\psi}\right]}{2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

1 Derivação e obtenção das equações dinâmicas