

Inversão 3D de campos potenciais em coordenadas esféricas

Parte 1: Modelagem direta

Leonardo Uieda

Valéria C. F. Barbosa

Carla Braitenberg

Sumário

- Introdução
- Métodos
- Análise da precisão
- Implementação computacional
- Conclusões
- Passado, presente e futuro
- Aplicação a dados do GOCE

Introdução

Missões de satélite

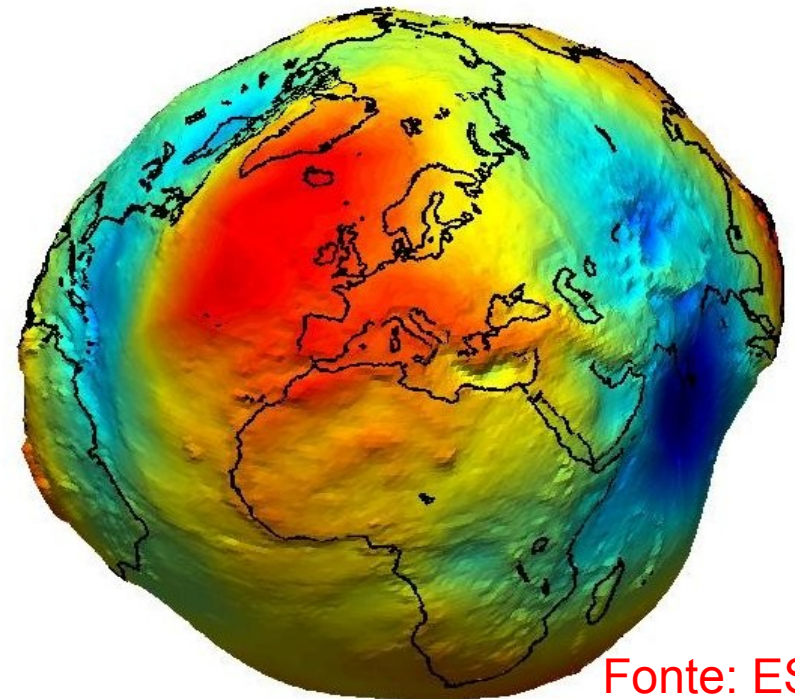
- Abundância de dados gravitacionais de satélites
- Mais recente: GOCE
 - **G**ravity field and steady-state **O**cean **C**irculation **E**xplorer
- Cobertura global de dados
- Regularmente espaçados



Fonte: ESA

Novos dados

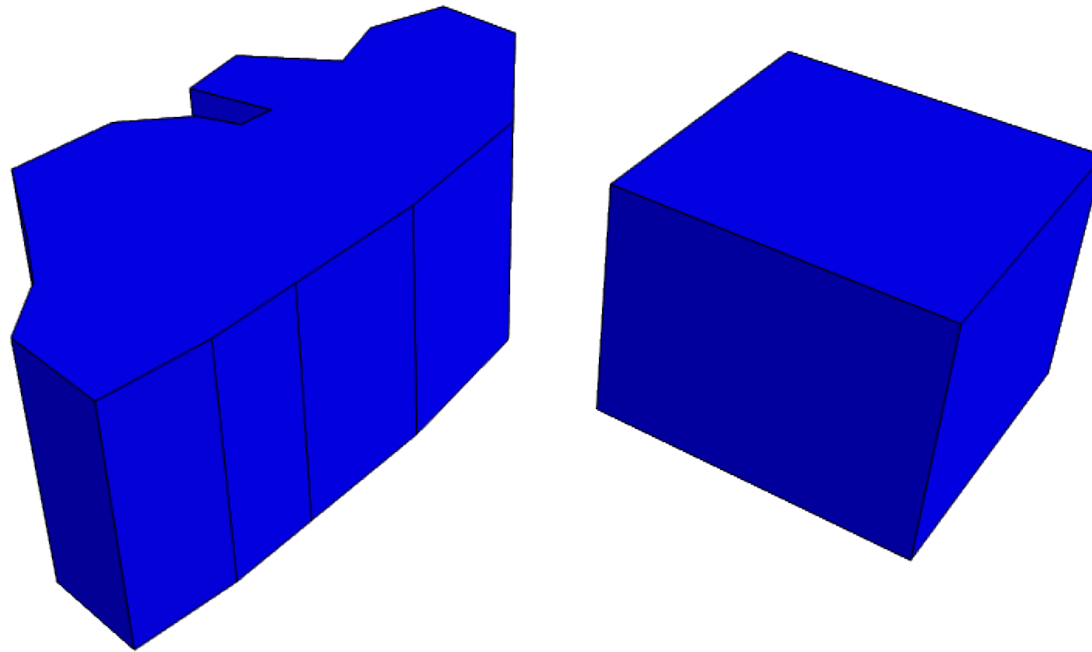
- Estudos em escala global/regional
- Com mais detalhe que antes
- Novos desafios para modelagem
 - Volume de dados
 - Curvatura da Terra



Fonte: ESA

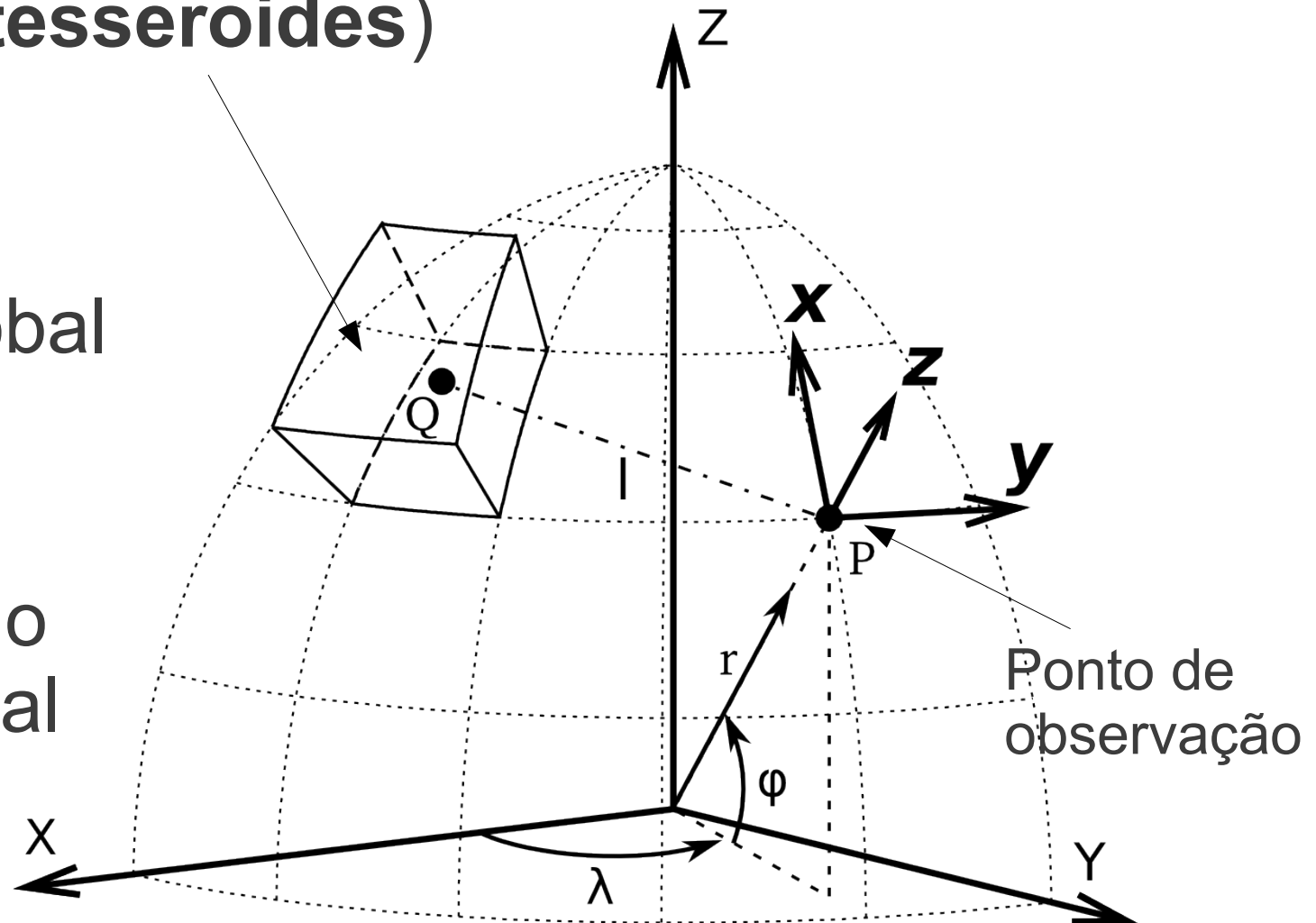
Curvatura da Terra

- Modelagem tradicional: prismas retos
- Não se encaixam na curvatura da Terra



Tesseroides

- Solução: discretizar a Terra em prismas esféricos (**tesseroides**)
- Tesseróide definido no sistema global (X, Y, Z)
- Efeito calculado no sistema local (x, y, z)

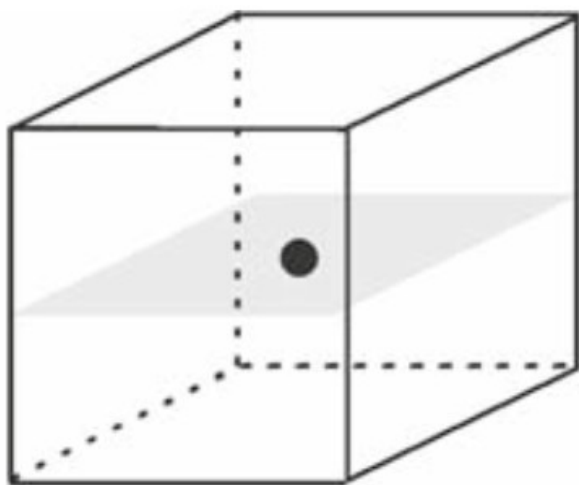


Modelagem com tesseroides

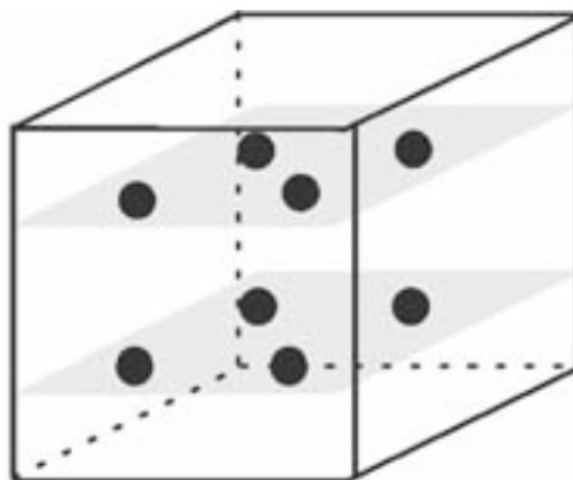
- Fórmulas derivadas por Tscherning (1976), Smith et al. (2001) e Grombein et al. (2010)
- Sem solução analítica
- Solução por série de Taylor (Heck e Seitz, 2006)
- Solução pela **Q**uadratura **G**auss-**L**egendre (Asgharzadeh et al., 2007; Wild-Pfeiffer, 2008)
- QGL é o método mais aceito

Quadratura Gauss-Legendre

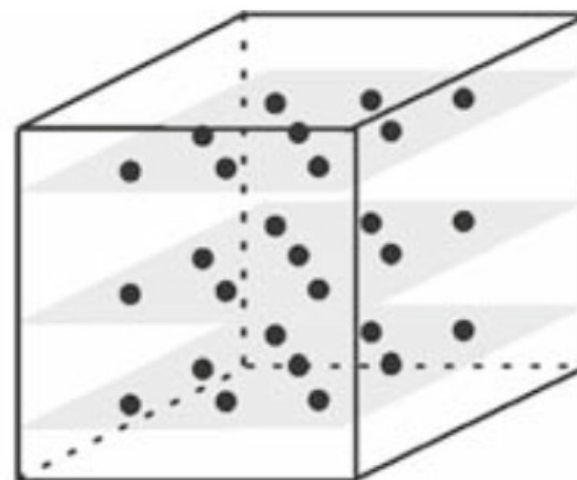
- Discretiza o integrando em pontos (nós)
- Nós são raízes de polinômios de Legendre
- Integral transforma em soma ponderada



$$n = m = p = 0$$



$$n = m = p = 1$$



$$n = m = p = 2$$

Acurácia da QGL

- Sujeito a erros de aproximação
- Depende do número de nós e características do integrando
- Investigado por Ku (1977)
- Para o prisma retangular reto e g_z
- Menciona uma regra empírica:

Distância até P > Distância entre os nós

Automatizar o cálculo preciso

1. n° de nós variável

Distância a P > distância entre nós:

Aumentar a ordem da QGL

2. n° de nós fixo (Li et al., 2011)

Distância a P > distância entre nós:

Divide tesseróide em tesseróides menores.

Tesseróide menor = nós mais próximos

Questões

- Ambos dependem da regra de Ku (1977)
- Não é abordada em detalhe
- É válida para tesseroides?
- É válida para outras derivadas do potencial?
- Qual o nível de erro cometido?

Neste trabalho

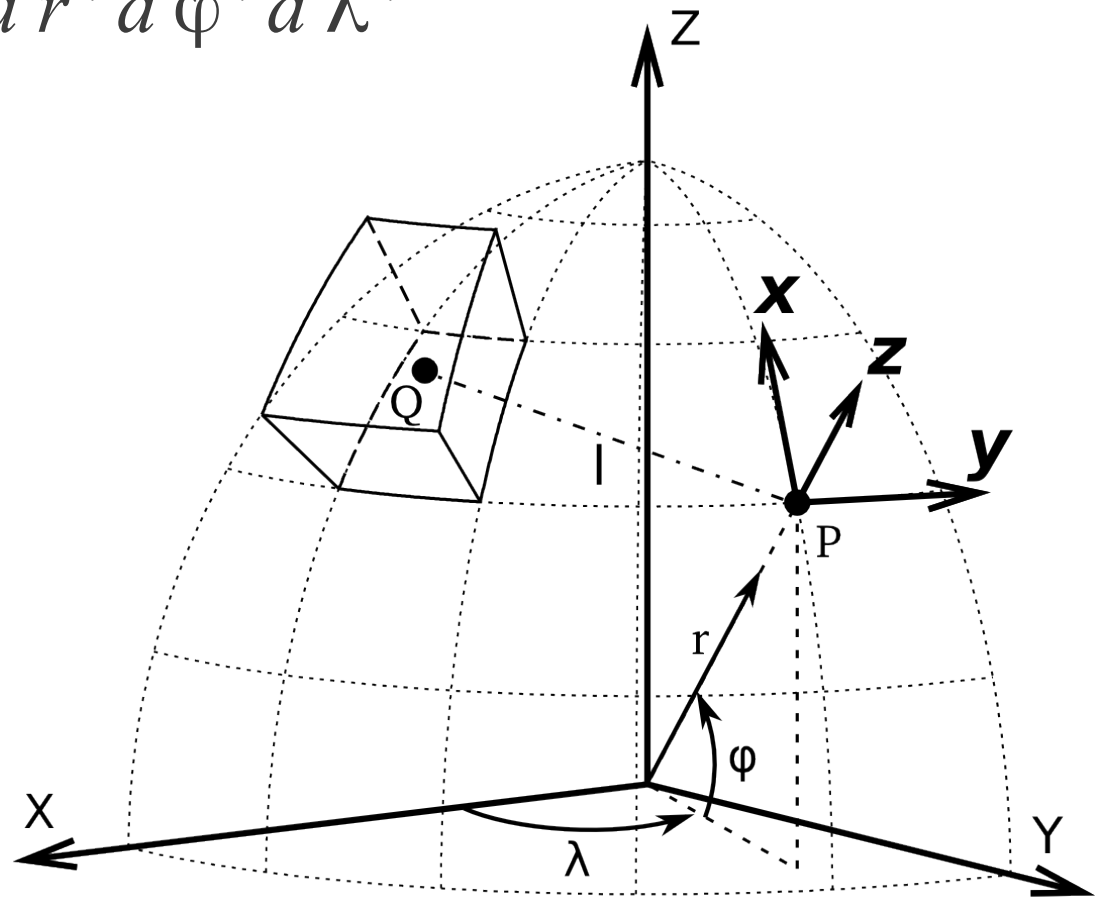
- Quantificar o erro cometido pela QGL
- Verificar se a regra de Ku (1977) é válida para tesseroides e derivadas do potencial
- Implementar um programa computacional
- Aplicar o programa

Métodos

Campos gravitacionais

- Potencial do tesseróide

$$V(P) = G \rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{l} \kappa dr' d\varphi' d\lambda'$$



Fórmulas de Grombein et al (2010)

Campos gravitacionais

- Atração gravitacional do tesseróide

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = g_{\alpha}(P) = G \rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Delta_{\alpha}}{l^3} \kappa dr' d\varphi' d\lambda'$$

$\alpha \in \{x, y, z\} \rightarrow$ Sistema local de P

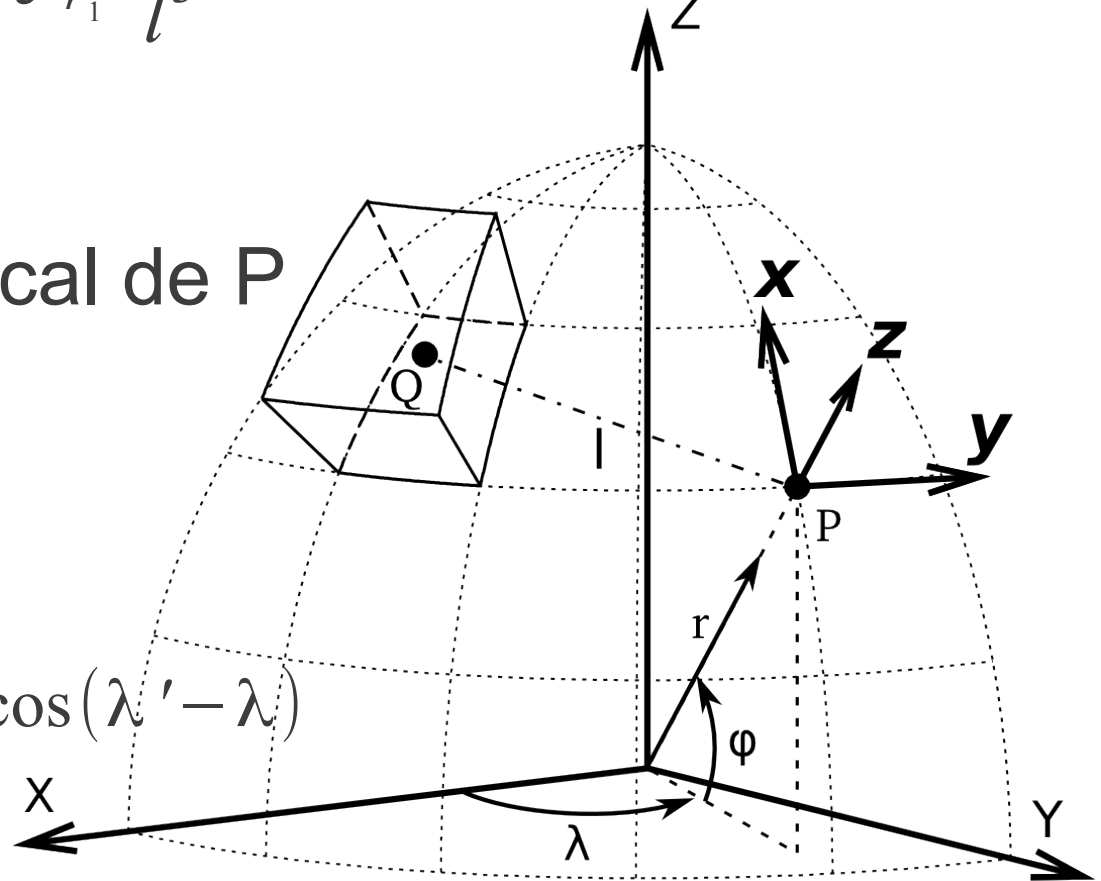
$$\Delta_x = r' K_{\varphi}$$

$$\Delta_y = r' \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)$$

$$\Delta_z = r' \cos \psi - r$$

$$K_{\varphi} = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

Fórmulas de Grombein et al (2010)



Campos gravitacionais

- Gradiente gravitacional do tesseróide

$$\frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \beta} = g_{\alpha\beta}(P) = G \rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{3 \Delta_{\alpha} \Delta_{\beta}}{l^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{l^3} \kappa dr' d\varphi' d\lambda'$$

$\alpha \in \{x, y, z\} \rightarrow$ Sistema local de P

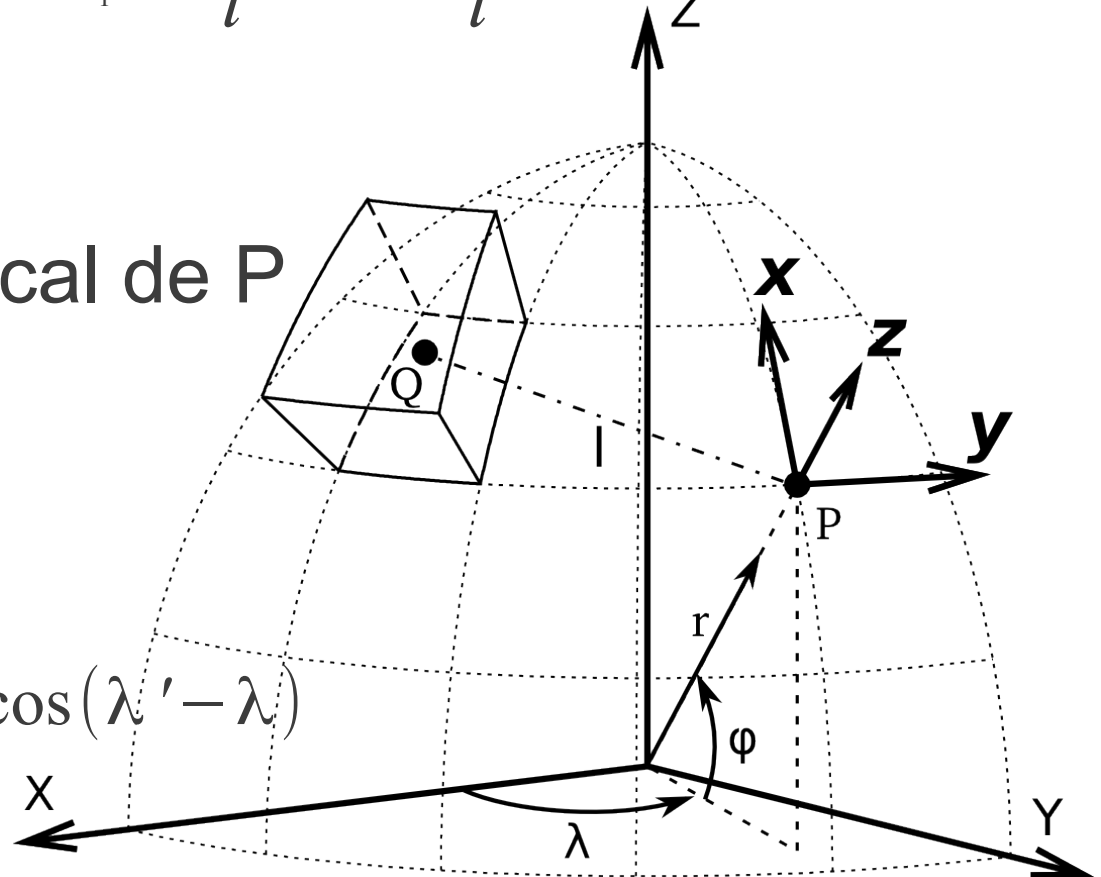
$$\Delta_x = r' K_{\varphi}$$

$$\Delta_y = r' \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)$$

$$\Delta_z = r' \cos \psi - r$$

$$K_{\varphi} = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

Fórmulas de Grombein et al (2010)



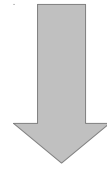
Integração numérica

- Não existem soluções analíticas
- De forma geral:

$$h(P) = G \rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} G(r', \varphi', \lambda') dr' d\varphi' d\lambda'$$

Quadratura Gauss-Legendre

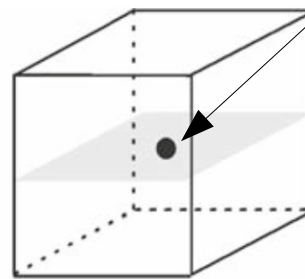
$$h(P) = G \rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} G(r', \varphi', \lambda') dr' d\varphi' d\lambda'$$



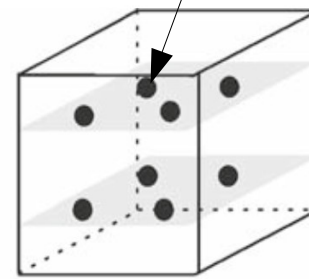
$$h(P) \approx \mu G \rho \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^L W_k^\lambda W_j^\varphi W_i^r G(r_i', \varphi_j', \lambda_k')$$

N, M e L = **ordem** da QGL

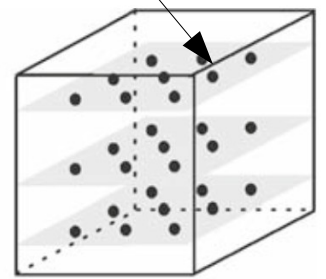
nós



$n = m = p = 0$



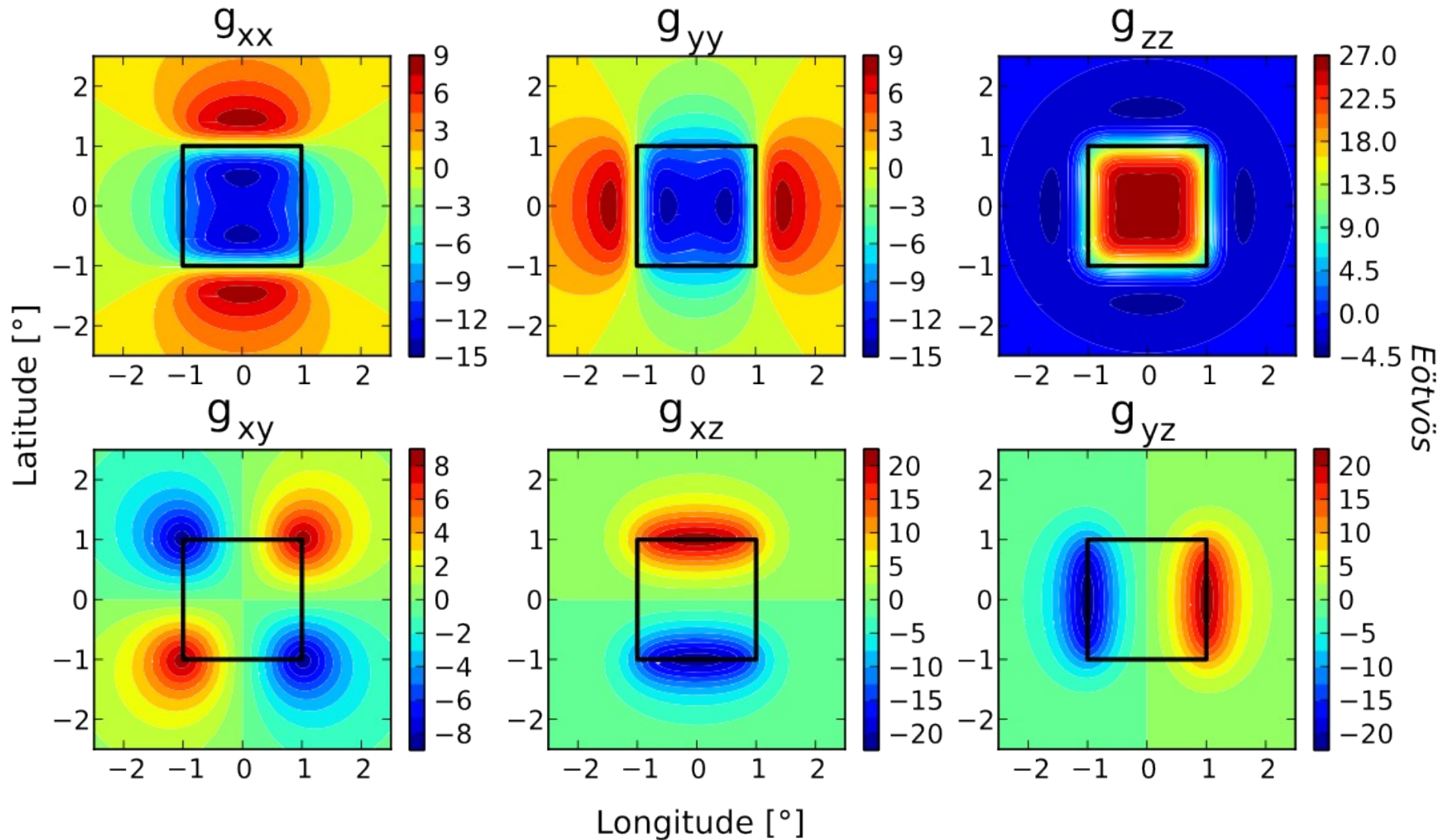
$n = m = p = 1$



$n = m = p = 2$

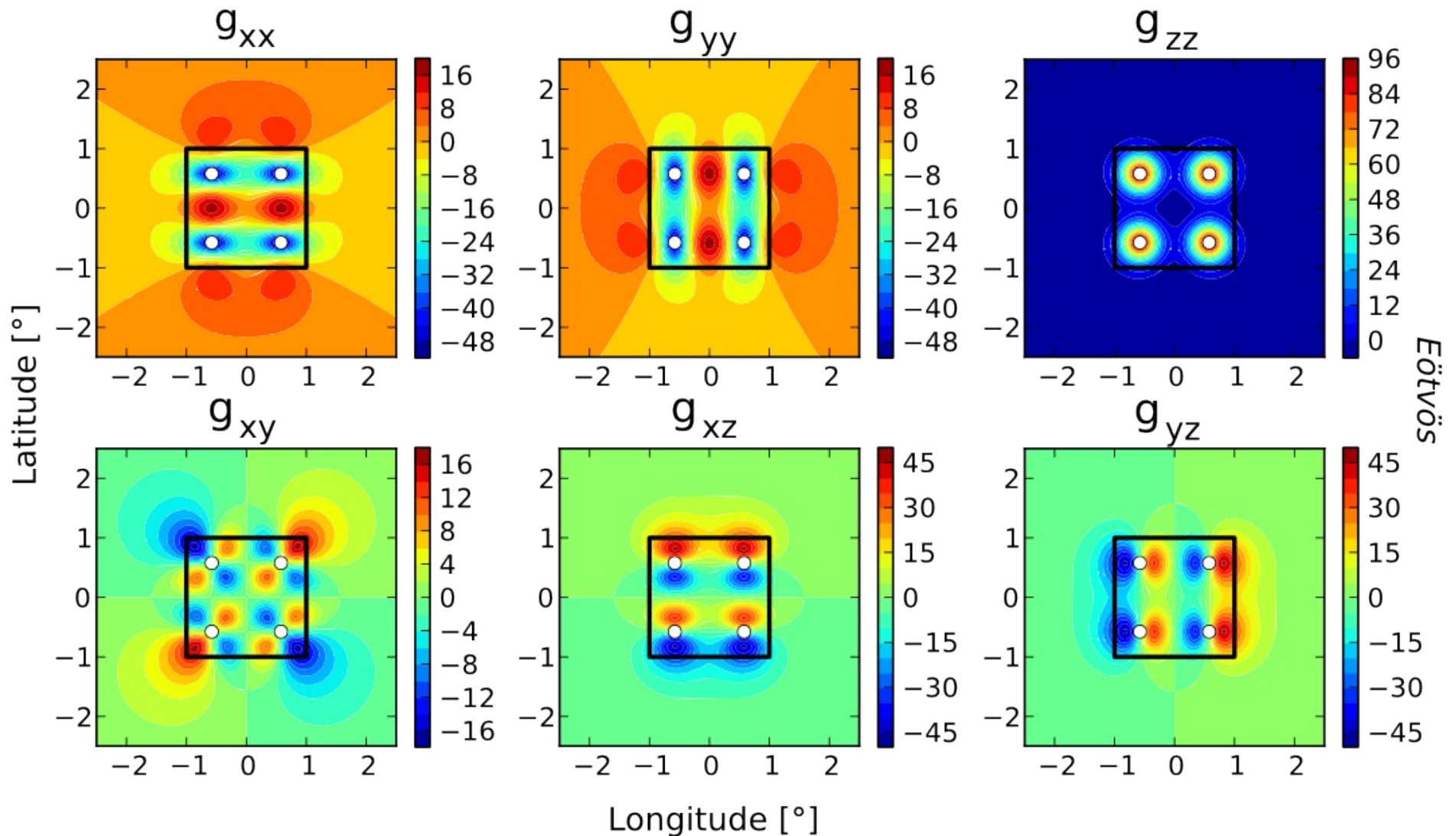
Exemplo

- Gradiente de tesseróide a 50km (ordem 10)



Exemplo

- Gradiente de tesseroide a 50km (ordem 2)

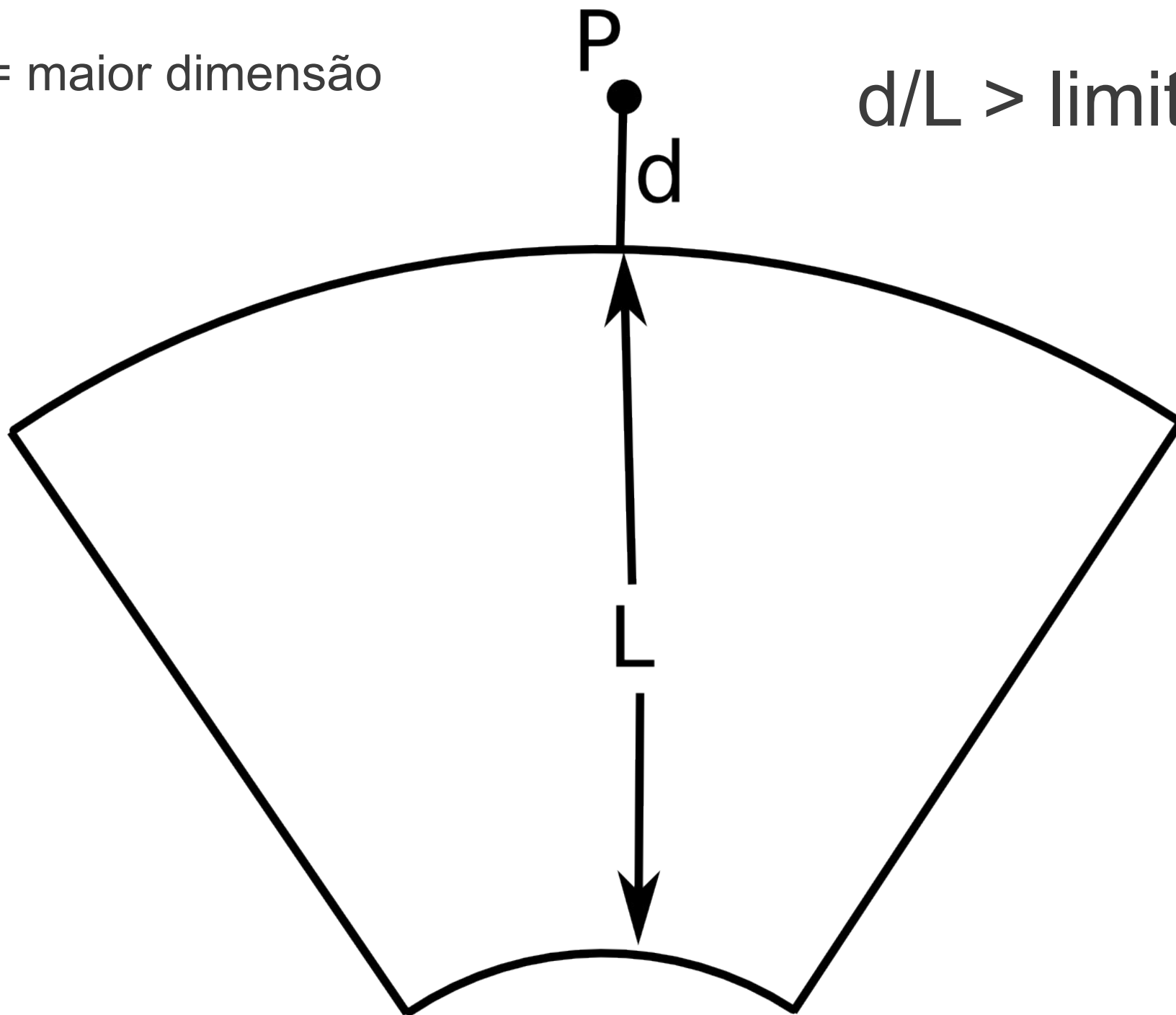


Erro numérico

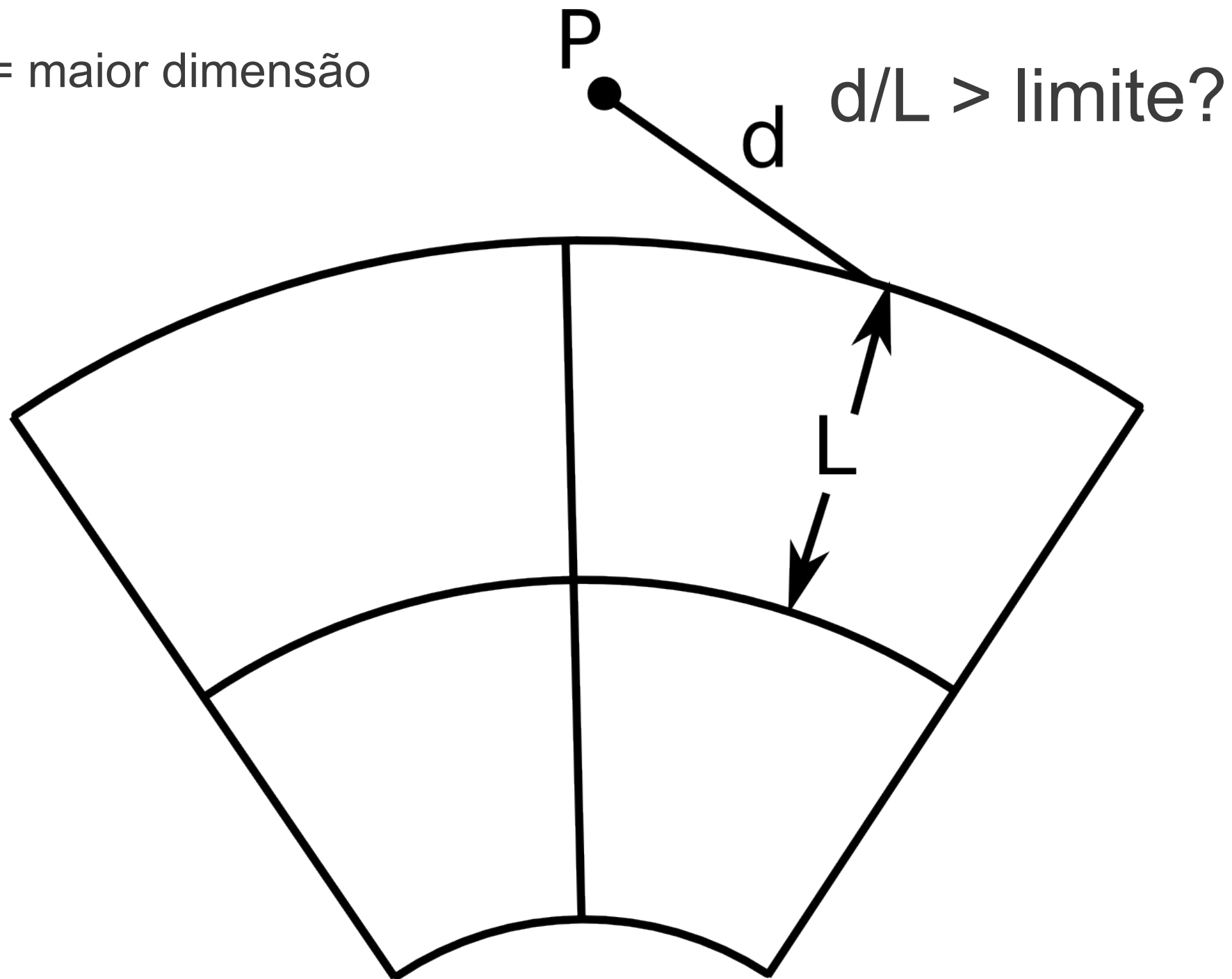
- Depende do número de nós
- E da distância entre tesseractoide e P
 - Distância a P > Distância entre os nós
- **Automatização**
 - Similar a Li et al. (2011)
 - Fixar ordem = 2
 - Se violar regra da distância:
 - Dividir tesseractoide em 8
 - Recursivamente

L = maior dimensão

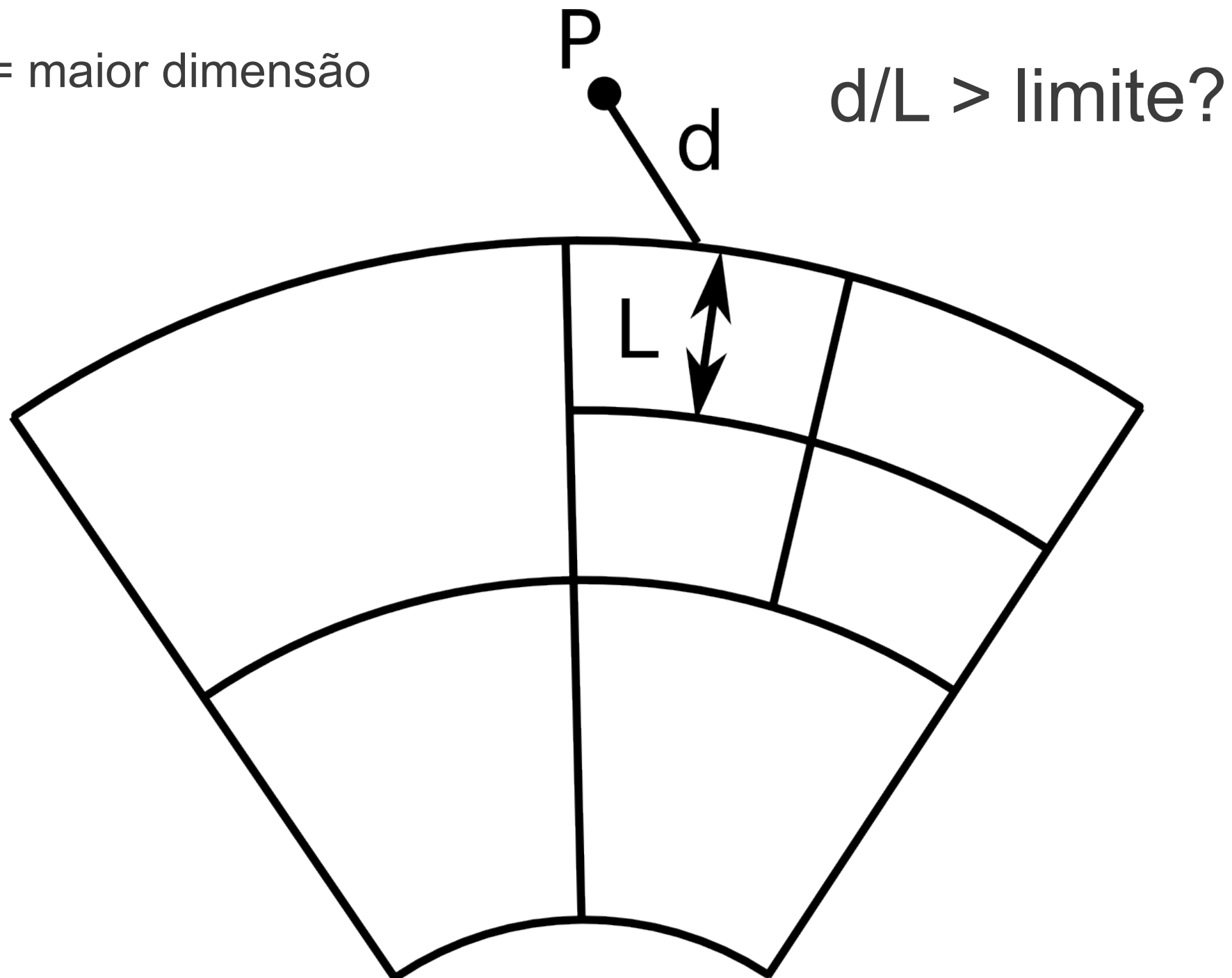
$d/L > \text{limite?}$



L = maior dimensão



L = maior dimensão

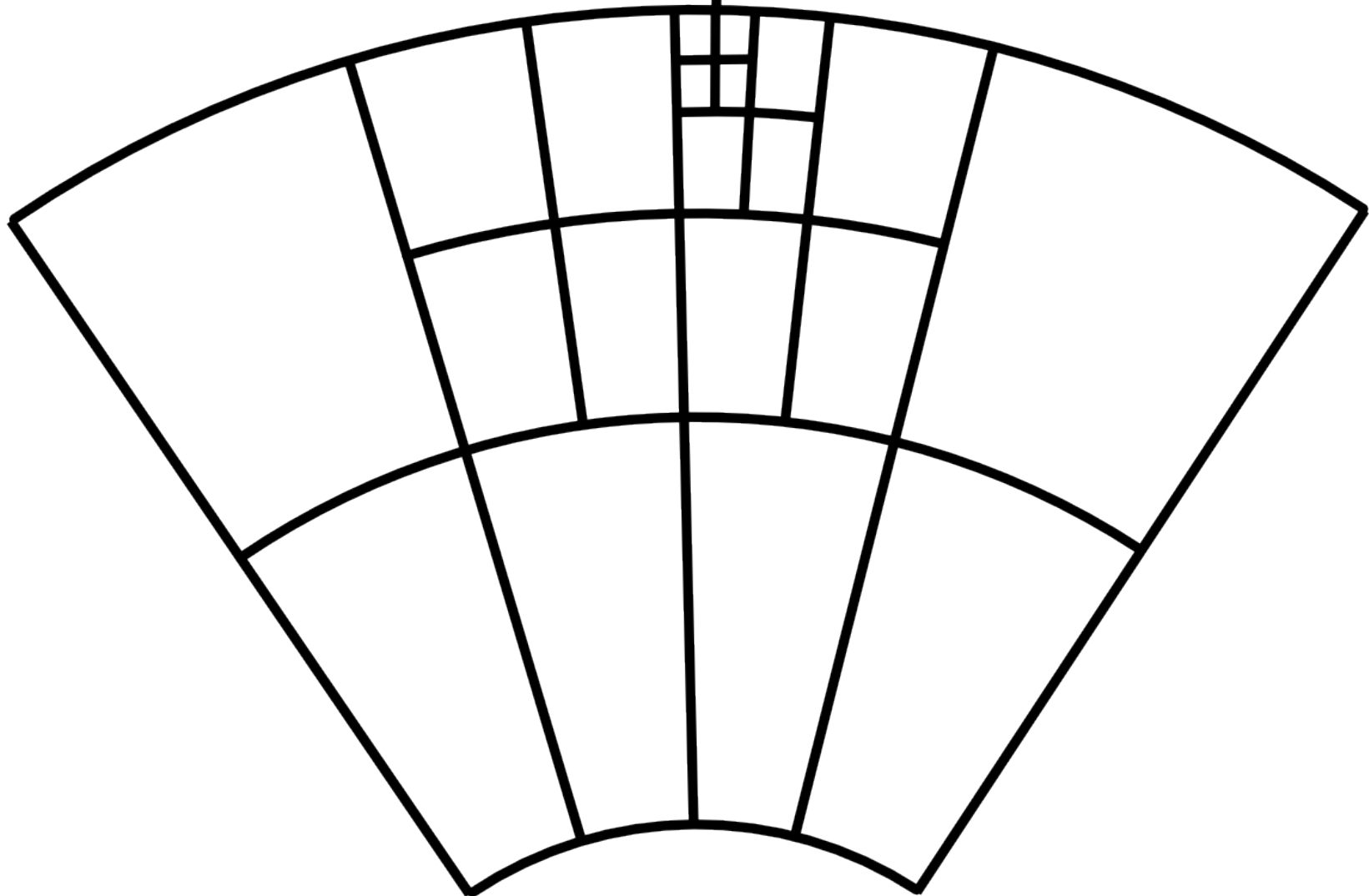


L = maior dimensão

P

d

Até $d/L > \text{limite}$
para todos



Determinação do “limite”

- Quantificar o erro da QGL
- Com relação a distância
- Necessário saber o valor “correto”
- Adotei o prisma retangular reto
- Mesma massa do tesseróide
- Efeito parecido:
 - Tesseróides pequenos (< 10 km)
 - No equador
- Solução analítica de Nagy et al. (2000)

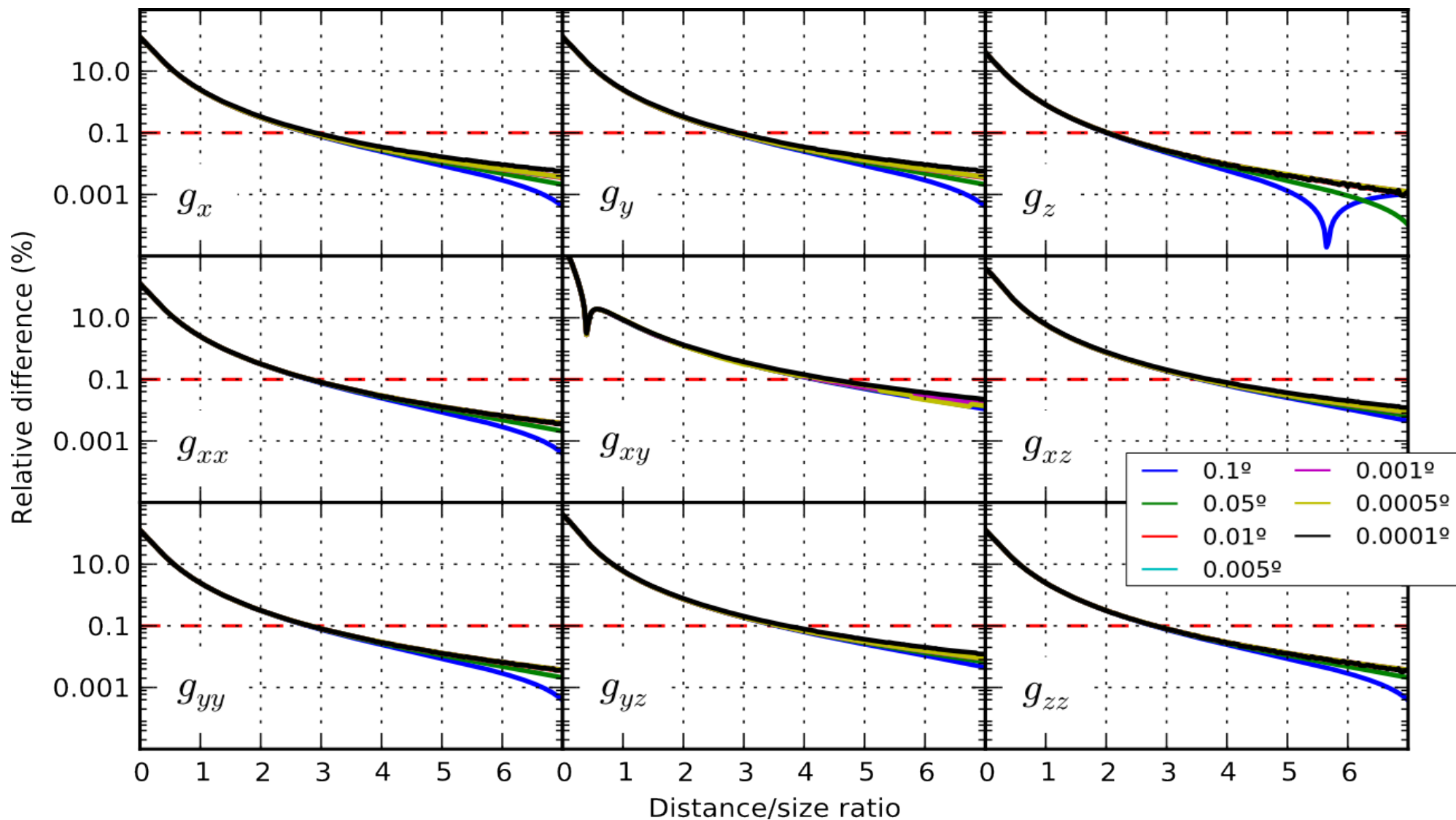
Comparação com prismas

- Achar d/L que torne **erro relativo** $<$ tolerância
- Escolhi tolerância = 0.1%
- Calculei efeito de tesseróide e prisma
- No equador
- V , g e gradientes
- Linha radial a $\text{lon}=0.01*L$ $\text{lat}=0.01*L$
 - Algumas componentes = 0 no centro do tesseróide
- Altitude de $0.01*L$ a $7*L$

Comparação com prismas

- d/L limite não deve depender do tamanho
- Repete cálculo para vários tamanhos
- De 0.0001° a 0.1°

Resultados: Razão d/L

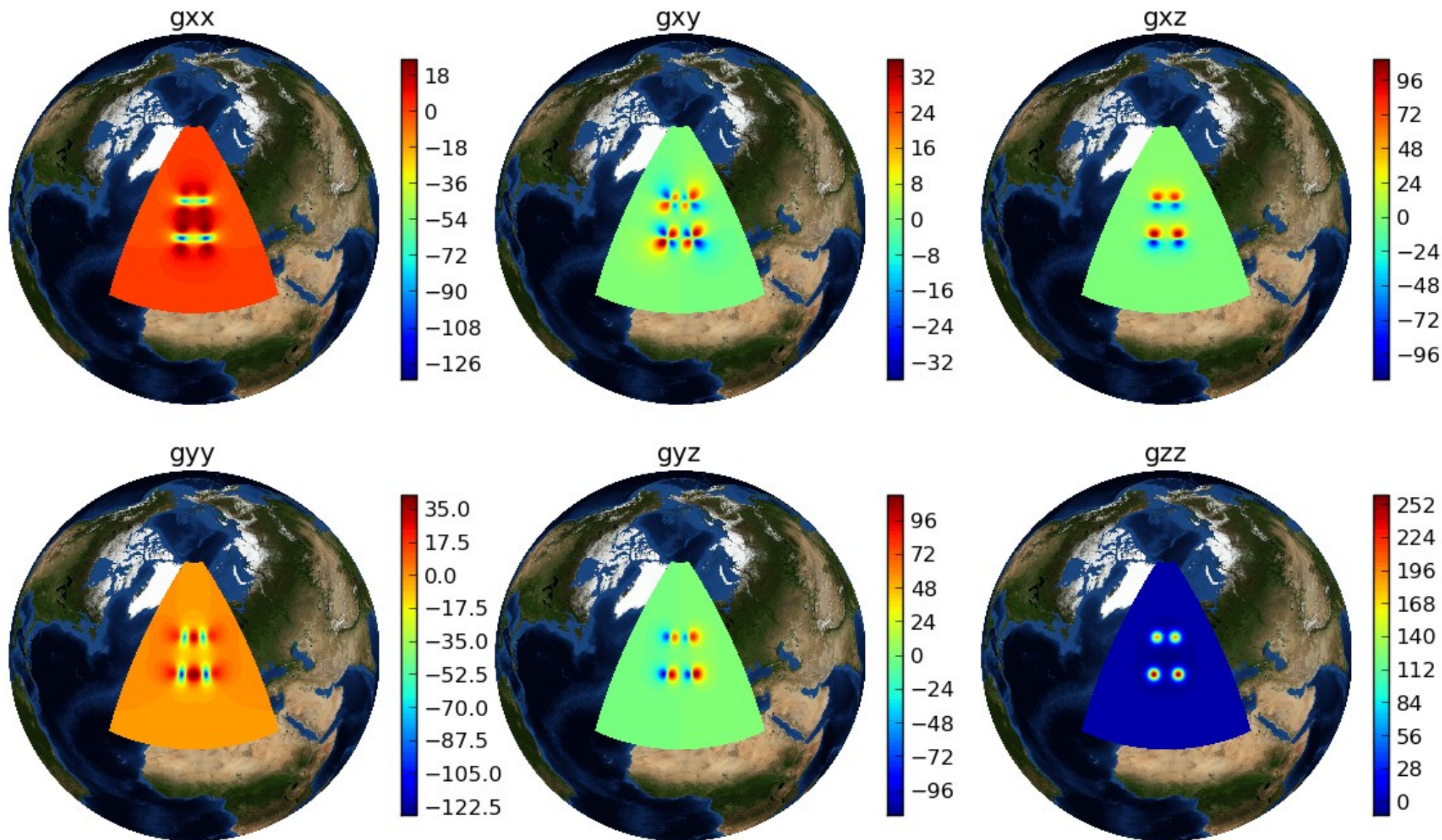


Resultados: Razão d/L

- Diferente para componentes de \mathbf{g} e gradientes
- Para precisão de 0.1% distância mínima deve ser maior que regra de Ku (1977)
- Regra de Ku (1977) gera erro de 10% em g_{xy} , g_{xz} e g_{yz}
- Não depende do tamanho do tesseroide

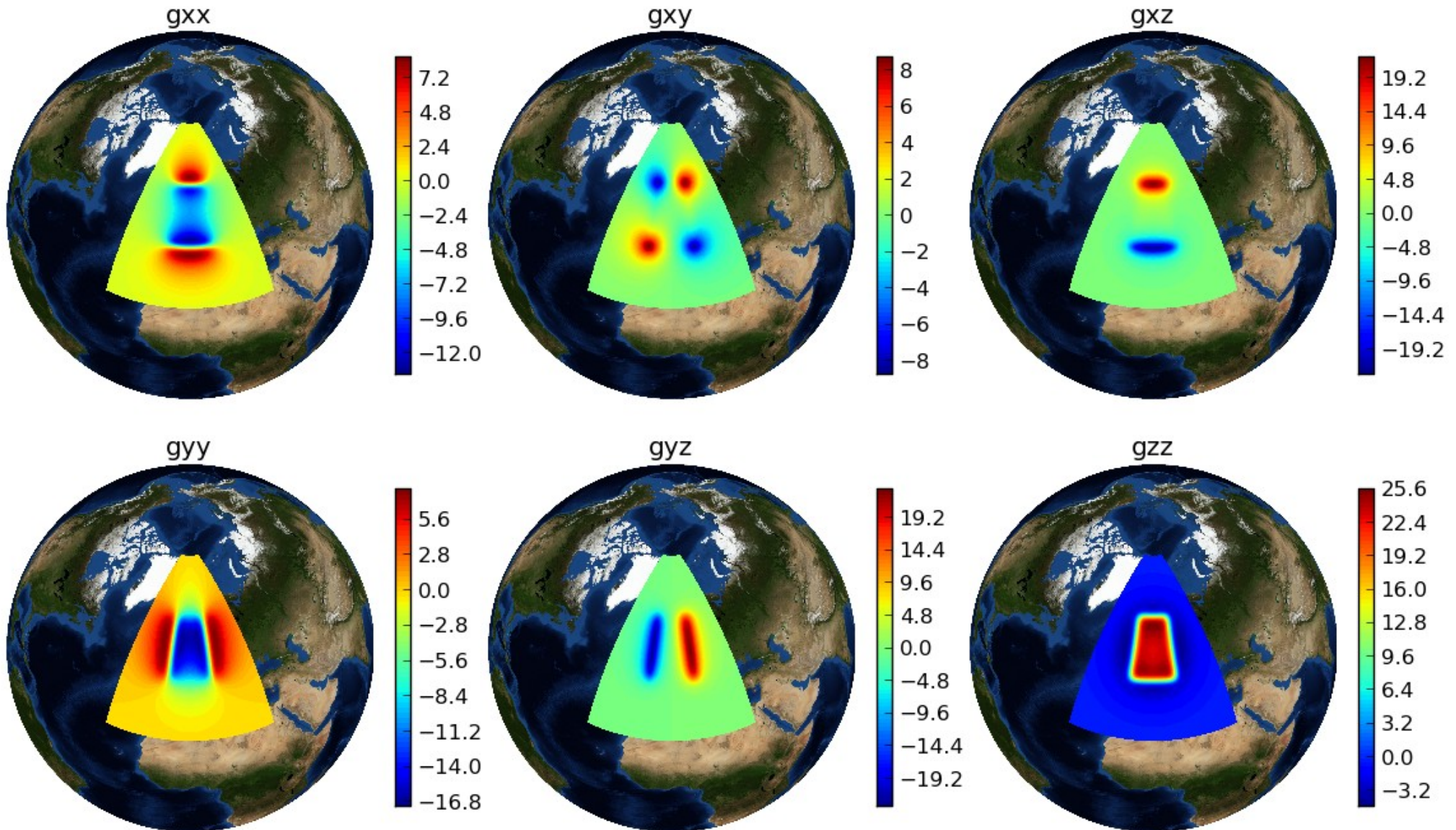
Sem divisão recursiva

(ordem 2 a 250 km de altitude)



Tesseroide de 20° x 20° x 50km

Com divisão recursiva



Tesseroide de 20° x 20° x 50km

Implementação

Tesseroids v1.1

- Programas código aberto (Licença BSD)
- Calculam usando o método descrito
- Com a razão d/L determinada
- + efeito de prismas retangulares retos
 - coord. cartesianas e esféricas
- + geração de modelos
 - Interface e camadas
- www.fatiando.org/software/tesseroids

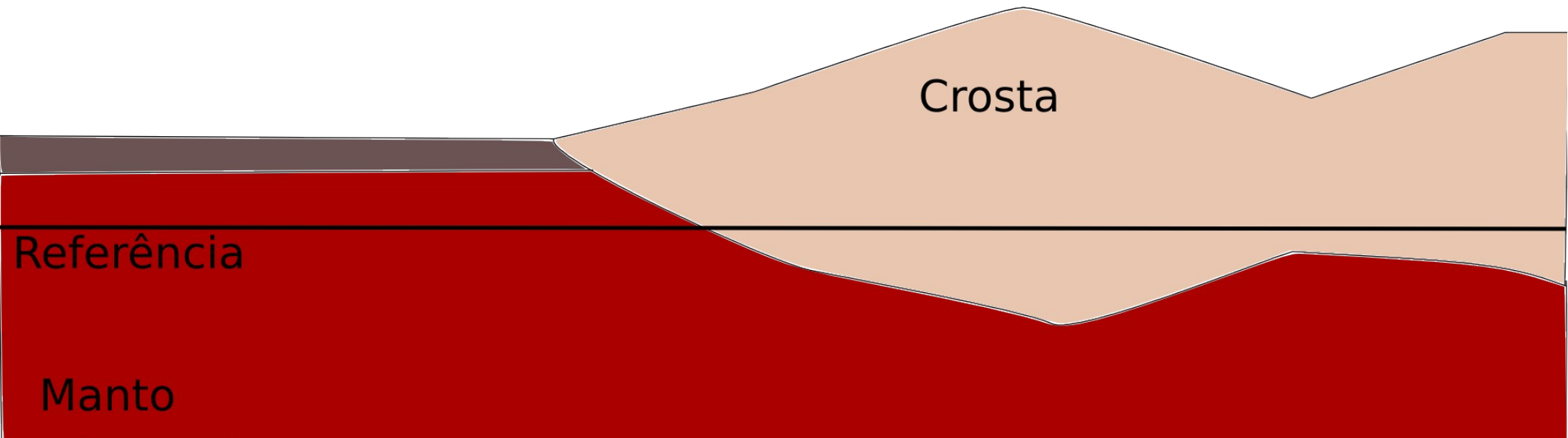
Aplicação

Aplicação

- Calcular anomalia Bouguer residual
- Região dos Alpes
- Dados ar-livre do GOCE (d/o 250)
- Correção de terreno
 - DEM ETOPO1 (0.05° resolução)
 - Densidade:
 - Continentes 2.67 g/cm^3
 - Oceanos $1.03 - 2.67 = -1.64 \text{ g/cm}^3$

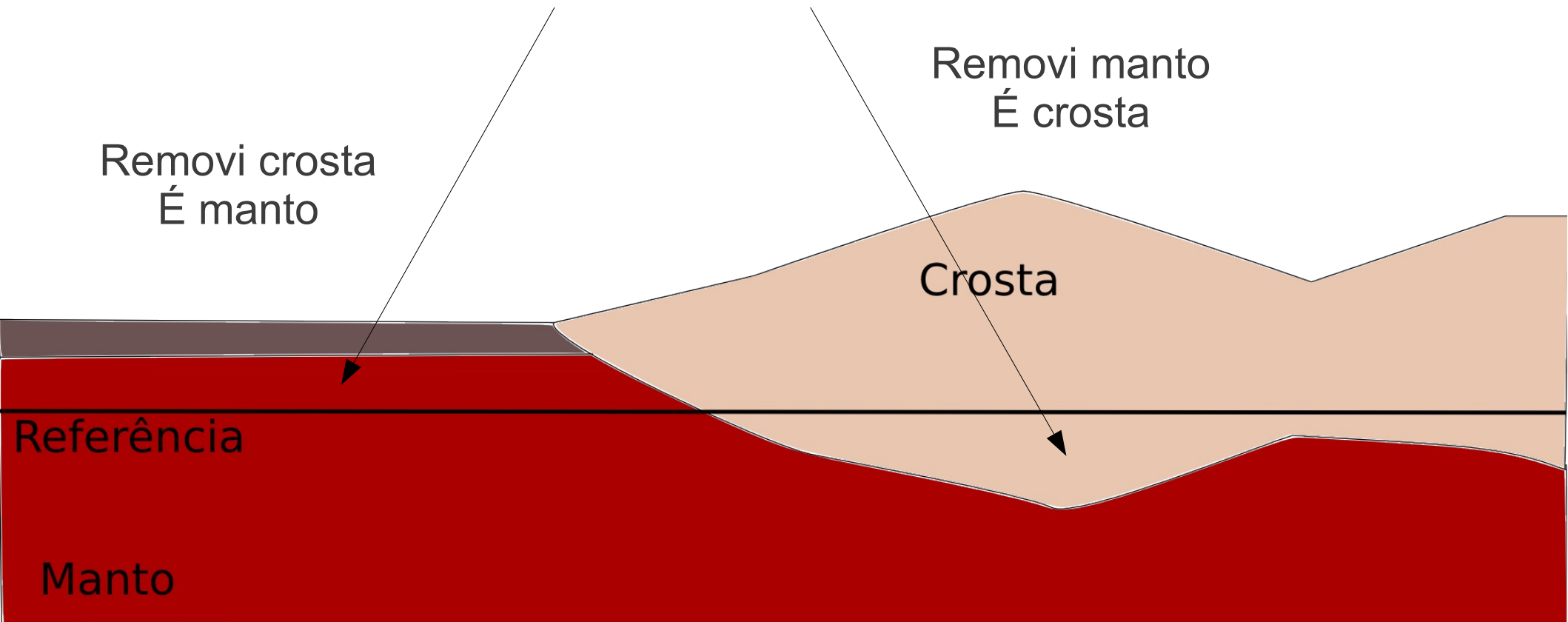
Efeito da Moho

- Medidas = efeito de tudo
- Anomalia da gravidade = medidas – modelo de referência
- Anomalia Bouguer = anomalia – efeito da distância – efeito acima do elipsoide (topografia)



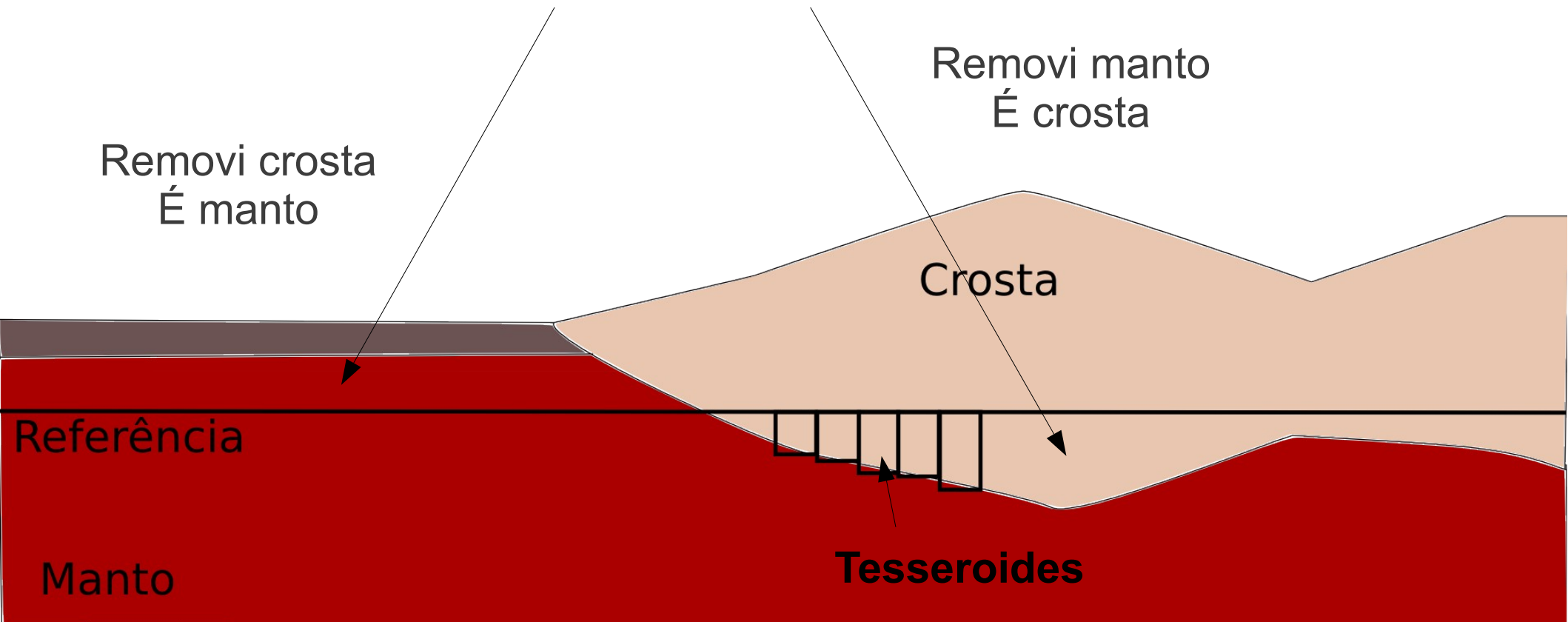
Efeito da Moho

- O que falta:
 - Efeito de massa extra na crosta
 - Removido a menos ou a mais no modelo de referência



Efeito da Moho

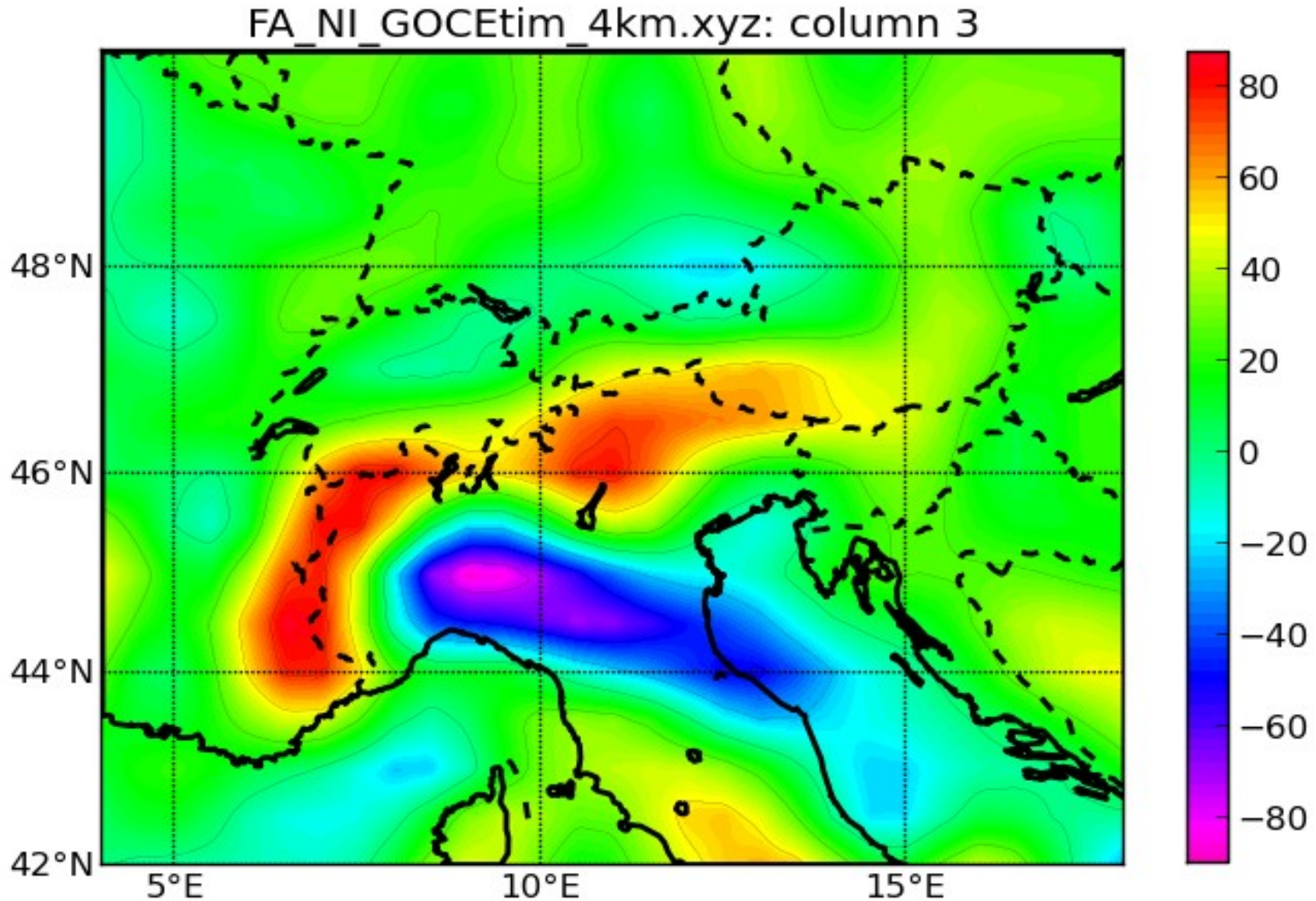
- O que falta:
 - Efeito de massa extra na crosta
 - Removido a menos ou a mais no modelo de referência



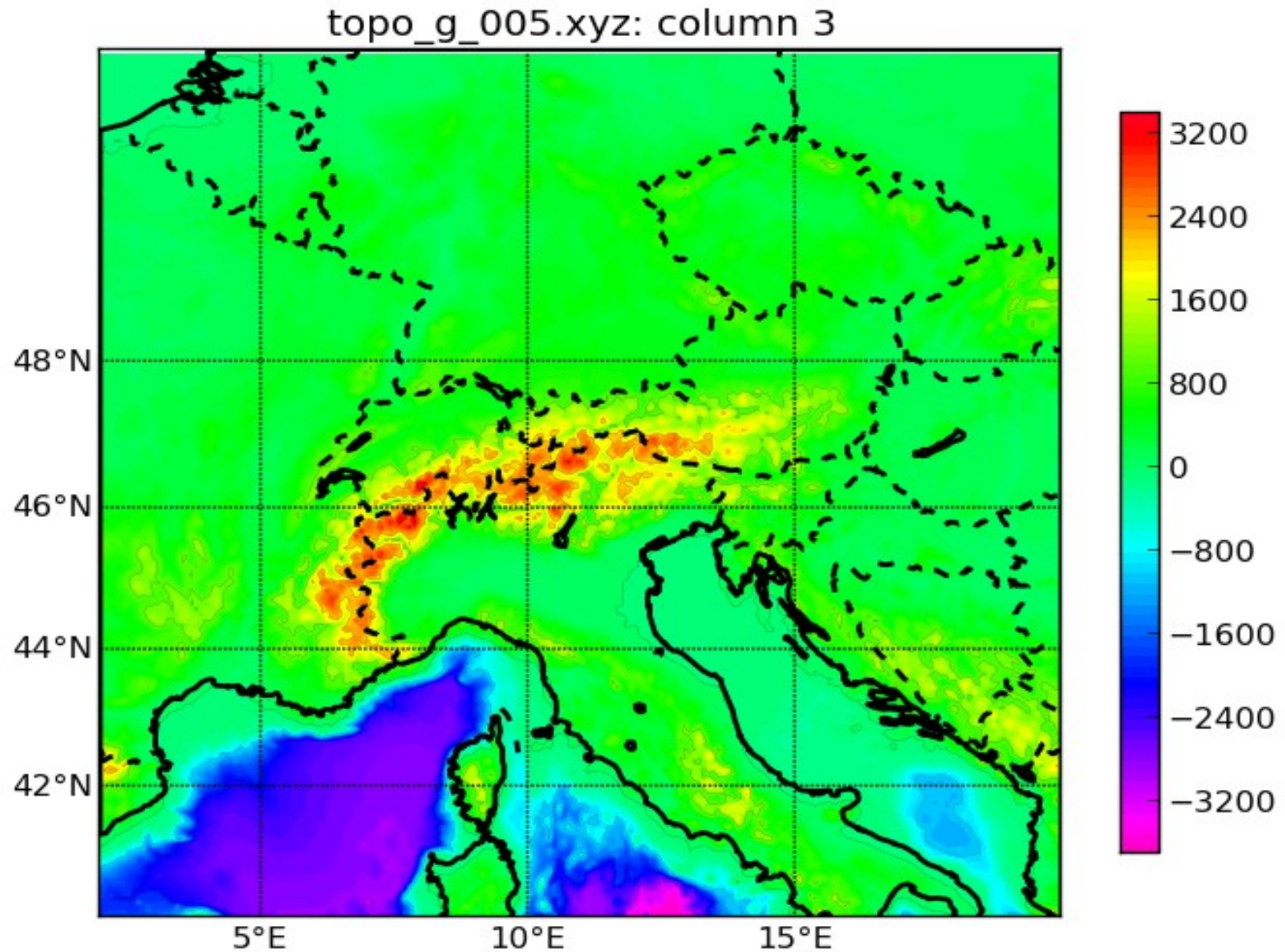
Efeito da Moho

- Valores de referência do PREM:
 - Moho de referência = 35 km
 - Contraste de densidade = $3.2 - 2.9 = 0.3 \text{ g/cm}^3$

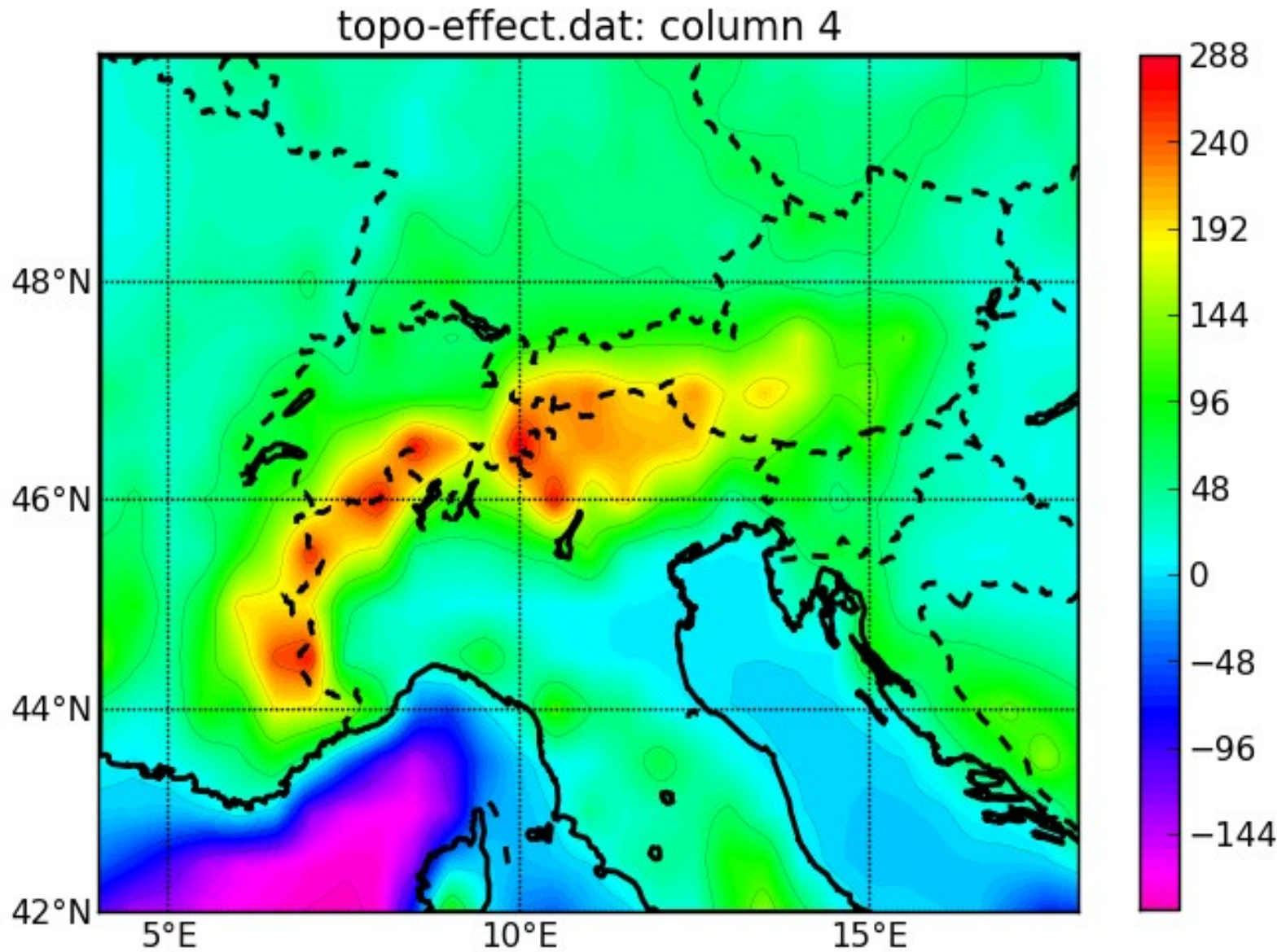
Anomalia ar-livre (GOCE d/o 250)



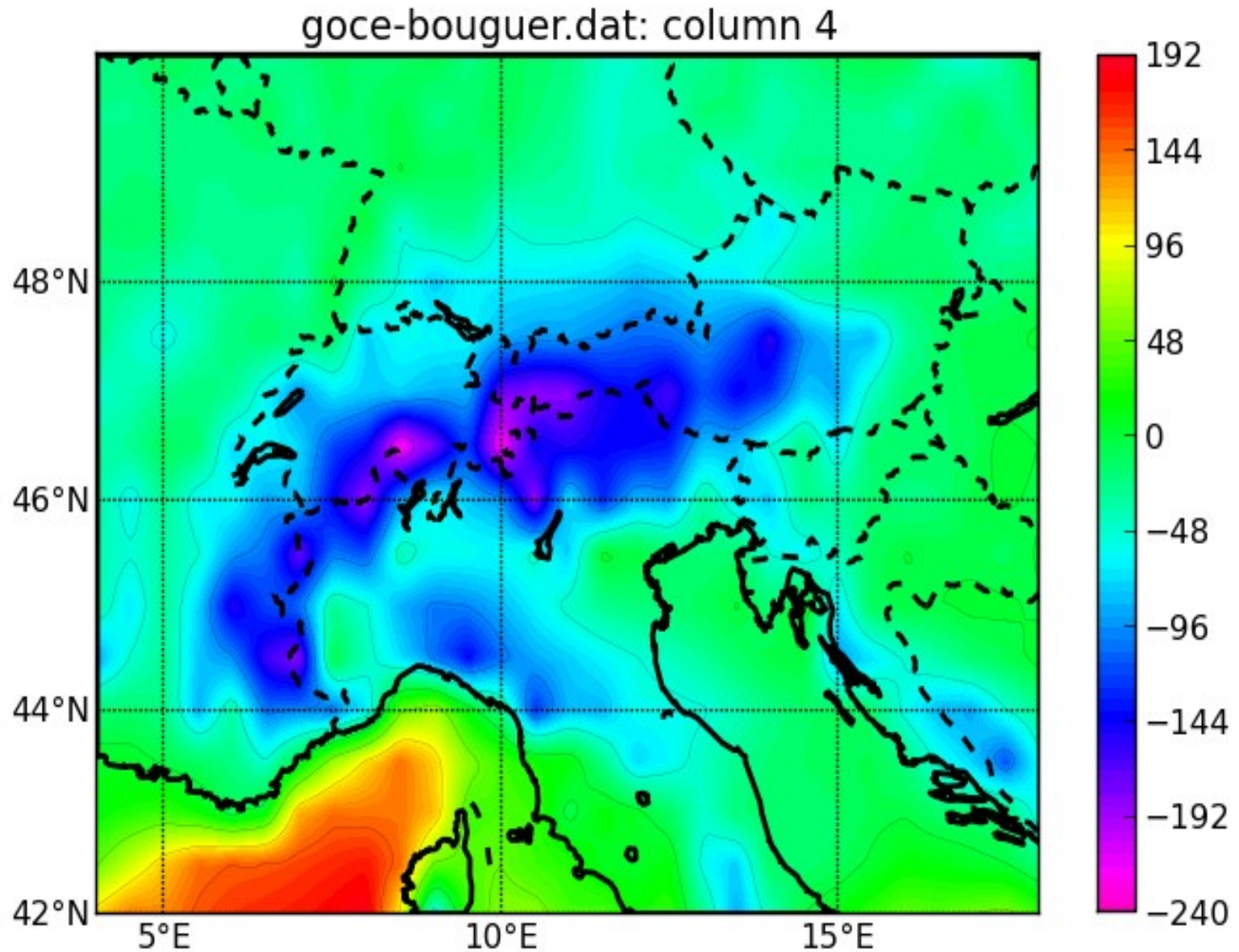
Modelo topográfico



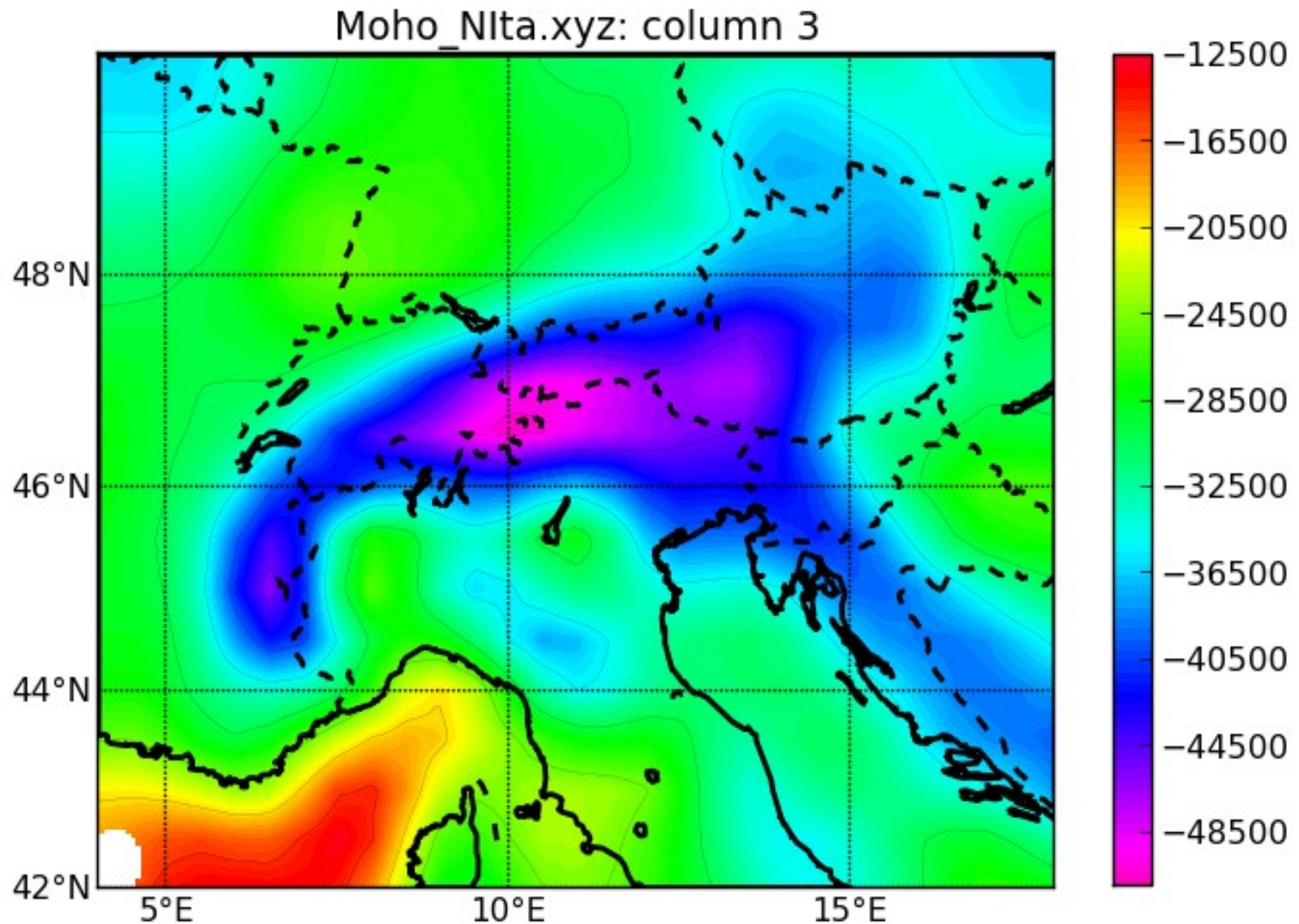
Efeito da topografia



Anomalia Bouguer

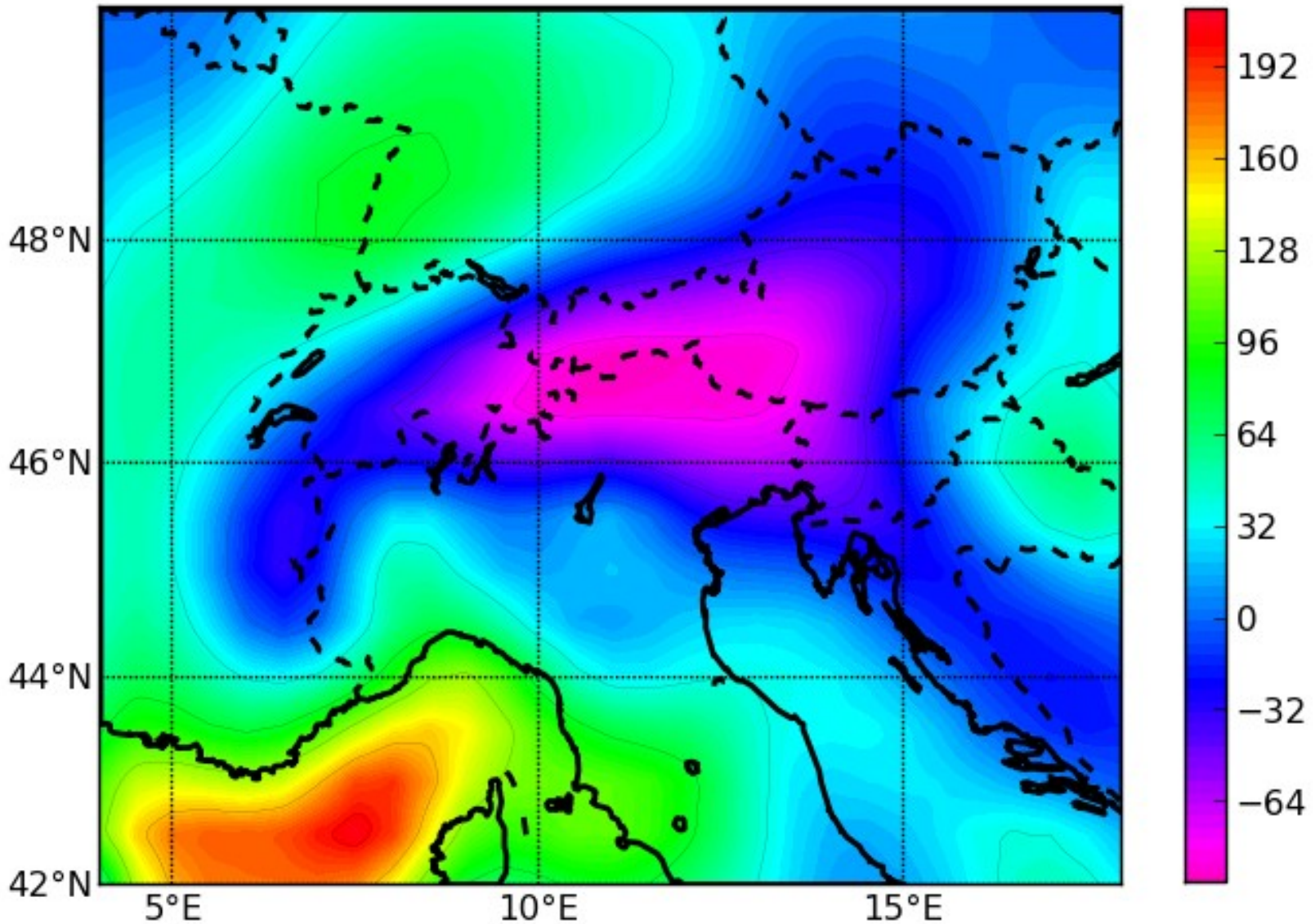


Moho (Grad et al., 2009)

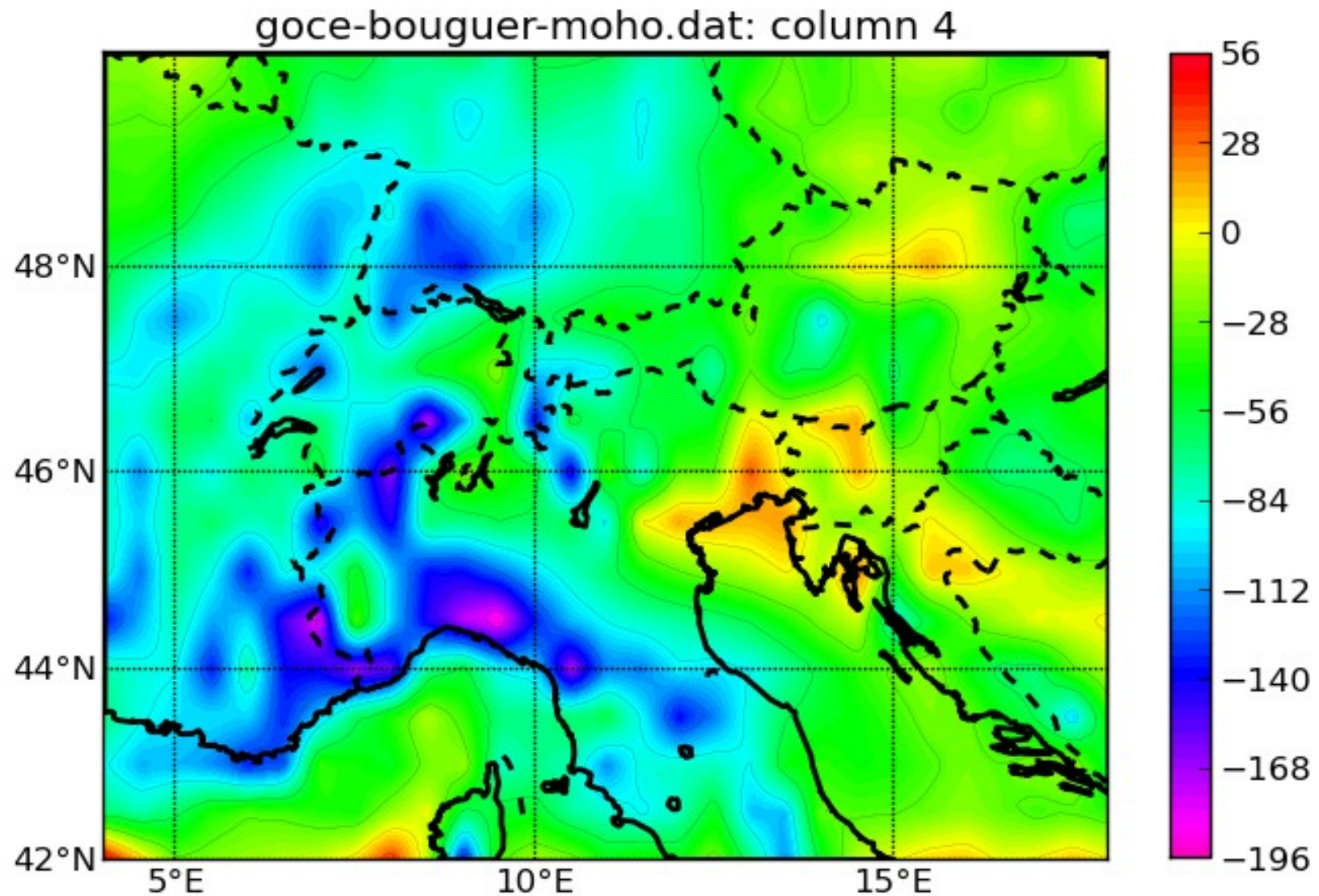


Efeito da Moho

moho-effect.dat: column 4

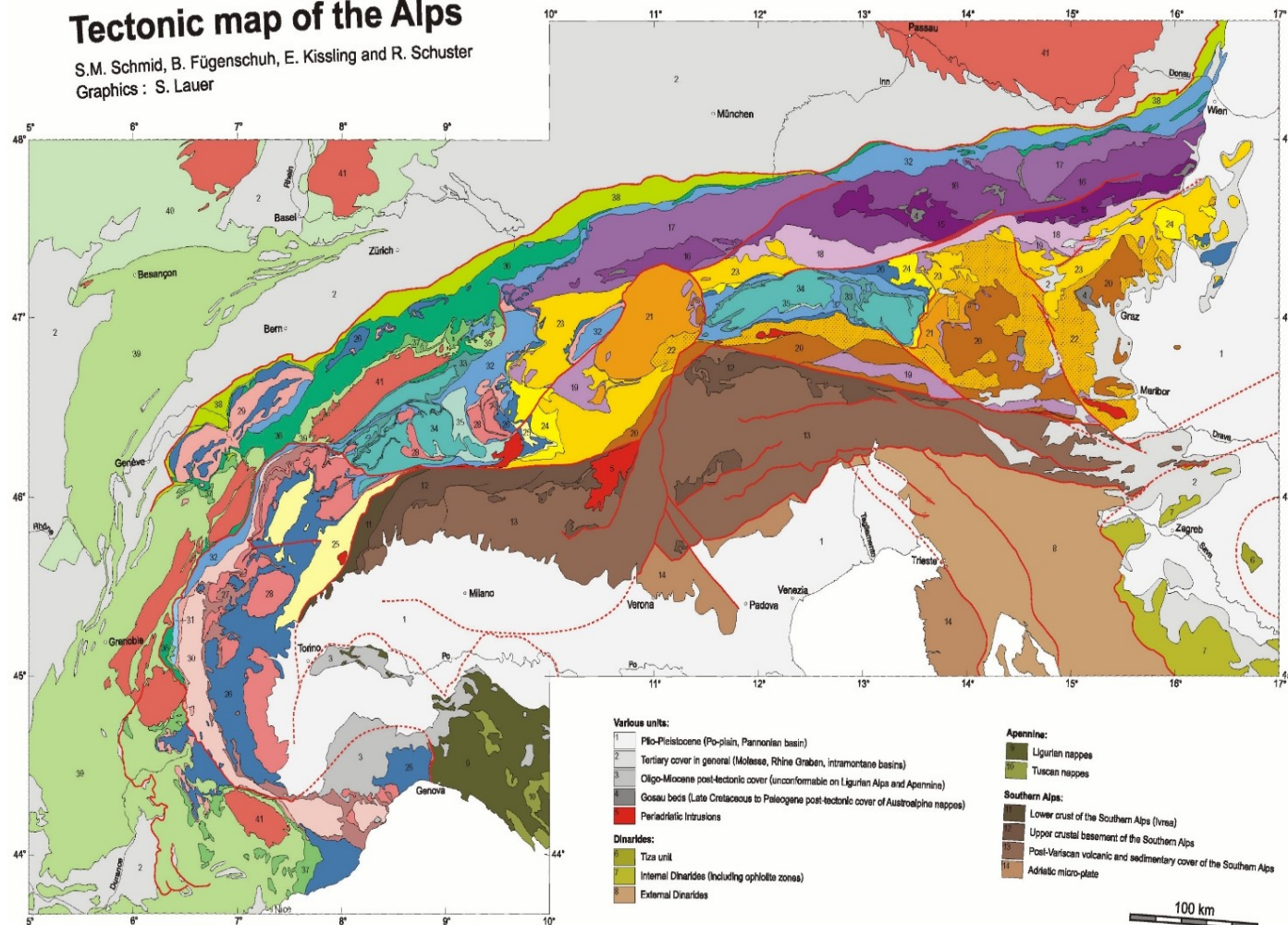


Anomalia Bouguer residual



Tectonic map of the Alps

S.M. Schmid, B. Fügenschuh, E. Kissling and R. Schuster
Graphics : S. Lauer



- Various units:**
- 1 Plio-Pleistocene (Po-plain, Pannonic basin)
 - 2 Tertiary cover in general (Molasse, Rhine Graben, intramontane basins)
 - 3 Oligo-Miocene post-tectonic cover (unconformable on Ligurian Alps and Apennine)
 - 4 Gosau basins (Late Cretaceous to Paleogene post-tectonic cover of Austroalpine nappes)
 - 5 Periadriatic intrusions
- Dinarides:**
- 6 Tiza unit
 - 7 Internal Dinarides (including ophiolite zones)
 - 8 External Dinarides

- Apennine:**
- 9 Ligurian nappes
 - 10 Tuscan nappes
- Southern Alps:**
- 11 Lower crust of the Southern Alps (Ivrea)
 - 12 Upper crustal basement of the Southern Alps
 - 13 Post-Variscan volcanic and sedimentary cover of the Southern Alps
 - 14 Adria micro-plate

Austroalpine Nappes:

- Northern Calcareous Alps and Grauwackenzone (Upper Austroalpine):**
- 15 Juvenic nappes (Mesozoic cover)
 - 16 Tirolan nappes (Mesozoic cover)
 - 17 Bavarian nappes (Mesozoic cover)
 - 18 Grauwackenzone (Paleozoic, stratigraphic base of Tirolan nappes)

Upper Austroalpine basement nappes:

- 19 Mesozoic cover of Upper Austroalpine basement nappes
- 20 Drauzug-Gurktal nappe system (Tonale series, Stainisch nappe, basement of Drauzug, Gurktal nappe, Graz Paleozoic)
- 21 Ötztal-Bündschuh nappe system (Ötztal and Bündschuh nappes)
- 22 Korolpe-Wölz high pressure nappe system (Schneeberggrub, Mühlstein, Wölz, Saualpe-Koralpe crystalline units)
- 23 Silvretta-Stockau nappe system (Campo-Sevanna-Silvretta nappes, Innsbrucker Quarzphyllit, Schladming, Seckau, Semmering nappes)

Lower Austroalpine nappes:

- 24 Lower Austroalpine nappes (Ela, Enn-Bernina nappes, Radstätter Tauern, Wechsel nappe)
- 25 Nappes derived from Magna-Sesia fragment (Magna-Sella, Sesia-Dent Blanche nappes)

Penninic nappes:

- Upper Penninic nappes (Piedmont-Liguria ocean):**
- 26 South-Penninic ophiolites, Bündnerschiefer or Schistes Lustrés, Nappes Supérieures des Préalpes, Helminthoid flysch and Matrei mélange
- Middle Penninic nappes (Briançonnais terrane):**
- 27 Sedimentary cover of Middle Penninic basement nappes
 - 28 Middle Penninic basement nappes
 - 29 Detached Middle Penninic cover nappes ("Sub-Briançonnais" and "Briançonnais")
 - 30 Permo-Carboniferous sediments (Zone Houillière) and their Mesozoic cover ("Briançonnais")
- Lower Penninic nappes (Valais ocean):**
- 31 Tertiary flysch sealing Lower Penninic accretionary prism (Cheval Noir Flysch)
 - 32 North-Penninic ophiolites and Bündnerschiefer (including Rhododanubian flysch)

Sub-Penninic nappes (distal European margin):

- 33 Mesozoic cover of Sub-Penninic basement nappes (including cover of "Gotthard Massif")
- 34 Non-eclogitic Sub-Penninic basement nappes (including "Gotthard Massif")
- 35 Eclogitic Sub-Penninic basement units

Northern Alpine foreland and Helvetic nappes:

- 36 Helvetic and Ultrahelvetic nappes (including Combeynot and Tavetsch "Massifs")
- 37 Helvetic flysch
- 38 Subalpine molasse
- 39 Deformed autochthonous and parautochthonous pre-Tertiary cover of the northern Alpine foreland (including the Jura Mountains)
- 40 Undeformed pre-Tertiary cover of the Northern Alpine foreland
- 41 External massifs of the Alps and Variscan basement of the Northern Alpine foreland

Plate 1 Tectonic map of the Alps

Anomalia Bouguer residual

- Não possui correlação com a Moho nem com o terreno
 - Estruturas internas da crosta?
- Anomalias negativas a oeste e positivas a leste
 - Províncias tectônicas diferentes a oeste e a leste?

Conclusões

Conclusões

- Modelagem em coord. esféricas: tesseroides
- Automatizar com método similar a Li et al. (2011)
 - Ordem 2
 - Divisão recursiva
- Regra da distância deve ser alterada
 - Para obter erro de 0.1%
 - Diferente para cada componente
- Regular distância com erro desejado
- Inversão requer modelo direto preciso
- Viabiliza inversão 3D em coord. esféricas

Passado, presente e futuro

Passado

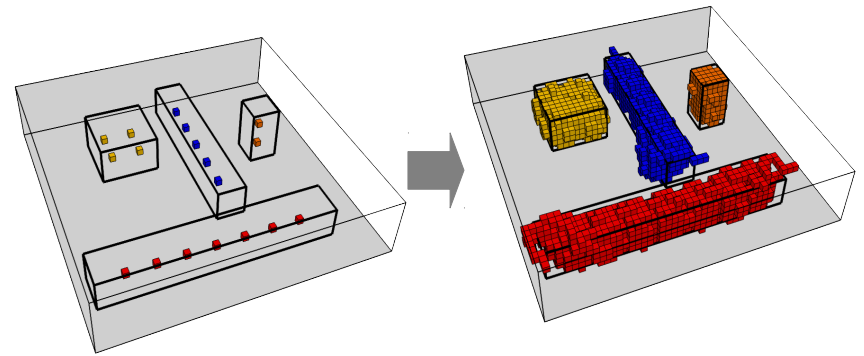
- Nov 2011 – Set 2012:
 - Disciplinas
 - Modelagem direta
 - Revisão do paper mestrado (publicado em Junho)
 - Resumos para:
 - IAG Gravity field (visita a Carla Braitenberg)
 - SEG Las Vegas (continuação do mestrado)
 - SBGf (continuação do mestrado)

Presente

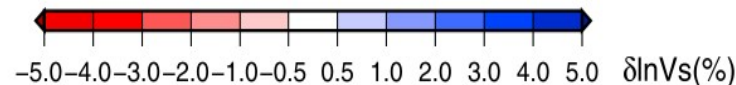
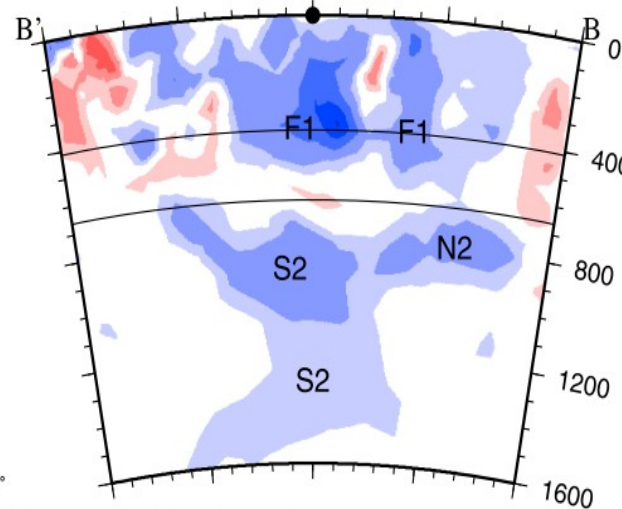
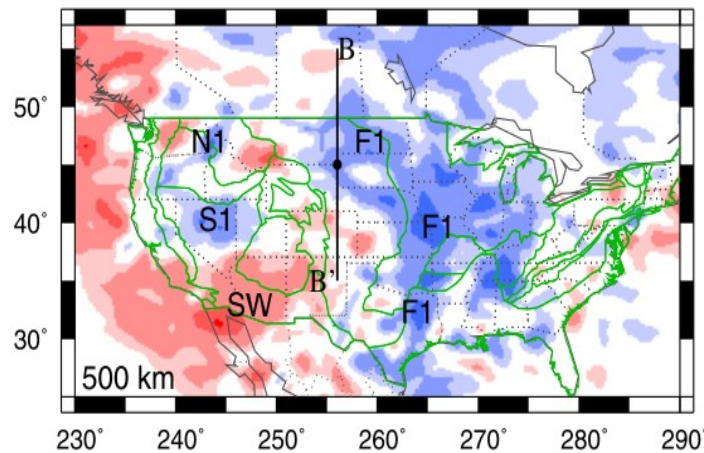
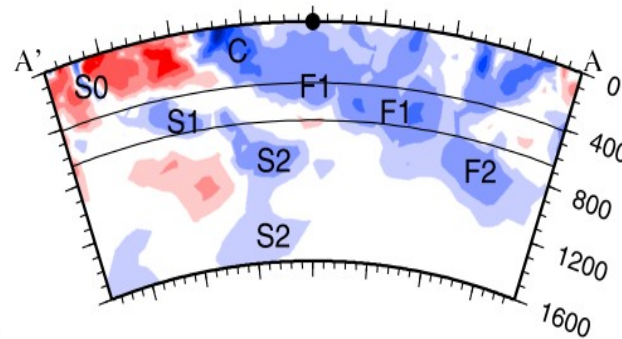
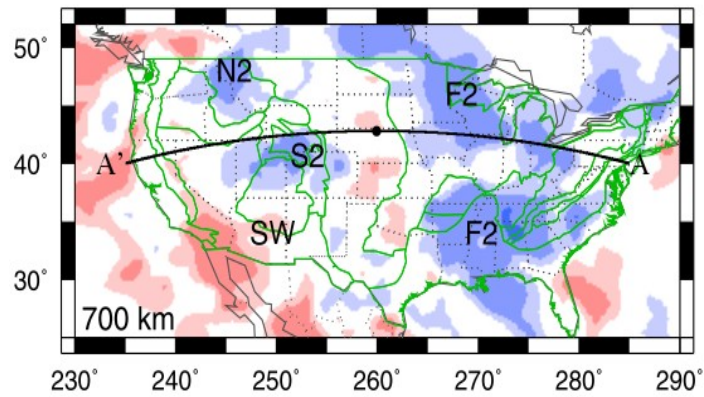
- Escrita do artigo sobre modelagem direta
 - Colaboração com Carla Braitenberg
 - Submeter para GJI
- Colaboração em 2 artigos
- Preparação para IAG (Outubro), SEG e SBGf (Novembro)

Futuro

- 2013
 - Adaptar inversão com sementes (mestrado) para tesseroides
 - Testes e aplicações
 - Escrita e submissão do artigo
- $2013 < t < 2014$
 - Doutorado sanduiche
- 2014
 - Elaborar inversão de interfaces (Moho) com tesseroides
 - Vincular com isostasia e modelos anteriores
 - Testes e aplicações
 - Escrita do artigo



Testar modelos tomográficos



- Usar para selecionar sementes
- É capaz de ajustar dados gravimétricos?
- Se não, como deveria ser para ajustar?

Referencias

- Asgharzadeh, M. F., R. R. B. von Frese, H. R. Kim, T. E. Leftwich, and J. W. Kim (2007), Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre quadrature integration, *Geophysical Journal International*, 169(1), 1–11.
- Grad, M., T. Tiira, and E. W. Group (2009), The Moho depth map of the European Plate, *Geophysical Journal International*, 176(1), 279–292, doi:10.1111/j.1365-246X.2008.03919.x.
- Grombein, T., K. Seitz, and B. Heck (2010), Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satellitengradiometriemission GOCE, *KIT Scientific Reports* 7547.
- Heck, B., and K. Seitz (2006), A comparison of the tesseroïd, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling, *Journal of Geodesy*, 81(2), 121–136.
- Ku, C. C. (1977), A direct computation of gravity and magnetic anomalies caused by 2- and 3-dimensional bodies of arbitrary shape and arbitrary magnetic polarization by equivalent-point method and a simplified cubic spline, *Geophysics*, 42(3), 610.
- Li, Z., T. Hao, Y. Xu, and Y. Xu (2011), An efficient and adaptive approach for modeling gravity effects in spherical coordinates, *Journal of Applied Geophysics*, 73(3), 221–231.
- Nagy, D., G. Papp, and J. Benedek (2000), The gravitational potential and its derivatives for the prism, *Journal of Geodesy*, 74(7-8), 552–560, doi:10.1007/s001900000116.
- Smith, D. A., D. S. Robertson, and D. G. Milbert (2001), Gravitational attraction of local crustal masses in spherical coordinates, *Journal of Geodesy*, 74(11-12), 783–795.
- Tscherning, C. C. (1976), Computation of the second-order derivatives of the normal potential based on the representation by a Legendre series, *Manuscripta Geodaetica*, 1, 71–92.
- Wild-Pfeiffer, F. (2008), A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry, *Journal of Geodesy*, 82(10), 637–653.