Álgebra Linear

INF2031 – 2016.1

Prof. Hélio Lopes
lopes@inf.puc-rio.br
sala 408 RDC

Autovalores e Autovetores

- Definição
- Polinômio Característico
- Matrizes Triangulares
- Autovetores
- Algumas Propriedades

PUC RIO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA PUC·RIO

Autovalores e Autovetores

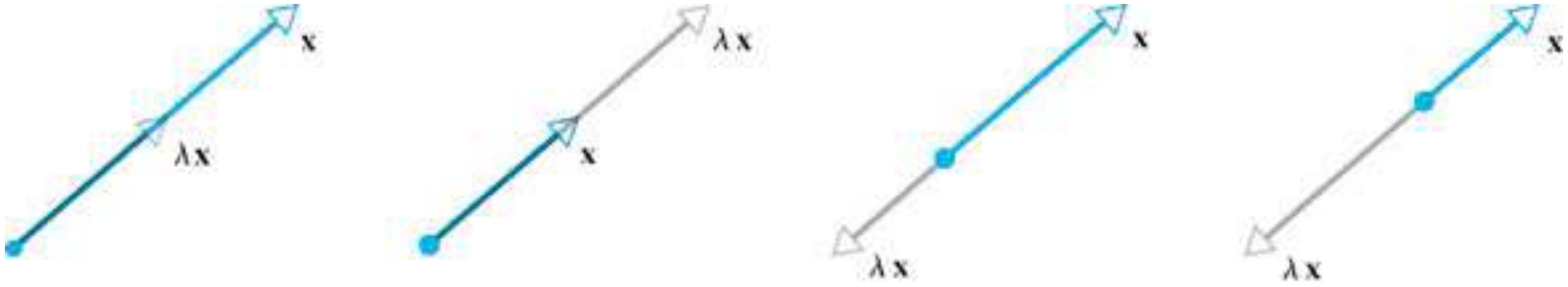
Definição

Definição

Se A é uma matriz $n \times n$, então um vetor não-nulo $\mathbf{x}$ em R^n é chamado um ***autovetor*** de A se $A\mathbf{x}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{x}$, ou seja,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

para algum escalar λ. O escalar λ é chamado um ***autovalor*** de A e dizemos que $\mathbf{x}$ é um autovetor ***associado*** a λ.



(a) $0 \le \lambda \le 1$ (b) $\lambda \ge 1$ (c) $-1 \le \lambda \le 0$ (d) $\lambda \le -1$

Autovalores e Autovetores

Definição

EXEMPLO 1 Autovetores de uma Matriz 2×2

O vetor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

correspondendo ao autovalor $\lambda = 3$, pois

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Autovalores e Autovetores

Polinômio Característico

Para encontrar os autovalores de uma matriz A de tamanho $n \times n$ nós reescrevemos $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ como

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

ou, equivalentemente,

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Para λ ser um autovalor, precisa haver uma solução não-nula desta equação. No entanto, pelo Teorema 6.4.5, a Equação (1) tem uma solução não-nula se, e somente se,

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Esta equação é a ***equação característica*** de A; os escalares que satisfazem esta equação são os autovalores de A. Quando expandido, o determinante $\det(\lambda I - A)$ é um polinômio p em λ que é chamado o ***polinômio característico*** de A.

Autovalores e Autovetores

Polinômio Característico

Pode ser mostrado (Exercício 15) que se A é uma matriz $n \times n$, então o polinômio característico de A tem grau n e o coeficiente de λ^n é 1, ou seja, o polinômio característico $p(x)$ de uma matriz $n \times n$ é da forma

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra segue que a equação característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

tem, no máximo, n soluções distintas, de modo que uma matriz $n \times n$ tem, no máximo, n autovalores distintos.

Autovalores e Autovetores

Polinômio Característico

EXEMPLO 2 Autovalores de uma Matriz 3×3

Encontre os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Matriz Triangular

Teorema 7.1.1

Se A é uma matriz $n \times n$ triangular (superior, inferior ou diagonal), então os autovalores de A são as entradas na diagonal principal de A.

EXEMPLO 3 Autovalores de uma Matriz Triangular Superior

Encontre os autovalores da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Autovetores

Teorema 7.1.2 **Afirmações Equivalentes**

Se A é uma matriz $n \times n$ e λ é um número real, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) *λ é um autovalor de A.*
(b) *O sistema $(\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de equações tem soluções não-triviais.*
(c) *Existe um vetor não-nulo $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*
(d) *λ é uma solução da equação característica* $\det(\lambda I - A) = 0$.

Autovalores e Autovetores

Autovetores

EXEMPLO 5 Bases de Auto-espaços

Encontre bases para os auto-espaços de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

Potências de uma Matriz

Teorema 7.1.3

Se k é um inteiro positivo, λ é um autovalor de uma matriz A e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado, então λ^k é um autovalor de A^k e $\mathbf{x}$ é um autovetor associado.

Autovalores e Invertibilidade

Teorema 7.1.4

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\lambda = 0$ não é um autovalor de A.

Autovalores e Autovetores

Propriedades

1) *Se λ é um autovalor de uma matriz inversível A com autovetor associado* $\mathbf{x}$, *então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1} com autovetor associado* $\mathbf{x}$.

2) *Se λ é um autovalor de A com autovetor associado* $\mathbf{x}$, *e se σ é um escalar então $\lambda - \sigma$ é um autovalor de $A - \sigma I$ com autovetor associado* $\mathbf{x}$.

3) *O produto dos n autovalores de uma matriz $A^{n \times n}$ é igual ao determinante de A.*

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

1) Rotação em R^2

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Não existem autovalores reais.

2) Rotação em R^3

$$R_{eixo\text{-}x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Os vetores sobre o eixo de rotação são os autovetores associados ao autovalor λ=1.

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

3) Projeções em R^2

$$P = \frac{vv^t}{v^t v}$$

$\lambda_1 = 1$ e os autovetores associados estão sobre o eixo de projeção.
$\lambda_2 = 0$ e os autovetores associados são perpendiculares ao eixo de projeção.

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

4) Projeções em R^3

$$P = \frac{vv^t}{v^t v}$$ Projeção sobre um eixo

$\lambda_1 = 1$ e os autovetores associados estão sobre o eixo de projeção.

$\lambda_2 = 0$ e os autovetores associados são perpendiculares ao eixo de projeção.

$\lambda_3 = 0$ e os autovetores associados são perpendiculares ao eixo de projeção.

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

5) Projeções em R^3

$$P = I - \frac{vv^t}{v^t v}$$ Projeção sobre o plano normal ao vetor *v*

$\lambda_1 = 1$ *e os autovetores associados estão sobre o plano de projeção.*
$\lambda_2 = 1$ *e os autovetores associados estão sobre o plano de projeção.*
$\lambda_3 = 0$ *e os autovetores associados estão na direção da normal ao plano.*

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

6) Reflexões em R^2

$$H = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ *e os autovetores associados estão sobre o eixo de reflexão.*
$\lambda_2 = -1$ *e os autovetores associados são perpendiculares ao eixo de reflexão.*

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

7) Reflexão em R^3

$$H = I - 2\frac{vv^t}{v^t v}$$

Reflexão sobre o plano normal ao vetor *v*

$\lambda_1 = 1$ *e os autovetores associados estão sobre o plano de projeção.*

$\lambda_2 = 1$ *e os autovetores associados estão sobre o plano de projeção.*

$\lambda_3 = -1$ *e os autovetores associados estão na direção da normal ao plano.*

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

8) Cisalhamento em $\mathbf{R}^2$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento de fator k na direção x

$\lambda_1 = 1$ *e os autovetores associados estão sobre o eixo-x.*

$\lambda_2 = 1$

Autovalores e Autovetores

Autovalores e Autovetores de Algumas Transformações Lineares

Exemplo:

Sabendo que a matriz $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz de projeção, determine o eixo de projeção.*

Diagonalização

- Problema de Diagonalização
- Matriz Diagonalizável
- Etapas para Diagonalização
- Multiplicidade Algébrica e Geométrica
- Potências de uma Matriz
- Diagonalização Ortogonal
- Matrizes Simétricas

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
PUC·RIO

Diagonalização

O Problema da Diagonalização

O Problema dos Autovetores. Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existe uma base de R^n consistindo de autovetores de A?

O Problema da Diagonalização (Versão Matricial). Dada uma matriz A de tamanho $n \times n$, existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Diagonalização

Definição

Uma matriz quadrada A é dita diagonalizável se existe uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

Propriedades

Teorema 7.2.1

Se A é uma matriz $n \times n$, então são equivalentes as seguintes afirmações:

(a) A é diagonalizável.
(b) A tem n autovetores linearmente independentes.

Diagonalização

Etapas para diagonalização

1) *Encontre **n** autovetores linearmente independentes.*

2) *Monte a matriz P tendo cada autovetor como uma coluna.*

3) *A matriz $P^{-1}AP$ sera diagonal com os autovalores correspondentes na diagonal.*

Diagonalização

Etapas para diagonalização

Exercício:

Encontre a matriz P que diagonaliza $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Solução:

$$\lambda = 2: \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1: \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalização

Etapas para diagonalização

Exercício:

Verifique que a matriz A não é diagonalizável: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Diagonalização

Propriedades

Teorema 7.2.2

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *são autovetores de A associados a autovalores distintos* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *então* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *é um conjunto linearmente independente.*

Teorema 7.2.3

Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ *tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.*

Diagonalização

Exemplo

EXEMPLO 3 Usando o Teorema 7.2.3

Nós vimos no Exemplo 2 da seção anterior que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

tem três autovalores distintos, $\lambda = 4$, $\lambda = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda = 2 - \sqrt{3}$. Portanto A é diagonalizável. Além disto,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

para alguma matriz invertível P. Se desejarmos, poderemos obter a matriz P pelo método mostrado no Exemplo 1 desta seção. ♦

Diagonalização

Multiplicidade Algébrica e Geométrica

Definição:

- *Denomina-se* ***Multiplicidade Algébrica*** *a multiplicidade de um autovalor* λ *como raiz do polinômio característico.*

-1

- *Denomina-se* ***Multiplicidade Geométrica*** *ao número de autovetores L.I. associados a um autovalor.*

Diagonalização

Propriedades

Teorema 7.2.4 **Multiplicidades Geométrica e Algébrica**

Se A é uma matriz quadrada, então:

(a) Para cada autovalor de A, a multiplicidade geométrica é menor do que ou igual à multiplicidade algébrica.
(b) A é diagonalizável se, e somente se, para cada autovalor, a multiplicidade geométrica é igual à multiplicidade algébrica.

Diagonalização

Potências de uma matriz

Se A é uma matriz $n \times n$ e P é uma matriz invertível, então

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

Mais geralmente, para qualquer inteiro positivo k,

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP \tag{8}$$

Segue desta equação que se A for diagonalizável e se $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal, então

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k \tag{9}$$

Resolvendo esta equação em A^k, obtemos

$$A^k = PD^kP^{-1} \tag{10}$$