

CHƯƠNG 1**PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****BÀI 1****PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****1. Phương trình tích**

Để giải phương trình $(ax + b)(cx + d) = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$) ta có thể làm như sau:

- **Bước 1:** Giải hai phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$
- **Bước 2:** Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình vừa giải được ở bước 1.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

• Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là **điều kiện xác định của phương trình**.

- **Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:**

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

DẠNG 1

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CƠ BẢN

Để giải phương trình $(ax + b)(cx + d) = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$) ta có thể làm như sau:

- **Bước 1:** Giải hai phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$
- **Bước 2:** Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình vừa giải được ở bước 1.

Bài 1. Giải các phương trình

a) $(x - 3)(3x + 2) = 0$

b) $(x^2 + 2024)(6x - 3) = 0$

c) $\left(\frac{3}{4}x - 2\right)\left(\frac{5}{3}x + 1\right) = 0$

d) $2(x + 4)(2x - 3) = 0$

Bài 2. Giải các phương trình

a) $(x^2 - 9)(4 - x) = 0$

b) $(5x + 3)\left(\frac{3x + 11}{4} - \frac{x - 7}{12}\right) = 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $(x - 3)(2x + 1) = 0$

b) $(5x - 7)(2x - 6) = 0$

c) $(4x - 10)(24 + 5x) = 0$

d) $(3x - 2)(x + 1) = 0$

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $(x - 5)(3 - 2x)(3x + 4) = 0$

e) $(2x - 1)(3x + 2)(5 - x) = 0$

c) $(x + 3)(2x + 4)(x - 5) = 0$

d) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x - 6) = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $x^2(7x - 3) = 0$

b) $(2x + 1)(-x^2 - 2) = 0$

c) $(x^2 + 4)(2x - 3) = 0$

d) $(x + 6)\left(\frac{x^2 + 3}{2} - 1\right) = 0$

e) $(x^2 + x + 1)(6 - 2x) = 0$

f) $(8x - 4)(-x^2 + 2x - 2) = 0$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $(x + 2)\left(\frac{x + 5}{2} - \frac{3 - 2x}{4}\right) = 0$

b) $(3 - 2x)\left(\frac{2x - 1}{2} + \frac{x + 3}{4}\right) = 0$

c) $(4x-10)\left[\frac{4x-3}{5}-\frac{2(x+3)}{7}\right]=0$

d) $(x^2+1)\left[\frac{3(3-x)}{8}+\frac{2(5-x)}{3}\right]=0$

e) $(-2x^2-5)\left(\frac{2x-1}{5}-\frac{x-2}{3}\right)=0$

f) $(2x^2+3)\left(\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3}-\frac{x+5}{6}\right)=0$

DẠNG 2**PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CƠ BẢN****Bài 7.** Giải các phương trình

a) $2x(3x-1)=(3x-1)$

b) $3(x-5)(x+2)=x^2-5x$

c) $(x-1)(2x+3)+2x=2$

d) $\frac{7-x}{2}+\frac{2}{3}(x-7)(x-3)=0$

Bài 8. Giải các phương trình:

a) $(x-3)^2=(2x+7)^2$

b) $2(x+2)^2-x^3-8=0$

c) $(x-1)(x^2+5x-2)-x^3+1=0$

d) $(x+2)(3-4x)=x^2+4x+4$

Bài 9. Giải các phương trình:

a) $x^2+7x+12=0$

b) $3x^2-5x+2=0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 10.** Giải các phương trình

a) $(x-2)^2-(2x+3)^2=0$

b) $(3-2x)^2+4x^2-9=0$

c) $(x+2)^3-9(x+2)=0$

d) $9(2x+1)^2-4(x+1)^2=0$

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a) $(2x-1)^2=49$

b) $(5x-3)^2-(4x-7)^2=0$

c) $(2x+7)^2=9(x+2)^2$

d) $(x+2)^2=9(x^2-4x+4)$

e) $4(2x+7)^2-9(x+3)^2=0$

f) $(5x^2-2x+10)^2=(3x^2+10x-8)^2$

Bài 12. Giải các phương trình

a) $(2x-1)^2+(x-3)(2x-1)=0$

b) $4(3x-2)+(2-3x)^3=0$

c) $(x-1)(x^2-9)=-x-3$

d) $(x+1)^2+2(x+1)+1=0$

Bài 13. Giải các phương trình sau:

a) $(x-2)(3x+5)=(2x-4)(x+1)$

b) $(2x+5)(x-4)=(x-5)(4-x)$

c) $9x^2-1=(3x+1)(2x-3)$

d) $2(9x^2+6x+1)=(3x+1)(x-2)$

e) $27x^2(x+3)-12(x^2+3x)=0$

f) $16x^2-8x+1=4(x+3)(4x-1)$

Bài 14. Giải phương trình

a) $3x^2-11x+6=0$

b) $-2x^2+5x-3=0$

c) $x^2+2x-3=0$

d) $x^2-4x-5=0$

Bài 15. Giải phương trình

a) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$

b) $x^4 - 8x^3 - 9x^2 = 0$

c) $x^3 - 4x^2 + 4 - x = 0$

d) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$

Bài 16. Giải các phương trình sau:

a) $(9x^2 - 4)(x + 1) = (3x + 2)(x^2 - 1)$

b) $(x - 1)^2 - 1 + x^2 = (1 - x)(x + 3)$

c) $(x^2 - 1)(x + 2)(x - 3) = (x - 1)(x^2 - 4)(x + 5)$

d) $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$

e) $x^3 - 7x + 6 = 0$

f) $x^4 - 4x^3 + 12x - 9 = 0$

g) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$

h) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

DẠNG 3
ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 17. Giải các phương trình:

a) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0.$

b) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24.$

Bài 18. Giải các phương trình:

a) $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24.$

b) $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6) = 180.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 19. Giải các phương trình sau:

a) $(2x+1)^2 - 2x - 1 = 2;$

b) $(x^2 - 3x)^2 + 5(x^2 - 3x) + 6 = 0;$

c) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x) - 2 = 0.$

d) $(5 - 2x)^2 + 4x - 10 = 8;$

e) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 1) = 3;$

f) $x(x-1)(x^2 - x + 1) - 6 = 0.$

Bài 20. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$

b) $(x^2 + 2x + 3)^2 - 9(x^2 + 2x + 3) + 18 = 0$

c) $(x-2)(x+2)(x^2 - 10) = 72$

d) $x(x+1)(x^2 + x + 1) = 42$

e) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) - 297 = 0$

f) $x^4 - 2x^2 - 144x - 1295 = 0$

CHỦ ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

• Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là **điều kiện xác định của phương trình**.

• Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 21. Giải phương trình

a) $\frac{4x - 8 + (4 - 2x)}{x^2 + 1} = 0$

b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$

c) $\frac{2x - 5}{x + 5} = 3$

d) $\frac{4}{x - 2} - 2 = 0$

Bài 22. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{7x + 7}{x - 1} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{1 + x} = \frac{1}{3 - 7x}$

c) $\frac{1}{x - 2} + 3 = \frac{3 - x}{x - 2}$

d) $\frac{14}{3x - 12} - \frac{2 + x}{x - 4} = \frac{3}{8 - 2x} - \frac{5}{6}$

Bài 23. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4}{x - 1} - \frac{5}{x - 2} = -3$

b) $\frac{12}{1 - 9x^2} = \frac{1 - 3x}{1 + 3x} - \frac{1 + 3x}{1 - 3x}$

c) $\frac{6x + 1}{x^2 - 7x + 10} + \frac{5}{x - 2} = \frac{3}{x - 5}$

d) $\frac{x + 5}{x^2 - 5x} - \frac{x + 25}{2x^2 - 50} = \frac{x - 5}{2x^2 + 10x}$

Bài 24. Tìm x sau cho biểu thức $\frac{2x - 9}{2x - 5} + \frac{3x}{3x - 2}$ có giá trị bằng 2.

Bài 25. Tìm x sau cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau, với

$$A = \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2; B = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

Bài 26. Tìm x sau cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau, với $A = x + \frac{1}{x}; B = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 27.** Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3}$

b) $\frac{2x-1}{5-3x} = 2$

c) $\frac{4x-5}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$

d) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{3x}{x+3} = 1$

e) $\frac{x^2-15x+1}{x+17} = x-2$

d) $\frac{x^2+6x-16}{x-2} = x+8$

Bài 28. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0$

c) $\frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-5}$

d) $\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$

e) $\frac{4}{x-1} = \frac{x}{x-2}$

f) $\frac{12x+1}{11x-4} + \frac{10x-4}{9} = \frac{20x+17}{18}$

Bài 29. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{11}{x} = \frac{9}{x+1} + \frac{2}{x-4}$

b) $\frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1}$

d) $1 + \frac{1}{2+x} = \frac{12}{x^3+8}$

e) $3x - \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{2-x}$

f) $\frac{x-1}{x-2} - 3 + x = \frac{1}{x-2}$

Bài 30. Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{6x-1}{3x+2}$ và $\frac{2x+5}{x-3}$ bằng nhau.**Bài 31.** Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3}$ và $\frac{-8}{(x-1)(x-3)}$ bằng nhau.**Bài 32.** Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$

b) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$

c) $\frac{3}{4(x-5)} + \frac{15}{50-2x^2} = \frac{7}{6x+30}$

d) $\frac{12x+1}{6x-2} - \frac{9x-5}{3x+1} = \frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$

e) $\frac{1}{x} - 2025 - \left(\frac{1}{x} - 2025 \right) (x^2 + 2024) = 0$

f) $\frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 + 2)$

Bài 33. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x-3} - \frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$

b) $\frac{1}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{5}{6-x^2-x}$

c) $\frac{4x}{x^2+4x+3} - 1 = 6 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \right)$

d) $\frac{2}{x+2} - \frac{2x^2+16}{x^3+8} = \frac{5}{x^2-2x+4}$

$$e) \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

$$f) \frac{x+4}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$$

Bài 34. *Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{8}{x-8} + \frac{11}{x-11} = \frac{9}{x-9} + \frac{10}{x-10}$$

$$b) \frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-6}$$

$$c) \frac{4}{x^2-3x+2} - \frac{3}{2x^2-6x+1} + 1 = 0$$

$$d) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{6}{x-6} + \frac{3}{x-3}$$

Bài 35. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

$$c) \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$$

Bài 36. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x^2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2}{x^2-2x+2} - \frac{4x^2-20}{x^4+4} = \frac{322}{65}$$

$$b) \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$$

$$c) \frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{5}{x^2+11x+24} + \frac{2}{x^2+18x+80} = \frac{9}{52}$$

$$d) \frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} + 6$$

CHỦ ĐỀ 3**GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH**

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1: Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình**Bước 3: Trả lời**

Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thoả mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Bài 37. Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50km. Sau đó 1 giờ 30 phút một xe máy cũng đi từ tỉnh A đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe? Biết rằng vận tốc xe máy gấp 2,5 vận tốc xe đạp.

Bài 38. Một ô tô phải đi quãng đường AB dài 60 km trong một thời gian nhất định. Xe đi nửa đầu quãng đường với vận tốc hơn dự định 10 km/h và đi nửa sau kém hơn dự định 6 km/h. Biết ô tô đến đúng dự định. Tính thời gian dự định đi quãng đường AB ?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 39. Một xe vận tải đi từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc 50 km/h, rồi từ B quay ngay về A với vận tốc 40 km/h. Cả đi và về mất một thời gian là 5 giờ 24 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Bài 40. Một người đi xe gắn máy, đi từ địa điểm A đến địa điểm B trên một quãng đường dài 35km. Lúc trở về người đó đi theo con đường khác dài 42km với vận tốc kém hơn vận tốc lượt đi là 6 km/h. Thời gian lượt về bằng $\frac{3}{2}$ thời gian lượt đi. Tìm vận tốc lượt đi và lượt về.

Bài 41. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại giảm còn 40 km/h. Vì vậy đã đến nơi chậm mất 18 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Bài 42. Một ô tô đi quãng đường dài 60 km trong một thời gian đã định. Ô tô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc hơn dự định là 10 km/h và đi nửa quãng đường còn lại với vận tốc thấp hơn dự định là 6 km/h nhưng ô tô đã đến đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô đã dự định đi quãng đường trên.

Bài 43. Một xe ô tô đi từ Hà Nội về Thanh Hoá. Sau khi đi được 43 km thì dừng lại 40 phút. Để về đến Thanh Hoá đúng giờ đã định nó phải đi với vận tốc bằng 1,2 lần vận tốc trước đó. Tính vận tốc lúc đầu,

biết rằng quãng đường Hà Nội - Thanh Hoá dài 163 km.

CHƯƠNG 1**PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****BÀI 1****PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****1. Phương trình tích**

Để giải phương trình $(ax + b)(cx + d) = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$) ta có thể làm như sau:

- **Bước 1:** Giải hai phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$ và $cx + d = 0$
- **Bước 2:** Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình vừa giải được ở bước 1.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

• Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là **điều kiện xác định của phương trình**.

- **Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:**

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH TÍCH**DẠNG 1**
PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CƠ BẢN

Để giải phương trình $(ax+b)(cx+d)=0$ ($a \neq 0, b \neq 0$) ta có thể làm như sau:

- **Bước 1:** Giải hai phương trình bậc nhất: $ax+b=0$ và $cx+d=0$
- **Bước 2:** Kết luận nghiệm: Lấy tất cả các nghiệm của hai phương trình vừa giải được ở bước 1.

Bài 1. Giải các phương trình

a) $(x-3)(3x+2)=0$

b) $(x^2+2024)(6x-3)=0$

c) $\left(\frac{3}{4}x-2\right)\left(\frac{5}{3}x+1\right)=0$

d) $2(x+4)(2x-3)=0$

Lời giải

a) $(x-3)(3x+2)=0$

Ta có $(x-3)(3x+2)=0$ nên $x-3=0$ hoặc $3x+2=0$

- $x-3=0$

$$x=3$$

- $3x+2=0$

$$3x=-2$$

$$x=-\frac{2}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=3$ và $x=-\frac{2}{3}$

b) $(x^2+2024)(6x-3)=0$

Ta có $(x^2+2024)(6x-3)=0$ nên $x^2+2024=0$ hoặc $6x-3=0$

- $x^2+2024=0$

Ta có $x^2 \geq 0$ với mọi x nên $x^2+2024 > 0$ nên do đó phương trình $x^2+2024=0$ vô nghiệm

- $6x-3=0$

$$6x=3$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$

$$c) \left(\frac{3}{4}x - 2 \right) \left(\frac{5}{3}x + 1 \right) = 0$$

Ta có $\left(\frac{3}{4}x - 2 \right) \left(\frac{5}{3}x + 1 \right) = 0$ nên $\frac{3}{4}x - 2 = 0$ hoặc $\frac{5}{3}x + 1 = 0$

$$\bullet \frac{3}{4}x - 2 = 0$$

$$\frac{3}{4}x = 2$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$\bullet \frac{5}{3}x + 1 = 0$$

$$\frac{5}{3}x = -1$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{8}{3}$ và $x = -\frac{3}{5}$

$$d) 2(x + 4)(2x - 3) = 0$$

Ta có $2(x + 4)(2x - 3) = 0$ nên $x + 4 = 0$ hoặc $2x - 3 = 0$

$$\bullet x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

$$\bullet 2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -4$ và $x = \frac{3}{2}$

Bài 2. Giải các phương trình

$$a) (x^2 - 9)(4 - x) = 0$$

$$b) (5x + 3) \left(\frac{3x + 11}{4} - \frac{x - 7}{12} \right) = 0$$

Lời giải

$$a) (x^2 - 9)(4 - x) = 0$$

Ta có $(x^2 - 9)(4 - x) = 0$ nên $x^2 - 9 = 0$ hoặc $4 - x = 0$

- $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = -3 \text{ hoặc } x = 3$$

- $4 - x = 0$

$$x = 4$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -3$; $x = 3$ và $x = 4$

b) $(5x + 3)\left(\frac{3x + 11}{4} - \frac{x - 7}{12}\right) = 0$

$$(5x + 3)\left(\frac{9x + 33 - x + 7}{12}\right) = 0$$

$$(5x + 3)\left(\frac{8x + 40}{12}\right) = 0$$

$$(5x + 3)\left(\frac{2x + 10}{3}\right) = 0$$

Ta có $(5x + 3)\left(\frac{2x + 10}{3}\right) = 0$ nên $5x + 3 = 0$ hoặc $\frac{2x + 10}{3} = 0$

- $5x + 3 = 0$

$$5x = -3$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

- $\frac{2x + 10}{3} = 0$

$$2x + 10 = 0$$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -5$ và $x = -\frac{3}{5}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $(x - 3)(2x + 1) = 0$

b) $(5x - 7)(2x - 6) = 0$

c) $(4x - 10)(24 + 5x) = 0$

d) $(3x - 2)(x + 1) = 0$

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $(x - 5)(3 - 2x)(3x + 4) = 0$

e) $(2x - 1)(3x + 2)(5 - x) = 0$

c) $(x + 3)(2x + 4)(x - 5) = 0$

d) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x - 6) = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $x^2(7x-3)=0$

b) $(2x+1)(-x^2-2)=0$

c) $(x^2+4)(2x-3)=0$

d) $(x+6)\left(\frac{x^2+3}{2}-1\right)=0$

e) $(x^2+x+1)(6-2x)=0$

f) $(8x-4)(-x^2+2x-2)=0$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $(x+2)\left(\frac{x+5}{2}-\frac{3-2x}{4}\right)=0$

b) $(3-2x)\left(\frac{2x-1}{2}+\frac{x+3}{4}\right)=0$

c) $(4x-10)\left[\frac{4x-3}{5}-\frac{2(x+3)}{7}\right]=0$

d) $(x^2+1)\left[\frac{3(3-x)}{8}+\frac{2(5-x)}{3}\right]=0$

e) $(-2x^2-5)\left(\frac{2x-1}{5}-\frac{x-2}{3}\right)=0$

f) $(2x^2+3)\left(\frac{x+3}{2}-\frac{x-1}{3}-\frac{x+5}{6}\right)=0$

DẠNG 2**PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CƠ BẢN****Bài 7.** Giải các phương trình

a) $2x(3x-1)=(3x-1)$

b) $3(x-5)(x+2)=x^2-5x$

c) $(x-1)(2x+3)+2x=2$

d) $\frac{7-x}{2}+\frac{2}{3}(x-7)(x-3)=0$

Lời giải

a) $2x(3x-1)=(3x-1)$

$$2x(3x-1)-(3x-1)=0$$

$$(3x-1)(2x-1)=0$$

Ta có $(3x-1)(2x-1)=0$ nên $3x-1=0$ hoặc $2x-1=0$

• $3x-1=0$

$$3x=1$$

$$x=\frac{1}{3}$$

• $2x-1=0$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{1}{3}$ và $x=\frac{1}{2}$

b) $3(x-5)(x+2)=x^2-5x$

$$3(x-5)(x+2)-x(x-5)=0$$

$$(x-5)[3(x+2)-x]=0$$

$$(x-5)(2x+6)=0$$

Ta có $(x-5)(2x+6)=0$ nên $x-5=0$ hoặc $2x+6=0$

• $x-5=0$

$$x=5$$

• $2x+6=0$

$$2x=-6$$

$$x=-3$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = 5$

$$\text{c) } (x-1)(2x+3) + 2x = 2$$

$$(x-1)(2x+3) + 2x - 2 = 0$$

$$(x-1)(2x+3) + 2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(2x+5) = 0$$

Ta có $(x-1)(2x+5) = 0$ nên $x-1 = 0$ hoặc $2x+5 = 0$

$$\bullet \quad x-1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\bullet \quad 2x+5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -\frac{5}{2}$

$$\text{d) } \frac{7-x}{2} + \frac{2}{3}(x-7)(x-3) = 0$$

$$-3(x-7) + 4(x-7)(x-3) = 0$$

$$(x-7)[-3 + 4(x-3)] = 0$$

$$(x-7)(4x-15) = 0$$

Ta có $(x-7)(4x-15) = 0$ nên $x-7 = 0$ hoặc $4x-15 = 0$

$$\bullet \quad x-7 = 0$$

$$x = 7$$

$$\bullet \quad 4x-15 = 0$$

$$4x = 15$$

$$x = \frac{15}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 7$ và $x = \frac{15}{4}$

Bài 8. Giải các phương trình:

$$\text{a) } (x-3)^2 = (2x+7)^2$$

$$\text{b) } 2(x+2)^2 - x^3 - 8 = 0$$

$$\text{c) } (x-1)(x^2+5x-2) - x^3 + 1 = 0$$

$$\text{d) } (x+2)(3-4x) = x^2 + 4x + 4$$

Lời giải

$$\text{a) } (x - 3)^2 = (2x + 7)^2$$

$$(x - 3)^2 - (2x + 7)^2 = 0$$

$$[x - 3 - (2x + 7)][x - 3 + 2x + 7] = 0$$

$$(-x - 10)(3x + 4) = 0$$

Ta có $(-x - 10)(3x + 4) = 0$ nên $-x - 10 = 0$ hoặc $3x + 4 = 0$

$$\bullet -x - 10 = 0$$

$$-x = 10$$

$$x = -10$$

$$\bullet 3x + 4 = 0$$

$$3x = -4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -10$ và $x = -\frac{4}{3}$

$$\text{b) } 2(x + 2)^2 - x^3 - 8 = 0$$

$$2(x + 2)^2 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x + 2)[2(x + 2) - (x^2 - 2x + 4)] = 0$$

$$(x + 2)(-x^2 - 4x) = 0$$

$$-x(x + 2)(x + 4) = 0$$

Ta có $-x(x + 2)(x + 4) = 0$ nên $x = 0$ hoặc $x + 2 = 0$ hoặc $x + 4 = 0$

$$\bullet x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$$\bullet x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -4$, $x = -2$ và $x = 0$

$$\text{c) } (x - 1)(x^2 + 5x - 2) - x^3 + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 5x - 2) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$(x - 1)[(x^2 + 5x - 2) - (x^2 + x + 1)] = 0$$

$$(x - 1)(4x - 3) = 0$$

Ta có $(x-1)(4x-3)=0$ nên $x-1=0$ hoặc $4x-3=0$

- $x-1=0$

$$x=1$$

- $4x-3=0$

$$4x=3$$

$$x=\frac{3}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1$ và $x=\frac{3}{4}$

d) $(x+2)(3-4x)=x^2+4x+4$

$$(x+2)(3-4x)=(x+2)^2$$

$$(x+2)(3-4x)-(x+2)^2=0$$

$$(x+2)[(3-4x)-(x+2)]=0$$

$$(x+2)(-5x+1)=0$$

Ta có $(x+2)(-5x+1)=0$ nên $x+2=0$ hoặc $-5x+1=0$

- $x+2=0$

$$x=-2$$

- $-5x+1=0$

$$-5x=-1$$

$$x=\frac{1}{5}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-2$ và $x=\frac{1}{5}$

Bài 9. Giải các phương trình:

a) $x^2+7x+12=0$

b) $3x^2-5x+2=0$

Lời giải

a) $x^2+7x+12=0$

$$x^2+3x+4x+12=0$$

$$x(x+3)+4(x+3)=0$$

$$(x+3)(x+4)=0$$

Ta có $(x+3)(x+4)=0$ nên $x+3=0$ hoặc $x+4=0$

- $x+3=0$

$$x = -3$$

$$\bullet x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -4$ và $x = -3$

$$\text{b) } 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 3x - 2x + 2 = 0$$

$$3x(x-1) - (x-1) = 0$$

$$(x-1)(3x-1) = 0$$

Ta có $(x-1)(3x-1) = 0$ nên $x-1 = 0$ hoặc $3x-1 = 0$

$$\bullet x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\bullet 3x - 1 = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{1}{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 10. Giải các phương trình

$$\text{a) } (x-2)^2 - (2x+3)^2 = 0$$

$$\text{b) } (3-2x)^2 + 4x^2 - 9 = 0$$

$$\text{c) } (x+2)^3 - 9(x+2) = 0$$

$$\text{d) } 9(2x+1)^2 - 4(x+1)^2 = 0$$

Bài 11. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } (2x-1)^2 = 49$$

$$\text{b) } (5x-3)^2 - (4x-7)^2 = 0$$

$$\text{c) } (2x+7)^2 = 9(x+2)^2$$

$$\text{d) } (x+2)^2 = 9(x^2 - 4x + 4)$$

$$\text{e) } 4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2 = 0$$

$$\text{f) } (5x^2 - 2x + 10)^2 = (3x^2 + 10x - 8)^2$$

Bài 12. Giải các phương trình

$$\text{a) } (2x-1)^2 + (x-3)(2x-1) = 0$$

$$\text{b) } 4(3x-2) + (2-3x)^3 = 0$$

$$\text{c) } (x-1)(x^2-9) = -x-3$$

$$\text{d) } (x+1)^2 + 2(x+1) + 1 = 0$$

Bài 13. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } (x-2)(3x+5) = (2x-4)(x+1)$$

$$\text{b) } (2x+5)(x-4) = (x-5)(4-x)$$

$$\text{c) } 9x^2 - 1 = (3x+1)(2x-3)$$

$$\text{d) } 2(9x^2 + 6x + 1) = (3x+1)(x-2)$$

e) $27x^2(x+3)-12(x^2+3x)=0$

f) $16x^2-8x+1=4(x+3)(4x-1)$

Bài 14. Giải phương trình

a) $3x^2-11x+6=0$

b) $-2x^2+5x-3=0$

c) $x^2+2x-3=0$

d) $x^2-4x-5=0$

Bài 15. Giải phương trình

a) $2x^4+3x^2-5=0$

b) $x^4-8x^3-9x^2=0$

c) $x^3-4x^2+4-x=0$

d) $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0$

Bài 16. Giải các phương trình sau:

a) $(9x^2-4)(x+1)=(3x+2)(x^2-1)$

b) $(x-1)^2-1+x^2=(1-x)(x+3)$

c) $(x^2-1)(x+2)(x-3)=(x-1)(x^2-4)(x+5)$

d) $x^4+x^3+x+1=0$

e) $x^3-7x+6=0$

f) $x^4-4x^3+12x-9=0$

g) $x^5-5x^3+4x=0$

h) $x^4-4x^3+3x^2+4x-4=0$

DẠNG 3
ĐẶT ẨN PHỤ

Bài 17. Giải các phương trình:

a) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$.

b) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$.

Lời giải

a) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$ (1)

Đặt $x^2 - 5x = t$ khi đó (1) trở thành:

$$t^2 + 10t + 24 = 0$$

$$t^2 + 4t + 6t + 24 = 0$$

$$t(t + 4) + 6(t + 4) = 0$$

$$(t + 4)(t + 6) = 0$$

$$t + 4 = 0 \text{ hoặc } t + 6 = 0$$

$$t = -4 \text{ hoặc } t = -6$$

Với $t = -4$ ta có

$$x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x^2 - x - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ hoặc } x = 4$$

Với $t = -6$ ta có

$$x^2 - 5x = -6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 1; x = 2; x = 3; x = 4$.

b) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$ (1)

Đặt $x^2 + 5x = t$ khi đó (1) trở thành:

$$t^2 - 2t - 24 = 0$$

$$t^2 + 4t - 6t - 24 = 0$$

$$(t + 4)(t - 6) = 0$$

$$t = -4 \text{ hoặc } t = 6$$

Với $t = -4$ ta có:

$$x^2 + 5x = -4$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x+1)(x+4) = 0$$

$$x = -1 \text{ hoặc } x = -4$$

Với $t = 6$ ta có:

$$x^2 + 5x = 6$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x-1)(x+6) = 0$$

$$x = 1 \text{ hoặc } x = -6$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 1; x = -1; x = -4; x = -6$.

Bài 18. Giải các phương trình:

a) $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$.

b) $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6) = 180$.

Lời giải

a) $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$

$$(x^2 + x)(x^2 + x - 2) = 24$$

Đặt $x^2 + x = y$ ta được:

$$y(y-2) = 24$$

$$y^2 - 2y - 24 = 0$$

$$y^2 + 4y - 6y - 24 = 0$$

$$y(y+4) - 6(y+4) = 0$$

$$(y+4)(y-6) = 0$$

$$y = -4 \text{ hoặc } y = 6$$

Với $y = -4$ ta có: $x^2 + x + 4 = 0$

$$x^2 + x + 4 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ suy ra phương trình } x^2 + x + 4 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Với $y = 6$ ta có:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3x - 6 = 0$$

$$x(x-2) + 3(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = -3$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -3, x = 2$.

b. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6) = 180$.

$$[(x+2)(x-5)][(x+3)(x-6)] = 180$$

$$(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 18) = 180$$

Đặt $x^2 - 3x - 14 = y$ ta được:

$$(y+4)(y-4) = 180$$

$$y^2 = 196$$

$$y = \pm 14$$

Với $y = -14$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

Với $y = 14$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$x^2 + 4x - 7x - 28 = 0$$

$$x(x+4) - 7(x+4) = 0$$

$$(x+4)(x-7) = 0$$

$$x = -4 \text{ hoặc } x = 7$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = -4, x = 0, x = 3, x = 7$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 19. Giải các phương trình sau:

a) $(2x+1)^2 - 2x - 1 = 2;$

b) $(x^2 - 3x)^2 + 5(x^2 - 3x) + 6 = 0;$

c) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x) - 2 = 0.$

d) $(5 - 2x)^2 + 4x - 10 = 8;$

e) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 1) = 3;$

f) $x(x-1)(x^2 - x + 1) - 6 = 0.$

Bài 20. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$

b) $(x^2 + 2x + 3)^2 - 9(x^2 + 2x + 3) + 18 = 0$

c) $(x-2)(x+2)(x^2 - 10) = 72$

d) $x(x+1)(x^2 + x + 1) = 42$

e) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) - 297 = 0$

f) $x^4 - 2x^2 - 144x - 1295 = 0$

CHỦ ĐỀ 2**PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU**

• Trong phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức trong phương trình đều khác 0 được gọi là **điều kiện xác định của phương trình**.

• Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta có thể làm như sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Kết luận nghiệm: Trong các giá trị của ẩn tìm được ở bước 3, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định chính là các nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 21. Giải phương trình

$$\text{a) } \frac{4x - 8 + (4 - 2x)}{x^2 + 1} = 0$$

$$\text{b) } \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$$

$$\text{c) } \frac{2x - 5}{x + 5} = 3$$

$$\text{d) } \frac{4}{x - 2} - 2 = 0$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{4x - 8 + (4 - 2x)}{x^2 + 1} = 0$$

vì $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{4x - 8 + (4 - 2x)}{x^2 + 1} &= 0 \\ 4x - 8 + (4 - 2x) &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 2$

$$\text{b) } \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 0$$

Điều kiện xác định $x \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x + 1)^2 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = -1$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

$$c) \frac{2x - 5}{x + 5} = 3$$

Điều kiện xác định $x \neq -5$

$$\begin{aligned} \frac{2x - 5}{x + 5} &= 3 \\ \frac{2x - 5}{x + 5} &= \frac{3 \cdot (x + 5)}{x + 5} \\ 2x - 5 &= 3 \cdot (x + 5) \\ 2x - 5 &= 3x + 15 \\ x &= -20 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = -20$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -20$

$$d) \frac{4}{x - 2} - 2 = 0$$

Điều kiện xác định $x \neq 2$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x - 2} - 2 &= 0 \\ \frac{4}{x - 2} - \frac{2 \cdot (x - 2)}{x - 2} &= 0 \\ \frac{4 - 2 \cdot (x - 2)}{x - 2} &= 0 \\ 4 - 2x + 4 &= 0 \\ -2x &= -8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 4$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 4$

Bài 22. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{7x + 7}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{2}{1 + x} = \frac{1}{3 - 7x}$$

$$c) \frac{1}{x - 2} + 3 = \frac{3 - x}{x - 2}$$

$$d) \frac{14}{3x - 12} - \frac{2 + x}{x - 4} = \frac{3}{8 - 2x} - \frac{5}{6}$$

Lời giải

$$a) \frac{7x + 7}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

Điều kiện xác định $x \neq 1$

$$\begin{aligned}\frac{7x-7}{x-1} &= \frac{2}{3} \\ \frac{3(7x-7)}{3(x-1)} &= \frac{2(x-1)}{3(x-1)} \\ 3(7x-7) &= 2(x-1) \\ 21x+21 &= 2x-2 \\ 19x &= -23 \\ x &= -\frac{23}{19}\end{aligned}$$

Ta thấy $x = -\frac{23}{19}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -\frac{23}{19}$

$$\text{b) } \frac{2}{1+x} = \frac{1}{3-7x}$$

Điều kiện xác định $x \neq -1; x \neq \frac{3}{7}$

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+x} &= \frac{1}{3-7x} \\ \frac{2(3-7x)}{(1+x)(3-7x)} &= \frac{1+x}{(1+x)(3-7x)} \\ 6-14x &= x+1 \\ 15x &= 5 \\ x &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ta thấy $x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = \frac{1}{3}$

$$\text{c) } \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$$

Điều kiện xác định $x \neq 2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2} + 3 &= \frac{3-x}{x-2} \\ \frac{1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} &= \frac{3-x}{x-2} \\ \frac{1+3x-6}{x-2} &= \frac{3-x}{x-2} \\ 3x-5 &= 3-x \\ 4x &= 8 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Ta thấy $x = 2$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

$$d) \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$$

Điều kiện xác định $x \neq 4$

$$\begin{aligned} \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} &= \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6} \\ \frac{14}{3(x-4)} - \frac{2+x}{x-4} &= \frac{3}{2(4-x)} - \frac{5}{6} \\ \frac{14.4}{12(x-4)} - \frac{12(2+x)}{12(x-4)} &= \frac{-3.6}{12(x-4)} - \frac{5.2(x-4)}{12(x-4)} \\ \frac{56-24-12x}{12(x-4)} &= \frac{-18-10x+40}{12(x-4)} \\ 32-12x &= 58-10x \\ -26 &= 2x \\ x &= -13 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = -13$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -13$

Bài 23. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} = -3$$

$$b) \frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} - \frac{1+3x}{1-3x}$$

$$c) \frac{6x+1}{x^2-7x+10} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$$

$$d) \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x+25}{2x^2-50} = \frac{x-5}{2x^2+10x}$$

Lời giải

$$a) \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} = -3$$

Điều kiện xác định $x \neq 1; x \neq 2$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} &= -3 \\ \frac{4(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{5(x-1)}{(x-2)(x-1)} &= \frac{-3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ 4(x-2) - 5(x-1) &= -3(x-1)(x-2) \\ 4x-8-5x+5 &= -3(x^2-3x+2) \\ -x-3 &= -3x^2+9x-6 \\ 3x^2-10x+3 &= 0 \\ 3x^2-9x-x+3 &= 0 \\ 3x(x-3)-(x-3) &= 0 \\ (x-3)(3x-1) &= 0 \\ x-3=0 \text{ hoặc } 3x-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 3 \text{ hoặc } x = \frac{1}{3}$$

Ta thấy $x = 3$ và $x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 3$ và $x = \frac{1}{3}$

$$\text{b) } \frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} - \frac{1+3x}{1-3x}$$

Điều kiện xác định $x \neq -\frac{1}{3}; x \neq \frac{1}{3}$

$$\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} - \frac{1+3x}{1-3x}$$

$$\frac{12}{(1+3x)(1-3x)} = \frac{(1-3x)(1-3x)}{(1+3x)(1-3x)} - \frac{(1+3x)(1+3x)}{(1+3x)(1-3x)}$$

$$12 = (1-3x)(1-3x) - (1+3x)(1+3x)$$

$$12 = (1-6x+9x^2) - (1+6x+9x^2)$$

$$12 = 12x$$

$$x = 1$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 1$

$$\text{c) } \frac{6x+1}{x^2-7x+10} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$$

Điều kiện xác định $x \neq 2; x \neq 5$

$$\frac{6x+1}{x^2-7x+10} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{x^2-2x-5x+10} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{x(x-2)-5(x-2)} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{(x-2)(x-5)} + \frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-5}$$

$$\frac{6x+1}{(x-2)(x-5)} + \frac{5(x-5)}{(x-2)(x-5)} - \frac{3(x-2)}{(x-2)(x-5)} = 0$$

$$6x+1+5x-25-3x+6=0$$

$$8x-18=0$$

$$x = \frac{9}{4}$$

Ta thấy $x = \frac{9}{4}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = \frac{9}{4}$

$$d) \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x+25}{2x^2-50} = \frac{x-5}{2x^2+10x}$$

Điều kiện xác định $x \neq 0; x \neq 5$

$$\frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x+25}{2x^2-50} = \frac{x-5}{2x^2+10x}$$

$$\frac{x+5}{x(x-5)} - \frac{x+25}{2(x-5)(x+5)} - \frac{x-5}{2x(x+5)} = 0$$

$$\frac{2(x+5)^2}{2x(x-5)(x+5)} - \frac{x+25}{2(x-5)(x+5)} - \frac{(x-5)^2}{2x(x+5)(x-5)} = 0$$

$$2(x^2+10x+25) - (x+25) - (x^2-10x+25) = 0$$

$$x^2 + 29x = 0$$

$$x(x+29) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x + 29 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -29$$

Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -29$

Bài 24. Tìm x sau cho biểu thức $\frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2}$ có giá trị bằng 2.

Lời giải

Biểu thức có giá trị bằng 2 tức là $\frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2} = 2$. Ta sẽ đi giải phương trình này.

Điều kiện xác định $x \neq \frac{2}{3}; x \neq \frac{5}{2}$

$$\frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2} = 2$$

$$\frac{(2x-9)(3x-2)}{(2x-5)(3x-2)} + \frac{3x(2x-5)}{(3x-2)(2x-5)} = \frac{2 \cdot (3x-2)(2x-5)}{(3x-2)(2x-5)}$$

$$(2x-9)(3x-2) + 3x(2x-5) = 2 \cdot (3x-2)(2x-5)$$

$$6x^2 - 4x - 27x + 18 + 6x^2 - 15x = 12x^2 - 30x - 8x + 20$$

$$-8x = 2$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Ta thấy $x = -\frac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện xác định

Vậy $x = -\frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm

Bài 25. Tìm x sau cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau, với

$$A = \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2; B = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

Lời giải

$$A \text{ và } B \text{ có giá trị bằng nhau nên } \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

Điều kiện xác định $x \neq 0$

$$\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + 1 + \frac{1}{x} + x - 1 - \frac{1}{x}\right)\left(x + 1 + \frac{1}{x} - x + 1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$2x\left(2 + \frac{2}{x}\right) = 0$$

$$2x = 0 \text{ hoặc } 2 + \frac{2}{x} = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } \frac{2}{x} = -2$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -1$$

Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -1$

Bài 26. Tìm x sau cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau, với $A = x + \frac{1}{x}; B = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Lời giải

$$A \text{ và } B \text{ có giá trị bằng nhau nên } x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Cách 1:

Điều kiện xác định $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x + \frac{1}{x} - x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^3 + x - x^4 - 1 = 0$$

$$-(x^4 - x^3) + (x - 1) = 0$$

$$-x^3(x - 1) + (x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(1 - x^3) = 0$$

$$(x - 1)(1 - x)(1 + x + x^2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ hoặc } 1 - x = 0 \text{ hoặc } 1 + x + x^2 = 0$$

$$x = 1 \text{ hoặc } x = 1 \text{ hoặc } 1 + x + x^2 = 0 \text{ vô nghiệm vì } 1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 1$

Cách 2:

Điều kiện xác định $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, phương trình trở thành

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2t - 2 = 0$$

$$t(t + 1) - 2(t + 1) = 0$$

$$(t - 2)(t + 1) = 0$$

$$t = 2 \text{ hoặc } t = -1$$

Với $t = 2$, ta có :

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định

Với $t = -1$, ta có

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^2 + 1 = -x$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm) vì } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 1$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 27. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3}$

b) $\frac{2x-1}{5-3x} = 2$

c) $\frac{4x-5}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$

d) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{3x}{x+3} = 1$

e) $\frac{x^2-15x+1}{x+17} = x-2$

d) $\frac{x^2+6x-16}{x-2} = x+8$

Bài 28. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0$

c) $\frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-5}$

d) $\frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$

e) $\frac{4}{x-1} = \frac{x}{x-2}$

f) $\frac{12x+1}{11x-4} + \frac{10x-4}{9} = \frac{20x+17}{18}$

Bài 29. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{11}{x} = \frac{9}{x+1} + \frac{2}{x-4}$

b) $\frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$

c) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{16}{x^2-1}$

d) $1 + \frac{1}{2+x} = \frac{12}{x^3+8}$

e) $3x - \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{2-x}$

f) $\frac{x-1}{x-2} - 3 + x = \frac{1}{x-2}$

Bài 30. Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{6x-1}{3x+2}$ và $\frac{2x+5}{x-3}$ bằng nhau.

Bài 31. Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3}$ và $\frac{-8}{(x-1)(x-3)}$ bằng nhau.

Bài 32. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$

b) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$

c) $\frac{3}{4(x-5)} + \frac{15}{50-2x^2} = \frac{7}{6x+30}$

d) $\frac{12x+1}{6x-2} - \frac{9x-5}{3x+1} = \frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$

e) $\frac{1}{x} - 2025 - \left(\frac{1}{x} - 2025 \right) (x^2 + 2024) = 0$

f) $\frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 + 2)$

Bài 33. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x-3} - \frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$

b) $\frac{1}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{5}{6-x^2-x}$

c) $\frac{4x}{x^2+4x+3} - 1 = 6 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \right)$

d) $\frac{2}{x+2} - \frac{2x^2+16}{x^3+8} = \frac{5}{x^2-2x+4}$

e) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$

f) $\frac{x+4}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$

Bài 34. *Giải các phương trình sau:

a) $\frac{8}{x-8} + \frac{11}{x-11} = \frac{9}{x-9} + \frac{10}{x-10}$

b) $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-6}$

c) $\frac{4}{x^2-3x+2} - \frac{3}{2x^2-6x+1} + 1 = 0$

d) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{6}{x-6} + \frac{3}{x-3}$

Bài 35. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$

b) $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$

c) $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$

Lời giải

a) $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$

Điều kiện xác định $x \neq 0$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$(x+1)(x^2-x+1).x - (x-1)(x^2+x+1)x = 3$$

$$(x^3+1)x - (x^3-1)x = 3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Ta thấy $x = \frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = \frac{3}{2}$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

Điều kiện xác định: $x \neq -4, x \neq -5, x \neq -6, x \neq -7$

$$\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$(x+7).18 - (x+4).18 = (x+4)(x+7)$$

$$18x + 126 - 18x - 72 = x^2 + 11x + 28$$

$$x^2 + 11x - 26 = 0$$

$$(x-2)(x+13) = 0$$

$$x-2 = 0 \text{ hoặc } x+13 = 0$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = -13$$

Ta thấy $x = 2$ và $x = -13$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 2$ và $x = -13$

$$\text{c) } \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$$

Đặt $x^2-2x+2 = t, t > 0$

$$\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$$

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{6}{t+2}$$

$$(t+1)(t+2) + 2t(t+2) = 6t(t+1)$$

$$t^2 + 3t + 2 + 2t^2 + 4t = 6t^2 + 6t$$

$$3t^2 - t - 2 = 0$$

$$(3t+2)(t-1) = 0$$

$$t = -\frac{2}{3} \text{ hoặc } t = 1$$

Ta thấy $t = -\frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện

Với $t = 1$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 1$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = 1$

Bài 36. Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{x^2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2}{x^2-2x+2} - \frac{4x^2-20}{x^4+4} = \frac{322}{65}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$$

$$\text{c) } \frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{5}{x^2+11x+24} + \frac{2}{x^2+18x+80} = \frac{9}{52}$$

$$\text{d) } \frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} + 6$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x^2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2}{x^2-2x+2} - \frac{4x^2-20}{x^4+4} = \frac{322}{65}$$

Điều kiện với mọi $x \in R$

$$\text{Ta có } x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2 = (x^2 + 2)^2 - 2 \cdot 2x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$\frac{x^2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2}{x^2-2x+2} - \frac{4x^2-20}{x^4+4} = \frac{322}{65}$$

$$\frac{65x^2(x^2-2x+2)}{65(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} + \frac{65x^2(x^2+2x+2)}{65(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} - \frac{65(4x^2-20)}{65(x^4+4)} = \frac{322(x^4+4)}{65(x^4+4)}$$

$$65x^4 - 130x^3 + 130x^2 + 65x^4 + 130x^3 + 130x^2 - 260x^2 + 1300 = 322x^4 + 1288$$

$$130x^4 + 1300 = 322x^4 + 1288$$

$$192x^4 = 12$$

$$x^4 = \frac{12}{192} = \frac{1}{16}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = \pm \frac{1}{2}$

$$b) \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}$$

Điều kiện xác định: $x \neq \{-2; -3; -4; -6; 6\}$

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{8(x+6)}{8(x+2)(x+6)} - \frac{8(x+2)}{8(x+6)(x+2)} = \frac{(x+6)(x+2)}{8(x+6)(x+2)}$$

$$8x + 48 - 8x - 16 = x^2 + 8x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x^2 - 2x + 10x - 20 = 0$$

$$x(x-2) + 10(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x+10) = 0$$

$$x-2=0 \text{ hoặc } x+10=0$$

$$x=2 \text{ hoặc } x=-10$$

Ta thấy $x = -10$ và $x = 2$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -10$ và $x = 2$

$$c) \frac{2}{x^2 + 4x + 3} + \frac{5}{x^2 + 11x + 24} + \frac{2}{x^2 + 18x + 80} = \frac{9}{52}$$

Điều kiện xác định: $x \neq \{-1; -3; -8; -10\}$

$$\frac{2}{x^2 + 4x + 3} + \frac{5}{x^2 + 11x + 24} + \frac{2}{x^2 + 18x + 80} = \frac{9}{52}$$

$$\frac{2}{(x+3)(x+1)} + \frac{5}{(x+8)(x+3)} + \frac{2}{(x+8)(x+10)} = \frac{9}{52}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+8} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{52}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{52}$$

$$\frac{52(x+10)}{52(x+1)(x+10)} - \frac{52(x+1)}{52(x+10)(x+1)} = \frac{9(x+10)(x+1)}{52(x+10)(x+1)}$$

$$52(x+10) - 52(x+1) = 9(x+10)(x+1)$$

$$52x + 520 - 52x - 52 = 9x^2 + 99x + 90$$

$$9x^2 + 99x - 378 = 0$$

$$x^2 + 11x - 42 = 0$$

$$(x-3)(x+14) = 0$$

$$x-3=0 \text{ hoặc } x+14=0$$

$$x=3 \text{ hoặc } x=-14$$

Ta thấy $x = -14$ và $x = 3$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là : $x = -14$ và $x = 3$

$$\text{d) } \frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} + 6$$

Điều kiện xác định: $x \neq \pm 1; x \neq 2$

$$\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} + 6$$

$$1 + \frac{5}{x-1} + 1 + \frac{-5}{x+1} = 1 + \frac{10}{x-2} + 1 + \frac{-10}{x+2} + 6$$

$$5\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right) - 10\left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2}\right) = 6$$

$$\frac{5.2}{(x-1)(x+1)} - \frac{10.4}{(x-2)(x+2)} = 6$$

$$10(x^2-4) - 40(x^2-1) = 6(x^2-1)(x^2-4)$$

$$10x^2 - 40 - 40x^2 + 40 = 6(x^4 - 5x^2 + 4)$$

$$6x^4 + 24 = 0$$

$$6(x^4 + 4) = 0 \text{ (vô nghiệm) vì } x^4 + 4 > 0 \forall x.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

CHỦ ĐỀ 3**GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH**

Các bước giải toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1: Lập phương trình

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình**Bước 3: Trả lời**

Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

Bài 37. Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50km. Sau đó 1 giờ 30 phút một xe máy cũng đi từ tỉnh A đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe? Biết rằng vận tốc xe máy gấp 2,5 vận tốc xe đạp.

Lời giải

Gọi vận tốc của người đi xe đạp là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc người đi xe máy là: $\frac{5x}{2}$ km/h

Thời gian người đi xe đạp đi là: $\frac{50}{x}$ h

Thời gian người đi xe máy đi là: $\frac{20}{x}$ h

Do xe máy đi sau 1h30' và đến sớm hơn 1h nên ta có phương trình:

$$\frac{50}{x} = \frac{20}{x} + \frac{3}{2} + 1$$

$$\frac{100}{2x} = \frac{40}{2x} + \frac{3x}{2x} + \frac{2x}{2x}$$

$$100 = 40 + 3x + 2x$$

$$5x = 60$$

$$x = 12 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy vận tốc người đi xe đạp là 12km/h.

Bài 38. Một ô tô phải đi quãng đường AB dài 60 km trong một thời gian nhất định. Xe đi nửa đầu quãng đường với vận tốc hơn dự định 10 km/h và đi nửa sau kém hơn dự định 6 km/h. Biết ô tô đến đúng dự định. Tính thời gian dự định đi quãng đường AB ?

Lời giải

Gọi vận tốc ô tô dự định đi quãng đường AB là: x (km/h) ($x > 6$)

Xe đi nửa quãng đường đầu với vận tốc là: $x + 10$ (km/h)

Xe đi nửa quãng đường sau với vận tốc là: $x - 6$ (km/h)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{60}{x} = \frac{30}{x+10} + \frac{30}{x-6}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x+10} + \frac{1}{x-6}$$

$$\frac{2(x+10)(x-6)}{x(x+10)(x-6)} = \frac{x(x-6)}{x+10} + \frac{x(x+10)}{x-6}$$

$$2(x+10)(x-6) = x(x-6) + x(x+10)$$

$$2x^2 + 8x - 120 = x^2 - 6x + x^2 + 10x$$

$$4x = 120$$

$$x = 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy thời gian dự định đi quãng đường AB là: $60 : 30 = 2$ (giờ)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 39. Một xe vận tải đi từ địa điểm A đến địa điểm B với vận tốc 50 km/h, rồi từ B quay ngay về A với vận tốc 40 km/h. Cả đi và về mất một thời gian là 5 giờ 24 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Đáp số: 120km.

Bài 40. Một người đi xe gắn máy, đi từ địa điểm A đến địa điểm B trên một quãng đường dài 35km. Lúc trở về người đó đi theo con đường khác dài 42km với vận tốc kém hơn vận tốc lượt đi là 6 km/h.

Thời gian lượt về bằng $\frac{3}{2}$ thời gian lượt đi. Tìm vận tốc lượt đi và lượt về.

Đáp số: Vận tốc lượt đi là 30 km/h; vận tốc lượt về là 24 km/h.

Bài 41. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại giảm còn 40 km/h. Vì vậy đã đến nơi chậm mất 18 phút. Tìm chiều dài quãng đường từ A đến B.

Đáp số: 80km.

Bài 42. Một ô tô đi quãng đường dài 60 km trong một thời gian đã định. Ô tô đi nửa quãng đường đầu với vận tốc hơn dự định là 10 km/h và đi nửa quãng đường còn lại với vận tốc thấp hơn dự định là 6 km/h nhưng ô tô đã đến đúng thời gian đã định. Tính thời gian ô tô đã dự định đi quãng đường trên.

Đáp số: 2 giờ.

Bài 43. Một xe ô tô đi từ Hà Nội về Thanh Hoá. Sau khi đi được 43 km thì dừng lại 40 phút. Để về đến Thanh Hoá đúng giờ đã định nó phải đi với vận tốc bằng 1,2 lần vận tốc trước đó. Tính vận tốc lúc đầu, biết rằng quãng đường Hà Nội - Thanh Hoá dài 163 km.

Đáp số: 30 km.

BÀI 2**BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT****1. Bất đẳng thức****a. Nhắc lại thứ tự trong tập hợp số thực**

- Nếu số thực a nhỏ hơn số thực b thì ta viết $a < b$ hay $b > a$.
- Số thực lớn hơn 0 gọi là số thực dương.
- Số thực nhỏ hơn 0 gọi là số thực âm.
- Trên trục số nằm ngang, nếu số thực a nằm bên trái số thực b thì $a < b$ hay $b > a$.



- Tổng của hai số thực dương là số thực dương. Tổng của hai số thực âm là số thực âm.
- Với hai số thực a, b , ta có:
 $ab > 0$ thì a, b cùng dấu (hay cùng dương hoặc cùng âm) và ngược lại.
 $ab < 0$ thì a, b trái dấu và ngược lại.
- Với hai số thực a, b dương, nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

b. Khái niệm bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là **bất đẳng thức** và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Chú ý:

- Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c < d$ (hay $a > b$ và $c > d$) được gọi là **bất đẳng thức cùng chiều**.
- Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c > d$ (hay $a > b$ và $c < d$) được gọi là **bất đẳng thức ngược chiều**.

c. Tính chất bắc cầu

Cho ba số a, b, c . Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.



Chú ý: Tính chất bắc cầu vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<, \leq, \geq$.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Cho ba số a, b, c . Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.

Chú ý: Tính chất vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<, \leq, \geq$.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số **dương** ta được bất đẳng thức mới **cùng chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số **âm** ta được bất đẳng thức mới **ngược chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Cho ba số a, b, c và $a > b$

- Nếu $c > 0$ thì $a.c > b.c$.
- Nếu $c < 0$ thì $a.c < b.c$.

Chú ý: Tính chất vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<, \leq, \geq$.

DẠNG 1

DIỄN TẢ MỘT KHẲNG ĐỊNH NÀO ĐÓ

Bài 1. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

a) x nhỏ hơn 5.

b) a không lớn hơn b .

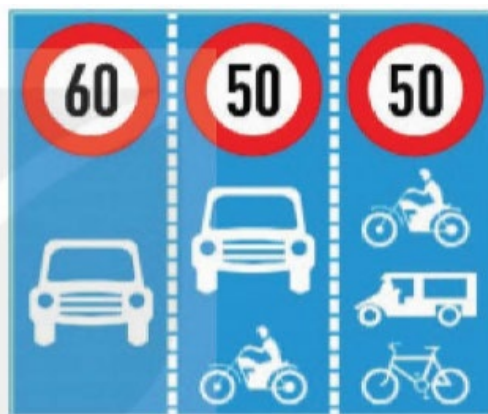
c) m không nhỏ hơn n .

Bài 2. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

- a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;
- b) Xe buýt chở được tối đa 45 người;
- c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20 000 đồng.

Bài 3. Khi đi đường, chúng ta có thể thấy các biển báo giao thông báo hiệu giới hạn tốc độ mà xe cơ giới được phép đi.

Em có biết ý nghĩa của biển báo giao thông ở Hình 2.3 (biển báo giới hạn tốc độ tối đa cho phép theo xe, trên từng làn đường) không?



Hình 2.3. Biển báo giao thông P.127c

Bài 4. Dùng các dấu $>$, $<$, \geq , \leq để diễn tả:

- a) Tốc độ v đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4a.
- b) Trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4b.



Hình 4

Bài 5. Theo quy định của một hãng bay, khối lượng hành lý xách tay của khách hàng phổ thông không được vượt quá 12 kg. Gọi m là khối lượng hành lý xách tay của một khách hàng phổ thông. Hệ thức nào biểu diễn khối lượng hành lý đúng quy định của hãng bay?

Bài 6. Gọi x là số tuổi của bạn Việt, y là số tuổi của bạn Nam, biết rằng bạn Nam lớn tuổi hơn bạn Việt. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau 5 năm nữa.

DẠNG 2

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh:

a) $\sqrt{2025} - \sqrt{5} > \sqrt{2024} - \sqrt{5}$

b) $\frac{1}{2024} + 2023 < \frac{1}{2025} + 2023$

Bài 2. Cho $a \geq 2b$. Chứng minh:

a) $2a + 7 > a + 2b + 7$

b) $4b + 4a \leq 5a + 2b$.

Bài 3. Chứng minh:

a) $2m + 4 > 2n + 3$ với $m > n$.

b) $-3a + 5 > -3b + 5$ với $a < b$.

c) $(a - 1)^2 \geq 4 - 2a$ với $a^2 \geq 3$.

Bài 4. Cho $a \leq 1$. Chứng minh: $(a - 1)^2 \geq a^2 - 1$.

DẠNG 3
SO SÁNH CÁC SỐ

Bài 1. So sánh hai số a và b , nếu:

a) $a + 2024 < b + 2024$

b) $-2025a + 9 > -2025b + 9$.

Bài 2. So sánh hai số $3 + 23^{2024}$ và $4 + 23^{2024}$.

Bài 3. Hãy so sánh: $(-163) \cdot (-75)^{15}$ và $(-162) \cdot (-75)^{15}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. So sánh x và y trong mỗi trường hợp sau:

a) $x - \frac{1}{3} \leq y - \frac{1}{3}$

b) $2x + 2023 > 2y + 2023$

c) $-\frac{2024}{2025} - 3x \geq -\frac{2024}{2025} - 3y$

Bài 5. Số a là âm hay dương nếu:

a) $-4a \leq 2a$

b) $3a \geq 15a$

c) $6a > 24a$

Bài 6. So sánh m và n biết $m - \frac{1}{2} = n$

Bài 7. Cho $a - 2 \leq b - 1$. So sánh hai biểu thức $2a - 4$ và $2b - 2$

Bài 8. So sánh m và m^2 với $0 < m < 1$.

Bài 9. Cho bất đẳng thức $a > b$ và cho số thực c .

a) Xác định dấu của hiệu: $(a + c) - (b + c)$.

b) Hãy so sánh: $a + c$ và $b + c$.

Bài 10. Cho bất đẳng thức $a > b$ và số thực $c > 0$.

a) Xác định dấu của hiệu: $ac - bc$.

b) Hãy so sánh: ac và bc .

Bài 11. Cho các bất đẳng thức $a > b$ và $b > c$.

a) Xác định dấu của các hiệu: $a - b$, $b - c$, $a - c$.

b) Hãy so sánh: a và c .

DẠNG 4 TOÁN THỰC TẾ

Bài 1. Nồng độ cồn trong máu (tiếng Anh là *Blood Alcohol Content*, viết tắt: BAC) được định nghĩa là tỉ lệ phần trăm lượng rượu (ethyl alcohol hoặc ethanol) trong máu của một người. Chẳng hạn, nồng độ cồn trong máu là 0,05% nghĩa là có 50 mg rượu trong 100 ml máu. Càng uống nhiều rượu bia thì nồng độ cồn trong máu càng cao và càng nguy hiểm khi tham gia giao thông. Nghị định 100/2019/NĐ-CP quy định mức xử phạt vi phạm hành chính đối với người điều khiển xe gắn máy uống rượu bia khi tham gia giao thông như sau:

Mức độ vi phạm	Hình thức xử phạt
Mức 1: Nồng độ cồn trong máu dương và chưa vượt quá 50 mg/100 ml máu	Từ 2 triệu đồng đến 3 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 10 tháng đến 12 tháng
Mức 2: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 50 mg/100 ml máu và chưa vượt quá 80 mg/100 ml máu	Từ 4 triệu đồng đến 5 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 16 tháng đến 18 tháng
Mức 3: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 80 mg / 100 ml máu	Từ 6 triệu đồng đến 8 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 22 tháng đến 24 tháng

Giả sử nồng độ cồn trong máu của một người sau khi uống rượu bia được tính theo công thức sau: $y = 0,076 - 0,008t$, trong đó y được tính theo đơn vị % và t là số giờ tính từ thời điểm uống rượu bia.

a) Hỏi 3 giờ sau khi uống rượu bia, nếu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức nào?

a) Nếu người này đã uống rượu bia, thì sau bao lâu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ không bị xử phạt.

Bài 2. Một nhà tài trợ dự kiến tổ chức một buổi đi dã ngoại tập thể nhằm giúp các bạn học sinh vùng cao trải nghiệm thực tế tại một trang trại trong 1 ngày (từ 14h00 ngày hôm trước đến 12h00 ngày hôm sau). Cho biết số tiền tài trợ dự kiến là 30 triệu đồng và giá thuê các dịch vụ và phòng nghỉ là 17 triệu đồng 1 ngày, giá mỗi suất ăn trưa, ăn tối là 60 000 đồng và mỗi suất ăn sáng là 30 000 đồng. Hỏi có thể tổ chức cho nhiều nhất bao nhiêu bạn tham gia được?

DẠNG 5

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Mức độ khó

Để chứng minh $A > B$, Ta chứng minh $A - B > 0$

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall M$

Bài 1. Với mọi x, y, z , chứng minh:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Bài 2. Với mọi a, b , chứng minh:

a) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$

b) $a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}$

c) $\frac{(a + b)^2}{2} \geq 2ab$

d) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$

e) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Bài 3. Với mọi a, b, c , chứng minh:

a) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$

c) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

Bài 4. Với mọi a, b, c, d, e , chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Bài 5. Với mọi a, b, c , chứng minh:

a) $a^2 + b^2 \geq ab$

b) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$

c) $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \geq 0$

d) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$

e) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a + b + c)$

f) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b + c)$

Bài 6. Với mọi a, b, c , chứng minh:

a) $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$

b) $(a^2 + b^2)^2 \geq ab(a + b)^2$

c) $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$

d) $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$

e) $2(a^3 + b^3) \geq (a + b)(a^2 + b^2)$

f) $(a + b)(a^3 + b^3) \leq 2(a^4 + b^4)$

BÀI 2**BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT****1. Bất đẳng thức****a. Nhắc lại thứ tự trong tập hợp số thực**

- Nếu số thực a nhỏ hơn số thực b thì ta viết $a < b$ hay $b > a$.
- Số thực lớn hơn 0 gọi là số thực dương.
- Số thực nhỏ hơn 0 gọi là số thực âm.
- Trên trục số nằm ngang, nếu số thực a nằm bên trái số thực b thì $a < b$ hay $b > a$.



- Tổng của hai số thực dương là số thực dương. Tổng của hai số thực âm là số thực âm.
- Với hai số thực a, b , ta có:
 $ab > 0$ thì a, b cùng dấu (hay cùng dương hoặc cùng âm) và ngược lại.
 $ab < 0$ thì a, b trái dấu và ngược lại.
- Với hai số thực a, b dương, nếu $a > b$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

b. Khái niệm bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b, a \geq b, a \leq b$) là **bất đẳng thức** và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức.

Chú ý:

- Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c < d$ (hay $a > b$ và $c > d$) được gọi là **bất đẳng thức cùng chiều**.
- Hai bất đẳng thức $a < b$ và $c > d$ (hay $a > b$ và $c < d$) được gọi là **bất đẳng thức ngược chiều**.

c. Tính chất bắc cầu

Cho ba số a, b, c . Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.



Chú ý: Tính chất bắc cầu vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<, \leq, \geq$.

2. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng

Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của một bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Cho ba số a, b, c . Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$.

Chú ý: Tính chất vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<, \leq, \geq$.

3. Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số **dương** ta được bất đẳng thức mới **cùng chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Khi nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số **âm** ta được bất đẳng thức mới **ngược chiều** với bất đẳng thức đã cho.

Cho ba số a, b, c và $a > b$

- Nếu $c > 0$ thì $a.c > b.c$.
- Nếu $c < 0$ thì $a.c < b.c$.

Chú ý: Tính chất vẫn đúng với các bất đẳng thức có dấu $<, \leq, \geq$.

DẠNG 1

DIỄN TẢ MỘT KHẲNG ĐỊNH NÀO ĐÓ

Bài 1. Hãy chỉ ra các bất đẳng thức diễn tả mỗi khẳng định sau:

- a) x nhỏ hơn 5. b) a không lớn hơn b . c) m không nhỏ hơn n .

Lời giải

a) Để diễn tả x nhỏ hơn 5, ta có bất đẳng thức $x < 5$.

b) Ta có a không lớn hơn b hay a nhỏ hơn hoặc bằng b .

Do đó, để diễn tả a không lớn hơn b , ta có bất đẳng thức $a \leq b$;

c) Ta có m không nhỏ hơn n hay m lớn hơn hoặc bằng n .

Do đó, để diễn tả m không nhỏ hơn n , ta có bất đẳng thức $m \geq n$.

Bài 2. Viết một bất đẳng thức phù hợp trong mỗi trường hợp sau:

- a) Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô;
b) Xe buýt chở được tối đa 45 người;
c) Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20 000 đồng.

Lời giải

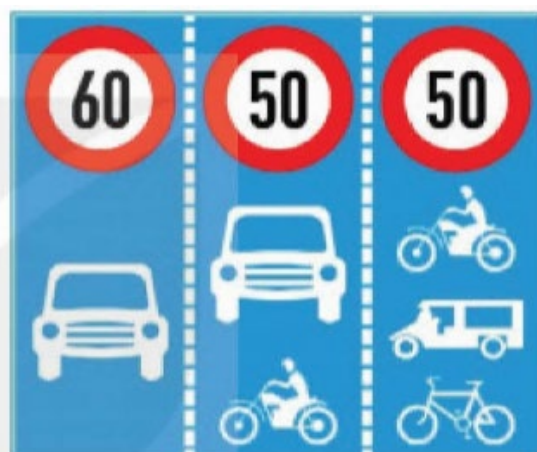
a) Gọi x (tuổi) là số tuổi của bạn, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho “Bạn phải ít nhất 18 tuổi mới được phép lái ô tô” là $x \geq 18$.

b) Gọi y (người) là số người xe buýt có thể chở được, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho “Xe buýt chở được tối đa 45 người” là $y \leq 45$.

c) Gọi z (đồng) là mức lương cho một giờ làm việc của người lao động, khi đó bất đẳng thức phù hợp cho “Mức lương tối thiểu cho một giờ làm việc của người lao động là 20 000 đồng” là $z \geq 20\,000$.

Bài 3. Khi đi đường, chúng ta có thể thấy các biển báo giao thông báo hiệu giới hạn tốc độ mà xe cơ giới được phép đi.

Em có biết ý nghĩa của biển báo giao thông ở Hình 2.3 (biển báo giới hạn tốc độ tối đa cho phép theo xe, trên từng làn đường) không?



Hình 2.3. Biển báo giao thông P.127c

Lời giải

– Hình 2.3 là Biển ghép tốc độ tối đa cho phép theo phương tiện, trên từng làn đường.

– Ý nghĩa của biển báo giao thông ở Hình 2.3:

Làn trái: chỉ dành riêng cho ô tô với tốc độ tối đa là 60 km/h.

Làn giữa: dành cho ô tô và xe máy với tốc độ tối đa là 50 km/h.

Làn phải: dành cho xe máy, xe ba bánh và xe đạp với tốc độ tối đa là 50 km/h.

Bài 4. Dùng các dấu $>$, $<$, \geq , \leq để diễn tả:

a) Tốc độ v đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4a.

b) Trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu đúng quy định với biển báo giao thông ở Hình 4b.

**Lời giải**

a) Trong Hình 4a, biển báo chỉ tốc độ tối đa cho phép là 70 km/h.

Do đó ta có $v \leq 70$.

b) Trong Hình 4a, biển báo chỉ trọng tải P của toàn bộ xe khi đi qua cầu không vượt quá 10 tấn.

Do đó ta có $P \leq 10$.

Bài 5. Theo quy định của một hãng bay, khối lượng hành lý xách tay của khách hàng phổ thông không được vượt quá 12 kg. Gọi m là khối lượng hành lý xách tay của một khách hàng phổ thông. Hệ thức nào biểu diễn khối lượng hành lý đúng quy định của hãng bay?

Lời giải

Khối lượng hành lý xách tay của khách hàng phổ thông không được vượt quá 12 kg, nghĩa là khối lượng hành lý đúng quy định của hãng bay nhỏ hoặc bằng 12 kg.

Vậy hệ thức biểu diễn khối lượng hành lý đúng quy định của hãng bay là: $m \leq 12$.

Bài 6. Gọi x là số tuổi của bạn Việt, y là số tuổi của bạn Nam, biết rằng bạn Nam lớn tuổi hơn bạn Việt. Hãy dùng bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau 5 năm nữa.

Lời giải

Để biểu diễn bạn Nam lớn tuổi hơn bạn Việt, ta có bất đẳng thức $x < y$.

Để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn Việt và Nam sau ba năm nữa, ta cộng 2 vế của bất đẳng thức với 3, ta được: $x + 5 < y + 5$.

Vậy bất đẳng thức để biểu diễn mối quan hệ về tuổi của hai bạn đó ở hiện tại và sau ba năm nữa là $x + 5 < y + 5$

DẠNG 2**CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

Bài 1. Chứng minh:

$$a) \sqrt{2025} - \sqrt{5} > \sqrt{2024} - \sqrt{5}$$

$$b) \frac{1}{2024} + 2023 < \frac{1}{2025} + 2023$$

Lời giải

a) Do $2025 > 2024$ nên $\sqrt{2025} > \sqrt{2024}$ do đó $\sqrt{2025} - \sqrt{5} > \sqrt{2024} - \sqrt{5}$

Vậy $\sqrt{2025} - \sqrt{5} > \sqrt{2024} - \sqrt{5}$

b) Do $\frac{1}{2024} < \frac{1}{2025}$ nên $\frac{1}{2024} + 2023 < \frac{1}{2025} + 2023$

Vậy $\frac{1}{2024} + 2023 < \frac{1}{2025} + 2023$

Bài 2. Cho $a \geq 2b$. Chứng minh:

$$a) 2a + 7 > a + 2b + 7$$

$$b) 4b + 4a \leq 5a + 2b.$$

Lời giải

Do $a \geq 2b$ nên $a - 2b \geq 0$.

a) Xét hiệu $(2a + 7) - (a + 2b + 7) = 2a + 7 - a - 2b - 7 = a - 2b \geq 0$.

Vậy $2a + 7 > a + 2b + 7$.

b) Xét hiệu $(5a + 2b) - (4b + 4a) = 5a + 2b - 4b - 4a = a - 2b \geq 0$.

Vậy $4b + 4a \leq 5a + 2b$.

Bài 3. Chứng minh:

$$a) 2m + 4 > 2n + 3 \text{ với } m > n.$$

$$b) -3a + 5 > -3b + 5 \text{ với } a < b.$$

$$c) (a - 1)^2 \geq 4 - 2a \text{ với } a^2 \geq 3.$$

Lời giải

a) Do $m > n$ nên $2m > 2n$, suy ra $2m + 3 > 2n + 3$, do đó $2m + 4 > 2n + 3$.

Vậy $-3a + 5 > -3b + 5$ với $m > n$;

b) Do $a < b$ nên $-3a > -3b$, suy ra $-3a + 5 > -3b + 5$.

Vậy $-3a + 5 > -3b + 5$ với $a < b$.

c) Do $a^2 \geq 3$ nên $a^2 - 2a + 1 \geq 3 - 2a + 1$, suy ra $(a - 1)^2 \geq 4 - 2a$.

Vậy $(a - 1)^2 \geq 4 - 2a$ với $a^2 \geq 3$.

Bài 4. Cho $a \leq 1$. Chứng minh: $(a - 1)^2 \geq a^2 - 1$.

Lời giải

Xét hiệu $(a - 1)^2 - (a^2 - 1) = a^2 - 2a + 1 - a^2 + 1 = 2 - 2a$.

Do $a \leq 1$ nên $2a \leq 2$, suy ra $2 - 2a \geq 0$, hay $(a - 1)^2 - (a^2 - 1) \geq 0$.

Vậy $(a - 1)^2 \geq a^2 - 1$.

DẠNG 3 SO SÁNH CÁC SỐ

Bài 1. So sánh hai số a và b , nếu:

a) $a + 2024 < b + 2024$

b) $-2025a + 9 > -2025b + 9$.

Lời giải

a) Ta có: $a + 2024 < b + 2024$

Suy ra: $a + 2024 - 2024 < b + 2024 - 2024$ hay $a < b$.

Vậy $a < b$.

b) Ta có: $-2025a + 9 > -2025b + 9$.

$-2025a + 9 - 9 > -2025b + 9 - 9$

$-2025a > -2025b$

$$-2025a \left(-\frac{1}{2025} \right) < -2025b \left(-\frac{1}{2025} \right)$$

Hay $a < b$

Vậy $a < b$.

Bài 2. So sánh hai số $3 + 23^{2024}$ và $4 + 23^{2024}$.

Lời giải

Ta có $3 < 4$.

Cộng hai vế của bất đẳng thức với 23^{2024} , ta được: $3 + 23^{2024} < 4 + 23^{2024}$

Bài 3. Hãy so sánh: $(-163) \cdot (-75)^{15}$ và $(-162) \cdot (-75)^{15}$.

Lời giải

Ta có $-163 < -162$.

Nhân cả hai vế bất đẳng thức với $(-75) \cdot 15$, ta được: $(-163) \cdot (-75)^{15} > (-162) \cdot (-75)^{15}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 4. So sánh x và y trong mỗi trường hợp sau:

a) $x - \frac{1}{3} \leq y - \frac{1}{3}$

b) $2x + 2023 > 2y + 2023$

c) $-\frac{2024}{2025} - 3x \geq -\frac{2024}{2025} - 3y$

Bài 5. Số a là âm hay dương nếu:

a) $-4a \leq 2a$

b) $3a \geq 15a$

c) $6a > 24a$

Bài 6. So sánh m và n biết $m - \frac{1}{2} = n$

Lời giải

Ta có: $m - \frac{1}{2} = n \Rightarrow m - n = \frac{1}{2} \Rightarrow m - n > 0 \Rightarrow m > n$

Bài 7. Cho $a - 2 \leq b - 1$. So sánh hai biểu thức $2a - 4$ và $2b - 2$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức với 2 ta được:

$$2(a - 2) \leq 2(b - 1) \Leftrightarrow 2a - 4 \leq 2b - 2$$

Bài 8. So sánh m và m^2 với $0 < m < 1$.

Lời giải

Xét hiệu: $m - m^2 = m(1 - m)$

Vì $0 < m < 1$ nên $m > 0; 1 - m > 0 \Rightarrow m(1 - m) > 0$

hay $m - m^2 > 0$ do đó $m > m^2$

Bài 9. Cho bất đẳng thức $a > b$ và cho số thực c .

a) Xác định dấu của hiệu: $(a + c) - (b + c)$.

b) Hãy so sánh: $a + c$ và $b + c$.

Lời giải

Do $a > b$ nên $a - b > 0$.

a) Ta xét hiệu: $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b > 0$.

Vậy $(a + c) - (b + c) > 0$.

b) Theo câu a, ta có $(a + c) - (b + c) > 0$, nên $a + c > b + c$.

Vậy $a + c > b + c$.

Bài 10. Cho bất đẳng thức $a > b$ và số thực $c > 0$.

a) Xác định dấu của hiệu: $ac - bc$.

b) Hãy so sánh: ac và bc .

Lời giải

Do $a > b$ nên $a - b > 0$.

a) Xét hiệu $ac - bc = c(a - b)$.

Vì $c > 0$ và $a - b > 0$ nên $c(a - b) > 0$, suy ra $ac - bc > 0$.

Vậy $ac - bc > 0$.

b) Theo câu a, ta có $ac - bc > 0$, suy ra $ac > bc$.

Bài 11. Cho các bất đẳng thức $a > b$ và $b > c$.

a) Xác định dấu của các hiệu: $a - b$, $b - c$, $a - c$.

b) Hãy so sánh: a và c .

Lời giải

a) Do $a > b$ nên $a - b > 0$.

Do $b > c$ nên $b - c > 0$.

Xét tổng $(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c$.

Do $a - b > 0$ và $b - c > 0$ nên $(a - b) + (b - c) > 0$.

Do đó $a - c > 0$.

b) Theo câu a, ta có $a - c > 0$ nên $a > c$. Vậy $a > c$.

DẠNG 4

TOÁN THỰC TẾ

Bài 1. Nồng độ cồn trong máu (tiếng Anh là *Blood Alcohol Content*, viết tắt: BAC) được định nghĩa là tỉ lệ phần trăm lượng rượu (ethyl alcohol hoặc ethanol) trong máu của một người. Chẳng hạn, nồng độ cồn trong máu là 0,05% nghĩa là có 50 mg rượu trong 100 ml máu. Càng uống nhiều rượu bia thì nồng độ cồn trong máu càng cao và càng nguy hiểm khi tham gia giao thông. Nghị định 100/2019/NĐ-CP quy định mức xử phạt vi phạm hành chính đối với người điều khiển xe gắn máy uống rượu bia khi tham gia giao thông như sau:

Mức độ vi phạm	Hình thức xử phạt
Mức 1: Nồng độ cồn trong máu dương và chưa vượt quá 50 mg/100 ml máu	Từ 2 triệu đồng đến 3 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 10 tháng đến 12 tháng
Mức 2: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 50 mg/100 ml máu và chưa vượt quá 80 mg/100 ml máu	Từ 4 triệu đồng đến 5 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 16 tháng đến 18 tháng
Mức 3: Nồng độ cồn trong máu vượt quá 80 mg / 100 ml máu	Từ 6 triệu đồng đến 8 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 22 tháng đến 24 tháng

Giả sử nồng độ cồn trong máu của một người sau khi uống rượu bia được tính theo công thức sau: $y = 0,076 - 0,008t$, trong đó y được tính theo đơn vị % và t là số giờ tính từ thời điểm uống rượu bia.

a) Hỏi 3 giờ sau khi uống rượu bia, nếu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức nào?

a) Nếu người này đã uống rượu bia, thì sau bao lâu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ không bị xử phạt.

Lời giải

a) Sau 3 giờ uống rượu bia, nồng độ cồn trong máu của người đó là:

$$y = 0,076 - 0,008.3 = 0,052 (\%)$$

Tức là, nồng độ cồn trong máu là 52 mg rượu trong 100ml máu.

Do $50 < 52 < 80$ nên nếu người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ bị xử phạt ở mức 2, với hình thức xử phạt từ 4 triệu đồng đến 5 triệu đồng và tước bằng lái xe từ 16 tháng đến 18 tháng.

b) người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ không bị xử phạt khi $y = 0$ hay

$$0,076 - 0,008t = 0$$

$$- 0,008t = -0,076$$

$$t = 9,5 \text{ giờ}$$

Vậy, nếu người này đã uống rượu bia thì sau 9,5 giờ, người này điều khiển xe gắn máy tham gia giao thông thì sẽ không bị xử phạt.

Bài 2. Một nhà tài trợ dự kiến tổ chức một buổi đi dã ngoại tập thể nhằm giúp các bạn học sinh vùng cao trải nghiệm thực tế tại một trang trại trong 1 ngày (từ 14h00 ngày hôm trước đến 12h00 ngày hôm sau). Cho biết số tiền tài trợ dự kiến là 30 triệu đồng và giá thuê các dịch vụ và phòng nghỉ là 17 triệu đồng 1 ngày, giá mỗi suất ăn trưa, ăn tối là 60 000 đồng và mỗi suất ăn sáng là 30 000 đồng. Hỏi có thể tổ chức cho nhiều nhất bao nhiêu bạn tham gia được?

Lời giải

Gọi x là số bạn học sinh có thể tham gia được (học sinh) ($x \in \mathbb{N}^*$).

Theo bài, số tiền còn lại sau khi thu dịch vụ và phòng nghỉ là: $30 - 17 = 13$ (triệu đồng) = 13 000 (nghìn đồng).

Số tiền ăn sáng, ăn trưa và ăn tối của 1 bạn là: $60\,000 + 30\,000 + 60\,000 = 150\,000$ (đồng) = 150 (nghìn đồng).

Như vậy, số tiền ăn của x bạn học sinh trong chuyến đi là $150x$ (nghìn đồng).

Khi đó ta có: $150x \leq 13\,000$.

$$\text{Suy ra } x \leq \frac{13000}{150} \text{ hay } x \leq \frac{260}{3} \approx 86,7$$

Mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên số bạn học sinh nhiều nhất có thể tham gia được là 86 bạn.

Vậy nhà tài trợ có thể tổ chức cho nhiều nhất 86 bạn tham gia được chuyến đi.

DẠNG 5
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
Mức độ khó

Để chứng minh $A > B$, Ta chứng minh $A - B > 0$

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall M$

Bài 1. Với mọi x, y, z , chứng minh:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Lời giải

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

Xét hiệu ta có:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz - 2zx$

Xét hiệu ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx \geq 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2zx + z^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2 - 2(x - y)z + z^2 \geq 0$$

$$(x - y + z)^2 \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $x + z = y$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

Xét hiệu ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) \geq 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \geq 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $x = y = z = 1$

Bài 2. Với mọi a, b , chứng minh:

$$\text{a) } \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{b) } a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \quad \text{c) } \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$$

$$\text{d) } a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \quad \text{e) } a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Xét hiệu ta có :

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq 0$$

$$2a^2+2b^2 - (a^2+2ab+b^2) \geq 0$$

$$a^2+2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a+b)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $a = b$

$$\text{b) } a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Ta có:

$$2a^2+2b^2 \geq a^2+2ab+b^2$$

$$a^2+b^2-2ab \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $a = b$

$$\text{c) } \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$$

Ta có:

$$a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$$

$$a^2+2ab+b^2-4ab \geq 0$$

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $a = b$

$$\text{d) } a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$$

Ta có:

$$4a^2 + b^2 - 4ab \geq 0$$

$$(2a)^2 - 4ab + b^2 \geq 0$$

$$(2a - b)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $2a = b$

e) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Ta có:

$$a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b \geq 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $a = b = 1$

Bài 3. Với mọi a, b, c , chứng minh:

a) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$

c) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

Lời giải

a) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2$

Ta có:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}{9}$$

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) \geq 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $a = b = c$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$

Ta có:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $a = b = c$

c) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

Ta có:

$$a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab + 4ac - 8bc \geq 0$$

$$a^2 - 4a(b-c) + 4(b^2 + c^2 - 2bc) \geq 0$$

$$a^2 - 4a(b-c) + 4(b-c)^2 \geq 0$$

$$(a - 2b + 2c)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi $a + 2c = 2b$

Bài 4. Với mọi a, b, c, d, e , chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Lời giải

Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geq 0$$

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 - 4ab - 4ac - 4ad - 4ae \geq 0$$

$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2) \geq 0$$

$$(a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$

Bài 5. Với mọi a, b, c , chứng minh:

a) $a^2 + b^2 \geq ab$

b) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$

c) $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \geq 0$

d) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$

e) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a + b + c)$

f) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b + c)$

Lời giải

a) $a^2 + b^2 \geq ab$

ta có:

$$a^2 + b^2 - ab \geq 0$$

$$a^2 - 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

b) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$

Ta có:

$$2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac \geq 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 \geq 0$$

c) $a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \geq 0$

Ta có:

$$(a^4 - 2a^2.ab + a^2b^2) + (b^4 - 2ab.b^2 + a^2b^2) \geq 0$$

$$(a^2 - ab)^2 + (b^2 - ab)^2 \geq 0$$

d) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$

Ta có:

$$a^4 + b^4 + c^2 + 1 - 2a^2b^2 + 2a^2 - 2ac - 2a \geq 0$$

$$(a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0$$

$$(a^2 - b^2)^2 + (a - c)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

e) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a + b + c)$

Ta có:

$$(a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + \frac{3}{4} \geq 0$$

$$\left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

f) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b + c)$

ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac \geq 0$$

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac \geq 0$$

$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + 2a^2 \geq 0$$

$$(a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + 2a^2 \geq 0$$

Bài 6. Với mọi a, b, c , chứng minh:

a) $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$

b) $(a^2 + b^2)^2 \geq ab(a + b)^2$

c) $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$

d) $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$

e) $2(a^3 + b^3) \geq (a + b)(a^2 + b^2)$

f) $(a + b)(a^3 + b^3) \leq 2(a^4 + b^4)$

Lời giải

a) $a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 \geq 0$

ta có:

$$a^3(a+b) + b^3(a+b) \geq 0$$

$$(a^3 + b^3)(a+b) \geq 0$$

$$(a+b)^2(a^2 - ab + b^2) \geq 0$$

b) $(a^2 + b^2)^2 \geq ab(a+b)^2$

Ta có:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq ab(a^2 + 2ab + b^2) = a^3b + 2a^2b^2 + ab^3$$

$$(a^4 - a^3b) + (b^4 - ab^3) \geq 0$$

$$a^3(a-b) + b^3(b-a) \geq 0$$

$$(a^3 - b^3)(a-b) \geq 0$$

$$(a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

c) $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$

Ta có:

$$a^3 + b^3 + abc \geq a^2b + ab^2 + abc$$

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \geq 0$$

$$a^2(a-b) + b^2(b-a) \geq 0$$

$$(a-b)^2(a+b) \geq 0$$

d) $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$

Ta có:

$$4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$3a^3 - 3a^2b + 3b^3 - 3ab^2 \geq 0$$

$$3a^2(a-b) + 3b^2(b-a) \geq 0$$

$$3(a-b)(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$3(a-b)^2(a+b) \geq 0$$

e) $2(a^3 + b^3) \geq (a+b)(a^2 + b^2)$

Ta có:

$$2a^3 + 2b^3 \geq a^3 + ab^2 + a^2b + b^3$$

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \geq 0$$

$$a^2(a-b)+b^2(b-a)\geq 0$$

$$(a-b)^2(a+b)\geq 0$$

$$\text{f) } (a+b)(a^3+b^3)\leq 2(a^4+b^4)$$

Ta có:

$$a^4+ab^3+a^3b+b^4\leq 2a^4+2b^4$$

$$a^4-ab^3+b^4-a^3b\geq 0$$

$$a^3(a-b)+b^3(b-a)\geq 0$$

$$(a^3-b^3)(a-b)\geq 0$$

$$(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\geq 0$$

BÀI 3**BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn****a. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hay $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

b. Nghiệm của bất phương trình

Số x_0 được gọi là nghiệm của bất phương trình $A(x) \leq B(x)$ nếu $A(x_0) \leq B(x_0)$ là khẳng định đúng.

Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

2. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

<p>Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a > 0$) được giải như sau:</p> $ax + b > 0$ $ax > -b$ $x > \frac{-b}{a}.$ <p>Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:</p> $x > \frac{-b}{a}.$	<p>Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a < 0$) được giải như sau:</p> $ax + b > 0$ $ax > -b$ $x < \frac{-b}{a}.$ <p>Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:</p> $x < \frac{-b}{a}.$
--	--

Nhận xét: Các bất phương trình bậc nhất $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$, trong đó a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được giải bằng cách tương tự.

DẠNG 1**XÁC ĐỊNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT**

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hay $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$.

Bài 1. Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không?

a) $0x - 2024 \geq 0$

b) $2024x + 2025 < 0$

c) $-\frac{1}{11}x \leq 0$

d) $\frac{x^2}{2} - 1 > 0$

e) $-|x| + 2024 > 0$

f) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = 0$

g) $\frac{1}{x} - 3 \leq 0$

h) $\frac{-2x+1}{2025} \geq 0$

Bài 2. Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m :

a) $\left(m^2 + \frac{1}{2}\right)x - 1 \leq 0$

b) $-(m^2 + m + 2)x \leq -m + 2024$

DẠNG 2

GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT CƠ BẢN

Cách giải bất phương trình cơ bản

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a > 0$) được giải như sau:

$$ax + b > 0$$

$$ax > -b$$

$$x > \frac{-b}{a}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$x > \frac{-b}{a}$$

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a < 0$) được giải như sau:

$$ax + b > 0$$

$$ax > -b$$

$$x < \frac{-b}{a}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$x < \frac{-b}{a}$$

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x - 8 > 0$

b) $9 - 3x \leq 0$

c) $5 - \frac{1}{3}x < 1$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3x+5}{2} - x \geq 1 + \frac{x+2}{3}$

b) $\frac{x-2}{3} - x - 2 \leq \frac{x-17}{2}$

c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{4} \leq \frac{3x+1}{6} - \frac{x-4}{12}$

Bài 3. Giải các bất phương trình

a) $x^2 - 3x + 1 > 2(x-1) - x(3-x)$

b) $(x-1)^2 + x^2 \leq (x+1)^2 + (x+2)^2$

c) $(x^2 + 1)(x-6) \leq (x-2)^3$

Bài 4. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b) Tìm x để $A > 0$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(2x-3) \geq 4(2-x) + 13$

b) $6x - 1 - (3x + 9) \leq 8x - 7 - (2x - 1)$

c) $8x + 17 - 3(2x + 3) \leq 10(x + 2)$

d) $17(x + 5) + 41x \geq -15(x + 4) - 1$

e) $4(2-3x) - (5-x) > 11-x$

f) $2(3-x) - 1,5(x-4) < 3-x$

ĐS: a) $x \geq 3$ b) $x \geq -\frac{4}{3}$ c) $x \geq -\frac{3}{2}$ d) $x \geq -\frac{83}{73}$ e) $x < -\frac{4}{5}$ f) $x > \frac{18}{5}$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x+3)(2x-1) > 4x(x+2)$

b) $5(x-1) - x(7-x) < x^2$

c) $(x-1)^2 + (x-3)^2 > x^2 + (x+1)^2$

d) $3(x+1) + 2x(x-1) < 2x^2$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{3} < \frac{x+6}{2}$

b) $\frac{5(x-1)}{6} - 1 \geq \frac{2(x+1)}{3}$

c) $2 + \frac{3(x+1)}{8} \leq 3 - \frac{x-1}{4}$

d) $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$

a) $8x-3 < 5\left(\frac{8x}{5}+3\right)$

b) $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

c) $\frac{x+5}{6} + \frac{x-1}{3} \leq \frac{x+3}{2} - 1$

d) $x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$

Bài 8. Với những giá trị nào của x thì:a) Giá trị của biểu thức $7-3(x+1)$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $2(x-3)-4$.b) Giá trị của biểu thức $\frac{x+2}{3} - x + 1$ lớn hơn giá trị của biểu thức $x+3$.c) Giá trị của biểu thức $(x+1)^2 - 4$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x-3)^2$.d) Giá trị của biểu thức $x - \frac{1-\frac{3}{2}x}{4}$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $\frac{2-\frac{1}{4}x}{3} + 2$.

ĐS: a) $x \leq \frac{14}{5}$ b) $x < -2$ c) $x \leq \frac{3}{2}$ d) $x < 2$.

Bài 9. Giải các bất phương trình

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$

b) $\frac{2x+1}{-3} - \frac{2x^2+3}{-4} > \frac{x(5-3x)}{-6} - \frac{4x+1}{-5}$

c) $\frac{4x-2}{3} - x + 3 \leq \frac{1-5x}{4}$

d) $\frac{x+4}{5} - x - 5 \geq \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$

Bài 10. Giải các bất phương trình

a) $\frac{5x^2-3}{5} + \frac{3x-1}{4} < \frac{x(2x+3)}{2} - 5$

b) $\frac{5x-2}{-3} - \frac{2x^2-x}{-2} > \frac{x(1-3x)}{-3} - \frac{5x}{-4}$

c) $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

d) $x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$

Bài 11. Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2-3x}\right) : \left(\frac{x^2}{27-3x^2} + \frac{1}{x+3}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B

b) Tìm x để $B < -1$ Đáp số: a) $x \neq -3; x \neq 0; B = \frac{-x-3}{x}$, b) $x > 0$

DẠNG 3**BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BIẾN ĐỔI ĐẶC BIỆT****Bất phương trình dạng đặc biệt:**

$$\frac{x+a}{b} + \frac{x+c}{d} < \frac{x+e}{f} + \frac{x+g}{h}$$

Phương pháp giải:

- Nếu $a+b=c+d=e+f=g+h=k$. Ta cộng mỗi phân thức thêm 1.
- Nếu $a-b=c-d=e-f=g-h=k$. Ta cộng mỗi phân thức thêm -1.
- Sau đó quy đồng từng phân thức, chuyển về nhóm nhân tử chung đưa về dạng

$$(x-k)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h}\right) < 0.$$

Chú ý

- Cần xét xem $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h}\right)$ là số âm hay dương để đưa ra đánh giá về dấu của $(x-k)$.
- Có thể mở rộng số phân thức nhiều hơn và tùy bài toán ta sẽ cộng hoặc trừ đi hằng số thích hợp.

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \frac{x+2}{6} + \frac{x+5}{3} > \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$$

$$b) \frac{x-2}{1007} + \frac{x-1}{1008} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}.$$

Bài 2. Giải các bất phương trình ẩn x sau:

$$a) \frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$$

$$b) \frac{x-2}{2002} + \frac{x-4}{2000} < \frac{x-3}{2001} + \frac{x-5}{1999}$$

$$c) \frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c \text{ với } (a, b, c > 0)$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 3.** Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

$$a) \frac{x+1987}{2002} + \frac{x+1988}{2003} > \frac{x+1989}{2004} + \frac{x+1990}{2005} \quad b) \frac{x-1}{99} + \frac{x-3}{97} + \frac{x-5}{95} < \frac{x-2}{98} + \frac{x-4}{96} + \frac{x-6}{94}$$

$$c) \frac{x-1987}{2002} + \frac{x-1988}{2003} > \frac{x-1989}{2004} + \frac{x-1990}{2005} \quad d) \frac{x+1}{99} + \frac{x+3}{97} + \frac{x+5}{95} < \frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+6}{94}$$

$$ĐS: a) x > 15 \quad b) x > 100$$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

a) $\frac{x+1}{35} + \frac{x+3}{33} \geq \frac{x+5}{31} + \frac{x+7}{29}$

b) $\frac{x-85}{15} + \frac{x-74}{13} + \frac{x-67}{11} \leq 6$

c) $\frac{x-1}{13} - \frac{2x-13}{15} < \frac{3x-15}{27} - \frac{4x-27}{29}$

d) $\frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} - \frac{x+5}{61} - \frac{x+7}{59} < 0$

e) $\frac{x+29}{31} - \frac{x+27}{33} \leq \frac{x+17}{43} - \frac{x+15}{45}$

f) $\frac{x+6}{1999} + \frac{x+8}{1997} \geq \frac{x+10}{1995} + \frac{x+12}{1993}$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

a) $\frac{x-10}{1994} + \frac{x-8}{1996} + \frac{x-6}{1998} > \frac{x-1998}{6} + \frac{x-1996}{8} + \frac{x-1994}{10}$

b) $\frac{x-1995}{5} - \frac{x-5}{1995} + \frac{x-1997}{3} - \frac{x-3}{1997} + \frac{x-1999}{1} - \frac{x-1}{1999} < 0$

c) $\frac{1909-x}{91} + \frac{1907-x}{93} + \frac{1905-x}{95} + \frac{1903-x}{91} > 4$

d) $\frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} > \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25}$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

a) $\frac{x-2}{2017} + \frac{x-3}{2018} < \frac{x-4}{2019} + \frac{x-5}{2020}$

b) $\frac{x-1009}{1001} + \frac{x-4}{1003} + \frac{x+2010}{1005} \geq 7$

c) $\frac{x-3}{2011} + \frac{x-2}{2012} \leq \frac{x-2012}{2} + \frac{x-2011}{3}$

d) $\frac{x+1}{2009} + \frac{x+2}{2008} + \frac{x+3}{2007} + \frac{x+4}{2006} + 4 > 0$

e) $\frac{x+1}{2013} + \frac{x+2}{2012} < \frac{x+3}{2011} + \frac{x+4}{2010}$

f) $\frac{x-21}{1978} - \frac{x-1978}{21} + \frac{x-19}{1980} - \frac{x-1980}{19} \geq 0$

DẠNG 4

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Biểu thị (theo x) tổng khối lượng của các hộp xếp ở đĩa cân bên trái, đĩa cân bên phải (hình vẽ) lần lượt là $3x + 4$, $x + 6$. Do đĩa cân lệch về bên trái nên ta có hệ thức: $3x + 4 > x + 6$.



Trong toán học, hệ thức $3x + 4 > x + 6$ được gọi là gì?

Bài 2. Để hưởng ứng phong trào “Trồng cây gây rừng”, lớp 9A có kế hoạch trồng ít nhất 100 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 54 cây. Để đạt được kế hoạch đề ra, lớp 9A cần trồng thêm ít nhất bao nhiêu cây xanh nữa?



Bài 3. Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

Bài 4. Một người đi bộ một quãng đường dài 18 km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5 km/h, về sau đi với vận tốc 4 km/h. Xác định độ dài đoạn đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h.

Bài 5. Trong cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi thí sinh phải trả lời 12 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi, mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 50 điểm trở lên sẽ được vào vòng thi tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?

Bài 6. Một kho chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi x là số ngày xuất xi măng của kho đó. Tìm x sao cho sau x ngày xuất hàng, khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn.

Bài 7. Đến ngày 31/12/2024, gia đình Cô Thúy đã tiết kiệm được số tiền là 250 triệu đồng. Sau thời điểm đó, mỗi tháng gia đình Cô Thúy đều tiết kiệm được 10 triệu đồng. Gia đình Cô Thúy dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng gia đình Cô Thúy có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được?

Bài 8. Bạn Minh Hiền có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Minh Hiền mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

Bài 9. Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

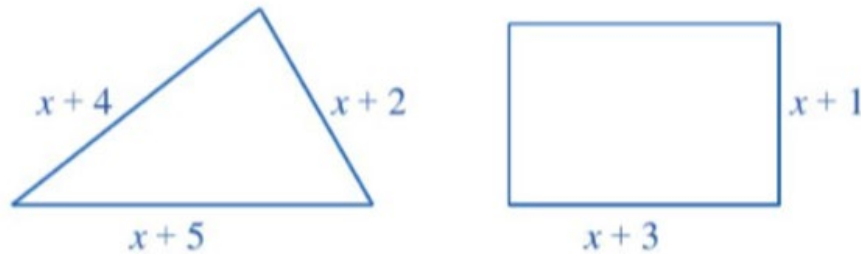
Bài 10. Để lập đội tuyển năng khiếu về bóng rổ của trường THCS Nguyễn Hiền, thầy Nam đưa ra quy định tuyển chọn như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 15 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được cộng 2 điểm; quả bóng ném ra ngoài bị trừ 1 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 15 điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả vào rổ?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Bác Hoàng dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6 500 m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày. Buổi sáng bác Hoàng chạy được 4 000 m. Gọi x là số mét bác Hoàng chạy bộ vào buổi chiều. Viết hệ thức chứa x biểu thị điều kiện để bác Hoàng chạy được như dự định.

Bài 12. Một kì thi Tiếng Anh gồm bốn kĩ năng: nghe, nói, đọc, viết. Kết quả của bài thi là điểm số trung bình của bốn kĩ năng này. Bạn Minh Nhi đã đạt được điểm số của ba kĩ năng nghe, đọc, viết lần lượt là 6,5; 6,5; 5,5. Hỏi bạn Minh Nhi cần đạt bao nhiêu điểm trong kĩ năng nói để đạt được của bài thi ít nhất là 6,25?

Bài 13. Tìm số thực dương x sao cho chu vi của hình tam giác lớn hơn chu vi của hình chữ nhật (ở hình vẽ dưới)



Bài 14. Để đổi từ độ Fahrenheit (độ F) sang độ Celsius (độ C), người ta dùng công thức sau: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

- a) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°F . Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ C?
- b) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°C . Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ F?

Bài 15. Một nhà máy sản xuất xi măng mỗi ngày đều sản xuất được 100 tấn xi măng. Lượng xi măng tồn trong kho của nhà máy là 300 tấn. Hỏi nhà máy đó cần sản xuất trong ít nhất bao nhiêu ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho)?

Bài 16. Chỉ số khối cơ thể BMI cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo.

Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức sau: $\text{BMI} = \frac{m}{h}$, trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét.

Dưới đây là bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo chỉ số BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương:

Nam	Nữ
BMI < 20: Gầy	BMI < 18: Gầy
$20 \leq \text{BMI} < 25$: Bình thường	$18 \leq \text{BMI} < 23$: Bình thường
$25 \leq \text{BMI} < 30$: Béo phì độ I (nhẹ)	$23 \leq \text{BMI} < 30$: Béo phì độ I (nhẹ)
$30 \leq \text{BMI} < 40$: Béo phì độ II (trung bình)	$30 \leq \text{BMI} < 40$: Béo phì độ II (trung bình)
$40 \leq \text{BMI}$: Béo phì độ III (nặng)	$40 \leq \text{BMI}$: Béo phì độ III (nặng)

- a) Giả sử một người đàn ông có chiều cao 1,68 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.
- b) Giả sử Cô Hồng có chiều cao 1,6 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của Cô Hồng dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

Bài 17. Trong một cuộc thi tuyển dụng việc làm, ban tổ chức quy định mỗi người ứng tuyển phải trả lời 25 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn bốn đáp án, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Người ứng tuyển chọn đáp án đúng sẽ được cộng thêm 2 điểm, chọn đáp án sai bị trừ đi 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển, ban tổ chức tặng cho mỗi người dự thi 5 điểm và theo quy định người ứng tuyển phải trả lời hết 25

câu hỏi; người nào có số điểm từ 25 trở lên mới được dự thi vòng tiếp theo. Hỏi người ứng tuyển phải trả lời chính xác ít nhất bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được vào vòng tiếp theo?

Bài 18. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%/ tháng. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hằng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Bài 19. Người ta dùng một loại xe tải để chở sữa tươi cho một nhà máy. Biết mỗi thùng sữa loại 180 ml nặng trung bình 10 kg. Theo khuyến nghị, trọng tải của xe (tức là tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5,25 tấn. Hỏi xe có thể chở được tối đa bao nhiêu thùng sữa như vậy, biết bác lái xe nặng 65 kg?

Bài 20. Một hãng viễn thông nước ngoài có hai gói cước như sau:

Gói cước A	Gói cước B
Cước thuê bao hằng tháng 32 USD	Cước thuê bao hằng tháng là 44 USD
45 phút miễn phí	Không có phút miễn phí
0,4 USD cho mỗi phút thêm	0,25 USD/phút

a) Hãy viết một phương trình xác định thời gian gọi (phút) mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau và giải phương trình đó.

b) Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào? Nếu khách hàng gọi 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào?

Bài 21. Bạn Trúc Linh tham dự một kì kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm 4 bài kiểm tra nghe, nói, đọc và viết. Mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra nghe, nói, đọc của Trúc Linh là 6,7. Hỏi bài kiểm tra viết của Trúc Linh cần được bao nhiêu điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên? Biết điểm trung bình được tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ nhất.

BÀI 3**BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN****1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn****a. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hay $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn x .

b. Nghiệm của bất phương trình

Số x_0 được gọi là nghiệm của bất phương trình $A(x) \leq B(x)$ nếu $A(x_0) \leq B(x_0)$ là khẳng định đúng.

Giải bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

2. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

<p>Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a > 0$) được giải như sau:</p> $ax + b > 0$ $ax > -b$ $x > \frac{-b}{a}.$ <p>Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:</p> $x > \frac{-b}{a}.$	<p>Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a < 0$) được giải như sau:</p> $ax + b > 0$ $ax > -b$ $x < \frac{-b}{a}.$ <p>Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:</p> $x < \frac{-b}{a}.$
--	--

Nhận xét: Các bất phương trình bậc nhất $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$, trong đó a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$ được giải bằng cách tương tự.

DẠNG 1**XÁC ĐỊNH BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT**

Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hay $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$.

Bài 1. Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không?

- a) $0x - 2024 \geq 0$ b) $2024x + 2025 < 0$ c) $-\frac{1}{11}x \leq 0$ d) $\frac{x^2}{2} - 1 > 0$
 e) $-|x| + 2024 > 0$ f) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = 0$ g) $\frac{1}{x} - 3 \leq 0$ h) $\frac{-2x+1}{2025} \geq 0$

Lời giải

- a) Không, vì hệ số của ẩn x là 0
 b) Có
 c) Có.
 d) Không, vì x^2 là ẩn bậc hai chứ không phải bậc một.
 e) Không, vì ẩn x nằm trong dấu giá trị tuyệt đối.
 f) Không, vì dấu "=" thể hiện đó là phương trình.
 h) Không, vì ẩn x nằm ở mẫu số.
 h) Có.

Bài 2. Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m :

- a) $\left(m^2 + \frac{1}{2}\right)x - 1 \leq 0$ b) $-(m^2 + m + 2)x \leq -m + 2024$

Lời giải

a) $\left(m^2 + \frac{1}{2}\right)x - 1 \leq 0$

Ta có: $m^2 + \frac{1}{2} > 0$ với mọi m

Nên $m^2 + \frac{1}{2} \neq 0$ với mọi m

b) $-(m^2 + m + 2)x \leq -m + 2024$

Ta có: $-(m^2 + m + 2) = -\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] < 0$ với mọi m

Nên $-(m^2 + m + 2) \neq 0$ với mọi m

DẠNG 2**GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT CƠ BẢN****Cách giải bất phương trình cơ bản**

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a > 0$)
được giải như sau:

$$ax + b > 0$$

$$ax > -b$$

$$x > \frac{-b}{a}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình
đã cho là:

$$x > \frac{-b}{a}.$$

Bất phương trình $ax + b > 0$ (với $a < 0$)
được giải như sau:

$$ax + b > 0$$

$$ax > -b$$

$$x < \frac{-b}{a}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã
cho là:

$$x < \frac{-b}{a}.$$

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x - 8 > 0$

b) $9 - 3x \leq 0$

c) $5 - \frac{1}{3}x < 1$

Lời giải

a)

$$2x - 8 > 0$$

$$2x > 8$$

$$x > 4$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 4$

b)

$$9 - 3x \leq 0$$

$$-3x \leq -9.$$

$$x \geq 3$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq 3$

c)

$$5 - \frac{1}{3}x < 1$$

$$-\frac{1}{3}x < -4.$$

$$x > 12$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 12$

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3x+5}{2} - x \geq 1 + \frac{x+2}{3}$

b) $\frac{x-2}{3} - x - 2 \leq \frac{x-17}{2}$

c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{4} \leq \frac{3x+1}{6} - \frac{x-4}{12}$

Lời giải

a)

$$\frac{3x+5}{2} - x \geq 1 + \frac{x+2}{3}$$

$$\frac{3(3x+5)}{6} - \frac{6x}{6} \geq \frac{6}{6} + \frac{2(x+2)}{6}$$

$$9x+15-6x \geq 6+2x+4$$

$$9x-6x-2x \geq 6+4-15$$

$$x \geq -5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq -5$

b)

$$\frac{x-2}{3} - x - 2 \leq \frac{x-17}{2}$$

$$\frac{2(x-2)-6x-6 \cdot 2}{6} \leq \frac{3(x-17)}{6}$$

$$2x-4-6x-12 \leq 3x-51$$

$$-4x-16 \leq 3x-51$$

$$-4x-3x \leq -51+16$$

$$-7x \leq -35$$

$$x \geq 5$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq 5$

c)

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{4} \leq \frac{3x+1}{6} - \frac{x-4}{12}$$

$$\frac{4(2x+1)-3(x-4)}{12} \leq \frac{2(3x+1)-(x-4)}{12}$$

$$8x+4-3x+12 \leq 6x+2-x+4$$

$$5x+16 \leq 5x+6$$

$$5x-5x \leq 6-16$$

$$0x \leq -10$$

$$x \in \emptyset$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm

Bài 3. Giải các bất phương trình

a) $x^2 - 3x + 1 > 2(x-1) - x(3-x)$

b) $(x-1)^2 + x^2 \leq (x+1)^2 + (x+2)^2$

c) $(x^2 + 1)(x-6) \leq (x-2)^3$

Lời giải

a) $x^2 - 3x + 1 > 2(x-1) - x(3-x)$

$$x^2 - 3x + 1 > 2x - 2 - 3x + x^2$$

$$-2x > -3$$

$$x < \frac{3}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < \frac{3}{2}$

b)

$$(x-1)^2 + x^2 \leq (x+1)^2 + (x+2)^2$$

$$2x^2 - 2x + 1 \leq 2x^2 + 6x + 5$$

$$-8x \leq 4$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq -\frac{1}{2}$

c)

$$(x^2 + 1)(x - 6) \leq (x - 2)^3 \Leftrightarrow$$

$$x^3 - 6x^2 + x - 6 \leq x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$-11x \leq -2$$

$$x \geq \frac{2}{11}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq \frac{2}{11}$

Bài 4. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b) Tìm x để $A > 0$

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 1+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Ta có $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

$$A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{(1-x)(x+1)} \right) : \frac{2x-1}{1-x^2}$$

$$A = \left(\frac{x+1}{(1-x)(1+x)} + \frac{2(1-x)}{(x+1)(1-x)} - \frac{5-x}{(1-x)(x+1)} \right) : \frac{2x-1}{(1-x)(1+x)}$$

$$A = \left(\frac{x+1+2-2x-5+x}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2x-1}$$

$$A = \left(\frac{-2}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1}$$

b) Để $A > 0$ thì

$$\frac{-2}{2x-1} > 0$$

$$2x-1 < 0 \text{ vì } -2 < 0$$

$$x < \frac{1}{2} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } x < \frac{1}{2} \text{ thì } A > 0$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(2x-3) \geq 4(2-x) + 13$

b) $6x-1-(3x+9) \leq 8x-7-(2x-1)$

c) $8x+17-3(2x+3) \leq 10(x+2)$

d) $17(x+5)+41x \geq -15(x+4)-1$

e) $4(2-3x)-(5-x) > 11-x$

f) $2(3-x)-1,5(x-4) < 3-x$

ĐS: a) $x \geq 3$ b) $x \geq -\frac{4}{3}$ c) $x \geq -\frac{3}{2}$ d) $x \geq -\frac{83}{73}$ e) $x < -\frac{4}{5}$ f) $x > \frac{18}{5}$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x+3)(2x-1) > 4x(x+2)$

b) $5(x-1)-x(7-x) < x^2$

c) $(x-1)^2 + (x-3)^2 > x^2 + (x+1)^2$

d) $3(x+1)+2x(x-1) < 2x^2$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2x-1}{3} < \frac{x+6}{2}$

b) $\frac{5(x-1)}{6} - 1 \geq \frac{2(x+1)}{3}$

c) $2 + \frac{3(x+1)}{8} \leq 3 - \frac{x-1}{4}$

d) $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$

a) $8x-3 < 5\left(\frac{8x}{5}+3\right)$

b) $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

c) $\frac{x+5}{6} + \frac{x-1}{3} \leq \frac{x+3}{2} - 1$

d) $x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$

Bài 8. Với những giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của biểu thức $7-3(x+1)$ không nhỏ hơn giá trị của biểu thức $2(x-3)-4$.

b) Giá trị của biểu thức $\frac{x+2}{3} - x + 1$ lớn hơn giá trị của biểu thức $x+3$.

c) Giá trị của biểu thức $(x+1)^2 - 4$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $(x-3)^2$.

d) Giá trị của biểu thức $x - \frac{1-\frac{3}{2}x}{4}$ nhỏ hơn giá trị của biểu thức $\frac{2-\frac{1}{4}x}{3} + 2$.

ĐS: a) $x \leq \frac{14}{5}$ b) $x < -2$ c) $x \leq \frac{3}{2}$ d) $x < 2$.

Bài 9. Giải các bất phương trình

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$ b) $\frac{2x+1}{-3} - \frac{2x^2+3}{-4} > \frac{x(5-3x)}{-6} - \frac{4x+1}{-5}$

c) $\frac{4x-2}{3} - x + 3 \leq \frac{1-5x}{4}$ d) $\frac{x+4}{5} - x - 5 \geq \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} &\leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5} \\ \frac{15 \cdot (x-1)}{30} - \frac{2 \cdot (7x+3)}{30} &\leq \frac{10 \cdot (2x+1)}{30} + \frac{6 \cdot (3-2x)}{30} \\ 15x - 15 - 14x - 6 &\leq 20x + 10 + 18 - 12x \\ x - 21 &\leq 8x + 28 \\ 7x &\geq -49 \\ x &\geq -7 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq -7$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{-3} - \frac{2x^2+3}{-4} &> \frac{x(5-3x)}{-6} - \frac{4x+1}{-5} \\ \frac{-2x-1}{3} + \frac{2x^2+3}{4} &> \frac{-x(5-3x)}{6} + \frac{4x+1}{5} \\ \frac{20 \cdot (-2x-1) + 15 \cdot (2x^2+3)}{60} &> \frac{-10x \cdot (5-3x) + 12 \cdot (4x+1)}{60} \\ \frac{-40x - 20 + 30x^2 + 45}{60} &> \frac{-50x + 30x^2 + 48x + 12}{60} \\ 30x^2 - 40x + 25 &> 30x^2 - 2x + 12 \\ -38x &> -13 \\ x &< \frac{13}{38} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < \frac{13}{38}$

c)

$$\frac{4x-2}{3} - x + 3 \leq \frac{1-5x}{4}$$

$$\frac{4.(4x-2)+12.(-x+3)}{12} \leq \frac{3.(1-5x)}{12}$$

$$16x-8-12x+36 \leq 3-15x$$

$$4x+28 \leq 3-15x$$

$$19x \leq -25$$

$$x \leq -\frac{25}{19}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \leq -\frac{25}{19}$

d)

$$\frac{x+4}{5} - x - 5 \geq \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$$

$$\frac{6.(x+4)-30.(x+5)}{30} \geq \frac{10.(x+3)-15.(x-2)}{30}$$

$$6x+24-30x-150 \geq 10x+30-15x+30$$

$$-24x-126 \geq -5x+60$$

$$-19x \geq 186$$

$$x \leq -\frac{186}{19}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \leq -\frac{186}{19}$

Bài 10. Giải các bất phương trình

a) $\frac{5x^2-3}{5} + \frac{3x-1}{4} < \frac{x(2x+3)}{2} - 5$

b) $\frac{5x-2}{-3} - \frac{2x^2-x}{-2} > \frac{x(1-3x)}{-3} - \frac{5x}{-4}$

c) $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

d) $x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$

Lời giải

a)

$$\frac{5x^2-3}{5} + \frac{3x-1}{4} < \frac{x(2x+3)}{2} - 5$$

$$\frac{4.(5x^2-3)+5.(3x-1)}{20} < \frac{10x.(2x+3)-5.20}{20}$$

$$\frac{20x^2-12+15x-5}{20} < \frac{20x^2+30x-100}{20}$$

$$20x^2+15x-17 < 20x^2+30x-100$$

$$-15x < -83$$

$$15x > 83$$

$$x > \frac{83}{15}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > \frac{83}{15}$

b)

$$\begin{aligned} \frac{5x-2}{-3} - \frac{2x^2-x}{-2} &> \frac{x(1-3x)}{-3} - \frac{5x}{-4} \\ \frac{-5x+2}{3} + \frac{2x^2-x}{2} &> \frac{-x+3x^2}{3} + \frac{5x}{4} \\ \frac{4(-5x+2)+6(2x^2-x)}{12} &> \frac{4(-x+3x^2)+3.5x}{12} \\ -20x+8+12x^2-6x &> -4x+12x^2+15x \\ -26x+8 &> 11x \\ -37x &> -8 \\ 37x &< 8 \\ x &< \frac{8}{37} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < \frac{8}{37}$

c)

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2x+1}{2} &> 3x - \frac{1}{5} \\ \frac{10.2x+5(2x+1)}{10} &> \frac{3x.10-2}{10} \\ 20x+10x+5 &> 30x-2 \\ 0x &> -7 \quad (\text{vô lý}) \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

d)

$$\begin{aligned} x - \frac{5x}{6} - 3 &> \frac{x}{3} - \frac{x}{6} \\ \frac{6x-5x-18}{6} &> \frac{2x-x}{6} \\ x-18 &> x \\ 0x &< -18 \quad (\text{vô lý}) \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 11. Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2-3x} \right) : \left(\frac{x^2}{27-3x^2} + \frac{1}{x+3} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B

b) Tìm x để $B < -1$

Đáp số: a) $x \neq -3; x \neq 0$; $B = \frac{-x-3}{x}$, b) $x > 0$

DẠNG 3**BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BIẾN ĐỔI ĐẶC BIỆT****Bất phương trình dạng đặc biệt:**

$$\frac{x+a}{b} + \frac{x+c}{d} < \frac{x+e}{f} + \frac{x+g}{h}$$

Phương pháp giải:

- Nếu $a+b=c+d=e+f=g+h=k$. Ta cộng mỗi phân thức thêm 1.
- Nếu $a-b=c-d=e-f=g-h=k$. Ta cộng mỗi phân thức thêm -1.
- Sau đó quy đồng từng phân thức, chuyển về nhóm nhân tử chung đưa về dạng

$$(x-k)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h}\right) < 0.$$

Chú ý

- Cần xét xem $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h}\right)$ là số âm hay dương để đưa ra đánh giá về dấu của $(x-k)$.
- Có thể mở rộng số phân thức nhiều hơn và tùy bài toán ta sẽ cộng hoặc trừ đi hằng số thích hợp.

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \frac{x+2}{6} + \frac{x+5}{3} > \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$$

$$b) \frac{x-2}{1007} + \frac{x-1}{1008} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}.$$

Lời giải

$$a) \frac{x+2}{6} + \frac{x+5}{3} > \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$$

Cộng thêm 1 mỗi phân thức, ta có:

$$\frac{x+2}{6} + 1 + \frac{x+5}{3} + 1 > \frac{x+3}{5} + 1 + \frac{x+6}{2} + 1$$

$$\frac{x+8}{6} + \frac{x+8}{3} > \frac{x+8}{5} + \frac{x+8}{2}$$

$$\frac{x+8}{6} + \frac{x+8}{3} - \frac{x+8}{5} - \frac{x+8}{2} > 0$$

$$(x+8)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$x+8 < 0 \text{ vì } \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} < 0$$

$$x < -8$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < -8$

$$b) \frac{x-2}{1007} + \frac{x-1}{1008} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}$$

Nhân thêm 2 cho cả tử và mẫu của mỗi phân thức về trái, ta được:

$$\frac{2x-4}{2014} + \frac{2x-2}{2016} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}$$

Cộng thêm -1 mỗi phân thức, ta được:

$$\frac{2x-4}{2014} - 1 + \frac{2x-2}{2016} - 1 < \frac{2x-1}{2017} - 1 + \frac{2x-3}{2015} - 1$$

$$\frac{2x-2018}{2014} + \frac{2x-2018}{2016} < \frac{2x-2018}{2017} + \frac{2x-2018}{2015}$$

$$\frac{2x-2018}{2014} + \frac{2x-2018}{2016} - \frac{2x-2018}{2017} - \frac{2x-2018}{2015} < 0$$

$$(2x-2018) \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \right) < 0.$$

$$2x-2018 < 0 \text{ vì } \frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} > 0$$

$$x < 1009$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < 1009$

Bài 2. Giải các bất phương trình ẩn x sau:

$$a) \frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$$

$$b) \frac{x-2}{2002} + \frac{x-4}{2000} < \frac{x-3}{2001} + \frac{x-5}{1999}$$

$$c) \frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c \text{ với } (a, b, c > 0)$$

Lời giải

a)

$$\frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$$

$$\frac{x+2004}{2005} - 1 + \frac{x+2005}{2006} - 1 < \frac{x+2006}{2007} - 1 + \frac{x+2007}{2008} - 1$$

$$\frac{x-1}{2005} + \frac{x-1}{2006} - \frac{x-1}{2007} - \frac{x-1}{2008} < 0$$

$$(x-1) \left(\frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} \right) < 0$$

$$x-1 < 0 \text{ (do } \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0)$$

$$x < 1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 1$.

b)

$$\frac{x-2}{2002} + \frac{x-4}{2000} < \frac{x-3}{2001} + \frac{x-5}{1999}$$

$$\frac{x-2}{2002} - 1 + \frac{x-4}{2000} - 1 < \frac{x-3}{2001} - 1 + \frac{x-5}{1999} - 1$$

$$\frac{x-2004}{2002} + \frac{x-2004}{2000} < \frac{x-2004}{2001} + \frac{x-2004}{1999}$$

$$(x-2004) \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001} - \frac{1}{1999} \right) < 0$$

$$x-2004 > 0 \text{ (do } \frac{1}{2002} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001} - \frac{1}{1999} < 0)$$

$$x > 2004$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 2004$

c)

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c$$

$$\frac{x-ab}{a+b} - c + \frac{x-bc}{b+c} - a + \frac{x-ac}{a+c} - b > 0$$

$$\frac{x-ab-ac-bc}{a+b} + \frac{x-bc-ab-ac}{b+c} + \frac{x-ac-bc-ab}{a+c} > 0$$

$$(x-ab-ac-bc) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) > 0$$

$$x-ab-ac-bc > 0 \text{ (do } a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} > 0)$$

$$x > ab+ac+bc$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > ab+ac+bc$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

$$a) \frac{x+1987}{2002} + \frac{x+1988}{2003} > \frac{x+1989}{2004} + \frac{x+1990}{2005} \quad b) \frac{x-1}{99} + \frac{x-3}{97} + \frac{x-5}{95} < \frac{x-2}{98} + \frac{x-4}{96} + \frac{x-6}{94}$$

$$c) \frac{x-1987}{2002} + \frac{x-1988}{2003} > \frac{x-1989}{2004} + \frac{x-1990}{2005} \quad d) \frac{x+1}{99} + \frac{x+3}{97} + \frac{x+5}{95} < \frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+6}{94}$$

$$ĐS: a) x > 15 \quad b) x > 100$$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

$$a) \frac{x+1}{35} + \frac{x+3}{33} \geq \frac{x+5}{31} + \frac{x+7}{29} \quad b) \frac{x-85}{15} + \frac{x-74}{13} + \frac{x-67}{11} \leq 6$$

$$c) \frac{x-1}{13} - \frac{2x-13}{15} < \frac{3x-15}{27} - \frac{4x-27}{29} \quad d) \frac{x+1}{65} + \frac{x+3}{63} - \frac{x+5}{61} - \frac{x+7}{59} < 0$$

$$e) \frac{x+29}{31} - \frac{x+27}{33} \leq \frac{x+17}{43} - \frac{x+15}{45} \quad f) \frac{x+6}{1999} + \frac{x+8}{1997} \geq \frac{x+10}{1995} + \frac{x+12}{1993}$$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

- a) $\frac{x-10}{1994} + \frac{x-8}{1996} + \frac{x-6}{1998} > \frac{x-1998}{6} + \frac{x-1996}{8} + \frac{x-1994}{10}$
- b) $\frac{x-1995}{5} - \frac{x-5}{1995} + \frac{x-1997}{3} - \frac{x-3}{1997} + \frac{x-1999}{1} - \frac{x-1}{1999} < 0$
- c) $\frac{1909-x}{91} + \frac{1907-x}{93} + \frac{1905-x}{95} + \frac{1903-x}{91} > 4$
- d) $\frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} > \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25}$

Bài 6. Giải các bất phương trình sau: (Biến đổi đặc biệt)

- a) $\frac{x-2}{2017} + \frac{x-3}{2018} < \frac{x-4}{2019} + \frac{x-5}{2020}$
- b) $\frac{x-1009}{1001} + \frac{x-4}{1003} + \frac{x+2010}{1005} \geq 7$
- c) $\frac{x-3}{2011} + \frac{x-2}{2012} \leq \frac{x-2012}{2} + \frac{x-2011}{3}$
- d) $\frac{x+1}{2009} + \frac{x+2}{2008} + \frac{x+3}{2007} + \frac{x+4}{2006} + 4 > 0$
- e) $\frac{x+1}{2013} + \frac{x+2}{2012} < \frac{x+3}{2011} + \frac{x+4}{2010}$
- f) $\frac{x-21}{1978} - \frac{x-1978}{21} + \frac{x-19}{1980} - \frac{x-1980}{19} \geq 0$

DẠNG 4

ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Bài 1. Biểu thị (theo x) tổng khối lượng của các hộp xếp ở đĩa cân bên trái, đĩa cân bên phải (hình vẽ) lần lượt là $3x + 4$, $x + 6$. Do đĩa cân lệch về bên trái nên ta có hệ thức: $3x + 4 > x + 6$.



Trong toán học, hệ thức $3x + 4 > x + 6$ được gọi là gì?

Lời giải

Trong toán học, hệ thức $3x + 4 > x + 6$ được gọi là một bất phương trình ẩn x .

Bài 2. Để hưởng ứng phong trào “Trồng cây gây rừng”, lớp 9A có kế hoạch trồng ít nhất 100 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 54 cây. Để đạt được kế hoạch đề ra, lớp 9A cần trồng thêm ít nhất bao nhiêu cây xanh nữa?



Lời giải

Gọi x là số cây xanh lớp 9A cần trồng thêm ít nhất ($x > 0$).

Số cây xanh lớp 9A trồng theo x là: $x + 54$ (cây xanh).

Theo đề bài, để lớp 9A đạt được kế hoạch đề ra thì:

$$x + 54 \geq 100$$

$$x \geq 46.$$

Vậy lớp 9A đạt được kế hoạch đề ra thì phải trồng ít nhất 46 cây xanh.

Bài 3. Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

Lời giải

Gọi số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là x .

Điều kiện : $x \in \mathbb{N}^*, x < 15$

Theo bài ra ta có bất phương trình:

$$(15 - x) \cdot 2000 + x \cdot 5000 \leq 70000$$

$$(15 - x) \cdot 2 + x \cdot 5 \leq 70$$

$$x \leq \frac{40}{3}$$

Mà $x \in \mathbb{N}^*, x < 15 \Rightarrow x$ là các số nguyên từ 1 đến 13.

Vậy số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là các số nguyên từ 1 đến 13.

Bài 4. Một người đi bộ một quãng đường dài 18 km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5 km/h, về sau đi với vận tốc 4 km/h. Xác định độ dài đoạn đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h.

Lời giải

Gọi quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h là x (km).

Điều kiện : $0 < x < 18$

Theo bài ra ta có bất phương trình :

$$\frac{x}{5} + \frac{18 - x}{4} \leq 4$$

$$4x + 90 - 5x \leq 80$$

$$x \geq 10$$

Mà $0 < x < 18 \Rightarrow 10 \leq x < 18$.

Vậy quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5km/h là x (km) thỏa mãn $10 \leq x < 18$.

Bài 5. Trong cuộc thi “Đố vui để học”, mỗi thí sinh phải trả lời 12 câu hỏi của ban tổ chức. Mỗi câu hỏi gồm bốn phương án, trong đó chỉ có một phương án đúng. Với mỗi câu hỏi, nếu trả lời đúng thì được cộng 5 điểm, trả lời sai bị trừ 2 điểm. Khi bắt đầu cuộc thi, mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm. Thí sinh nào đạt từ 50 điểm trở lên sẽ được vào vòng thi tiếp theo. Hỏi thí sinh phải trả lời đúng ít nhất bao nhiêu câu thì được vào vòng thi tiếp theo?

Lời giải

Gọi x là số câu trả lời đúng Điều kiện : $x \in \mathbb{N}^*, x \leq 12$

Suy ra $12 - x$ là số câu trả lời sai.

Số điểm được cộng là $5x$, số điểm bị trừ là $2(12 - x)$.

Vì muốn vào vòng thi tiếp theo mỗi thí sinh cần có ít nhất 50 điểm, ban đầu mỗi thí sinh có sẵn 20 điểm nên ta có:

$$5x - 2(12 - x) + 20 \geq 50$$

$$5x - 24 + 2x + 20 \geq 50$$

$$5x - 2x \geq 50 + 24 - 20$$

$$7x \geq 54$$

$$x \geq \frac{54}{7} \approx 7,7$$

Vậy muốn vào vòng thi tiếp theo, thí sinh cần trả lời đúng ít nhất 8 câu.

Bài 6. Một kho chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi x là số ngày xuất xi măng của kho đó. Tìm x sao cho sau x ngày xuất hàng, khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn.

Lời giải

Sau x ngày, khối lượng xi măng xuất đi là: $20x$ (tấn).

Khi đó, khối lượng xi măng còn lại trong kho là: $100 - 20x$ (tấn).

Theo bài, khối lượng xi măng còn lại trong kho ít nhất là 10 tấn nên ta có bất phương trình: $100 - 20x \geq 10$.

Giải bất phương trình:

$$100 - 20x \geq 10$$

$$-20x \geq -90$$

$$x \leq 4,5.$$

Vậy $x \leq 4,5$.

Bài 7. Đến ngày 31/12/2024, gia đình Cô Thúy đã tiết kiệm được số tiền là 250 triệu đồng. Sau thời điểm đó, mỗi tháng gia đình Cô Thúy đều tiết kiệm được 10 triệu đồng. Gia đình Cô Thúy dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng gia đình Cô Thúy có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được?

Lời giải

Gọi x (tháng) là thời gian gia đình Cô Thúy có thể mua được chiếc ô tô tải bằng số tiền tiết kiệm được.

Sau x tháng, số tiền gia đình Cô Thúy tiết kiệm được là: $10x$ (triệu đồng).

Khi đó tổng số tiền gia đình Cô Thúy tiết kiệm được là: $250 + 10x$ (triệu đồng).

Theo bài, gia đình Cô Thúy dự định mua một chiếc ô tô tải nhỏ để vận chuyển hàng hoá với giá tối thiểu là 370 triệu đồng nên ta có bất phương trình: $250 + 10x \geq 370$.

Giải bất phương trình:

$$250 + 10x \geq 370$$

$$10x \geq 120$$

$$x \geq 12.$$

Vậy sau ít nhất 12 tháng, gia đình Cô Thúy có thể mua được chiếc ô tô tải đó bằng số tiền tiết kiệm được.

Bài 8. Bạn Minh Hiền có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Minh Hiền mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

Lời giải

Gọi x (quyển) là số vở mà Minh Hiền có thể mua ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số tiền mua x quyển vở là $7x$ (nghìn đồng).

Số tiền mua một cái bút và một số quyển vở là $18 + 7x$ (nghìn đồng).

Theo bài, bạn Minh Hiền có 100 nghìn đồng nên ta có bất phương trình:

$$18 + 7x \leq 100$$

$$7x \leq 100 - 18$$

$$7x \leq 82$$

$$x \leq \frac{82}{7} \approx 11,7$$

Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên Minh Hiền có thể mua được nhiều nhất là 11 quyển vở.

Bài 9. Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi x là số kilômét mà hành khách đó có thể di chuyển với 200 nghìn đồng ($x > 0$).

Giá tiền cho x km là $12x$ (nghìn đồng).

Giá mở cửa của taxi là 15 nghìn đồng nên số tiền cần thanh toán khi đi x km là: $15 + 12x$ (nghìn đồng).

Theo bài, ta có:

$$15 + 12x \leq 200$$

$$12x \leq 185$$

$$x \leq \frac{185}{12} \approx 15,4$$

Mà $x > 0$ và làm tròn đến hàng đơn vị nên với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa 15 kilômét.

Bài 10. Để lập đội tuyển năng khiếu về bóng rổ của trường THCS Nguyễn Hiền, thầy Nam đưa ra quy định tuyển chọn như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 15 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được cộng 2 điểm; quả bóng ném ra ngoài bị trừ 1 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 15 điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Hỏi một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì phải ném ít nhất bao nhiêu quả vào rổ?

Lời giải

Gọi x là số quả bóng học sinh cần ném vào rổ ($0 \leq x \leq 15, x \in \mathbb{N}^*$).

Số quả bóng ném ra ngoài là: $15 - x$ (quả).

Ném vào rổ x quả bóng được cộng $2x$ (điểm).

Ném ra ngoài $15 - x$ quả bóng bị trừ $15 - x$ (điểm).

Vì vậy, sau khi ném 15 quả bóng thì học sinh đó sẽ có số điểm là:

$$2x - (15 - x) = 2x - 15 + x = 3x - 15 \text{ (điểm)}.$$

Theo bài, để được vào đội tuyển thì học sinh cần có số điểm từ 15 trở lên, nên ta có bất phương trình:

$$3x - 15 \geq 15$$

$$3x \geq 30$$

$$x \geq 10.$$

Mà $0 \leq x \leq 15$, $x \in \mathbb{N}^*$ nên học sinh đó cần phải ném vào rổ ít nhất là 10 quả bóng thì mới được chọn vào đội tuyển.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 11. Bác Hoàng dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6 500 m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày. Buổi sáng bác Hoàng chạy được 4 000 m. Gọi x là số mét bác Hoàng chạy bộ vào buổi chiều. Viết hệ thức chứa x biểu thị điều kiện để bác Hoàng chạy được như dự định.

Lời giải

Quãng đường bác Hoàng chạy bộ buổi sáng và buổi chiều theo x là $4\,000 + x$.

Bác Hoàng dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6 500 m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày, nghĩa là tổng quãng đường bác Hoàng dự định chạy bộ trong ngày lớn hơn hoặc bằng 6 500 m.

Khi đó ta có: $4\,000 + x \geq 6\,500$.

Vậy hệ thức chứa x biểu thị điều kiện để bác Hoàng chạy được như dự định là $4\,000 + x \geq 6\,500$.

Bài 12. Một kì thi Tiếng Anh gồm bốn kĩ năng: nghe, nói, đọc, viết. Kết quả của bài thi là điểm số trung bình của bốn kĩ năng này. Bạn Minh Nhi đã đạt được điểm số của ba kĩ năng nghe, đọc, viết lần lượt là 6,5; 6,5; 5,5. Hỏi bạn Minh Nhi cần đạt bao nhiêu điểm trong kĩ năng nói để đạt được của bài thi ít nhất là 6,25?

Lời giải

Gọi x là điểm của kĩ năng nói.

Theo đề bài ta có

$$\frac{6,5 \cdot 2 + 5,5 + x}{4} \geq 6,25$$

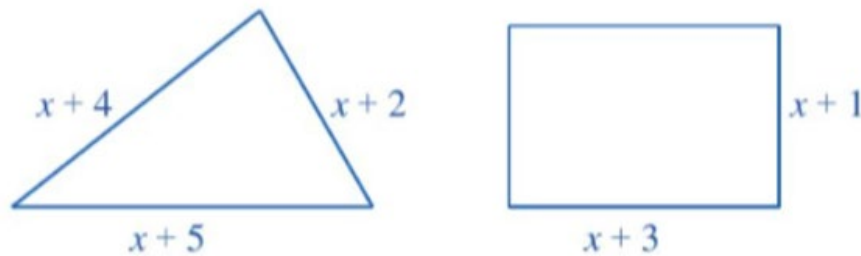
$$18,5 + x \geq 25$$

$$x \geq 25 - 18,5$$

$$x \geq 6,5$$

Vậy bạn Minh Nhi cần đạt ít nhất 6,5 điểm nói.

Bài 13. Tìm số thực dương x sao cho chu vi của hình tam giác lớn hơn chu vi của hình chữ nhật (ở hình vẽ dưới)

**Lời giải**

Chu vi của hình tam giác là: $(x + 4) + (x + 2) + (x + 5) = 3x + 11$.

Chu vi của hình chữ nhật là: $2.(x + 1 + x + 3) = 2.(2x + 4) = 4x + 8$.

Theo bài, chu vi hình tam giác lớn hơn chu vi của hình chữ nhật nên ta có bất phương trình:

$$3x + 11 > 4x + 8.$$

Giải bất phương trình:

$$3x + 11 > 4x + 8$$

$$3x - 4x > 8 - 11$$

$$-x > -3$$

$$x < 3.$$

Mà x là số thực dương nên $x > 0$.

Vậy $0 < x < 3$.

Bài 14. Để đổi từ độ Fahrenheit (độ F) sang độ Celsius (độ C), người ta dùng công thức

sau: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

a) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°F . Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ C?

b) Giả sử nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°C . Hỏi nhiệt độ ngoài trời khi đó ít nhất là bao nhiêu độ F?

Lời giải

a) Theo bài, $F \geq 95$ nên $F - 32 \geq 95 - 32$ hay $F - 32 \geq 63$.

$$\text{Suy ra } \frac{5}{9}(F - 32) \geq \frac{5}{9}.63 \text{ hay } C \geq 35$$

do đó $C \geq 35$.

Vậy nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°F , tức ít nhất là 35°C .

b) Theo bài, $C \geq 95$ nên $\frac{5}{9}(F - 32) \geq 95$

Giải bất phương trình:

$$\frac{5}{9}(F - 32) \geq 95$$

$$F - 32 \geq 95 : \frac{5}{9}$$

$$F - 32 \geq 171$$

$$F \geq 203$$

Vậy nhiệt độ ngoài trời của một ngày mùa hè ít nhất là 95°C , tức là ít nhất là 203°F .

Bài 15. Một nhà máy sản xuất xi măng mỗi ngày đều sản xuất được 100 tấn xi măng. Lượng xi măng tồn trong kho của nhà máy là 300 tấn. Hỏi nhà máy đó cần sản xuất trong ít nhất bao nhiêu ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho)?

Lời giải

Gọi x (ngày) là số ngày sản xuất xi măng của nhà máy đó ($x > 0$).

Khối lượng xi măng sản xuất được sau x ngày là: $100x$ (tấn).

Khối lượng xi măng tính cả lượng xi măng tồn trong kho sau x ngày là: $100x + 300$ (tấn).

Theo bài, sau x ngày thì nhà máy xuất đi ít nhất 15 300 tấn xi măng nên ta có bất phương trình:

$$100x + 300 \geq 15\,300.$$

Giải bất phương trình:

$$100x + 300 \geq 15\,300$$

$$100x \geq 15\,000$$

$$x \geq 150.$$

Vậy nhà máy đó cần sản xuất trong ít nhất là 150 ngày để có thể xuất đi 15 300 tấn xi măng (tính cả lượng xi măng tồn trong kho).

Bài 16. Chỉ số khối cơ thể BMI cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo.

Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức sau: $\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$, trong đó m là khối lượng cơ thể tính theo kilôgam, h là chiều cao tính theo mét.

Dưới đây là bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo chỉ số BMI đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương:

Nam	Nữ
BMI < 20: Gầy	BMI < 18: Gầy
$20 \leq \text{BMI} < 25$: Bình thường	$18 \leq \text{BMI} < 23$: Bình thường
$25 \leq \text{BMI} < 30$: Béo phì độ I (nhẹ)	$23 \leq \text{BMI} < 30$: Béo phì độ I (nhẹ)
$30 \leq \text{BMI} < 40$: Béo phì độ II (trung bình)	$30 \leq \text{BMI} < 40$: Béo phì độ II (trung bình)
$40 \leq \text{BMI}$: Béo phì độ III (nặng)	$40 \leq \text{BMI}$: Béo phì độ III (nặng)

a) Giả sử một người đàn ông có chiều cao 1,68 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

b) Giả sử Cô Hồng có chiều cao 1,6 m. Hãy lập bảng về chỉ số cân nặng của Cô Hồng dựa theo bảng đánh giá thể trạng trên.

Lời giải

a) Thay $h = 1,68$ m vào biểu thức $BMI = \frac{m}{h}$, ta được:

$$BMI = \frac{m}{h} = \frac{m}{1,68^2} = \frac{m}{2,8224}$$

Suy ra $m = 2,8224.BMI$.

Khi $BMI < 20$ thì $2,8224.BMI < 56,448$ hay $m < 56,448$.

Khi $20 \leq BMI < 25$ thì $56,448 \leq 2,8224.BMI < 70,56$ hay $56,448 \leq m < 70,56$.

Khi $25 \leq BMI < 30$ thì $70,56 \leq 2,8224.BMI < 84,672$ hay $70,56 \leq m < 84,672$.

Khi $30 \leq BMI < 40$ thì $84,672 \leq 2,8224.BMI < 112,896$ hay $84,672 \leq m < 112,896$.

Khi $40 \leq BMI$ thì $112,896 \leq 2,8224.BMI$ hay $112,896 \leq m$.

Vậy ta có bảng về chỉ số cân nặng của người đó dựa theo bảng đánh giá thể trạng như sau:

<i>Cân nặng</i>	<i>Thể trạng</i>
$m < 56,448$	Gầy
$56,448 \leq m < 70,56$	Bình thường
$70,56 \leq m < 84,672$	Béo phì độ I (nhẹ)
$84,672 \leq m < 112,896$	Béo phì độ II (trung bình)
$112,896 \leq m$	Béo phì độ III (nặng)

b) Thay $h = 1,6$ m vào biểu thức $BMI = \frac{m}{h}$, ta được:

$$BMI = \frac{m}{h} = \frac{m}{1,6^2} = \frac{m}{2,56}$$

Suy ra $m = 2,56.BMI$.

Khi $BMI < 18$ thì $2,56.BMI < 46,08$ hay $m < 46,08$.

Khi $18 \leq BMI < 23$ thì $46,08 \leq 2,56.BMI < 58,88$ hay $46,08 \leq m < 58,88$.

Khi $23 \leq BMI < 30$ thì $58,88 \leq 2,56.BMI < 76,8$ hay $58,88 \leq m < 76,8$.

Khi $30 \leq BMI < 40$ thì $76,8 \leq 2,56.BMI < 102,4$ hay $76,8 \leq m < 102,4$.

Khi $40 \leq BMI$ thì $102,4 \leq 2,56.BMI$ hay $102,4 \leq m$.

Vậy ta có bảng về chỉ số cân nặng của Cô Hồng dựa theo bảng đánh giá thể trạng như sau:

<i>Cân nặng</i>	<i>Thể trạng</i>
$m < 46,08$	Gầy
$46,08 \leq m < 58,88$	Bình thường
$58,88 \leq m < 76,8$	Béo phì độ I (nhẹ)

$76,8 \leq m < 102,4$	Béo phì độ II (trung bình)
$102,4 \leq m$	Béo phì độ III (nặng)

Bài 17. Trong một cuộc thi tuyển dụng việc làm, ban tổ chức quy định mỗi người ứng tuyển phải trả lời 25 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn bốn đáp án, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Người ứng tuyển chọn đáp án đúng sẽ được cộng thêm 2 điểm, chọn đáp án sai bị trừ đi 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển, ban tổ chức tặng cho mỗi người dự thi 5 điểm và theo quy định người ứng tuyển phải trả lời hết 25 câu hỏi; người nào có số điểm từ 25 trở lên mới được dự thi vòng tiếp theo. Hỏi người ứng tuyển phải trả lời chính xác ít nhất bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được vào vòng tiếp theo?

Lời giải

Gọi x là số câu trả lời đúng ($0 \leq x \leq 25$, $x \in \mathbb{N}^*$).

Số câu trả lời sai là: $25 - x$ (câu).

Trả lời đúng x câu hỏi được cộng $2x$ (điểm).

Trả lời sai $25 - x$ câu hỏi bị trừ $25 - x$ (điểm).

Vì vậy, sau khi trả lời 25 câu thì người dự thi sẽ có số điểm là:

$$2x - (25 - x) = 2x - 25 + x = 3x - 25 \text{ (điểm)}.$$

Theo bài, để được dự thi tiếp vòng sau thì cần có số điểm từ 25 trở lên, nên ta có bất phương trình:

$$3x - 25 \geq 25$$

$$3x \geq 50$$

$$x \leq \frac{50}{3} \approx 16,7$$

Mà $0 \leq x \leq 25$, $x \in \mathbb{N}^*$ nên người ứng tuyển cần phải trả lời chính xác ít nhất là 17 câu hỏi thì mới được dự thi tiếp vòng sau.

Bài 18. Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 1 tháng là 0,4%/ tháng. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

Lời giải

Gọi x (triệu đồng) là số tiền gửi tiết kiệm ($x > 0$).

Khi đó số tiền lãi 1 tháng là $0,4\% \cdot x = 0,004x$ (triệu đồng).

Để số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì ta phải có:

$$0,004x \geq 3$$

$$x \geq 750.$$

Vậy số tiền tiết kiệm ít nhất là 750 triệu đồng để có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng.

Bài 19. Người ta dùng một loại xe tải để chở sữa tươi cho một nhà máy. Biết mỗi thùng sữa loại 180 ml nặng trung bình 10 kg. Theo khuyến nghị, trọng tải của xe (tức là tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là 5,25 tấn. Hỏi xe có thể chở được tối đa bao nhiêu thùng sữa như vậy, biết bác lái xe nặng 65 kg?

Lời giải

Đơn vị: $5,25 \text{ tấn} = 5\,250 \text{ kg}$.

Gọi x (thùng) là số sữa mà xe có thể chở ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó, khối lượng sữa mà xe chở là: $10x$ (kg).

Tổng khối lượng sữa và bác tài xế là: $65 + 10x$ (kg).

Do trọng tải (tổng khối lượng tối đa cho phép mà xe có thể chở) là $5\,250 \text{ kg}$ nên ta có:

$$65 + 10x \leq 5\,250$$

$$10x \leq 5\,185$$

$$x \leq 518,5.$$

Mà $x \in \mathbb{N}^*$ nên xe tải đó có thể chở tối đa 518 thùng sữa.

Bài 20. Một hãng viễn thông nước ngoài có hai gói cước như sau:

Gói cước A	Gói cước B
Cước thuê bao hằng tháng 32 USD	Cước thuê bao hằng tháng là 44 USD
45 phút miễn phí	Không có phút miễn phí
0,4 USD cho mỗi phút thêm	0,25 USD/phút

a) Hãy viết một phương trình xác định thời gian gọi (phút) mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau và giải phương trình đó.

b) Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào? Nếu khách hàng gọi 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào?

Lời giải

a) Gọi x (phút) là thời gian gọi trong một tháng ($x > 0$).

Theo bài, phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau, mà cước thuê bao hằng tháng của gói A nhỏ hơn gói B ($32 < 44$) nên thời gian gọi phải nhiều hơn 45 phút do tính thêm phí cho phút gọi thêm. Tức là $x > 45$.

– Đối với gói cước A:

Thời gian gọi thêm là: $x - 45$ (phút);

Phí cần trả cho số phút gọi thêm là: $0,4 \cdot (x - 45)$ (USD);

Phí phải trả cho hãng viễn thông là: $T_1 = 32 + 0,4 \cdot (x - 45)$ (USD).

– Đối với gói cước B:

Phí cần trả cho x phút gọi là: $0,25x$ (USD);

Phí phải trả cho hãng viễn thông là: $T_2 = 44 + 0,25x$ (USD).

Để phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau thì ta có phương trình sau: $T_1 = T_2$,

$$\text{hay } 44 + 0,25x = 32 + 0,4 \cdot (x - 45). (*)$$

Giải phương trình (*):

$$44 + 0,25x = 32 + 0,4 \cdot (x - 45)$$

$$44 + 0,25x = 32 + 0,4x - 0,4 \cdot 45$$

$$0,25x - 0,4x = 32 - 18 - 44$$

$$-0,15x = -30$$

$$x = 200 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x > 45 \text{)}.$$

Vậy thời gian gọi mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước như nhau là 200 phút.

b)
– Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng, tức là $x \leq 180$ thì:

$$x - 45 \leq 180 - 45 \text{ hay } x - 45 \leq 135$$

$$\text{Suy ra } 0,4.(x - 45) \leq 54 \text{ nên } 32 + 0,4.(x - 45) \leq 32 + 54 \text{ hay } T_1 \leq 86.$$

$$0,25x \leq 45 \text{ nên } 44 + 0,25x \leq 44 + 45 \text{ hay } T_2 \leq 89.$$

Khi đó, khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước A để mất chi phí rẻ hơn.

– Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 500 phút trong 1 tháng, tức là $x \leq 500$ thì:

$$x - 45 \leq 500 - 45 \text{ hay } x - 45 \leq 455$$

$$\text{Suy ra } 0,4.(x - 45) \leq 182 \text{ nên } 32 + 0,4.(x - 45) \leq 32 + 182 \text{ hay } T_1 \leq 214.$$

$$0,25x \leq 125 \text{ nên } 44 + 0,25x \leq 44 + 125 \text{ hay } T_2 \leq 169.$$

Khi đó, khách hàng chỉ gọi tối đa là 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước B để mất chi phí rẻ hơn.

Bài 21. Bạn Trúc Linh tham dự một kì kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm 4 bài kiểm tra nghe, nói, đọc và viết. Mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra nghe, nói, đọc của Trúc Linh là 6,7. Hỏi bài kiểm tra viết của Trúc Linh cần được bao nhiêu điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên? Biết điểm trung bình được tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải

Tổng điểm của ba môn nghe, nói, đọc của bạn Trúc Linh khoảng: $6,7 \cdot 3 = 20,1 \approx 20$ (do mỗi bài kiểm tra có điểm là số nguyên từ 0 đến 10).

Gọi x là điểm bài kiểm tra viết của Trúc Linh ($0 < x \leq 10, x \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó điểm trung bình bốn bài kiểm tra của Trúc Linh là: $\frac{20+x}{4}$.

Để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên thì:

$$\frac{20+x}{4} \geq 7$$

$$20+x \geq 28$$

$$x \geq 8$$

$$20+x \geq 28$$

$$x \geq 8.$$

Mà $0 < x \leq 10, x \in \mathbb{N}^*$ nên $x \in \{8; 9; 10\}$

Vậy bài kiểm tra viết của Trúc Linh cần được 8 điểm hoặc 9 điểm hoặc 10 điểm để điểm trung bình cả 4 bài kiểm tra được từ 7,0 trở lên.