Prova de aula
Concurso para Geofísica Aplicada da UERJ

Esquemas de modelagem direta com diferenças finitas

Leonardo Uieda

16 de Outubro de 2013

SUMÁRIO

1. Modelagem sísmica/GPR
2. Equação da onda escalar 1D
3. Método das diferenças finitas
4. Diferenças de maior ordem
5. Condições de contorno de absorção
6. Equação de ondas elásticas P-SV

MODELAGEM SÍSMICA/GPR

- Compreender o fenômeno físico
- Simular aquisição
- Avaliar viabilidade
- Testar hipótese
- Inversão

EQUAÇÃO DA ONDA 1D

- Versão simplificada da física
  - Ondas elásticas/eletromagnéticas
- Escalar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Versão simplificada da física
  - Ondas elásticas/eletromagnéticas
- Escalar:

deslocamento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Versão simplificada da física
  - Ondas elásticas/eletromagnéticas
- Escalar:

deslocamento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

velocidade

- Poucas soluções analíticas
  - Onda plana, esférica
  - Meios homogêneos
- Solução numérica
  - Elementos finitos
  - Diferenças finitas
  - etc

- Poucas soluções analíticas
  - Onda plana, esférica
  - Meios homogêneos
- Solução numérica
  - Elementos finitos
  - Diferenças finitas
  - etc

- Poucas soluções analíticas
  - Onda plana, esférica
  - Meios homogêneos
- Solução numérica
  - Elementos finitos
  - Diferenças finitas
    - Simples
    - *Grid* regular
  - etc

DIFERENÇAS FINITAS

derivadas ≈ diferenças

Série de Taylor:

$$u(z+\Delta) = u(z) + \Delta \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \cdots$$

Equação de diferenças:

$$\frac{u(z+\Delta)-u(z)}{\Delta} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\Delta}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\Delta^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \cdots$$

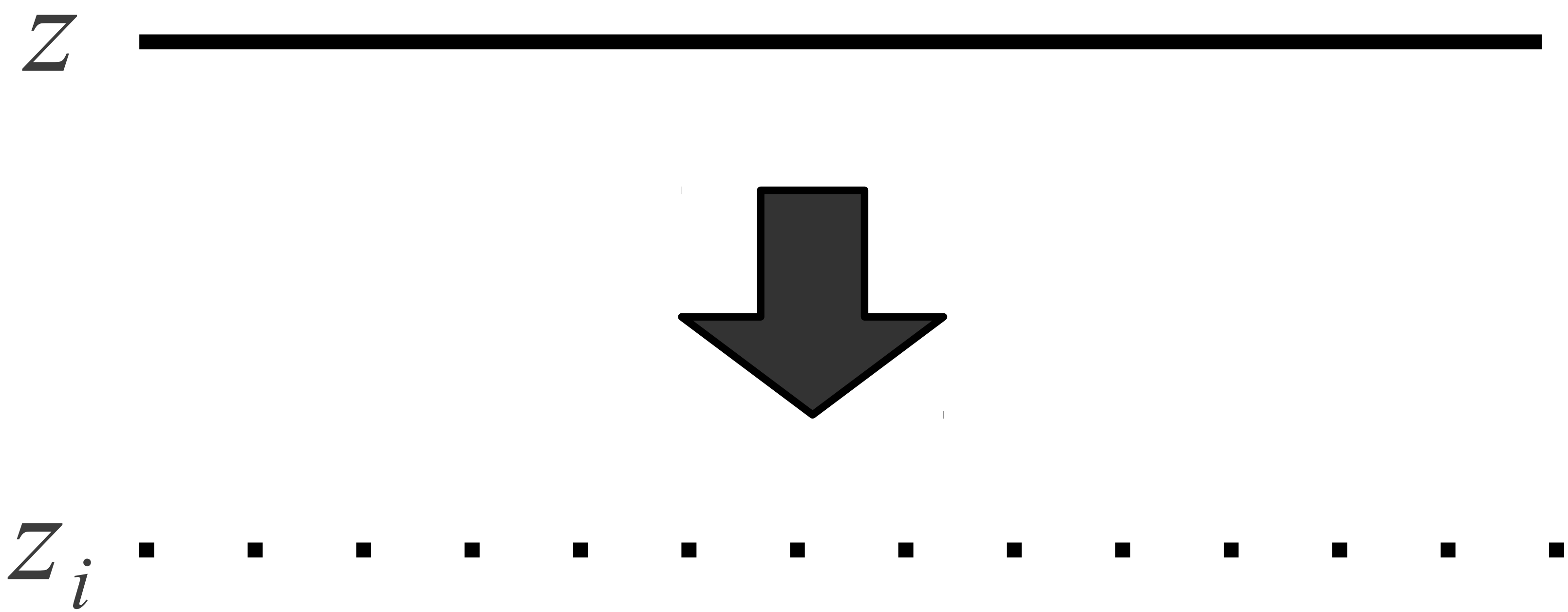
Equação de diferenças:

$$\frac{u(z+\Delta)-u(z)}{\Delta} = \frac{\partial u}{\partial z} + O(2)$$

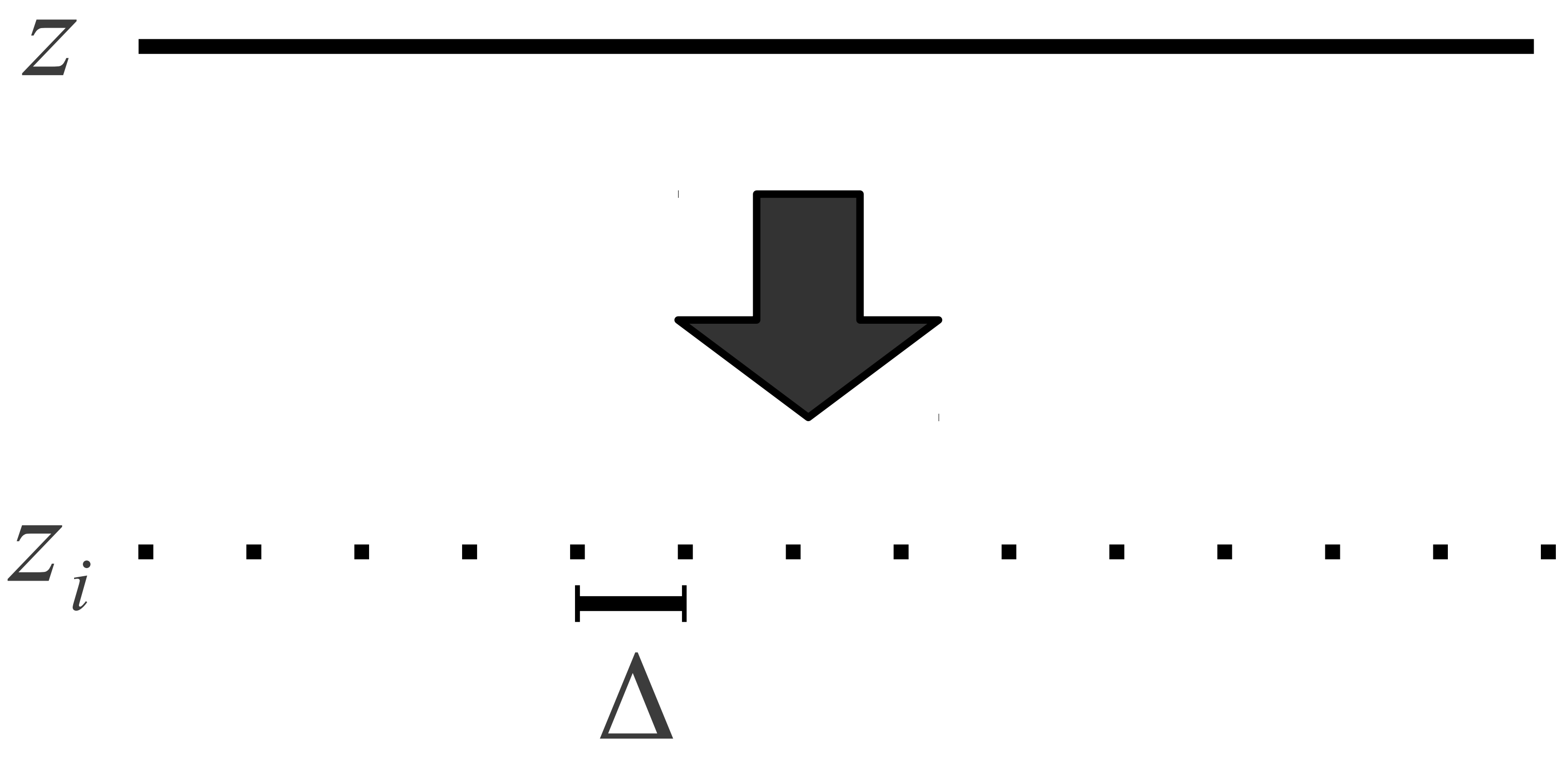
Discretização

z

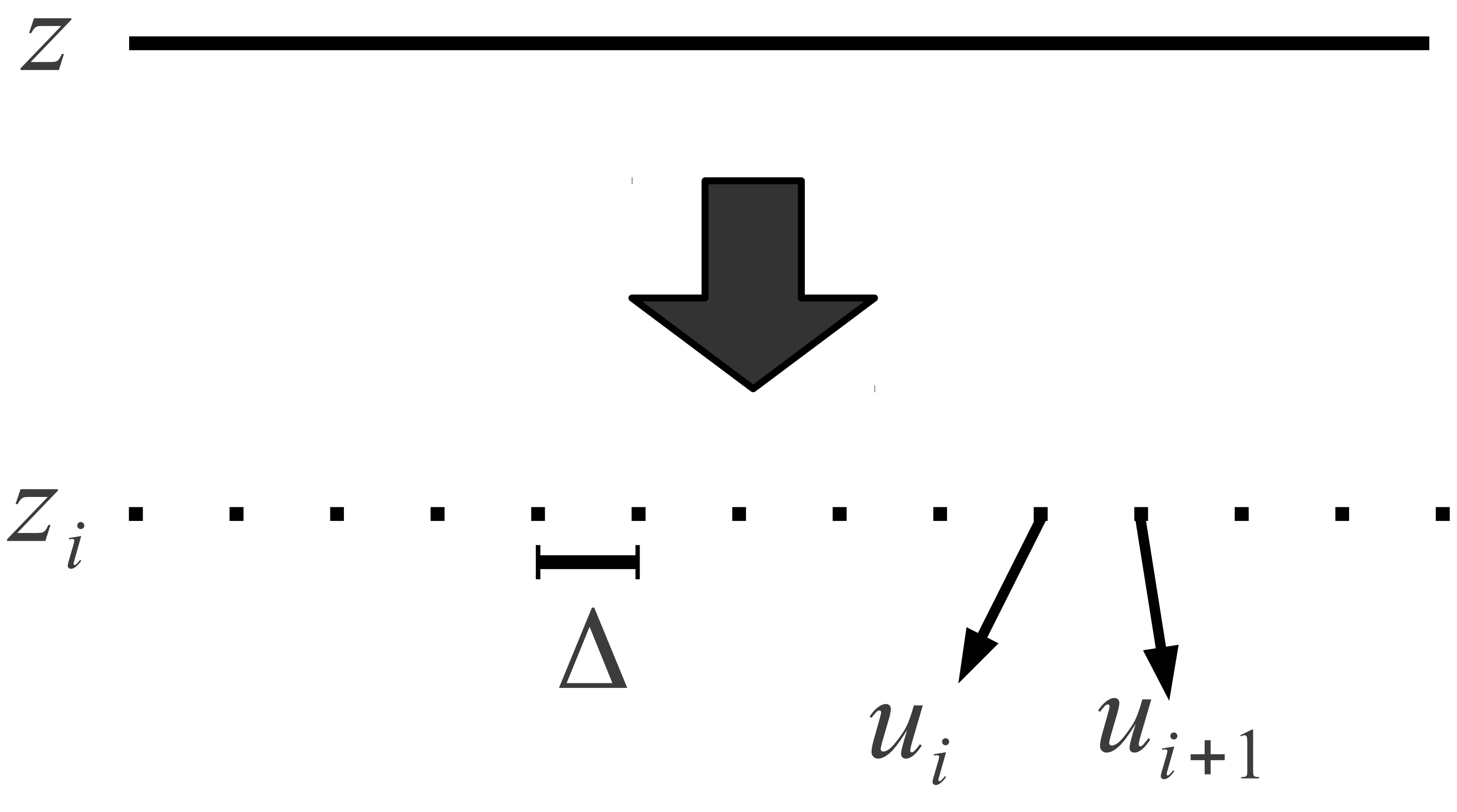
Discretização



Discretização



Discretização



Equação de diferenças:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta} = \frac{\partial u}{\partial z} + O(2)$$

Equação de diferenças:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta} = \frac{\partial u}{\partial z} + O(2)$$

No ponto z_i

Tipos de diferenças

- Explícita $$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta} \approx \frac{\partial u}{\partial z}$$
- Implícita $$\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta} \approx \frac{\partial u}{\partial z}$$
- Centrada $$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta} \approx \frac{\partial u}{\partial z}$$

Segundas derivadas

$$\frac{u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}}{\Delta^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{u_{i+1}^{t} - 2u_i^t + u_{i-1}^{t}}{\Delta x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{u_i^{t+1} - 2u_i^t + u_i^{t-1}}{\Delta t^2}$$

Equação da onda

$$\frac{u_{i+1}^{t}-2u_{i}^{t}+u_{i-1}^{t}}{\Delta x^{2}}=\frac{1}{V^{2}}\frac{u_{i}^{t+1}-2u_{i}^{t}+u_{i}^{t-1}}{\Delta t^{2}}$$

$$u_{i}^{t+1}=2u_{i}^{t}-u_{i}^{t-1}+c\left[u_{i+1}^{t}-2u_{i}^{t}+u_{i-1}^{t}\right]$$

Equação da onda

$$\frac{u_{i+1}^{t} - 2u_{i}^{t} + u_{i-1}^{t}}{\Delta x^{2}} = \frac{1}{V^{2}} \frac{u_{i}^{t+1} - 2u_{i}^{t} + u_{i}^{t-1}}{\Delta t^{2}}$$

$$u_{i}^{t+1} = 2u_{i}^{t} - u_{i}^{t-1} + c\left[u_{i+1}^{t} - 2u_{i}^{t} + u_{i-1}^{t}\right]$$

$$\boxed{\frac{\Delta t^{2} V^{2}}{\Delta x^{2}}}$$

$$u_i^{t+1} = 2u_i^t - u_i^{t-1} + c\left[u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t\right]$$

$$u_i^{t+1} = 2u_i^t - u_i^{t-1} + c\left[u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t\right]$$

Sabendo u_i^t e u_i^{t-1}

$$u_i^{t+1} = 2u_i^t - u_i^{t-1} + c\left[u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t\right]$$

Sabendo u_i^t e u_i^{t-1}

Prever o futuro $\left(u_i^{t+1}\right)$

EXEMPLO

Estabilidade

- Discretização
- Frequência da fonte
- Velocidade

DIFERENÇAS DE MAIOR ORDEM

Quarta ordem

$$\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16u_{i-1}-u_{i-2}}{12\Delta^2}\approx\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Comum: 4ª espaço – 2ª tempo

$$u_i^{t+1} = 2u_i^t - u_i^{t-1} + \frac{c}{12}\left[-u_{i+2}^t + 16u_{i+1}^t - 30u_i^t + 16u_{i-1}^t - u_{i-2}^t\right]$$

EXEMPLO

Condições de contorno

- Superfície livre em $z = 0$
- Ideal: meio semi-infinito
- Eliminar reflexão

CONDIÇÕES DE CONTORNO DE ABSORÇÃO

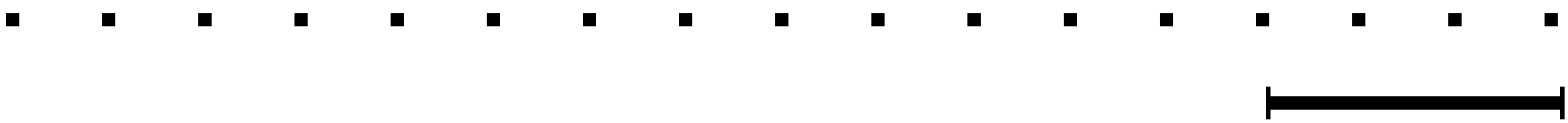
Principais:

- Gaussian taper
- Não-reflexivas (onda plana)
- Perfectly Matched Layers (PML)

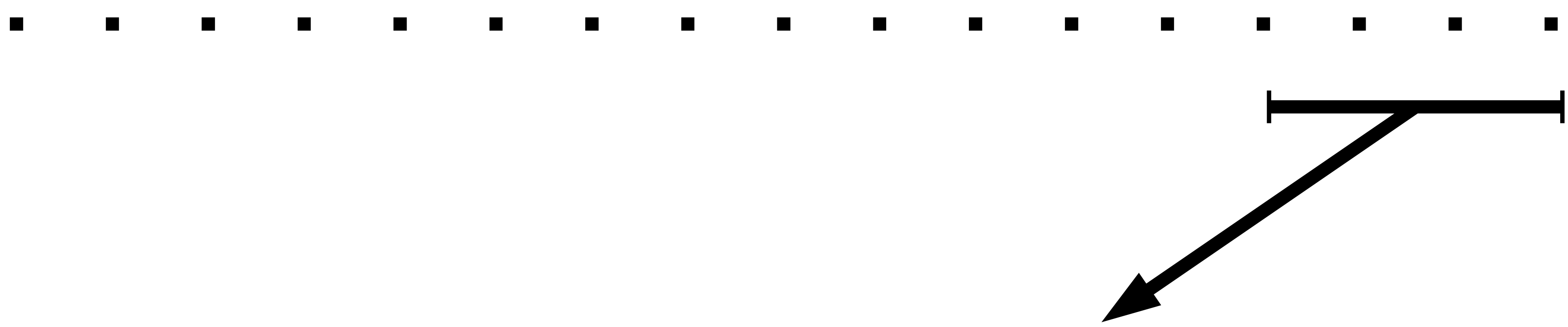
Gaussian taper

. . . .

Gaussian taper

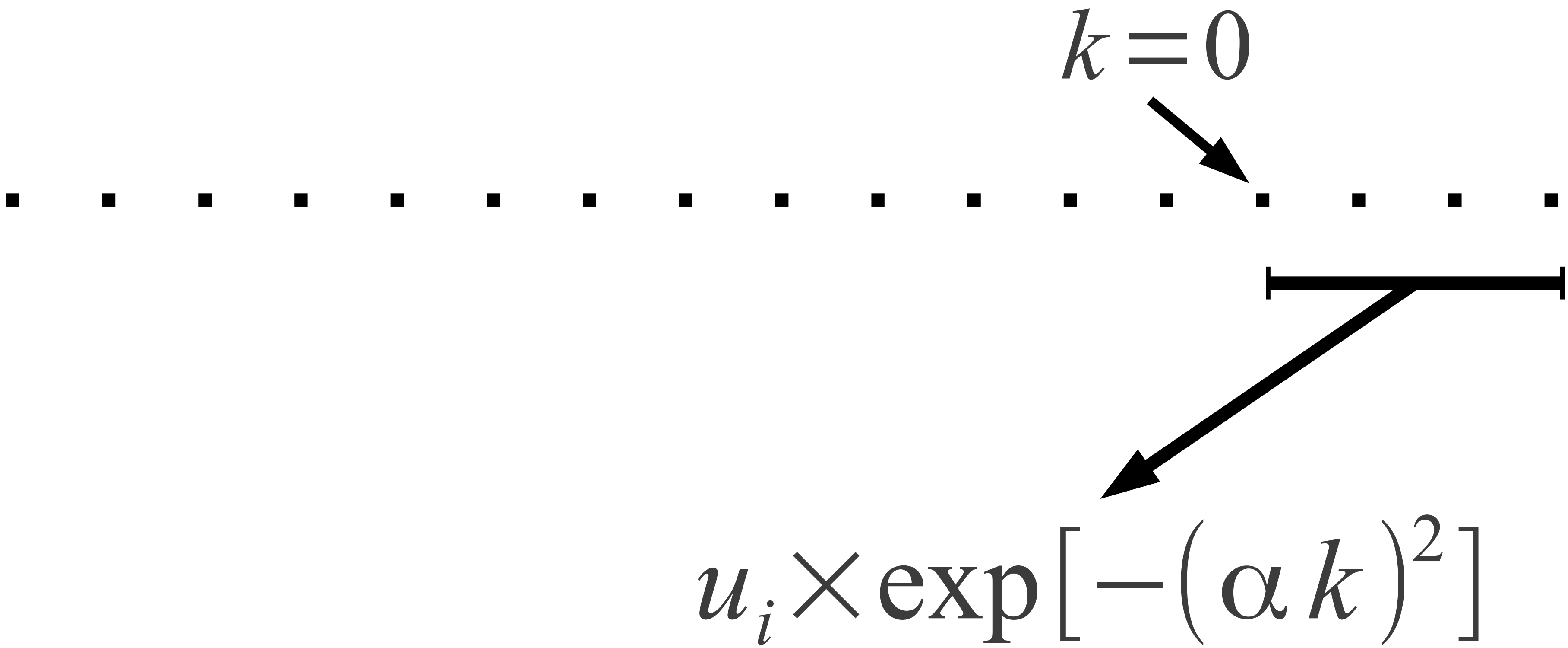


Gaussian taper

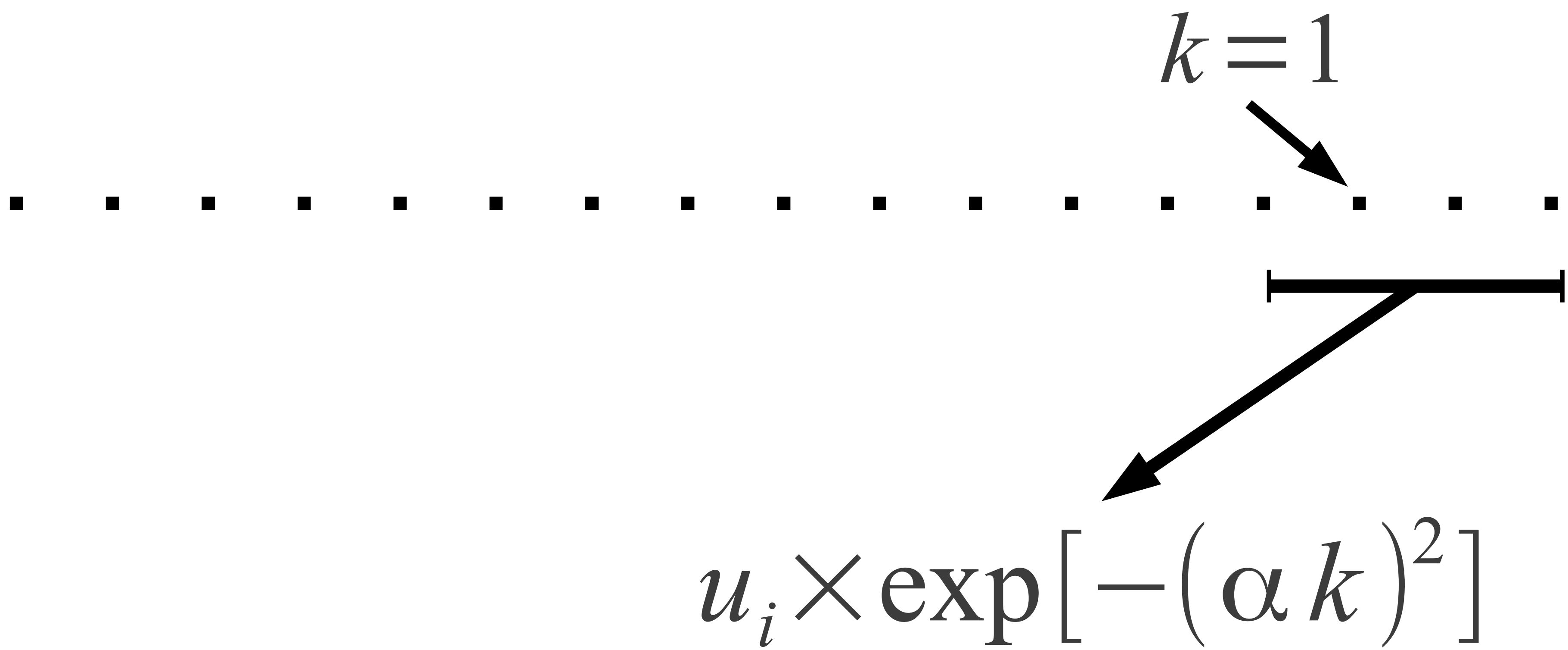


$$u_i \times \exp\left[-(\alpha k)^2\right]$$

Gaussian taper



Gaussian taper

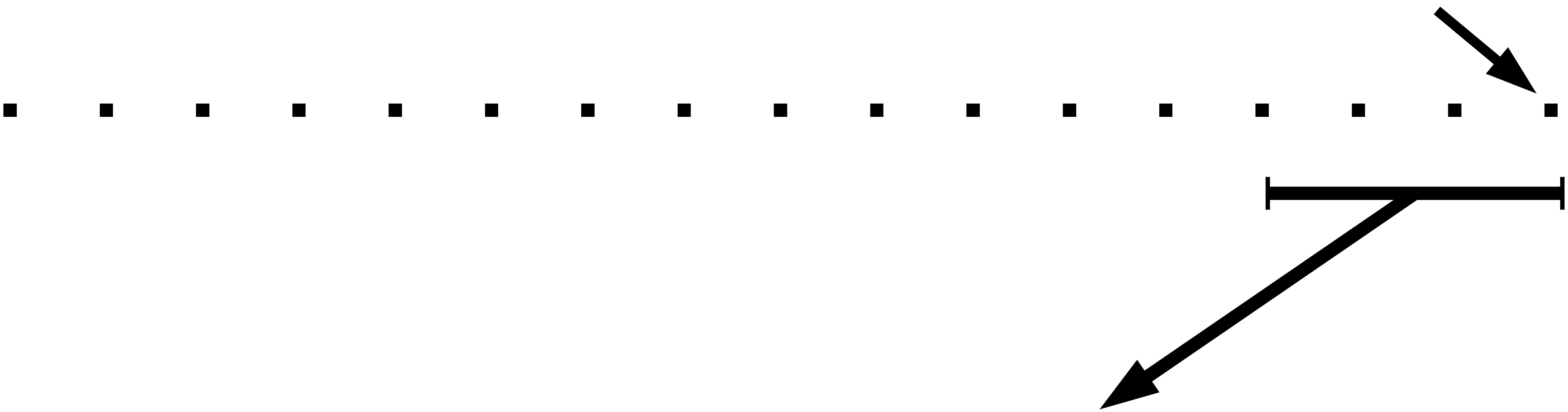


Gaussian taper

$$u_i \times \exp\left[-\left(\alpha k\right)^2\right]$$

Gaussian taper

$k = 3$



$$u_i \times \exp[-(\alpha k)^2]$$

Não-reflexivas

- Onda plana
- Índice de reflexão = 0

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V \frac{\partial u}{\partial z}$$

Não-reflexivas

- Onda plana
- Coeficiente de reflexão = 0

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V \frac{\partial u}{\partial z}$$

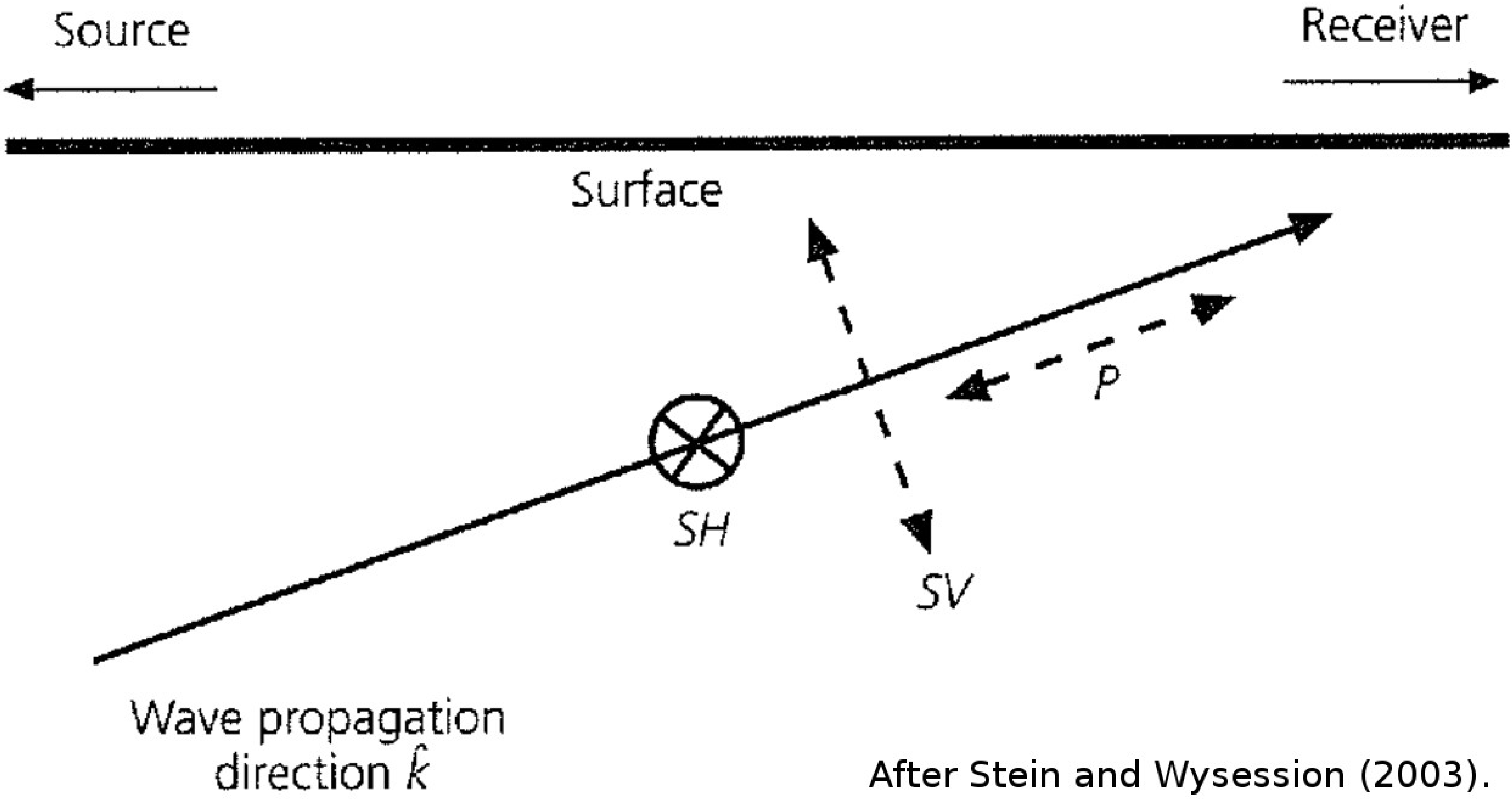
$$u_i^{t+1} = u_i^t - \Delta t\, V \frac{\left(u_i^t - u_{i-1}^t\right)}{\Delta z}$$

EXEMPLO

ONDAS ELÁSTICAS P-SV

Meios estratificados

- Decompor movimento



After Stein and Wysession (2003).

Ondas P-SV

- Sistema de equações

$$(\lambda+2\mu)\partial_x^2 u_x+\mu\partial_z^2 u_x+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_z=\rho\partial_t^2 u_x$$

$$(\lambda+2\mu)\partial_z^2 u_z+\mu\partial_x^2 u_z+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_x=\rho\partial_t^2 u_z$$

Ondas P-SV

- Sistema de equações

$$(\lambda+2\mu)\partial_x^2 u_x+\mu\partial_z^2 u_x+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_z=\rho\partial_t^2 u_x$$

$$(\lambda+2\mu)\partial_z^2 u_z+\mu\partial_x^2 u_z+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_x=\rho\partial_t^2 u_z$$

Deslocamento em x e z

Ondas P-SV

- Sistema de equações

$$(\lambda+2\mu)\partial_x^2 u_x+\mu\,\partial_z^2 u_x+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_z=\rho\,\partial_t^2 u_x$$

$$(\lambda+2\mu)\partial_z^2 u_z+\mu\,\partial_x^2 u_z+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_x=\rho\,\partial_t^2 u_z$$

Lamé

Deslocamento em x e z

Ondas P-SV

- Sistema de equações

Densidade

$$(\lambda+2\mu)\partial_x^2 u_x+\mu\,\partial_z^2 u_x+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_z=\rho\,\partial_t^2 u_x$$

$$(\lambda+2\mu)\partial_z^2 u_z+\mu\,\partial_x^2 u_z+(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z u_x=\rho\,\partial_t^2 u_z$$

Lamé

Deslocamento em x e z

Discretização

- 4ª espaço + 2ª tempo = instável
- Staggered grid:
  - Tensões e velocidades

$$\tau_{xx}, \tau_{xz}, \tau_{zz} \qquad v = \frac{\partial u_x}{\partial t}, w = \frac{\partial u_z}{\partial t}$$

Staggered grid

$$\partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} = \rho \partial_t v$$

$$\partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} = \rho \partial_t w$$

$$\partial_t \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v + \lambda \partial_z w$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z w + \lambda \partial_x v$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \mu (\partial_x w + \partial_z v)$$

Staggered grid

$$\partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} = \rho \partial_t v$$
$$\partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} = \rho \partial_t w$$

Equação do movimento

$$\partial_t \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v + \lambda \partial_z w$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z w + \lambda \partial_x v$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \mu (\partial_x w + \partial_z v)$$

Staggered grid

$$\partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} = \rho \partial_t v$$

$$\partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} = \rho \partial_t w$$

Equação do movimento

$$\partial_t \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v + \lambda \partial_z w$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z w + \lambda \partial_x v$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \mu (\partial_x w + \partial_z v)$$

Relações constitutivas

Staggered grid

$$\partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} = \rho \partial_t v$$

$$\partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} = \rho \partial_t w$$

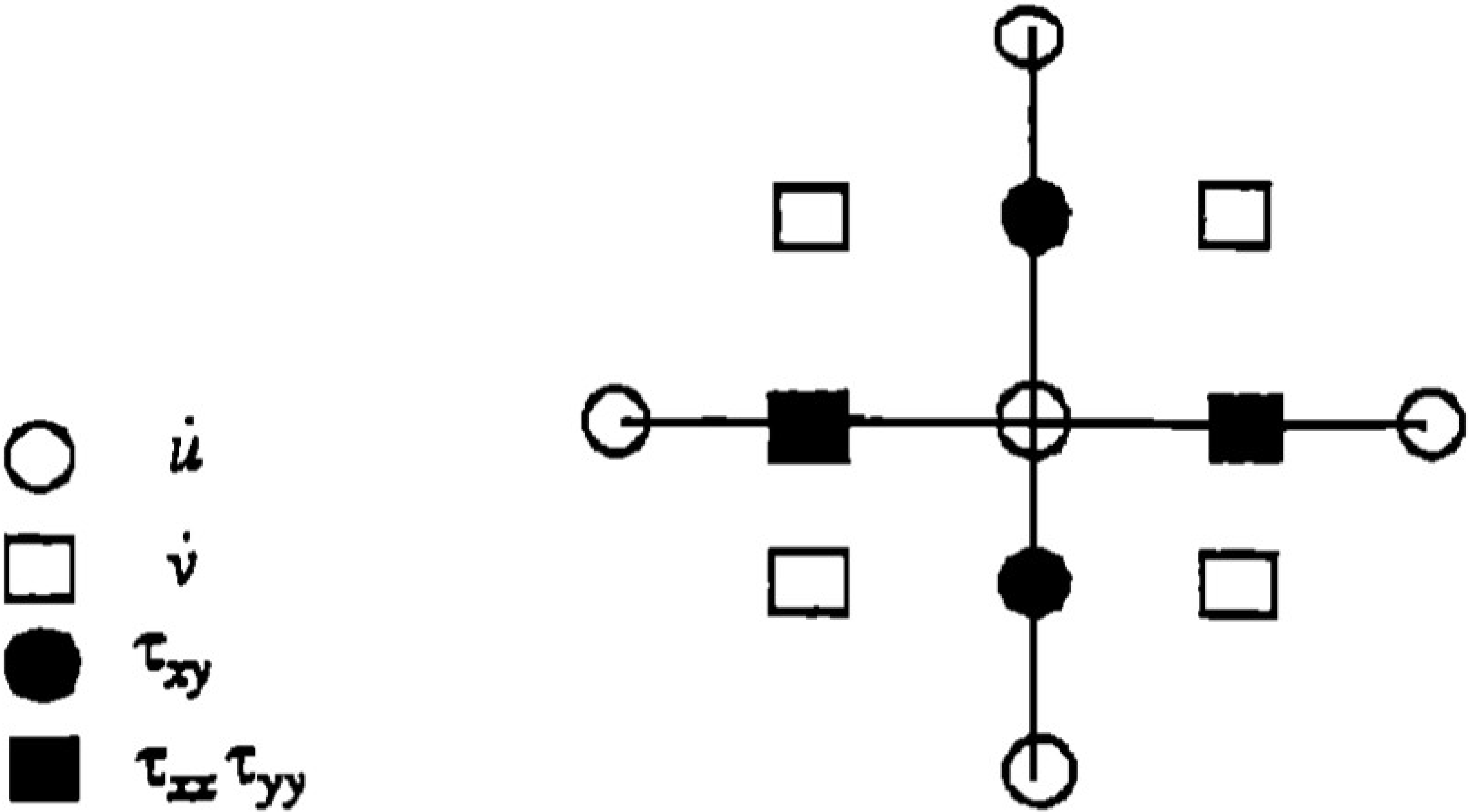
$$\partial_t \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v + \lambda \partial_z w$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z w + \lambda \partial_x v$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \mu (\partial_x w + \partial_z v)$$

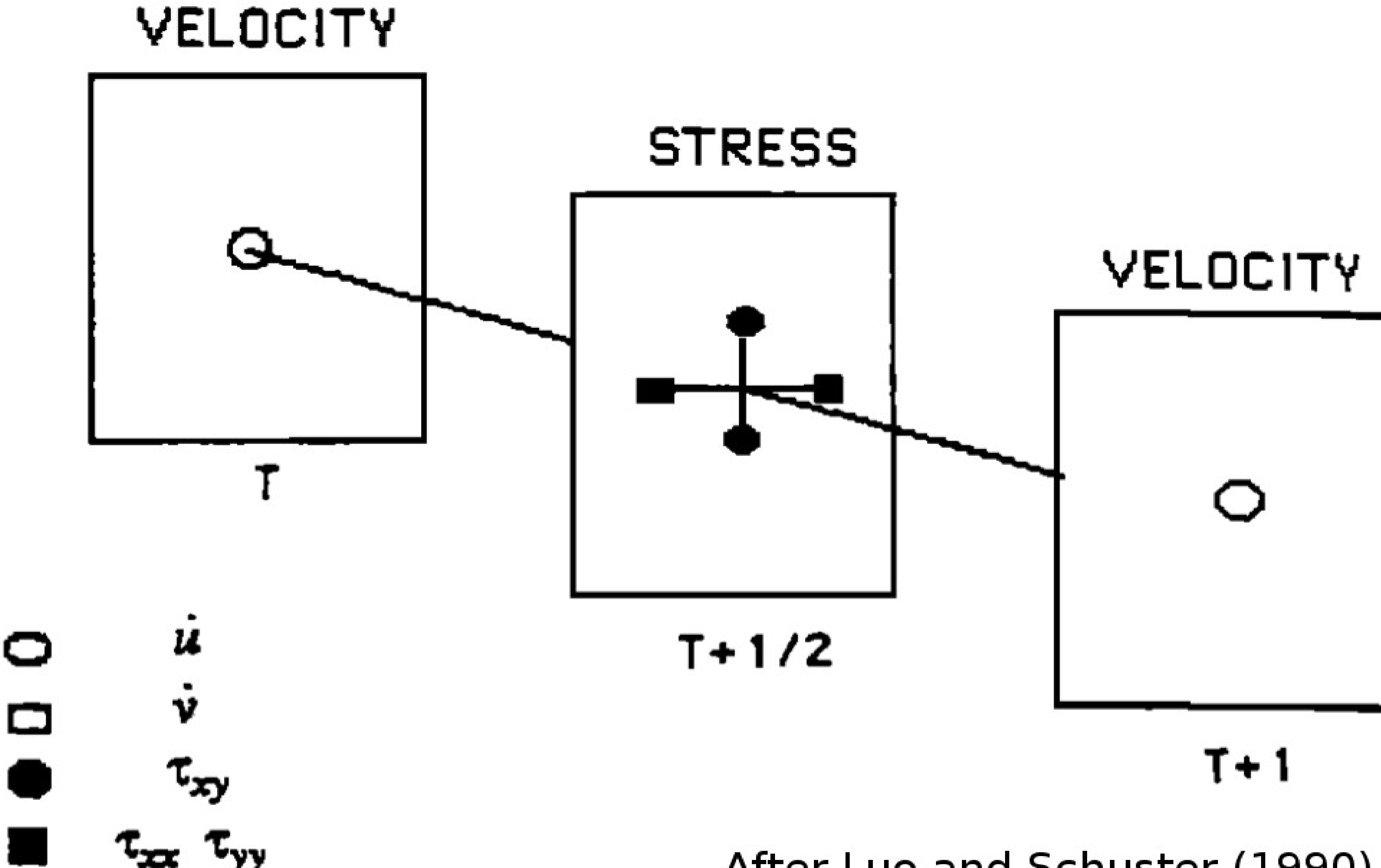
Primeiras derivadas

2ª ordem espaço



After Luo e Schuster (1990).

2ª ordem tempo

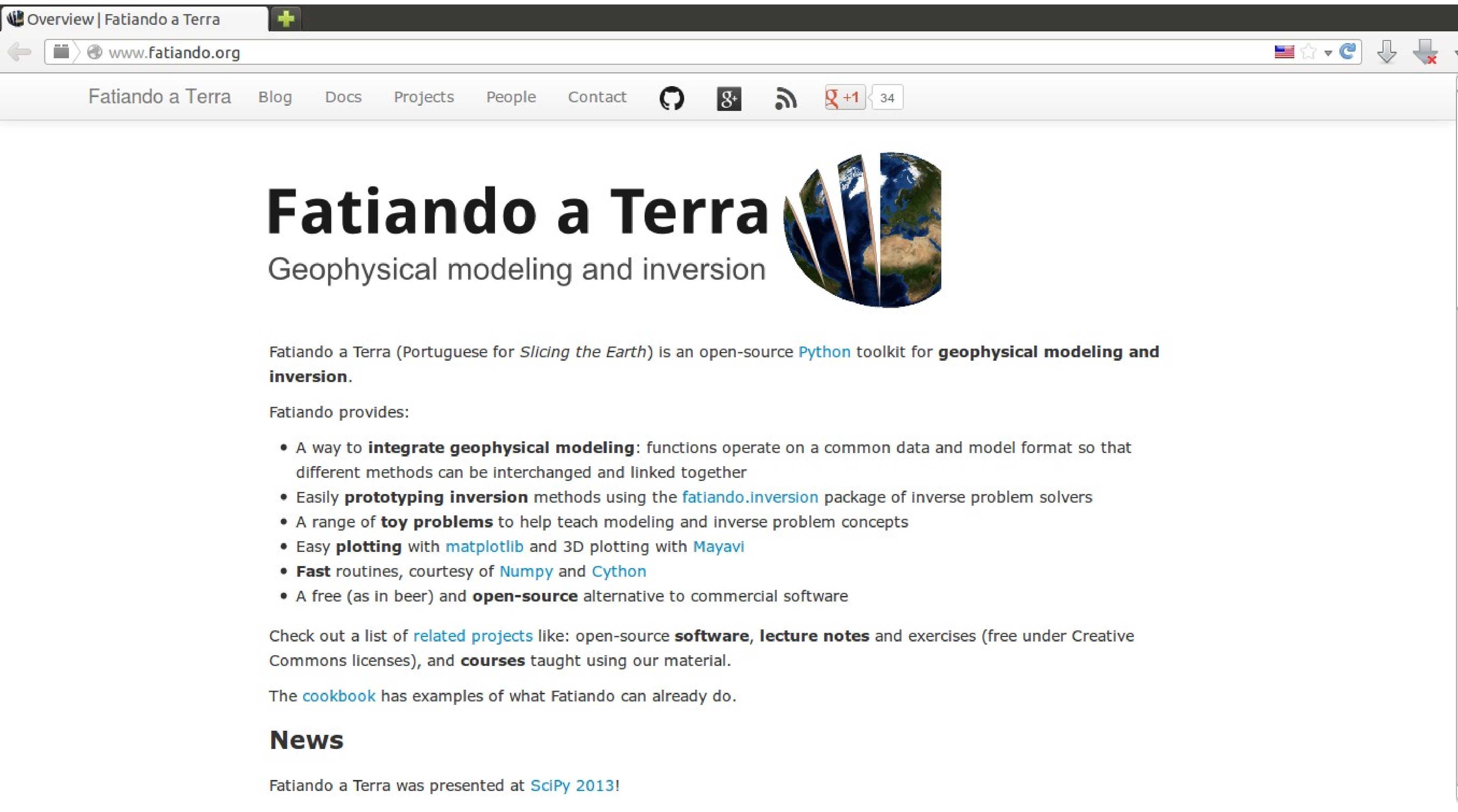


After Luo and Schuster (1990).

EXEMPLO

- Parsimonious staggered grid (Luo e Schuster, 1990)
- Implementação: **Fatiando a Terra**
  - Software livre
  - Biblioteca de modelagem/inversão
  - Python

www.fatiando.org



Overview | Fatiando a Terra

www.fatiando.org

Fatiando a Terra   Blog   Docs   Projects   People   Contact   +1 34

Fatiando a Terra

Geophysical modeling and inversion

Fatiando a Terra (Portuguese for *Slicing the Earth*) is an open-source Python toolkit for **geophysical modeling and inversion**.

Fatiando provides:

- A way to **integrate geophysical modeling**: functions operate on a common data and model format so that different methods can be interchanged and linked together
- Easily **prototyping inversion** methods using the fatiando.inversion package of inverse problem solvers
- A range of **toy problems** to help teach modeling and inverse problem concepts
- Easy **plotting** with matplotlib and 3D plotting with Mayavi
- **Fast** routines, courtesy of Numpy and Cython
- A free (as in beer) and **open-source** alternative to commercial software

Check out a list of related projects like: open-source **software**, **lecture notes** and exercises (free under Creative Commons licenses), and **courses** taught using our material.

The cookbook has examples of what Fatiando can already do.

News

Fatiando a Terra was presented at SciPy 2013!