Álgebra Linear – revisão

INF1608 – Análise Numérica
Prof. Hélio Lopes
lopes@inf.puc-rio.br
sala 408 RDC

Álgebra Linear Computacional - Parte I

- Decomposição LU
- Espaços Vetoriais Reais
- Independência Linear, Bases e Dimensão
- Espaços Linha e Coluna, Núcleo, Posto e Nulidade
- Espaços Vetoriais com Produto Interno
- Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt
- Decomposição QR
- Método dos Mínimos Quadrados

2

Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de equações lineares (abreviadamente, sistema linear) é um conjunto finito de equações lineares aplicadas num mesmo conjunto, igualmente finito, de variáveis.

Operações Elementares

As seguintes operações sobre as linhas duma matriz são elementares:
-troca de linhas dentro da mesma matriz;
-multiplicação de uma linha por um número diferente de 0;
-substituição de uma linha pela sua soma com outra linha da matriz;
-substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo doutra linha da matriz;
-substituição de uma linha pela sua soma com uma combinação linear doutras linhas da matriz.

Estas operações aplicam-se exatamente da mesma forma às colunas duma qualquer matriz.

Forma Escada

Uma matriz m x n é linha reduzida à forma escada se :
a)O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
b)Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
c)Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).
d)Se as linhas 1,...., r são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna ki , então k1<k2<..<ki< ki+1<...<kr.

Teorema *- Toda matriz* A_{mxn} *é linha equivalente a uma única matriz-linha reduzida à forma escada.*

5

Decomposição LU

Seja Ax=b um sistema de equações lineares, então esse sistema é facilmente resolvido se a matriz A puder ser fatorada como o produto de uma matriz triangular inferior L por uma matriz triangular superior U.

$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$

Passo *1: Chame Ux de y, e resolva Ly=b.*

Passo *2: Resolva Ux = y.*

6

Decomposição LU

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Chame } y = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Resolva} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Resolva} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Para resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

faça a substituição para frente:

$$y_1 = b_1$$
$$y_2 = b_2 - l_{2,1} y_1$$
$$y_3 = b_3 - l_{3,1} y_1 - l_{3,2} y_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = b_n - l_{n,1} y_1 - l_{n,2} y_2 - \cdots - l_{n,n-1} y_{n-1}$$

Decomposição LU

Para resolver

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

faça a substituição para trás:

$$x_n = \frac{y_n}{u_{n,n}}$$

$$x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{y_{n-2} - u_{n-2,n}x_n - u_{n-2,n-1}x_{n-1}}{u_{n-2,n-2}}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \frac{y_1 - u_{1,n}x_n - u_{1,n-1}x_{n-1} - \ldots - u_{1,2}x_2}{u_{1,1}}$$

Decomposição LU

Teorema: *Se A é uma matriz quadrada que pode ser reduzida a forma escada U por eliminação Gaussiana sem troca de linhas, então A pode ser fatorada como A=LU, onde L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior.*

Definição: *A fatoração de uma matriz quadrada A como A=LU, onde L é triangular inferior e U é triangular superior é chamada de decomposição LU da matriz A.*

Decomposição LU

PUC RIO

Exemplo para a decomposição LU da matriz

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$L_1A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \text{ onde } l_{2,1}=\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}},\ b_{2,2}=a_{2,2}-l_{2,1}a_{1,2},\ b_{2,3}=a_{2,3}-l_{2,1}a_{1,3}.$$

$$L_2L_1A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -l_{3,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}, \text{ onde } l_{3,1}=\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}},\ b_{3,2}=a_{3,2}-l_{3,1}a_{1,2},\ b_{3,3}=a_{3,3}-l_{3,1}a_{1,3}.$$

$$L_3L_2L_1A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & c_{3,3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}=U, \text{ onde } l_{3,2}=\frac{b_{3,2}}{b_{2,2}},\ c_{3,3}=b_{3,3}-l_{3,2}b_{2,3}.$$

11

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Decomposição LU

PUC RIO

$$L_3L_2L_1A=U$$

$$\Downarrow$$

$$A=L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}U=LU$$

$$\Downarrow$$

$$L=L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_{3,1} & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}=LU$$

12

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Decomposição LU

Teorema: *Se A é uma matriz n × n que pode ser fatorada como A=LU, então*

$$det(A)=det(L)det(U)=det(U)=\Pi_{i=1..n}\, u_{i,i}.$$

Decomposição LU

(2) Para cada uma das matrizes abaixo encontre, se possível, uma fatoração da forma LU onde L é triangular inferior com 1s na diagonal e U é triangular superior com elementos não nulos na diagonal.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Decomposição LU

(3) Encontre a fatoração LU onde L é triangular inferior com 1s na diagonal e U é triangular superior com elementos não nulos na diagonal de A e resolva $Ax{=}e_1$, $Ax{=}e_1$, $Ax{=}e_1$, para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Qual é a inversa de A?

Espaços vetoriais

Seja V um conjunto arbitrário de objetos, que não seja vazio, no qual duas operações estão definidas: a operação de soma e a de multiplicação por escalar.

Por ***adição*** *queremos dizer uma regra que associa a cada par* ***u*** *e* ***v*** *de objetos de V o objeto* ***u+v****, chamado a soma de* ***u*** *e* ***v****.*

Por ***multiplicação por escalar*** *queremos dizer a regra que associa a cada escalar k de um corpo K (exemplo R ou C) e a cada objeto* ***v*** *de V o objeto k****v****, chamado de múltiplo escalar de* ***v*** *por k.*

Espaços vetoriais

Definição: *Se os seguintes axiomas são satisfeitos, então chamamos o conjunto V de* ***espaço vetorial*** *e os seus elementos de* ***vetores****:*

1. *Se* ***u*** *e* ***v*** *são objetos de V, então* ***u+v*** *é um objeto de V.*
2. *Se* ***u*** *e* ***v*** *são objetos de V, então* ***u+v = v+u.***
3. *Se* ***u,v*** *e* ***w*** *são objetos de V, então* ***u+(v+w) = (u+v)+w***
4. *Existe um objeto* ***0*** *em V, chamado de vetor nulo para V, tal que* ***0+u=u+0=u*** *para todo* ***u*** *em V.*
5. *Para cada* ***u*** *em V, existe um objeto* ***–u*** *em V, chamado negativo de* ***u****, tal que* ***u+(-u)=(-u)+u=0****.*
6. *Se k é um escalar qualquer e* ***u*** *é um objeto de V, então k****u*** *é um objeto de V.*
7. *Se k é um escalar qualquer e* ***u*** *e* ***v*** *são objetos de V, então k(****u+v****)= k****u****+k****v****.*
8. *Se k e m são escalares e* ***u*** *é um objeto de V, então (k+m)****u*** *= k****u*** *+ m****u****.*
9. *Se k e m são escalares e* ***u*** *é um objeto de V, então k(m****u****)=(km)****u.***
10. *Se* ***u*** *é um objeto de V, então 1****u=u***

Espaços vetoriais

Exemplos:

1. R^n: (+, ×)

Exercícios: Mostre que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais:

1. O espaço das matrizes reais m × n com $[A+B]_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$ e $[kA]_{i,j}=ka_{i,j}$
2. O espaço das funções reais com (f+g)(x)=f(x)+g(x), (kf)(x)=kf(x)

Espaços vetoriais

Teorema: *Se V é um espaço vetorial,* ***u*** *é um vetor de V, e k é um escalar, então:*
*1. 0**u**=**0***
*2. k**0**=**0***
3.(-1)***u**=-**u***
4.Se *k**u**=**0***, então *k=0* ou ***u**=**0***.

Subespaços vetoriais

Definição: *Um subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado de subespaço vetorial de V se W é um espaço vetorial considerando as operações de soma e multiplacação por escalar definidas sobre V.*

Teorema: *Se W é um subconjunto de um ou mais vetores de um espaço vetorial V, então W é um subespaço vetorial de V se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*
1.Se ***u*** *e* ***v*** *são vetoroes de W, então* ***u**+**v*** *pertence à W.*
2.Se k é um escalar e ***u*** *é um vetor qualquer de W, então k**u*** *pertence à W.*

Subespaços vetoriais

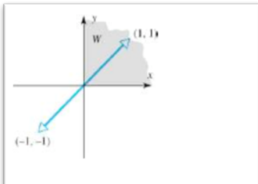
Exemplos:

1. {0}, retas que passam pela origem e o próprio plano são os únicos subespaços do R^2.
2. O conjunto das funções polinomiais com grau $\leq$ n é um subespaço das funções reais.
3. O conjunto das funções contínuas em R é um subespaço das funções reais.
4. O conjunto das funções deriváveis em R é um subespaço das funções contínuas.

Exercícios:

1. Quais são todos os possíveis tipos de subespaços do R^3?
2. Dê exemplos de subespaços do conjunto das matrizes quadradas de tamanho nxn.

Exemplos de um conjunto que não é um subespaço vetorial do R^2 com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais:



V is not closed under scalar multiplication.

Subespaços vetoriais

Definição: *Se* ***Ax=b*** *é um sistema de equações lineares, então cada vetor* ***x*** *que satisfaz essa equação é chamado de um* ***vetor solução*** *para o sistema.*

Teorema: *Se* ***Ax=0*** *é um sistema linear homogêneo de m equações com n incógnitas, então o conjunto formado pelos vetores solução para esse sistema é um subespaço de* R^n.

Combinação linear

PUC RIO

Definição: *Um vetor* $\mathbf{w}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ *se ele pode ser escrito na forma:*

$$\mathbf{w}=k_1\mathbf{v}_1+k_2\mathbf{v}_2+\ldots+k_r\mathbf{v}_r,$$

onde $k_1,k_2,\ldots,k_r$ *são escalares.*

Exemplo: Vetores do R^3 são combinações lineares de **i,j,k**.

Teorema: *Se* $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ *são vetores de V, então*
1.O conjunto W de todas as combinações lineares dos vetores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ *formam um subespaço vetorial de V.*
2.W é o menor subespaço vetorial de V que contém os vetores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$, *no sentido de que qualquer outro conjunto de V que contenha esses r vetores deve conter W.*

23

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Espaço gerado

PUC RIO

Definição: *Se* $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ *é um conjunto de vetores de um espaço vetorial V, então o subespaço vetorial W de V que consiste de todas as combinações lineares dos vetores* $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ *é chamado de* ***espaço gerado pelo conjunto*** *S, e escrevemos:*

$$W=span(S) \text{ ou } W=span(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r).$$

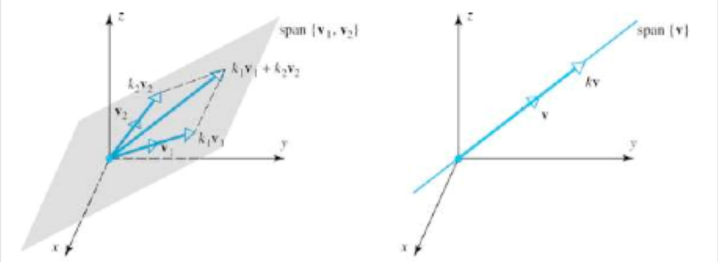
Exemplos:
1.Espaço gerado por um ou dois vetores no R^3.
2.O espaço gerado por $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ corresponde ao espaço dos polinômios até grau n.

Exercícios:
1.Verifique se o vetor $\mathbf{w} = (9,2,7)$ está no espaço gerado pelos vetores $\mathbf{u} = (1,2,-1)$ e $\mathbf{v} = (6,4,2)$.
2.Repita o exercício considerando $\mathbf{w} = (4,-1,8)$.

24

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Espaço gerado



(a) Span {v_1, v_2} is the plane through the origin determined by v_1 and v_2.

(b) Span {v} is the line through the origin determined by v.

Espaço gerado

Teorema: *Se* $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ *e* $S'=\{w_1,w_2,\ldots,w_l\}$ *são dois conjuntos de vetores de um espaço vetorial V, então*

$$span(v_1,v_2,\ldots,v_r)=span(w_1,w_2,\ldots,w_l)$$

se e somente se cada vetor de S é uma combinação linear dos vetores de S' e cada vetor de S' é uma combinação dos vetores de S.

Independência linear

Definição: *Se S={$\mathbf{v_1,v_2,\ldots,v_r}$ } é um conjunto não vazio de vetores de um espaço vetorial V, então a equação linear*

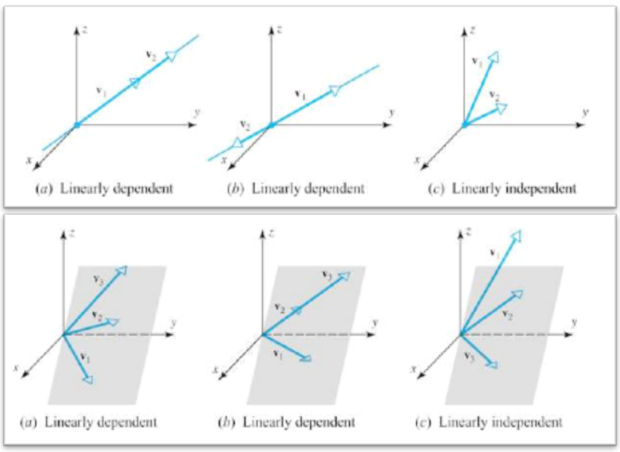
$$k_1\mathbf{v_1}+k_2\mathbf{v_2}+\ldots+k_r\mathbf{v_r}=\mathbf{0}$$

tem como solução

$$k_1=k_2=\ldots=k_r=0.$$

Se essa é a única solução para essa equação, então S é chamado de ***conjunto de vetores linearmente independentes****, e caso contrário é chamados de* ***conjunto de vetores linearmente dependentes****.*

Independência linear



Independência linear

Teorema: *Um conjunto S de dois ou mais vetores é:*
1.Linearmente dependente se e somente se um de seus vetores pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores em S.
2.Linearmente independente se e somente se nenhum de seus vetores pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores em S.

Teorema:
1.Um conjunto de vetores S que contenha o vetor ***0*** *é linearmente dependente.*
2.Um conjunto de dois vetores é linearmente independente se e somente se um vetor não é múltiplo do outro.
3.Seja $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ *um conjunto de vetores de um espaço vetorial* R^n. *Se* $r > n$, *então S é linearmente dependente.*

29

Bases e dimensão

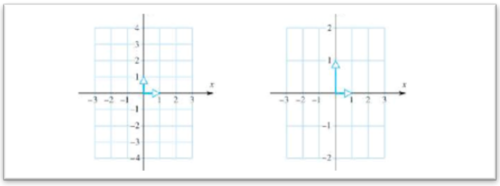
Definição: *Se* $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ *é um conjunto não vazio de vetores de um espaço vetorial V, então S é uma base para V se as duas condições são satisfeitas:*

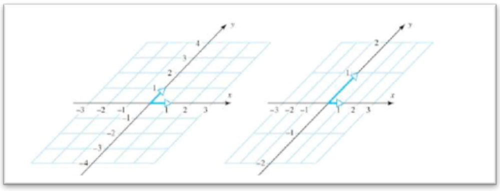
1.S é um conjunto de vetores linearmente independentes.

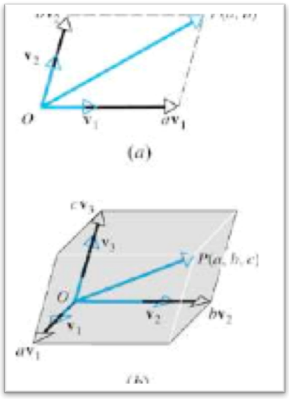
1.S gera V, isto é: V=span(S).

30

Bases e dimensão







31

Bases e dimensão

Teorema: *Se* $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\ldots,\boldsymbol{v_r}\}$ *é uma base para um espaço vetorial V, então qualquer vetor* $\boldsymbol{u}$ *em V pode ser escrito como combinação linear dos vetores em S em uma única forma, isto é, existem um único conjunto de escalares* $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ *tais que:*

$$\boldsymbol{u}=c_1\boldsymbol{v_1}+c_2\boldsymbol{v_2}+\ldots+c_r\boldsymbol{v_r}.$$

32

Bases e dimensão

Definição: *Dizemos que um espaço vetorial V, sendo V≠{**0**}, tem* ***dimensão finita*** *se existe um conjunto de vetores S=*$\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_r}\}$ *que forma uma base para ele. Caso contrário, dizemos que V tem* ***dimensão infinita****.*

*No caso em que V = {**0**}, também dizemos que V tem dimensão finita.*

Bases e dimensão

Teorema: *Se V é um espaço vetorial com dimensão finita e* $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_n}\}$ *é uma base para V, então:*

1. Qualquer conjunto de vetores de V com mais de n vetores é linearmente dependente.

2. Qualquer conjunto de vetores de V com menos do que n vetores não gera V.

Teorema: *Todas as bases de espaço vetorial V com dimensão finita tem o mesmo número de vetores.*

Bases e dimensão

Definição: *A **dimensão** de um espaço vetorial V com dimensão finita, denotada por dim(V), é o número de vetores que formam uma base para V.*

Se V é formado somente pelo vetor {0}, então dim(V)=0.

Exemplos:

1.$\dim(R^n) = n$
2.$\dim(M_{m \times n}) = m \times n$
3.$\dim(P_n) = n+1$

Bases e dimensão

Teorema: *Seja S um conjunto não vazio de vetores de um espaço vetorial V.*
*1.Se S é um conjunto de vetores linearmente independente e **v** é um vetor em V que não pertence a span(S), então o conjunto S* U *{**v**} continua sendo linearmente independente.*
*2.Se **v** é um vetor de S, que pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores de S, então S e S-{**v**} geram o mesmo espaço.*

Teorema: *Se V é um espaço vetorial n-dimensional e S é um conjunto de n vetores em V, então S é uma base para V se S gera V ou S é linearmente independente.*

Bases e dimensão

PUC RIO

Teorema: *Seja S um conjunto finito de vetores de um espaço vetorial V de dimensão finita.*
1.Se S gera V mas não é uma base para V, então S pode ser reduzido para formar uma base para V removendo vetores apropriadamente.
2.Se S é linearmente independente mas não gera V, então S pode ser extendido para formar uma base para V inserindo vetores apropriadamente.

Teorema: *Se W é um subespaço vetorial de um espaço vetorial V de dimensão finita, então $dim(W) \leq dim(V)$; em particular, se $dim(W)=dim(V)$, então $W=V$.*

37

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Considere os vetores $v_1=(1,2,3,2,1)$, $v_2=(-2,0,2,0,-2)$ e $v_3=(3,3,3,3,3)$ em $\Re^5$.

a. Determine se o conjunto de vetores acima é linearmente independente.
b. O vetor $v_4 = (0,2,2,2,0)$ pertence ao espaço gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3? Justifique.
c. As equações x_2-x_4=0 e x_1-x_5=0 descrevem o espaço gerado por v_1, v_2 e v_3? Justifique.

Considere os seguintes subespaços de $\Re^4$
V: gerado pelo conjunto de vetores {(1, 2, 1, 0); (1, 1, 2, -2); (3, 8, 1,4)} e
W: gerado pelo conjunto de vetores {(2, 1, 5, -6); (1, 2, 1, 0); (1, 1, 2, 2)}:

a. Diga a dimensão de cada subespaço.
b. Encontre uma base para o subespaço $V \cap W$.

38

Espaço linha, espaço coluna e núcleo de uma matriz

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ *uma matriz real de tamanho* $m \times n$.

Os vetores em R^n $\begin{array}{l} r_1 = [a_{1,1} \ \cdots \ \cdots \ a_{1,n}] \\ r_2 = [a_{2,1} \ \cdots \ \cdots \ a_{2,n}] \\ \vdots \\ r_m = [a_{m,1} \ \cdots \ \cdots \ a_{m,n}] \end{array}$ *são chamados* ***vetores linhas*** *de A.*

Os vetores em R^m $c_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix}, \cdots, c_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}$ *são chamados* ***vetores colunas*** *de A.*

39

Espaço linha, espaço coluna e núcleo de uma matriz

Definição: *Se* ***A*** *é uma matriz* $m \times n$*, então o subespaço de* R^n *gerado pelos vetores linhas da matriz* ***A*** *é chamado de* ***espaço linha*** *de* ***A****, e o subespaço de* R^m *gerado pelos vetores colunas de* ***A*** *é chamado de* ***espaço coluna*** *de* ***A****.*
O espaço solução do sistema de equações ***Ax=0****, que é um subespaço de* R^n*, é chamado de* ***núcleo*** *da matriz* ***A****.*

Perguntas:
1.Quais são as relações que existem entre a solução de um sistema de equações lineares Ax=b e o espaço linha, espaço coluna e o núcleo de A?
2.Quais são as relações existentes entre o espaço linha, espaço coluna e núcleo de uma matriz A?

40

Espaço linha, espaço coluna e núcleo de uma matriz

Teorema: *Um sistema de equações lineares* $\mathbf{Ax=b}$ *é consistente se e somente se* $\mathbf{b}$ *pertence ao espaço coluna de* $\mathbf{A}$.

Teorema: *Se* $\mathbf{x}_0$ *denota uma solução para um sistema de equações lineares consistente* $\mathbf{Ax=b}$, *e* $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ *forma uma base para o núcleo de* $\mathbf{A}$, *então qualquer solução para* $\mathbf{Ax=b}$ *pode ser expressa na forma:*

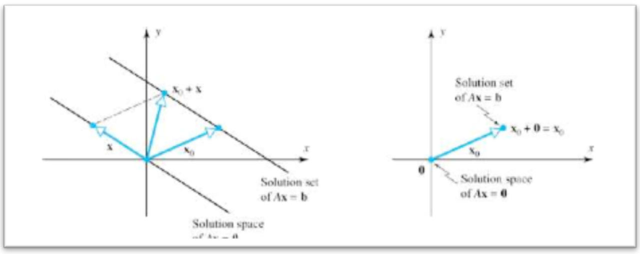
$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_k\mathbf{v}_k.$$

Por outro lado, para qualquer escolha de $c_1,\ldots,c_k$, *o vetor* $\mathbf{x}$ *escrito como na fórmula acima é solução de* $\mathbf{Ax=b}$.

Chamamos o vetor $\mathbf{x}_0$ *de* ***solução particular*** *para o sistema* $\mathbf{Ax=b}$, *e a solução* $\mathbf{x}_0+c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_k\mathbf{v}_k$ *de* ***solução geral*** *para o sistema* $\mathbf{Ax=b}$.

41

Espaço linha, espaço coluna e núcleo de uma matriz



42

Espaço linha, espaço coluna e núcleo de uma matriz

Teorema: *Operações elementares com linhas não mudam o núcleo de uma matriz.*

Teorema: *Operações elementares com linhas não mudam o espaço linha de uma matriz.*

Teorema: *Se A e B são duas matrizes equivalentes por linhas, então:*
1.Um dado conjunto de vetores colunas de A é linearmente independente se e somente se os vetores colunas correspodentes de B são linearmente independentes.
2.Um dado conjunto de vetores colunas de A forma uma base para o espaço coluna de A se e somente se os vetores colunas correspondentes de B formam uma base para o espaço coluna de B.

Espaço linha, espaço coluna e núcleo de uma matriz

Teorema: *Se uma matriz R está na forma reduzida escalonada por linhas, então os vetores linhas de R que não são nulos formam uma base para o espaço linha de R, e os vetores colunas que possuem os pivôs 1's formam uma base para o espaço coluna de R.*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [1 \quad -2 \quad 5 \quad 0 \quad 3] \\ \mathbf{r}_2 &= [0 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0] \\ \mathbf{r}_3 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$ *é uma base para Row(R)*

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ *é uma base para Col(R)*

Posto e nulidade de uma matriz

Se A é uma matriz e A^T é a sua transposta, então existem 6 espaços de interesse:

1. *O espaço linha de A;*
2. *O espaço coluna de A;*
3. *O núcleo de A;*
4. *O espaço linha de A^T;*
5. *O espaço coluna de A^T;*
6. *O núcleo de A^T.*

Só que o espaço coluna de A é igual ao espaço linha de A^T, e o espaço linha de A é igual ao espaço coluna de A^T.

45

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Posto e nulidade de uma matriz

Teorema: *Se A é uma matriz qualquer, então o espaço linha e o espaço coluna de A tem a mesma dimensão.*

Definição: *A dimensão comum do espaço linha e do espaço coluna de uma matriz A é chamada* ***posto*** *de A, e é denotada por rank(a).*
A dimensão do núcleo de A é chamada de ***nulidade*** *de A e é denotada por nullity(A).*

46

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Posto e nulidade de uma matriz

Teorema: *Se A é uma matriz qualquer, então $rank(A)=rank(A^T)$.*

Teorema: *Se A é uma matriz com n colunas, então:*

$$rank(A) + nullity(A) = n.$$

47

Posto e nulidade de uma matriz

$$dim(Row(A)) = r$$

$$dim(Col(A)) = r$$

$$nullity(A) = n-r$$

$$nullity(A^T) = m-r$$

48

(1) Calcule o núcleo e imagem das matrizes (escreva uma base e suas equações)

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \\ 7 & 11 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Ache equações para o subespaço de $V \subseteq \mathbb{R}^8$ gerado por $(1,1,1,1,1,1,1,1)$, $(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1)$, $(1,0,-1,0,1,0,-1,0)$, $(0,1,0,-1,0,1,0,-1)$, $(-7,-5,-3,-1,1,3,5,7)$.

(3) Ache uma base para o subespaço $W \subseteq \mathbb{R}^7$ definido pelas equações $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=0$, $3x_1+2x_2+x_3-x_5-2x_6-3x_7=0$.

(4) Encontre uma base para $V \cap W \subseteq \mathbb{R}^6$ onde
$V = \langle (0,1,1,2,3,5), (1,2,3,4,5,6), (2,3,5,7,11,13), (0,1,4,9,16,25) \rangle$,
$W = \langle (1,1,1,1,1,1), (2,-1,-1,2,-1,-1), (-1,2,-1,-1,2,-1), (1,-1,1,-1,1,-1) \rangle$.

49

Seja a matriz abaixo:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Encontre as equações e bases para os subespaços linha e nulo da matriz A_3.
b. O vetor (2,1,-5) pertence a imagem de A_3? Justifique

50

Sistema linear de m equações com n incógnitas

Teorema: *Se $Ax=b$ é um sistema linear de m equações com n incógnitas, então é equivalente dizer que:*
1. $Ax=b$ é consistente.
2. b pertence ao espaço coluna de A.
3. A matriz A e a matriz aumentada $[A|b]$ tem o mesmo posto.

Teorema: *Se $Ax=b$ é um sistema linear de m equações com n incógnitas, então é equivalente dizer que:*
1. $Ax=b$ é consistente para qualquer b em R^m.
2. O espaço coluna de A gera R^m.
3. $Rank(A)=m$.

51

Sistema linear de m equações com n incógnitas

Teorema: *Se $Ax=b$ é um sistema linear consistente com m equações e n incognitas e A tem posto r, então a solução geral do sistema possui n-r parâmetros.*

Teorema: *Se A é uma matriz $m \times n$, então é equivalente dizer que:*
1. $Ax=0$ tem somente a solução trivial.
2. Os vetores coluna de A são linearmente independentes.
3. $Ax=b$ tem no máximo uma solução (um ou nenhuma) para qualquer vetor b em R^m.

52

Teorema: *Se A é uma matriz n ×n, então é equivalente dizer que:*
1.A é inversível.
2.Ax=0 tem somente a solução trivial.
3.A forma reduzida escalonada por linhas de A e I_n.
4.A pode ser escrita como produto de matrizes elementares.
5.Ax=b é consistente para qualquer b em R^n.
6.Ax=b tem uma única solução.
7.det(A)≠0.
8.A imagem da transformação T(x)=Ax é o R^n.
9.T(x)=Ax é uma relação bijetiva.
10.Os vetores linhas de A são linearmente independentes.
11.Os vetores colunas de A são linearmente independentes.
12.Os vetores linhas de A geram o R^n.
13.Os vetores colunas de A geram o R^n.
14.Os vetores lihas de A formam uma base para o R^n.
15.Os vetores colunas de A formam uma base para o R^n.
16.A tem posto n.
17.A tem nulidade 0.

53

Espaços com produto interno

PUC RIO

Definição: *Um **produto interno** num espaço vetorial real V é a função que associa um número real <**u,v**> a cada par de vetores **u** e **v** de V tal que as seguintes condições sejam satisfeitas para quaisquer vetores **u, v** e **w** em V e para qualquer escalar k:*
1.<u,v> =<v,u>
2.<u+v,w> = <u,w> + <v,w>
3.<ku,v> = k<u,v>
4.<v,v>≥0, e <v,v>=0 ⇔ v=0.

Exemplos de espaços vetoriais com produto interno:
1.R^n com $<u,v> = u_1v_1+...+u_nv_n$.
2.P_n com $<p,q>=a_0b_0+...+a_nb_n$.
3.C([a,b]) com $$<f,g>=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

54

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Norma e distância

Definição: *Se V é um espaço vetorial com um produto interno, então a* ***norma de um vetor u*** *em V é denotada por* $||\mathbf{u}||$ *e é definido por:*

$$||\mathbf{u}|| = <\mathbf{u},\mathbf{u}>^{1/2}.$$

A ***distância*** *entre dois vetores* **u** *e* **v** *é denotada por* $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *e é definida por:*

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||.$$

Um vetor com norma igual a um é chamado de ***vetor unitário****.*

Propriedades da norma e da distância

Teorema: *Se* **u** *e* **v** *são quaisquer vetores de um espaço vetorial V munido de um produto interno e k é um escalar qualquer, então:*

1. $||\mathbf{u}|| \geq 0$; $||\mathbf{u}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}=0$.
2. $||k\mathbf{u}||=|k|\,||\mathbf{u}||$.
3. $||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$.

Teorema: *Se* **u,v** *e* **w** *são quaisquer vetores de um espaço vetorial V munido de um produto interno, então:*

1. $d(u,v) \geq 0$; $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u = v$.
2. $d(u,v) = d(v,u)$.
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$.

Ângulo entre vetores e ortogonalidade

Definição: *Sejam **u** e **v** dois vetores de um espaço vetorial V munido de um produto interno. Definimos o **ângulo** entre esses dois vetores como sendo o ângulo θ que satisfaz:*

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

*Dizemos que **u** e **v** são **ortogonais** quando <**u**,**v**>=0.*

Teorema: *Se **u** e **v** são vetores ortogonais de um espaço vetorial V munido de um produto interno, então*

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

57

Espaços complementares ortogonais

Definição: *Seja W um subespaço de um espaço vetorial V munido de um produto interno. Um vetor **u** é dito ser **ortogonal a** W se ele for ortogonal a cada um dos vetores de W, e o conjunto de todos os vetores de V ortogonais a W é chamado de **complementar ortogonal** de W, e é denotado por $W^\perp$.*

Teorema: *Se W é um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita munido de um produto interno, então:*

1. *$W^\perp$ é um subespaço de V.*
2. *O único vetor comum a W e a $W^\perp$ é o vetor **0**.*
3. *O complementar ortogonal de $W^\perp$ é W.*

58

Espaços complementares ortogonais

Teorema: *Se A é uma matriz m×n, então:*
1.O núcleo de A e o espaço linha de A são complementares ortogonais em R^n com respeito ao produto interno euclidiano.
2.O núcleo de A^T e o espaço coluna de A são complementares ortogonais em R^m com respeito ao produto interno euclidiano.

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC-RIO

Teorema: *Se A é uma matriz n ×n, então é equivalente dizer que:*
1.A é inversível.
2.Ax=0 tem somente a solução trivial.
3.A forma reduzida escalonada por linhas de A e I_n.
4.A pode ser escrita como produto de matrizes elementares.
5.Ax=b é consistente para qualquer b em R^n.
6.Ax=b tem uma única solução.
7.det(A)≠0.
8.A imagem da transformação T(x)=Ax é o R^n.
9.T(x)=Ax é uma relação bijetiva.
10.Os vetores linhas de A são linearmente independentes.
11.Os vetores colunas de A são linearmente independentes.
12.Os vetores linhas de A geram o R^n.
13.Os vetores colunas de A geram o R^n.
14.Os vetores lihas de A formam uma base para o R^n.
15.Os vetores colunas de A formam uma base para o R^n.
16.A tem posto n.
17.A tem nulidade 0.
18.O complementar ortogonal do núcleo de A é R^n.
*19.O complementar ortogonal do espaço linha de A é {**0**}.*

1. Seja $\langle u,v \rangle$ o produto interno euclidiano ponderado definido como $<u,v>=4u_1v_1+5u_2v_2$ e sejam $u=(3,-2)$, $v=(4,5)$, $w=(-1,6)$ e $l=-4$. Mostre que
   a. $<u,v>=<v,u>$
   b. $<u+v,w>=<u,w>+<v,w>$
   c. $<lu,v>=l<u,v>=<u,lv>$
   d. $<0,v>=<v,0>=0$

2. Suponha que R^4 tem produto interno euclidiano e seja $u=(-1,1,0,2)$. Determine se o vetor u é ortogonal ao subespaço gerado pelos vetores $w_1=(1,-1,3,0)$ e $w_2=(-4,0,9,2)$

3. Obtenha a equação para $W^{\perp}$ nos casos abaixo:
   a. Seja W a reta de equação $y=2x$ em R^2.
   b. Seja W o plano de equação $x-2y-3z=0$ em R^3.
   c. Seja W a reta de equações paramétricas $x=2t$, $y=-5t$, $z=4t$ em R^3.
   d. Seja W a interseção dos dois planos $x+y+z=0$ e $x-y+z=0$ em R^3.

4.Seja

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. encontre bases para o espaço-linha e o espaço-nulo de A.
   b. Mostre que cada vetor do espaço linha e ortogonal a cada vetor do espaço nulo.

5.Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço de R^n gerado pelo vetores:
   a. $v_1=(1,-1,3)$, $v_2=(5,-4,-4)$ e $v_3=(7,-6,2)$
   b. $v_1=(2,0,-1)$, $v_2=(4,0,-2)$
   c. $v_1=(1,4,5,2)$, $v_2=(2,1,3,0)$ e $v_3=(-1,3,2,2)$

6. Seja $Ax=0$ um sistema homogêneo de três equações nas variáveis x, y e z
   a. Se o espaço-solução é uma reta em R^3, que tipo de objeto geométrico é o espaço linha? Explique seu raciocínio.
   b. Se o espaço-coluna é uma reta pela origem, que tipo de objeto geométrico é o espaço-solução dos sistema homogêneo $A^Tx=0$? Explique seu raciocínio.
   c. Se o sistema homogêneo $A^Tx=0$ tem uma única solução, o quê você pode dizer sobre o espaço-linha e o espaço-coluna de A. Explique seu raciocínio.

7.Decida se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contra-exemplo.
   a. Se V é um subespaço em R^n e W é um subespaço de V então $W^\perp$ é um subespaço de $V^\perp$
   b. Se $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|+\|w\|$ para quaisquer vetores u, v e w de um espaço com produto interno.
   c. Se u está no espaço-nulo e no espaço-linha de uma matriz quadrada então $u=0$.

63

8. Mostre que os vetores $v_1=(1,-1,2,-1)$, $v_2=(-2,2,3,2)$, $v_3=(1,2,0,-1)$ e $v_4=(1,0,0,1)$ formam uma base ortogonal de R^4 em relação ao produto interno euclidiano. Expresse os vetores abaixo nesta base:
   a. $(1,1,1,1)$
   b. $(\sqrt{2},-3\sqrt{2},5\sqrt{2},-\sqrt{2})$
   c. $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

9. Para cada conjunto de vetores abaixo determine a dimensão do espaço gerado por S e uma base ortonormal para este espaço.
   a. $S=\{(1,2),(4,5)\}$
   b. $S=\{(1,0),(3,2),(2,1)\}$
   c. $S=\{(3,1,0),(1,2,1),(-1,-7,-4)\}$
   d. $S=\{(1,1,0,1),(1,1,1,1),(2,2,1,1)\}$
   e. $S=\{(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,1,1,2)\}$

64

Bases ortogonais e ortonormais

Definição: *Um conjunto de vetores de um espaço vetorial V munido de um produto interno é dito ser um **conjunto ortogonal** se todos os pares de vetores distintos nesse conjunto são ortogonais. Um conjunto ortogonal em que todos os seus vetores tem norma um é chamado de **conjunto ortonormal** de vetores.*

Definição: *Num espaço vetorial V munido de um produto interno, uma base que consiste de um conjunto de vetores ortogonais é chamada de **base ortogonal**, e uma base que consiste de vetores ortonormais é chamada de **base ortonormal**.*

Teorema: *Se* $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de um espaço vetorial munido de um produto interno, então S é linearmente independente.*

65

Coordenadas relativas a bases ortonormais e a bases ortogonais

Teorema: *Se* $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *é uma base ortonormal para um espaço vetorial V munido de um produto interno, então qualquer vetor* ***u*** *de V é escrito como:*

$$u=\langle u,v_1\rangle v_1+\langle u,v_2\rangle v_2+\ldots+\langle u,v_n\rangle v_n$$

Teorema: *Se* $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *é uma base ortogonal para um espaço vetorial V munido de um produto interno, então qualquer vetor* ***u*** *de V é escrito como:*

$$u=(\langle u,v_1\rangle/\|v_1\|^2)\, v_1+(\langle u,v_2\rangle/\|v_2\|^2)\, v_2+\ldots+(\langle u,v_n\rangle/\|v_n\|^2)\, v_n$$

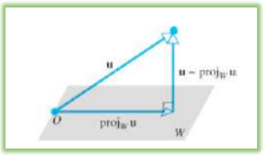
66

Projeções ortogonais

Teorema: *Se W é um subespaço vetorial com dimensão finita de um espaço vetorial V com produto interno, então cada vetor* **u** *de V pode ser expresso exatamente por:*

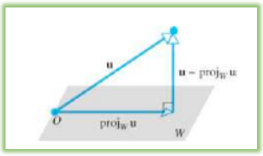
$$\mathbf{u}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$$

onde $\mathbf{w}_1$ pertence a W e $\mathbf{w}_2$ pertence ao complementar ortogonal de W.



67

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt



\+

Teorema: *Todo espaço vetorial com dimensão finita munido de um produto interno possui uma base ortonormal.*

68

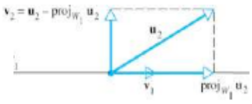
Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

***ALGORITMO:* Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt**

***Entrada*:** *Um conjunto S=*$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *que forma uma base para o espaço vetorial V munido de um produto interno.*

***Saída*:** *Um conjunto S=*$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *que forma uma base ortogonal para o espaço vetorial V munido de um produto interno.*

***Passo 1*:** *Faça* $v_1 = u_1$.



***Passo 2*:** *Faça* $v_2 = u_2 - \text{proj}_{W_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

***Passo 3*:** *Faça* $v_3 = u_3 - \text{proj}_{W_2} u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$

...e assim por diante até completar os n vetores.

A decomposição QR

Pergunta: *Se A é uma matriz n×n com n vetores colunas linearmente independentes, e se Q é a matriz com vetores colunas ortonormais resultantes do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, então qual é a relação entre A e Q?*

A decomposição QR

$$A = [u_1 \quad \cdots \quad u_n] \text{ e } Q = [q_1 \quad \cdots \quad q_n]$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_1 = < u_1, q_1 > q_1 + \cdots + < u_1, q_n > q_n \\ u_2 = < u_2, q_1 > q_1 + \cdots + < u_2, q_n > q_n \\ \vdots \\ u_n = < u_n, q_1 > q_1 + \cdots + < u_2, q_n > q_n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$[u_1 \quad \cdots \quad u_n] = [q_1 \quad \cdots \quad q_n] \begin{bmatrix} < u_1, q_1 > & \cdots & < u_n, q_1 > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < u_1, q_n > & \cdots & < u_n, q_n > \end{bmatrix}$$

A decomposição QR

$$[u_1 \quad \cdots \quad u_n] = [q_1 \quad \cdots \quad q_n] \begin{bmatrix} < u_1, q_1 > & \cdots & < u_n, q_1 > \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ < u_1, q_n > & \cdots & < u_n, q_n > \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A = QR, \text{ onde}$$

$$R = \begin{bmatrix} < u_1, q_1 > & < u_2, q_1 > & \cdots & < u_n, q_1 > \\ 0 & < u_2, q_2 > & \cdots & < u_n, q_2 > \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & < u_n, q_n > \end{bmatrix}$$

A decomposição QR

Teorema: *Se A é uma matriz $n \times n$ com n vetores colunas linearmente independentes, então A pode ser fatorada como o produto QR, onde Q é uma matriz cujos vetores colunas são ortonormais e R é uma matriz triangular superior cujos elementos da diagonal são todos difrentes de zero.*

Pergunta: *Qual é o papel da decomposição QR em álgebra linear?*

73

Matrizes ortogonais

Definição: *Se A é uma matriz $n \times n$ e A possui a propriedade de que*

$$A^{-1}=A^{T},$$

então dizemos que A é uma ***matriz ortogonal***.

Teorema: *Se A é uma matriz $n \times n$, então é equivalente dizer:*

1. *A é ortogonal;*
2. *Os vetores colunas de A formam uma conjunto ortonormal em R^n com o produto interno euclidiano;*
3. *Os vetores linhas de A formam uma conjunto ortonormal em R^n com o produto interno euclidiano.*

74

Matrizes ortogonais

Teorema: É verdade dizer:
1.A inversa de uma matriz ortogonal é ortogonal.
2.O produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.
3.Se A é ortogonal, então det(A) =1 ou det(A) = -1.

Teorema: *Se A é uma matriz n × n , então é equivalente dizer:*
1.A é ortogonal;
2. $||A\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$ *para todo* $\mathbf{x}$ *pertencente ao* R^n.
3. $<A\mathbf{x},A\mathbf{y}>=<\mathbf{x},\mathbf{y}>$ *para todo* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *pertencentes ao* R^n.

75

A decomposição QR

Sabendo escrever $A = QR$, como resolver $Ax = b$?

$Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$

76

Melhor aproximação

(a) Q is the point in W closest to P.   (b) ‖u − w‖ is minimized by w = proj$_W$ u.

Definição: *Se W é um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial V munido de um produto interno e se* ***u*** *é um vetor em V, então proj$_W$u é a melhor aproximação de u em W no sentido de que:*

$$||\mathbf{u}-proj_W\mathbf{u}|| < ||\mathbf{u}-v||$$

para cada vetor ***v*** *em W que seja diferente de proj$_W$u.*

77

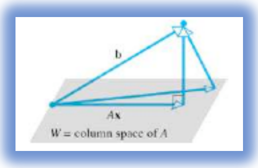
Mínimos quadrados

Dado um sistema linear Ax=b de m equações com n incógnitas, determine o x, se possível, que minimiza ||Ax-b|| com respeito ao produto interno euclidiano do R^n. Tal vetor é a solução de mínimos quadrados de Ax=b.

Para entender a origem do termo mínimos quadrados, seja e = Ax-b o vetor erro que resulta da aproximação x.A solução dos mínimos quadrados que minimiza ||e|| também minimiza $||e||^2$.

78

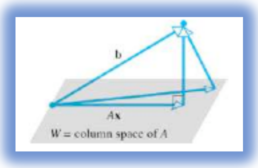
Mínimos quadrados



Seja W o espaço coluna de A. A solução x dos mínimos quadrados que minimiza $||Ax-b||$ é o vetor Ax em W que está mais próximo de b, Esse vetor é simplesmente a projeção de b em W!

79

Mínimos quadrados



É fácil observar que b-Ax é ortogonal a W, que por sua vez é o espaço coluna de A, portanto b-Ax pertence ao núcleo de A^T.

Assim:

$$A^T(b-Ax)=0 \Leftrightarrow A^TAx=A^tb.$$

Esse sistema é conhecido como ***sistema normal.***

80

Mínimos quadrados

Teorema: *Para qualquer sistema $Ax=b$, a forma normal associada*

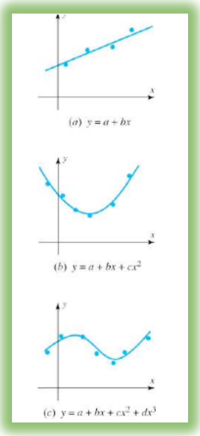
$$A^T Ax = A^T b$$

é consistente, e todas as soluções do sistema normal são soluções para o problema de mínimos quadrados $\min_x \|Ax-b\|^2$.
E, se W é o espaço coluna de A e x é qualquer solução dos mínimos quadrados de $Ax=b$, então a projeção ortogonal de b em W é o vetor Ax.

Teorema: *Se A é uma matrix $n \times n$, então é equivalente dizer:*
1. A tem n vetores colunas linearmente independentes.
2. $A^T A$ é inversível.

81

Exercício: Ajuste de curvas



Dado o conjunto de pontos no plano:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Usando o que você sabe sobre mínimos quadrados, determine a reta (parábola ou cúbica) que melhor ajusta esses pontos.

82

10. Para cada uma das matrizes abaixo encontre uma fatoração da forma QR onde Q é ortogonal e R é triangular superior com elementos positivos na diagonal.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema linear Ax=b e obtenha a projeção ortogonal de b no espaço-coluna de A.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

12.Encontre a projeção ortogonal de u no subespaço de R^3 gerado pelos vetores v_1 e v_2.

a. u=(2,1,3) , v_1 =(1,1,0) e v_2 =(1,2,1)
b. u=(1,-6,1) , v_1 =(-1,2,1) e v_2 =(2,2,4)

13. Encontre a projeção ortogonal de u=(5,6,7,2) no espaço solução do sistema linear homogêneo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

83