Analyse non linéaire et problèmes inverses

Problèmes inverses liés à la cristallisation de polymères.

François Deslandes
Génie Mathématique 5ème année

A l'attention de M. Caputo

25 février 2014

Table des matières

1 Modèle de base et problème d'identification

Le problème modélisant la cristallisation de polymères est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial T}{\partial t} & = & D\frac{\partial^2 T}{dx^2} + L\frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\widetilde{G}(T)(1-\xi)}) & = & \frac{\partial}{dx}(\frac{1}{\widetilde{G}(T)(1-\xi)}) + 2\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{N}(T)) \end{array}\right.$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} T(x,0) & = & T^0(x) \\ \xi(x,0) & = & 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,0) & = & 0 \end{array}\right.$$

et les conditions aux bords :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial T}{\partial n}(x,t) & = & \alpha(T(x,t) - T^1(x,t)) & x \in \partial\Omega \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + \widetilde{G}(T)\frac{\partial T}{\partial n}(x,t) & = & 0 & x \in \partial\Omega \end{array}\right.$$

On cherche à identifier $\widetilde{N}(T)$,le taux de nucléation, connaissant $\widetilde{G}(T)$, le taux de croissance radial, $\xi(x,t_*)$, le degré de cristallisation, et T la température sur les bords du domaine.

2 Modèle simplifié et problème d'identification

Par symétrie et avec des changements de variables, le problème devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t & = & Du_{xx} + Le^{-v}v_t \\ v_t & = & a(u)w \\ w_t & = & (a(u)v_x)_x + b(u)_t \end{array}\right.$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u|_{t=0} & = & u^0 \\ v|_{t=0} & = & 0 \\ w|_{t=0} & = & 0 \end{array}\right.$$

et les conditions aux bords :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_x(0,t) & = & -\alpha(u(0,t) - u^1(0,t)) \\ w(0,t) - v_x(0,t) & = & 0 \\ u_x(1,t) & = & 0 \\ v_x(1,t) & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans ce problème, on cherche $b(u)$, l'équivalent de $\widetilde{N}(T)$. Il peut être exprimé, avec l'opérateur non linéaire F, sous la forme suivante :

$$F(b) \quad = \quad (u_B^\delta, v_*^\delta)$$

Où u_B^δ et v_*^δ sont des mesures bruitées.

3 Méthode de résolution

Pour trouver $b(u)$, on utilise l'itération de Landweber.

$$b^{k+1} = b^k + \omega F'(b^k) * (F(b^k) - (u_B^\delta, v_*^\delta)$$

Où F' représente la dérivée de l'opérateur F et $F*$ son adjoint.

Par la suite, un algorithme itératif basé en partie sur le calcul de l'adjoint de F sera donnée pour trouver b à partir d'un choix arbiraire de b^0.

4 Ma question

On veut calculer $F'(b)$.

Dans un premier temps, l'opérateur F est séparé en : $F = \Psi \circ \Phi$. L'opérateur Ψ se charge de conditions limites et est linéaire, ce qui permet de dire que : $F' = \Psi \circ \Phi'$. On suppose que Φ' existe. A partir de ce moment, je ne comprend plus. Il est dit que par linéarisation directe on peut conclure que la dérivée $(U, V, W) := \Phi'(b)h$. satisfait le système suivant : [1]

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U_t & = & DU_{xx} + Le^{-v}(v_t V + V_t) \\ V_t & = & a(u)W + a'(u)Uw \\ W_t & = & (a(u)V_x)_x + (a'(u)Uv_x)_x + (b'(u)U)_t + h(u)_t v \end{array} \right.$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u|_{t=0} & = & 0 \\ v|_{t=0} & = & 0 \\ w|_{t=0} & = & 0 \end{array} \right.$$

et les conditions aux bords :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \alpha U + U_x & = & 0 & x = 0 \\ W - V_x & = & 0 & x = 0 \\ U_x & = & 0 & x = 1 \\ V_x & = & 0 & x = 1 \end{array} \right.$$

Je ne comprend pas comment il obtient les systèmes d'équations (il utilise clairement les équations de départ en dérivant mais en dérivant quoi et comment ?). Je ne comprend pas non plus à quoi correspond le h(u).

Il calcule ensuite l'adjoint $F'*$ en séparant l'opérateur F'. **Il obtient à nouveau un système d'équations issu du modèle simplifié. Je suppose que c'est la même technique qui est employée ?** [2]

1. Ce sont les équations (2.4-7)
2. Ce sont les équations (2.11-14)