Idéias

Abordagens

- Encontrar matrix de fisher

Abordagens

- Encontrar matrix de fisher
  - Matriz Esperada não dá

Abordagens

- Encontrar matrix de fisher
  - Matriz Esperada não dá
- Encontrar hessiana ou Matriz Observada

Abordagens

- Encontrar matrix de fisher
  - Matriz Esperada não dá
- Encontrar hessiana ou Matriz Observada
  - Parece possível sem o efeito do nugget. Com nugget acho que não

Abordagens

- Encontrar matrix de fisher
  - Matriz Esperada não dá
- Encontrar hessiana ou Matriz Observada
  - Parece possível sem o efeito do nugget. Com nugget acho que não
  - Vantagens pra densidade normal [1] (não li tá kkkk)

Abordagens

- Encontrar matrix de fisher
  - Matriz Esperada não dá
- Encontrar hessiana ou Matriz Observada
  - Parece possível sem o efeito do nugget. Com nugget acho que não
  - Vantagens pra densidade normal [1] (não li tá kkkk)
- Faz como o artigo sugere

Matriz de Fisher

Matriz de Fisher

- Para $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, a, \rho)$, temos que

$$\log(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2}\big[\log(\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}})) + (\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}{}^{-1}(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}) + 2N\log(2\pi)\big]. \tag{1}$$

Matriz de Fisher

- Para $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, a, \rho)$, temos que

$$\log(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2}\left[\log(\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}})) + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T {\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) + 2N \log(2\pi)\right]. \tag{1}$$

- Então a informação $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$ é

$$\mathcal{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \log(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}^T \tag{2}$$

Matriz de Fisher

- Se $\dot{l}_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}$ então

Matriz de Fisher

- Se $\dot{l}_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k}$ então
- $$\mathcal{I}_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \dot{l}_1^2(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \dot{l}_1(\boldsymbol{\theta})\dot{l}_4(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{l}_4(\boldsymbol{\theta})\dot{l}_1(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \dot{l}_4^2(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Matriz de Fisher na entrada $i = 1, j = 2$

$$\dot{l}_1(\boldsymbol{\theta})\dot{l}_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{4}\Bigg\{\left[tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1}) - \mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}\right] * \left[tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}) - \mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}\right]\Bigg\} \tag{4}$$

Matriz de Fisher na entrada $i = 1, j = 2$

- Sem condições de encontrar a esperança disso, até tentei

Matriz de Fisher na entrada $i = 1, j = 2$

- Sem condições de encontrar a esperança disso, até tentei
- Problema são as inversas $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$

Hessiana

Idéia

- Sem o efeito do nugget é possível isolar os parâmetros σ^2 e a, mas não rho.

Idéia

- Sem o efeito do nugget é possível isolar os parâmetros σ^2 e a, mas não rho.
- Com o nugget a coisa só piora.

Exemplo para σ_1^2

Queremos calcular

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_1^2}\left\{ tr\left(C_{11}^*(\mathbf{h}) M(\mathbf{h}|\nu_1, a) \right) + 2tr\left(C_{12}^*(\mathbf{h}) \frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1} M(\mathbf{h}|\nu_3, a) \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sigma_1^2} y_1^T \left[C_{11}(\mathbf{h}|\nu_1, a) y_1 + C_{12}(\mathbf{h}|\nu_3, a) y_2 \right] \right\} \tag{5}$$

Problema

- Extrair os parâmetro σ_1^2 da inversa $\mathbf{\Sigma^{-1}}$. Ou seja:

Problema

- Extrair os parâmetro σ_1^2 da inversa $\mathbf{\Sigma^{-1}}$. Ou seja:
- Extrair parâmetros de $C^\star_{ii}$ e $C^\star_{ij}$

Exemplo para σ_1^2

$$
\begin{aligned}
C_{11}^{\star} = \left[C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{11} \right]^{-1} = \\
\left[\sigma_1^2 M(\mathbf{h}|a,\nu_1) - \frac{\rho \sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2} M(\mathbf{h}|a,\nu_3) M^{-1}(\mathbf{h}|a,\nu_2) M(\mathbf{h}|a,\nu_3) \right]^{-1} = \\
\frac{1}{\sigma_1^2} \left[M(\mathbf{h}|a,\nu_1) - \rho M(\mathbf{h}|a,\nu_3) M^{-1}(\mathbf{h}|a,\nu_2) M(\mathbf{h}|a,\nu_3) \right]^{-1}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Exemplo para σ_1^2

Agora

$$
\begin{aligned}
C_{12}^{\star} &= -C_{22}^{-1} C_{11} C_{11}^{\star} \\
&= -\frac{\rho}{\sigma_1} C_{22} M(\mathbf{h}|a,\nu_3) tr\left[M(\mathbf{h}|a,\nu_1) - \rho M(\mathbf{h}|a,\nu_3) M(\mathbf{h}|a,\nu_2) M(\mathbf{h}|a,\nu_3) \right]
\end{aligned} \tag{7}
$$

Exemplo para σ_1^2

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} tr\left(C_{11}^{\star} M(\mathbf{h}|a, \nu_1) \right) \\
&\qquad = -\frac{1}{\sigma_1^4} tr\left[M(\mathbf{h}|a, \nu_1) - \rho M(\mathbf{h}|a, \nu_3) M(\mathbf{h}|a, \nu_2) M(\mathbf{h}|a, \nu_3) \right]^{-1}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Exemplo para σ_1^2

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\sigma_1^2}\frac{1}{\sigma_1^2}y_1^T\left[C_{11}(\mathbf{h}|\nu_1,a)y_1 + C_{12}(\mathbf{h}|\nu_3,a)y_2\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial\sigma_1^2}\frac{1}{\sigma_1^2}y_1^T\left[\sigma_1^2 M(\mathbf{h}|\nu_1,a)y_1 + \rho\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_3,a)y_2\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial\sigma_1^2}y_1^T\left[\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}M(\mathbf{h}|\nu_3,a)y_2\right]\\
&= \frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1^{2/3}}y_1^T\left[M(\mathbf{h}|\nu_3,a)y_2\right]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Exemplo para σ_1^2

- A conta parece correta

Exemplo para σ_1^2

- A conta parece correta
- Se eu não tivesse esquecido que $\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\mathbf{z}$

Exemplo para σ_1^2

- A conta parece correta
- Se eu não tivesse esquecido que $\mathbf{y} = \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}\mathbf{z}$
- ....

Conclusão

- Acho prudente tentar estimar o nugget e usar a abordagem do artigo

Refs

[1]. Assessing the accuracy of the maximum likelihood estimator: Observed versus expected Fisher Information