

Cálculo do tensor gradiente gravimétrico utilizando tesseróides

Leonardo Uieda

Naomi Ussami

*Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas*

17 de Dezembro de 2009

Sumário

Introdução

Formulação Matemática

Implementação Computacional

Resultados

Conclusões

Referências

Introdução

GOCE:

- ▶ Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer
- ▶ Missão da ESA (European Space Agency)
- ▶ Medir o Tensor Gradiente da Gravidade (TGG)

Gravimetria por satélite:

- ▶ Dados cobrem todo o globo
- ▶ Cobertura contínua e homogênea (não seria possível utilizando métodos terrestres)
- ▶ Estudar áreas extensas (estudos litosféricos)
 - ▶ “Terra plana” apresentam limitações
 - ▶ Levar em conta a curvatura da Terra
 - ▶ Prismas retangulares podem não ser uma aproximação adequada
 - ▶ Alternativa: utilizar tesseróides (prismas esféricos)

Introdução

Modelagem com tesseróides:

- ▶ TGG não possui solução analítica (exceto em casos especiais)
- ▶ Métodos numéricos de integração
 - ▶ Expansão em série de Taylor (HECK; SEITZ, 2007)
 - ▶ Aceitável quando o tesseróide está longe do ponto de observação e em regiões de baixa latitude
 - ▶ Não deve ser utilizada caso contrário
 - ▶ Quadratura Gauss-Legendre (QGL) (ASGHARZADEH *et al.*, 2007; WILD-PFEIFFER, 2008)
 - ▶ Inicialmente utilizada em métodos potenciais em Ku (1977)
 - ▶ Trabalhos publicados até o momento sugerem que a QGL é o método mais adequado

Introdução

Neste trabalho:

- ▶ Tesseróides serão utilizados no cálculo direto do TGG
- ▶ Implementação de um programa computacional seguindo a abordagem de Wild-Pfeiffer (2008)
- ▶ Precisão pode ser avaliada comparando com o resultado de fórmulas analíticas (casca esférica)
- ▶ Avaliar se sofre das mesmas limitações observadas por Ku (1977)
- ▶ Calcular as diferenças causadas no TGG por utilizar “Terra plana”
- ▶ Calcular o efeito da topografia da bacia do Paraná no TGG a 250 km de altitude

Formulação Matemática

- ▶ Definir os sistemas de coordenadas
- ▶ Transformações entre os sistemas de coordenadas
- ▶ Definir o que é um tesseróide
- ▶ TGG em coordenadas esféricas
- ▶ QGL

Formulação Matemática

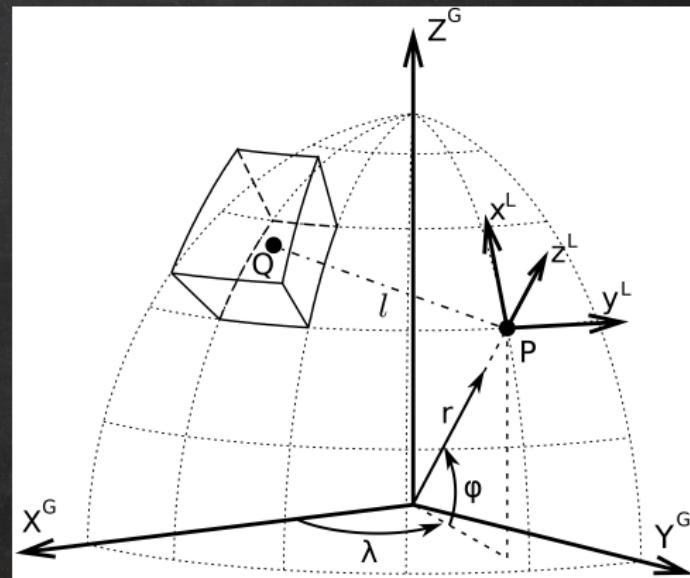
Sistemas de coordendas e Tesseróide

Sistema Global (G):

- ▶ Origem no geocentro
- ▶ Z^G aponta para o Norte
- ▶ X^G aponta para Greenwich médio
- ▶ Sistema destro

Sistema Local (L):

- ▶ Origem no ponto P
- ▶ z^L aponta para para fora
- ▶ x^L aponta para o Norte
- ▶ Sistema sinistral



Formulação Matemática

Transformações entre sistemas de coordenadas

Transformar coordenadas de Q:

- ▶ Do sistema global para o sistema local de P:

$$\mathbf{e}_Q^{L_P} = \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_2 \left(\varphi_P - \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R}_3 (\lambda_P - \pi) (\mathbf{e}_Q^G - \mathbf{e}_P^G)$$

- ▶ Do sistema local de P para o sistema global:

$$\mathbf{e}_Q^G = \mathbf{R}_3 (\pi - \lambda_P) \mathbf{R}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_P \right) \mathbf{P}_2 \mathbf{e}_Q^{L_P} + \mathbf{e}_Q^G$$

Formulação Matemática

Transformações entre sistemas de coordenadas

Transformar a orientação de um vetor \mathbf{e} do **sistema local de Q** para o **sistema local de P**:

$$\mathbf{e}^{L_P} = \underbrace{\mathbf{P}_2 \mathbf{R}_2 \left(\varphi_P - \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R}_3 (\lambda_P - \lambda_Q) \mathbf{R}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_Q \right) \mathbf{P}_2}_{\mathbf{R}^{QP}} \mathbf{e}^{L_Q}$$

$$\mathbf{R}^{QP} = \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_2 \left(\varphi_P - \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R}_3 (\lambda_P - \lambda_Q) \mathbf{R}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_Q \right) \mathbf{P}_2$$

Formulação Matemática

TGG em coordenadas esféricas

Formulação Matemática

TGG em coordenadas esféricas

TGG é um tensor com 9 elementos:

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

T é simétrico e possui 5 elementos independentes.

Formulação Matemática

TGG em coordenadas esféricicas

Em coordenadas esféricas as componentes de T são dados por (TSCHERNING, 1976):

$$T_{xx} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

$$T_{yy} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + r \cos^2 \varphi \frac{\partial V}{\partial r} - \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$$

$$T_{xy} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \lambda} + \tan \varphi \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) = T_{yx}$$

$$T_{yz} = \frac{1}{r \cos \varphi} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \lambda} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) = T_{zy}$$

$$T_{xz} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = T_{zx}$$

$$T_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

Formulação Matemática

TGG em coordenadas esféricas

Para obter o TGG de um tesseróide basta substituir V pelo potencial gravitacional de um tesseróide:

$$V(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{I} r'^2 \cos \varphi' dr' d\varphi' d\lambda'$$

$$I = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}$$

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')$$

As integrais triplas resultantes podem ser revolvidas numericamente com a QGL

Formulação Matemática

Quadratura Gauss-Legendre (QGL)

Formulação Matemática

QGL

A QGL consiste em:

1. Discretizar o integrando
2. Aproximar a integral por uma somatória

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N W_i f(x_i)$$

- x_i são os pontos de discretização (dados pelas raízes do polinômio de Legendre $P_N(x)$)
- W_i são os pesos:

$$W_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) (P'_N(x_i))^2}$$

Formulação Matemática

QGL

Pode ser estendida para integrais duplas (2D):

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy \approx \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{4} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} W_{x,i} W_{y,j} f(x_i, y_j)$$

ou triplas (3D):

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dx dy dz \approx \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}{8} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} W_{x,i} W_{y,j} W_{z,k} f(x_i, y_j, z_k)$$

Implementação Computacional

- ▶ Linguagem de programação
- ▶ Implementação da QGL
- ▶ TGG de tesseróides
- ▶ TGG de prismas retangulares em coordenadas esféricas
- ▶ TGG de uma casca esférica

Implementação Computacional

Linguagem de programação

A linguagem escolhida foi a linguagem **Python**:

- ▶ Rápido desenvolvimento do um programa
- ▶ Vasta biblioteca padrão
- ▶ Multi-paradigma
- ▶ Pode ser utilizada como scrips
- ▶ Modularidade facilita extensão e reutilização de programas
- ▶ Independentes do sistema operacional

Problema:

- ▶ Python possui pior performance que a linguagem C
- ▶ Pode ser superado!
- ▶ Python pode ser extendido com módulos escritos em C

Implementação Computacional

Linguagem de programação

O programa desenvolvido:

- ▶ Desenvolvido utilizando Programação Orientada a Objetos
- ▶ Hospedado no servidor do Google Code
(<http://code.google.com/p/tesseroids/>)
- ▶ Software livre (GNU General Public License 3.0)

Implementação Computacional

Implementação da QGL

Implementação Computacional

Implementação da QGL

Cálculo dos pontos de discretização (nós) da QGL

- Método de Newton Modificado (BARRERA-FIGUEROA *et al.*, 2006)

$$\xi_{k,n+1} = \xi_{k,n} - \frac{P_N(\xi_{k,n})}{P'_N(\xi_{k,n}) - P_N(\xi_{k,n}) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\xi_{k,n} - \xi_i}}$$

- Chute inicial de Press *et al.* (1992)

$$\xi_{k,0} = \frac{\cos\left(\pi k - \frac{\pi}{4}\right)}{N + \frac{1}{2}}$$

Implementação Computacional

Implementação da QGL

Polinômios de Legendre calculados com:

$$P'_N(x) = \frac{N}{x^2 - 1} (xP_n(x) - P_{N-1}(x))$$

$$P_N(x) = x \frac{2N-1}{N} P_{N-1}(x) - \frac{N-1}{N} P_{N-2}(x)$$

Implementação Computacional

TGG de tesseróides

Implementação Computacional

TGG de tesseróides

Utilizada a metodologia de Wild-Pfeiffer (2008):

- ▶ Integração analítica na direção radial
- ▶ Integração numérica da integral dupla resultante
- ▶ Melhor performance que utilizando somente a QGL 3D
- ▶ Integrais duplas apresentam uma singularidade quando $\psi = 0^\circ$
 - ▶ Não está presente nas integrais triplas
 - ▶ Produz uma mensagem de erro
- ▶ Quando erro ocorre é utilizada QGL 3D, evitando a singularidade

Implementação Computacional

TGG de prismas retangulares
em coordenadas esféricas

Implementação Computacional

TGG de prismas retangulares em coordenadas esféricas

Tesseróide é aproximado por um prisma retangular:

- ▶ Mesmo volume, densidade e altura do tesseróide
- ▶ Tesseróide é muito pequeno ($\sin \Delta\varphi = \Delta\varphi$)
- ▶ Altura do tesseróide muito pequena ($\Delta r \ll r_1$)

Dimensões do prisma (WILD-PFEIFFER, 2008):

$$\Delta x = \frac{r_1 + r_2}{2} \Delta\varphi$$

$$\Delta y = \frac{r_1 + r_2}{2} \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \Delta\lambda$$

$$\Delta z = \Delta r$$

Implementação Computacional

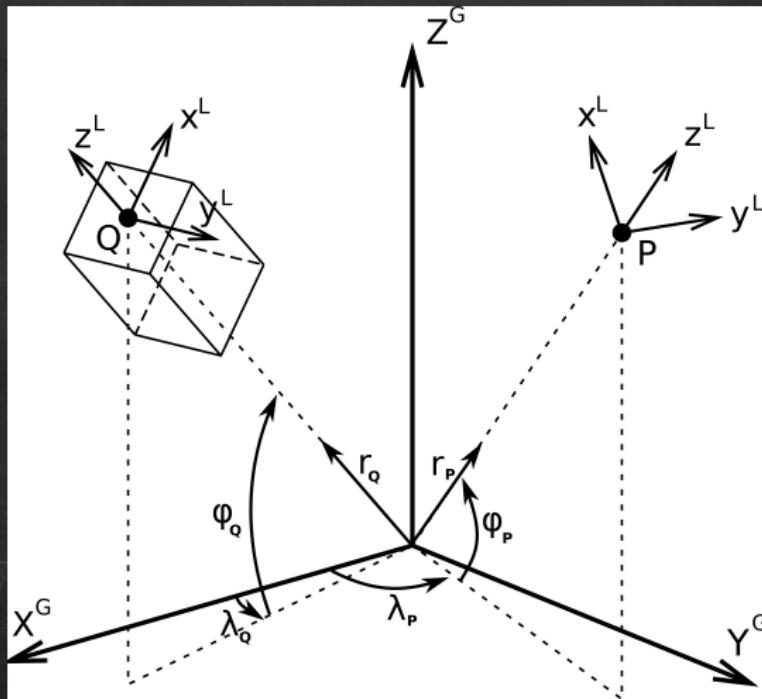
TGG de prismas retangulares em coordenadas esféricas

Fórmulas analíticas são dadas em Nagy *et al.* (2000)

- ▶ Assumida uma aproximação plana para a Terra
- ▶ O **sistema local do prisma** tem a mesma orientação do **sistema local do ponto de observação**
- ▶ Para a Terra esférica o **sistema local do ponto de observação** não terá a mesma orientação do **sistema local do prisma**

Implementação Computacional

TGG de prismas retangulares em coordenadas esféricas



Implementação Computacional

TGG de prismas retangulares em coordenadas esféricas

É necessário converter o TGG para o **sistema local do ponto de observação**

$$T^{L_{ob}} = R \ T^{L_{pr}} R^T$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_2 \left(\varphi_{ob} - \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R}_3 (\lambda_{ob} - \lambda_{pr}) \mathbf{R}_2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{pr} \right) \mathbf{P}_2$$

Implementação Computacional

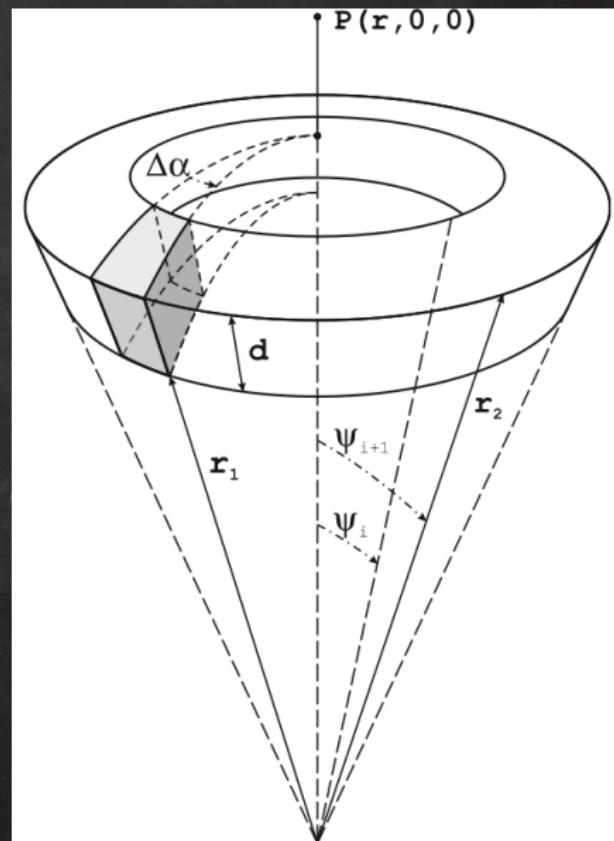
TGG de uma casca esférica

Implementação Computacional

TGG de uma casca esférica

Utilizado para:

- ▶ Validar os resultados
- ▶ Estimar sua precisão
- ▶ Solução existe para $\varphi = 90^\circ$
- ▶ TGG de anéis de massa pode ser calculado subtraindo duas cascas de Ψ_{i+1} e Ψ_i



Implementação Computacional

TGG de uma casca esférica

Pela simetria do problema:

$$T_{xx} = T_{yy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

$$T_{xy} = T_{yx} = 0$$

$$T_{xz} = T_{zx} = 0$$

$$T_{yz} = T_{zy} = 0$$

$$T_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

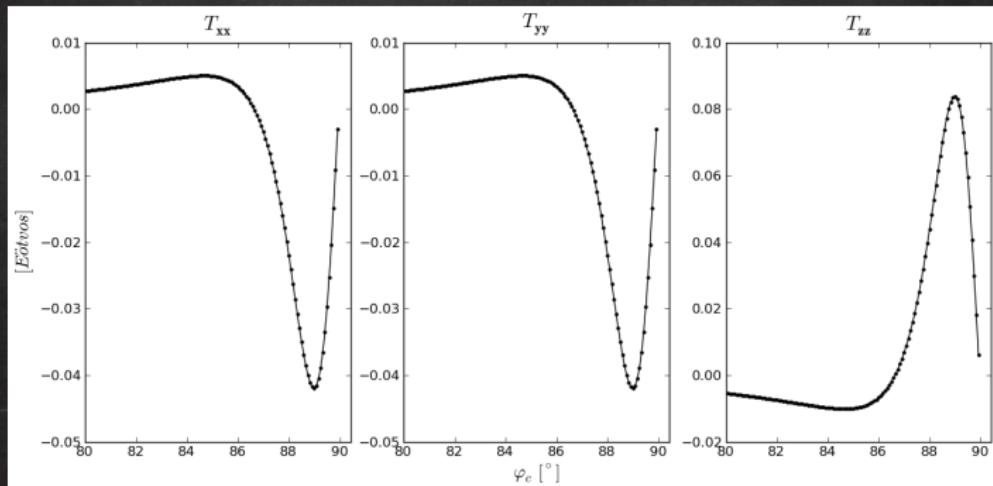
Resultados

- ▶ Validação do programa
- ▶ Exemplo de TGG de um tesseróide
- ▶ Limitações numéricas
- ▶ Diferença da “Terra plana”
- ▶ Efeito topográfico

Resultados

Validação do programa

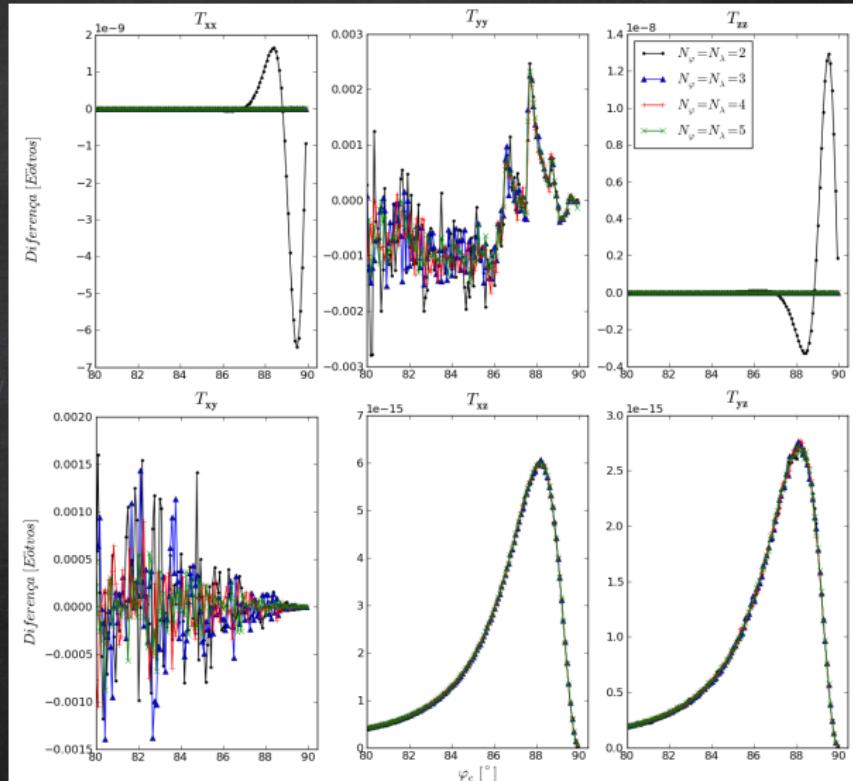
Anéis de massa de $\Delta\varphi = 5'$, $\rho = 2\,670 \text{ kg m}^{-3}$, $\Delta r = 1\,000 \text{ m}$
e ponto de observação no polo Norte a 250 km de altitude



Resultados

Validação do programa

- Discretizado em tesseróides de $5' \times 5' \times 1000m$
- Ordens de QGL ($N_\varphi = N_\lambda$) dois, três, quatro e cinco



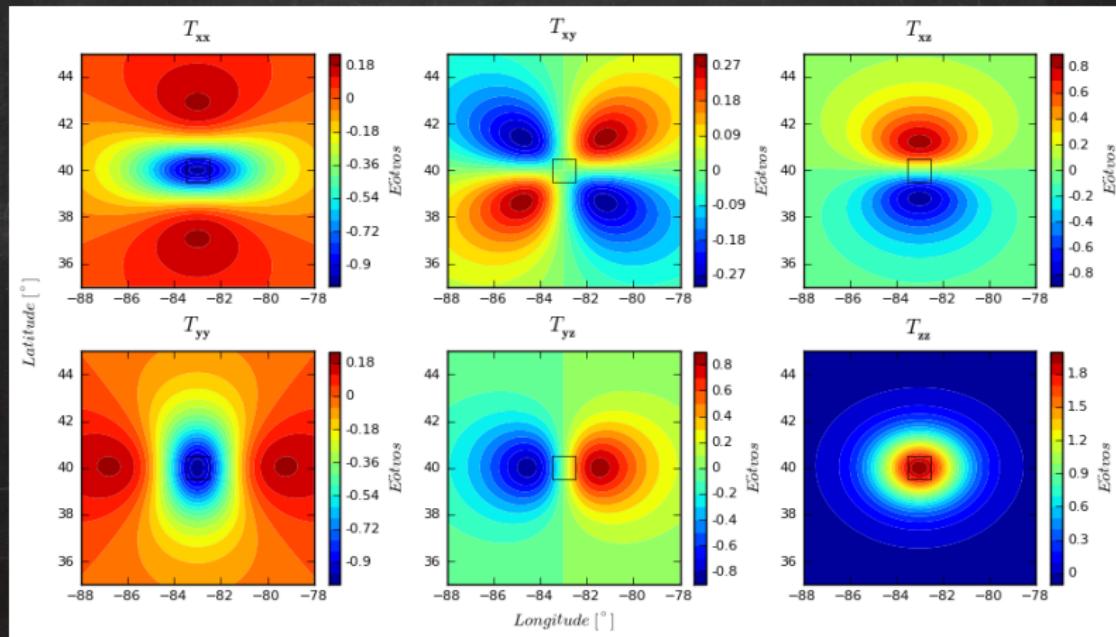
Resultados

Exemplo de TGG de um tesseróide

Resultados

Exemplo de TGG de um tesseróide

Tesseróide de $1^\circ \times 1^\circ \times 1^\circ \times 10\text{ km}$, $\rho = 2800\text{ kg m}^{-3}$, centrado em $40^\circ N$ e $83^\circ W$ e observado a 250 km de altitude. $N_\varphi = N_\lambda = 2$



Resultados

Limitações numéricas

Resultados

Limitações numéricas

Resultados de Ku (1977):

- ▶ Se a distância entre os nós da QGL for maior que a distância ao ponto de observação
 - ▶ O TGG aparenta ser causado por massas pontuais localizadas nos nós
 - ▶ Este é um artefato numérico da QGL
 - ▶ Para evitá-lo basta aumentar o número de nós até que a distância fosse menor que a distância até o ponto de observação

Resultados

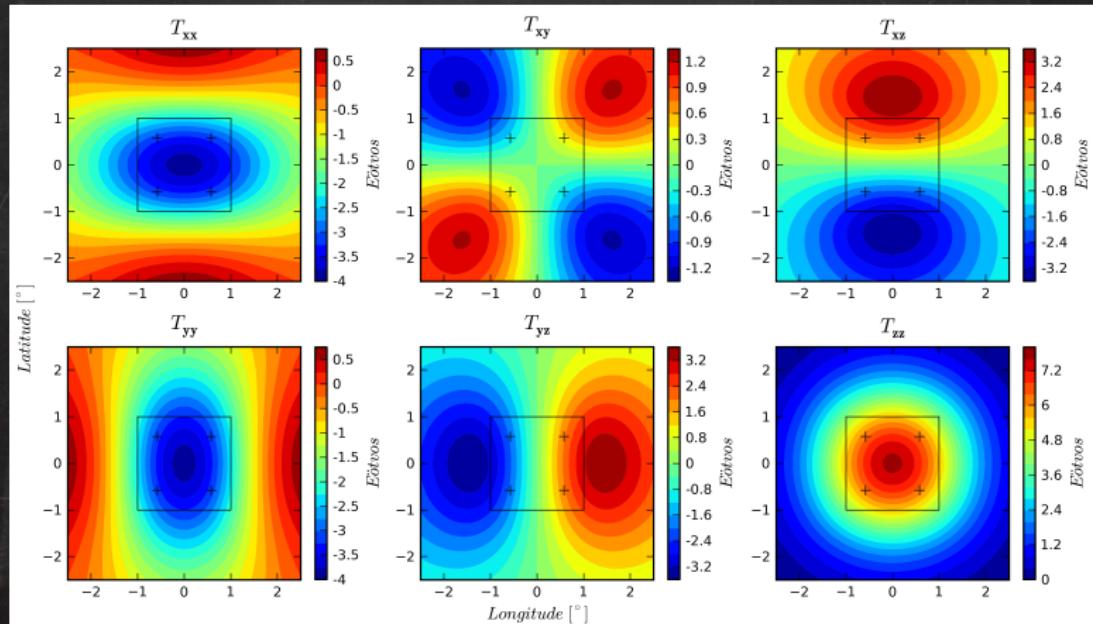
Limitações numéricas

- ▶ O mesmo acontece com o TGG de um tesseróide?
- ▶ Calculado o TGG de um tesseróide de $2^\circ \times 2^\circ \times 10 \text{ km}$ e $\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$ para diversas altitudes e ordens

Resultados

Limitações numéricas

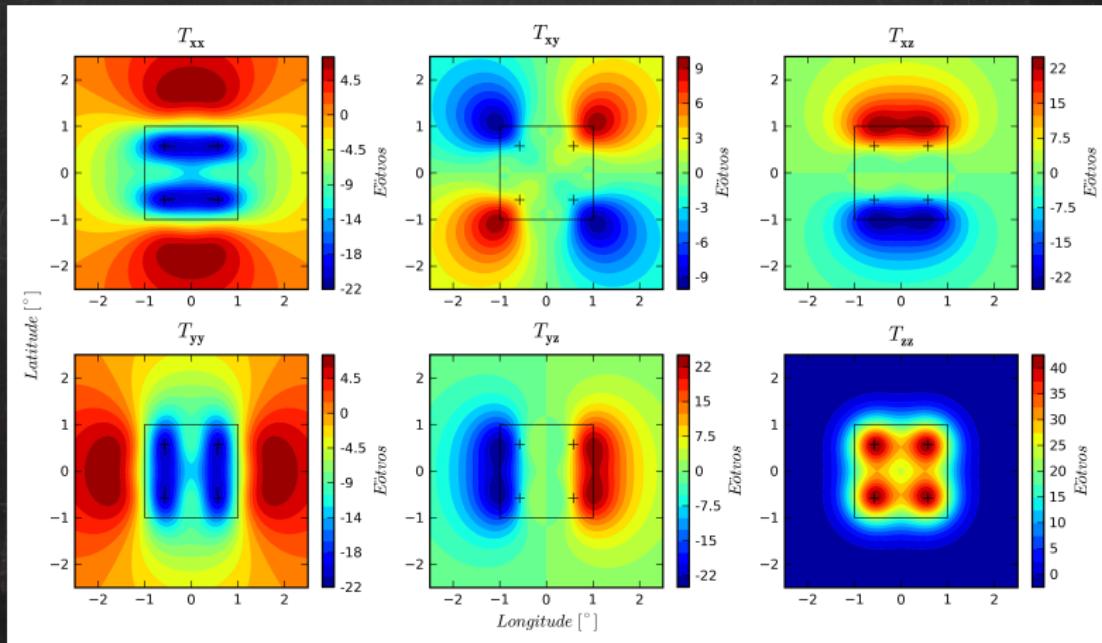
$N_\varphi = N_\lambda = 2$ a 250 km (Maior distância entre os nós $\approx 128,5$ km)



Resultados

Limitações numéricas

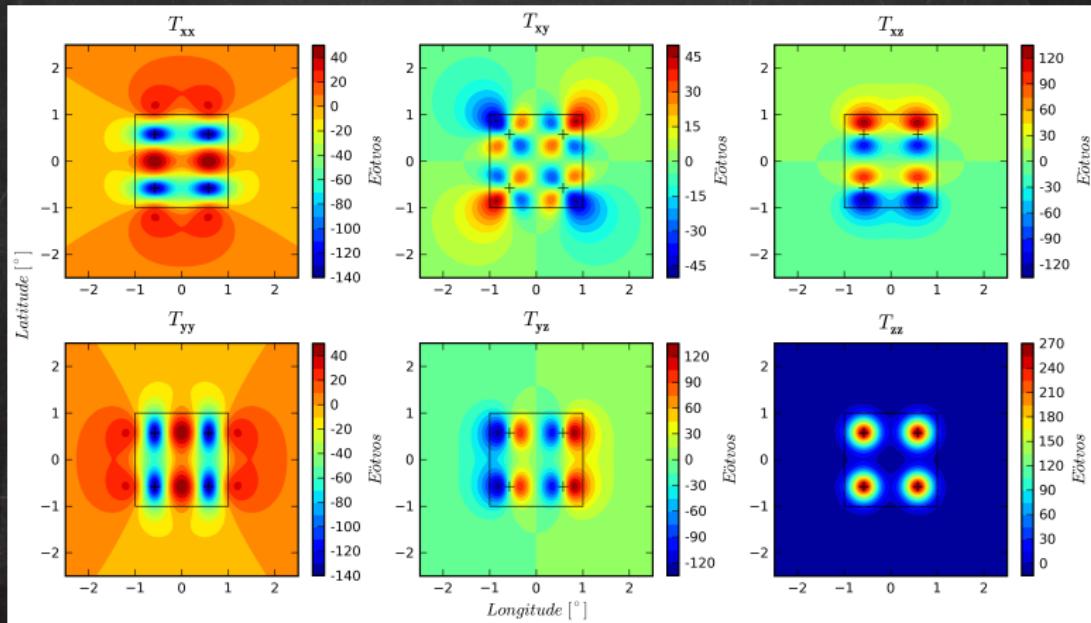
$N_\varphi = N_\lambda = 2$ a 100 km (Maior distância entre os nós $\approx 128,5$ km)



Resultados

Limitações numéricas

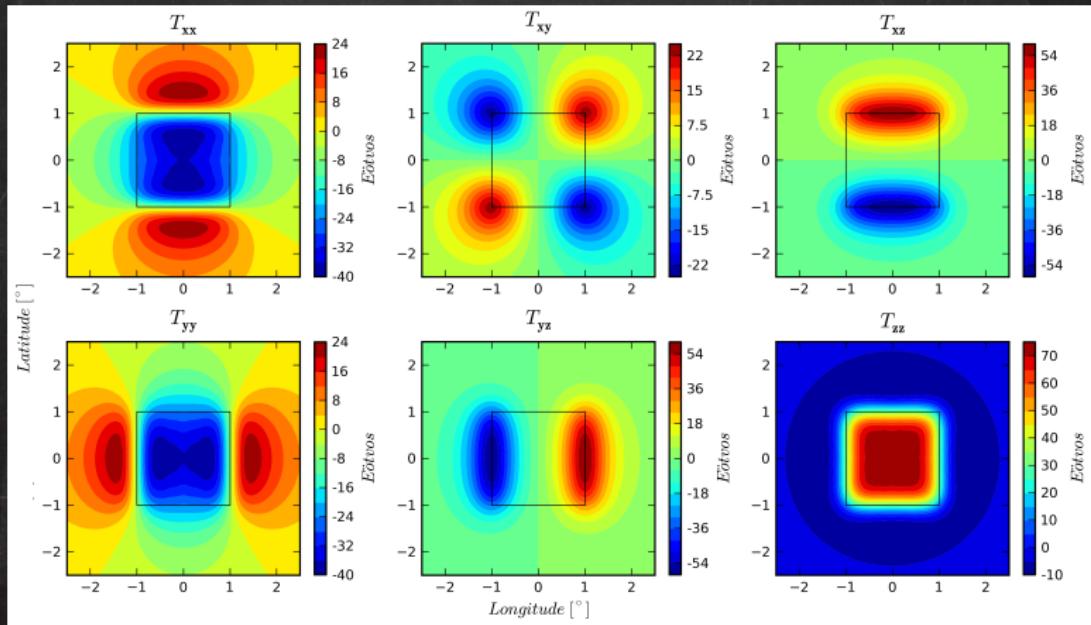
$N_\varphi = N_\lambda = 2$ a 50 km (Maior distância entre os nós $\approx 128,5$ km)



Resultados

Limitações numéricas

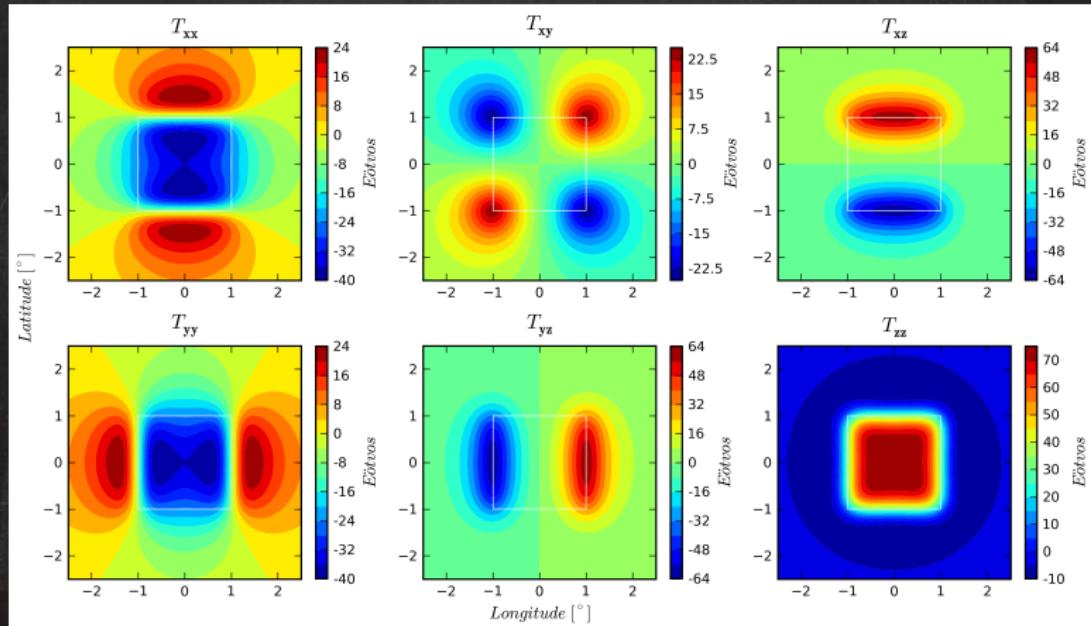
$N_\varphi = N_\lambda = 10$ a 50 km (Maior distância entre os nós ≈ 33 km)



Resultados

Limitações numéricas

Prisma de mesma massa a 50 km



Resultados

Diferença da “Terra plana”

Resultados

Diferença da “Terra plana”

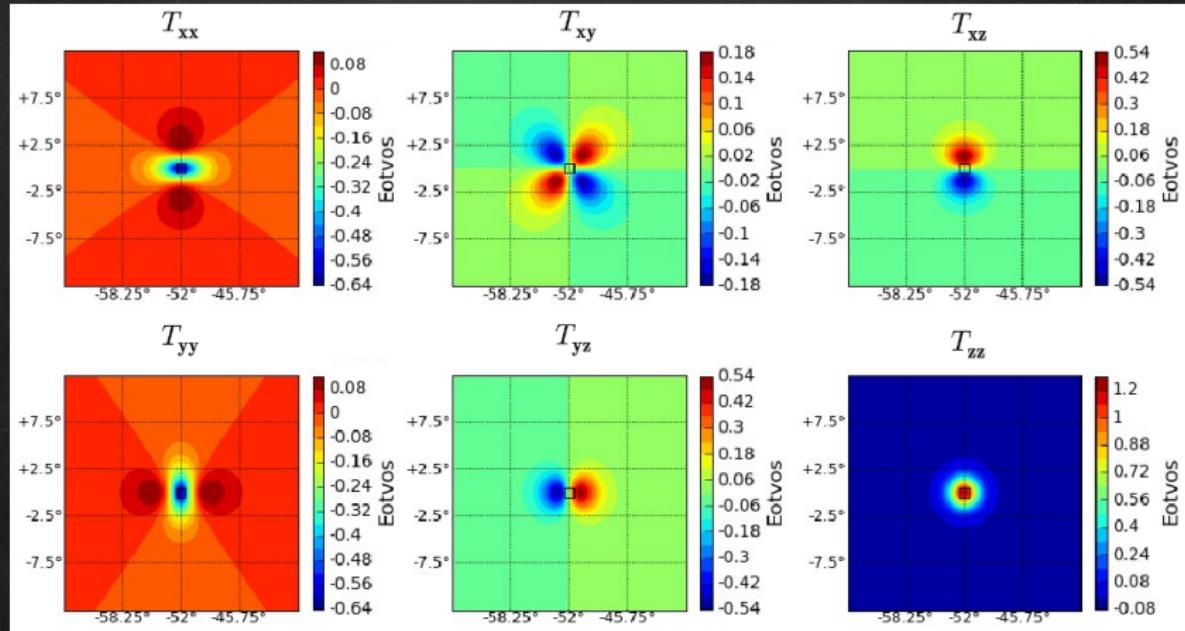
Aproximação plana para a Terra:

- ▶ Corpos planos
- ▶ 1° de latitude ou longitude $\approx 111,11$ km
- ▶ Sistemas locais dos pontos de observação possuem a mesma orientação do sistema local do corpo

Resultados

Diferença da “Terra plana”

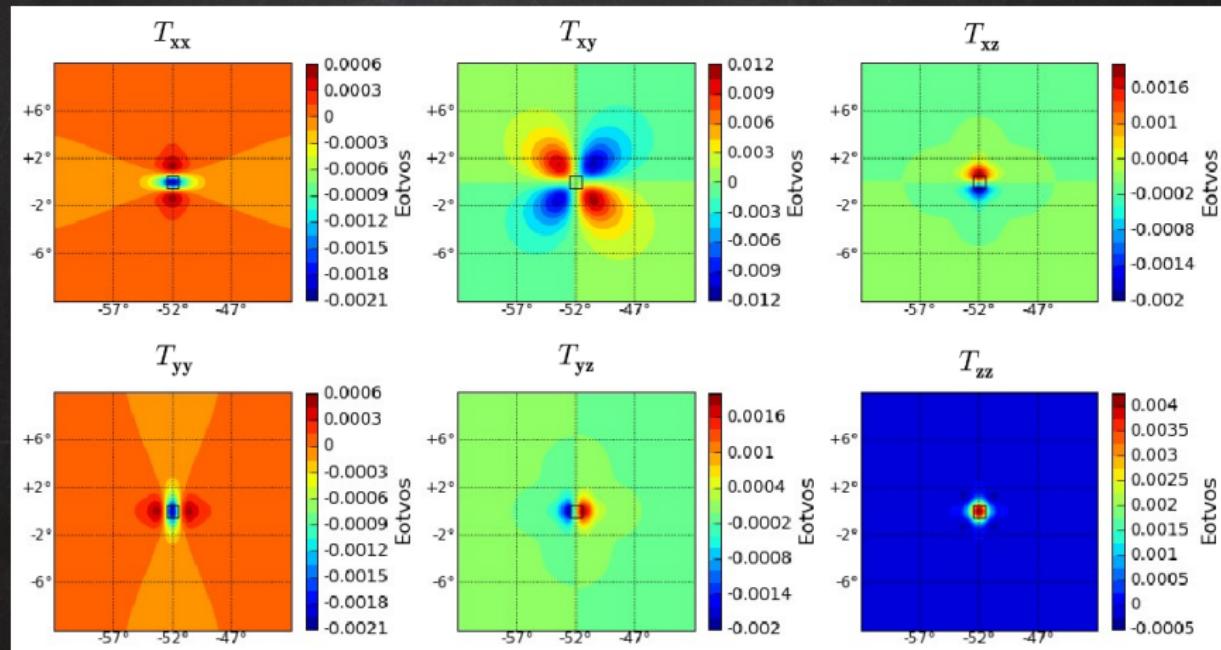
Tesseróide de $1^\circ \times 1^\circ \times 10\text{ km}$ e $\rho = 2800\text{ kg m}^{-3}$ calculado a 250 km



Resultados

Diferença da “Terra plana”

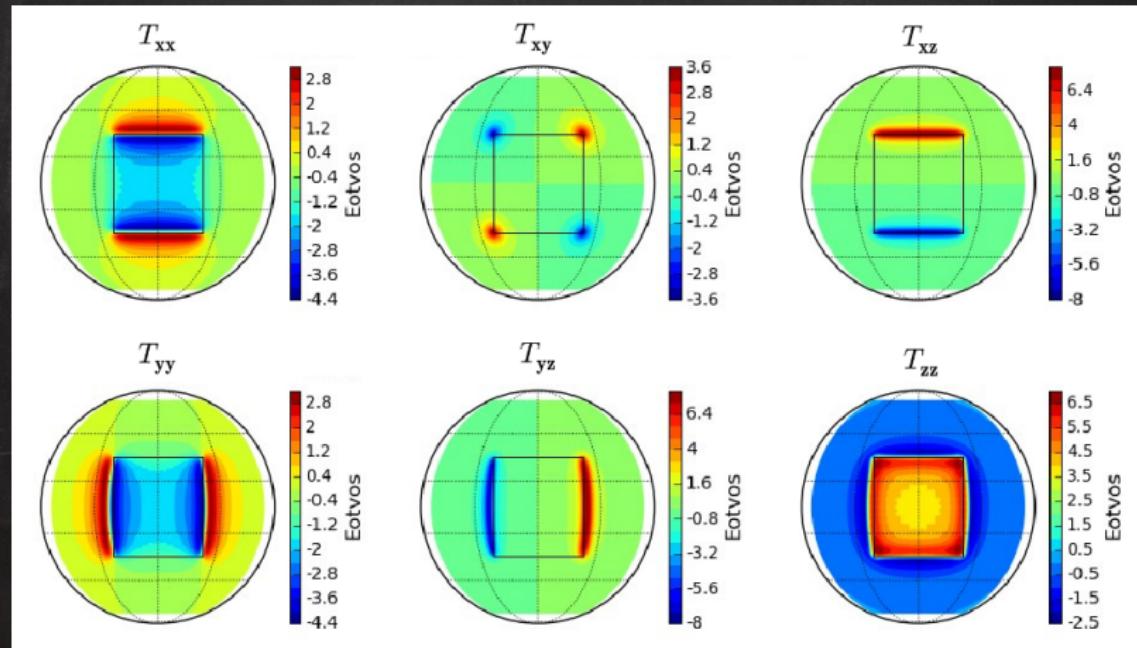
Diferença



Resultados

Diferença da “Terra plana”

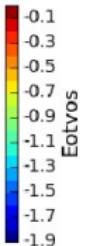
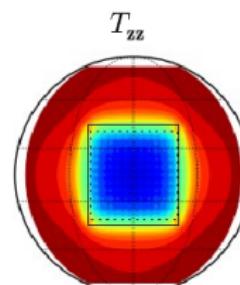
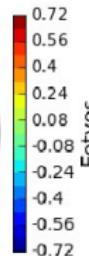
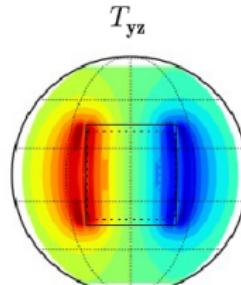
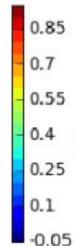
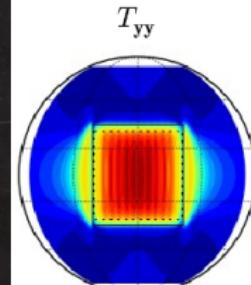
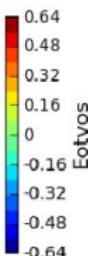
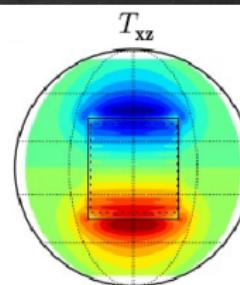
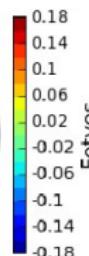
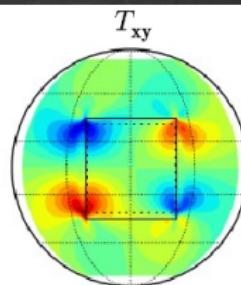
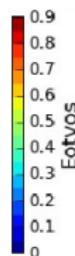
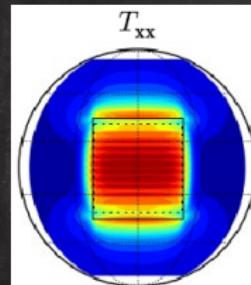
Tesseróide de $50^\circ \times 50^\circ \times 10 \text{ km}$ e $\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$ calculado a 250 km



Resultados

Diferença da “Terra plana”

Diferença



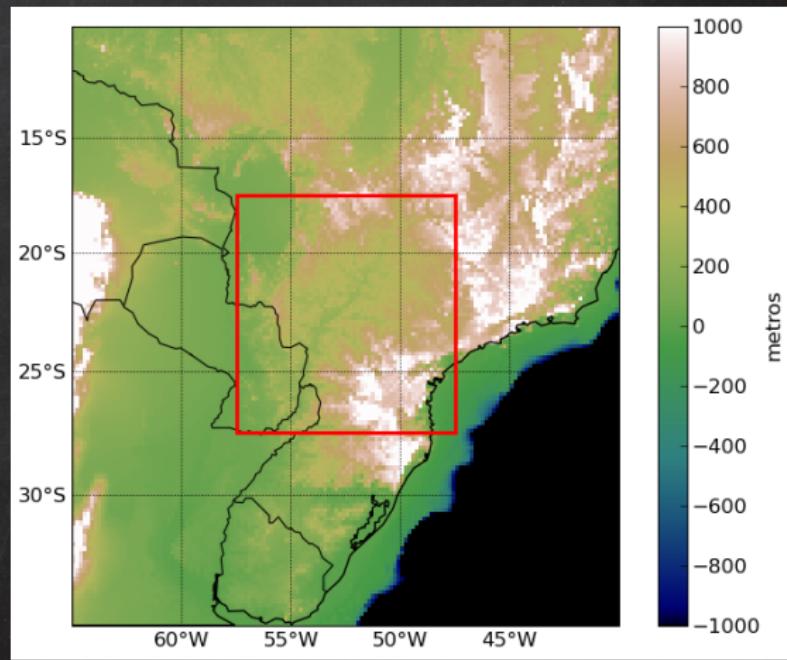
Resultados

Efeito topográfico

Resultados

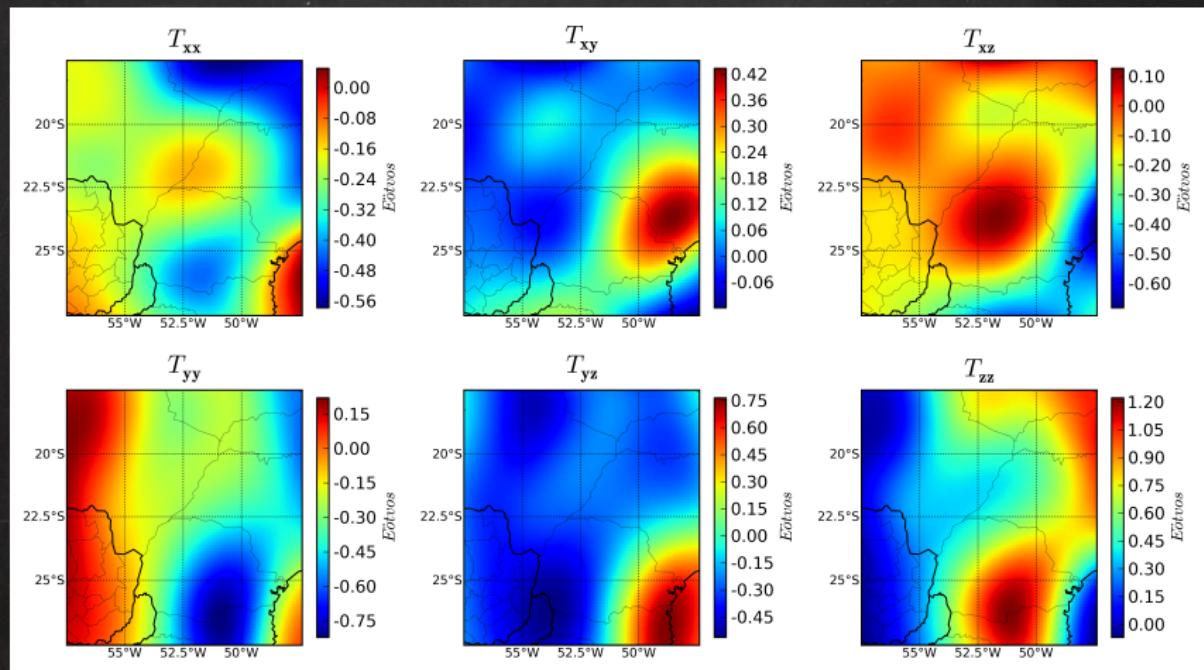
Efeito topográfico

- ▶ Estimar o efeito da topografia da bacia do Paraná no TGG a 250 km
- ▶ DEM ETOPO1
- ▶ Grid de 10'
- ▶ $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$



Resultados

Efeito topográfico



Conclusões

- ▶ Validação dos resultados
 - ▶ T_{xy} e T_{yy} se mostraram instáveis
 - ▶ Era esperado pois existem singularidades nas equações para $\varphi = 90^\circ$
 - ▶ Este é caso limite que deve ser evitado na prática
- ▶ Limitações numéricas
 - ▶ Apresenta o mesmo artefato numérico observado por Ku (1977)
 - ▶ A ordem da QGL deve ser escolhida para que a distância entre os nós seja menor que a distância até o ponto de observação
 - ▶ A altitude de 250 km, o TGG de um tesseróide com face de até $2^\circ \times 2^\circ$ pode ser calculado utilizando ordem 2

Conclusões

- ▶ Diferenças da “Terra plana”
 - ▶ Diferenças de até 30% em T_{zz} para um modelo de $50^\circ \times 50^\circ \times 10 \text{ km}$
 - ▶ Deve ser levada em conta na modelagem de estruturas extensas
- ▶ Efeito topográfico no TGG
 - ▶ TGG devido à topografia da mesma ordem de grandeza que o TGG de um tesseróide de $1^\circ \times 1^\circ \times 10 \text{ km}$
 - ▶ Deve ser separado do efeito do corpo anômalo na modelagem de dados de TGG

Obrigado

Referências

- ▶ ASGHARZADEH, M.F.; VON FRESE, R.R.B.; KIM, H.R.; LEFTWICH, T.E.; KIM, J.W. Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration. **Geophysics Journal International**, v. 169, p. 1-11, 2007.
- ▶ BARRERA-FIGUEROA, V.; SOSA-PEDROZA, J.; LÓPEZ-BONILLA, J. Multiple root finder algorithm for Legendre and Chebyshev polynomials via Newton's method. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 33, p. 3 – 13, 2006.
- ▶ HECK, B.; SEITZ, K. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. **Journal of Geodesy**, v. 81, p. 121 - 136, 2007.
- ▶ HILDEBRAND, F.B. **Introduction to numerical analysis**. Courier Dover Publications, 2. ed., 1987.
- ▶ KU, C.C. A direct computation of gravity and magnetic anomalies caused by 2- and 3-dimensional bodies of arbitrary shape and arbitrary magnetic polarization by equivalent-point method and a simplified cubic spline. **Geophysics**, v. 42, p. 610 - 622, 1977.
- ▶ NAGY, D.; PAPP, G.; BENEDEK, J. The gravitational potential and its derivatives for the prism. **Journal of Geodesy**, v. 74, p. 552 – 560, 2000.
- ▶ PRESS, W.H.; FLANNERY, B.P.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T. **Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing**. Cambridge University Press, 2. ed., 1992.
- ▶ TSCHERNING, C.C. Computation of the second-order derivatives of the normal potential based on the representation by a Legendre series. **Manuscripta Geodaetica**, v. 1, p. 71 – 92, 1976.
- ▶ WILD-PFEIFFER, F. A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. **Journal of Geodesy**, v. 82 (10), p. 637 - 653, 2008.