Contas para Informação de Fisher

Matriz de Fisher na entrada $i = 1, j = 2$

$$\dot{l}_1(\boldsymbol{\theta})\dot{l}_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{4}\Bigg\{\Bigg[tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1}) - \mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}\Bigg] * \Bigg[tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}) - \mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}\Bigg]\Bigg\} \tag{1}$$

Esperança da forma quadrática

Como $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, então $E[\mathbf{z}^T A\mathbf{z}] = tr(A\boldsymbol{\Sigma})$. Portanto

$$
\begin{aligned}
&E\left\{ tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1})\mathbf{z}^T\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right]\mathbf{z}\right\} \\
&= tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1})tr\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\right] \qquad (2) \\
&= tr(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1})tr\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}\right]
\end{aligned}
$$

Covariância entre Formas Quadráticas

Queremos calcular

$$\begin{aligned} &E\left\{\left[\mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}\right]\left[\mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}\right]\right\} \\ &= Cov\left(\mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}, \mathbf{z}^T(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\theta_2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\mathbf{z}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Covariância entre Formas Quadráticas

O resultado daqui é para covariâncias simétricas, enquanto que o resultado do Seber & Lee (página 45) é para covariâncias na forma kI_n. Minha tentativa foi conferir se $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\theta_1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ é simétrica.

Covariância entre Formas Quadráticas - Simetria

$$\begin{pmatrix} C^*_{11}(\mathbf{h}) & C^*_{12}(\mathbf{h}) \\ C^*_{21}(\mathbf{h}) & C^*_{22}(\mathbf{h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(\mathbf{h}|\nu_1, a) & \\ \frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1} M(\mathbf{h}|\frac{\nu_1+\nu_2}{2}, a) & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^*_{11}(\mathbf{h}) & C^*_{12}(\mathbf{h}) \\ C^*_{21}(\mathbf{h}) & C^*_{22}(\mathbf{h}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Covariância entre Formas Quadráticas - Simetria

- Tenho que se é simétrica para σ_1^2 e provavelmente para o resto também

Covariância entre Formas Quadráticas - Simetria

- Tenho que se é simétrica para σ_1^2 e provavelmente para o resto também
- Argumento a favor: $\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \sigma_1^2}$ é simétrica, assim como Σ^{-1}, então $\Sigma^{-1}\frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \sigma_1^2}\Sigma^{-1}$ é simétrica.

Covariância entre Formas Quadráticas - Simetria

- Tenho que se é simétrica para σ_1^2 e provavelmente para o resto também
- Argumento a favor: $\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \sigma_1^2}$ é simétrica, assim como Σ^{-1}, então $\Sigma^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \sigma_1^2}\Sigma^{-1}$ é simétrica.
- Segundo argumento a favor: contas

Covariância entre Formas Quadráticas - Simetria

$$\begin{pmatrix} C^*_{11}(\mathbf{h})M(\mathbf{h}|\nu_1,a) + C^*_{12}(\mathbf{h})\frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1}M(\mathbf{h}|\nu_3,a) & C^*_{11}(\mathbf{h})\frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1}M(\mathbf{h}|\nu_3,a) \\ C^*_{21}(\mathbf{h})M(\mathbf{h}|\nu_1,a) + C^*_{22}(\mathbf{h})\frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1}M(\mathbf{h}|\nu_3,a) & C^*_{21}(\mathbf{h})\frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1}M(\mathbf{h}|\nu_3,a) \end{pmatrix} * \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} C^*_{11}(\mathbf{h}) & C^*_{12}(\mathbf{h}) \\ C^*_{21}(\mathbf{h}) & C^*_{22}(\mathbf{h}) \end{pmatrix}$$

Covariância entre Formas Quadráticas - Simetria

$$A = \Sigma^{-1} \frac{\partial \mathbf{\Sigma}}{\partial \sigma_1^2} \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} A_{12} = C_{11}^{\star} M(h|a, v_1) C_{12}^{\star} + k C_{12}^{\star} M(h|a, v_1) C_{12}^{\star} + \\ k C_{11}^{\star} M(h|a, v_1) C_{22}^{\star} \\ \\ A_{21} = C_{21}^{\star} M(h|a, v_1) C_{11}^{\star} + k C_{22}^{\star} M(h|a, v_1) C_{11}^{\star} + \\ k C_{21}^{\star} M(h|a, v_1) C_{21}^{\star} \end{gathered} \tag{7}$$

Simetrização

- Banerjee página (403/422), th. 13.1

Theorem 13.1 *For the n-ary quadratic form $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$, where $\boldsymbol{B}$ is any $n \times n$ matrix, there is a symmetric matrix $\boldsymbol{A}$ such that $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ for every $\boldsymbol{x} \in \Re^n$.*

Proof. Since $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ is a real number, its transpose is equal to itself. So,

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})' = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x} \Longrightarrow \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}}{2} = \boldsymbol{x}'\left(\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'}{2}\right)\boldsymbol{x}$$

$$= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ , \quad \text{where } \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'}{2} \text{ is a symmetric matrix.}$$

Caveat

- Só depois de procurar no livro do banerjee eu descobri que o resultava no wikipedia.