Задача 19 (6 баллов)

В полупроводниках под действием света с частотой ω, близкой к частоте экситонного резонанса ω_0, могут возбуждаться экситоны – квазичастицы, состоящие и связанных электрона и дырки. Поляризация среды $\boldsymbol{P}$, обусловленная экситонами, описывается уравнением

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2}+\omega_0-\omega\right)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=\frac{\varepsilon_b\omega_{\mathrm{LT}}}{4\pi}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,, \tag{1}$$

где $\hbar\omega_0$ – энергия экситона, m – его масса, ε_b – фоновая диэлектрическая проницаемость полупроводника, ω_{LT} – параметр, характеризующий силу взаимодействия света с экситонами. На поверхности полупроводника выполняется дополнительное граничное условие $\boldsymbol{P}=0$.

Плоская электромагнитная волна частоты ω падает по нормали из вакуума на плоскую поверхность полупроводника. Определите коэффициент отражения.

Решение:

[J. J. Hopfield and D. G. Thomas, Phys. Rev. **132**, 563 (1963), https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.132.563]; [С. И. Пекар, ЖЭТФ **33**, 1022-1036 (1957); http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_009_02_0314.pdf].

Будем считать, что полупроводник находится в области $z>0$, где электрическое поле E удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}E(z)+\varepsilon_b\left(\frac{\omega}{c}\right)^2E(z)=-4\pi\left(\frac{\omega}{c}\right)^2P(z) \tag{2}$$

Найдем собственные векторы $k_{1,2}$ экситонных поляритонов, распространяющихся в среде в области $z>0$. Для этого будем искать решения уравнения (2) в области $z>0$ в форме

$$E(z)=E_{1,2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1,2}z},\quad P(z)=P_{1,2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1,2}z}\,. \tag{3}$$

Подставим поле и поляризацию в виде плоских волн (3) в (2), (1) и найдем

$$[(\omega/c)^2-k^2]E=4\pi\left(\frac{\omega}{c}\right)^2P \tag{4}$$

$$[\omega_X(k)-\omega]P=\frac{\varepsilon_b\omega_{LT}}{4\pi}E\,, \tag{5}$$

где

$$\omega_X(k)\equiv\omega_0+\frac{\hbar k^2}{2M}\,. \tag{6}$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы находим

$$k_{1,2}^2 = \frac{(\omega/c)^2\varepsilon_b + k_x^2}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(\omega/c)^2\varepsilon_b - k_x^2}{2}\right]^2 + \left[\frac{2M\varepsilon_b\omega_{LT}}{\hbar}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]^2}\,, \tag{7}$$

$$k_x(\omega) = \sqrt{\frac{2M}{\hbar}(\omega_0 - \omega)}\,. \tag{8}$$

Закон дисперсии схематически показан на рисунке: происходит “расталкивание” дисперсии света $ck/\sqrt{\varepsilon_b}$ и экситона $\omega_X(k)$ с образованием двух поляритонных ветвей.

Электрическое поле будем искать в виде

$$E(z) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/c} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z/c}, & z < 0 \\ E_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 z} + E_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 z}, & z > 0\,. \end{cases} \tag{9}$$

с учетом граничных условий

$$E(z=-0) = E(z=+0) \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}(z=-0) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}(z=+0)\,. \tag{11}$$

$$P(z=0) = 0 \text{ (дополнительное граничное условие)} \tag{12}$$

При этом поляризация в области $z > 0$ равняется

$$P(z) = P_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 z} + P_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 z}, \quad P_{1,2} = \frac{\varepsilon_b\omega_{LT}}{4\pi}\frac{1}{\omega_X(k_{1,2}) - \omega} \tag{13}$$

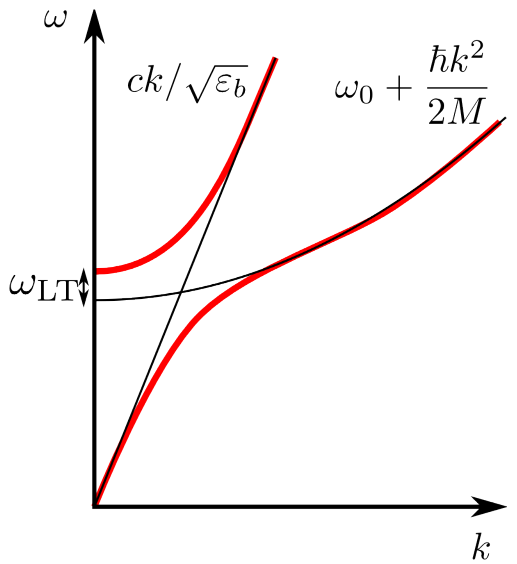

Рис. 1: Дисперсия поперечных экситонных поляритонов

Знак $k_{1,2}$ выбирается из условия затухания волн в сторону $z > 0$, $\operatorname{Im} k_{1,2} > 0$. При расчете для этого можно считать, что у экситона есть затухание, $\omega_0 \to \omega_0 - \mathrm{i}\gamma$.

Два максвелловских граничных условия запишем как

$$1 + r = E_1 + E_2 \tag{14}$$

$$\frac{\omega}{c}(1 - r) = k_1 E_1 + k_2 E_2 \tag{15}$$

а дополнительное условие — как

$$0 = \frac{E_1}{\omega_X(k_1) - \omega} + \frac{E_2}{\omega_X(k_2) - \omega}\,. \tag{16}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$\frac{1 - r}{1 + r} = Z, \tag{17}$$

$$r = \frac{1 - Z}{1 + Z} \tag{18}$$

где

$$Z = \frac{c}{\omega}\frac{k_1 E_1 + k_2 E_2}{E_1 + E_2}\,. \tag{19}$$

Из уравнения (16) находим, что

$$\frac{E_1}{E_2} = -\frac{\omega_X(k_1) - \omega}{\omega_X(k_2) - \omega}\,. \tag{20}$$

Подставляя E_1/E_2 в (19) получаем ответ

$$r = \frac{1 - Z}{1 + Z}, \quad Z = \frac{c}{\omega}\frac{k_1 - k_2\frac{\omega_X(k_1) - \omega}{\omega_X(k_2) - \omega}}{1 - \frac{\omega_X(k_1) - \omega}{\omega_X(k_2) - \omega}}\,. \tag{21}$$

При больших отстройке от частоты экситонного резонанса имеем

$$k_1 \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_b}, k_2 \approx k_x(\omega), |\omega_X(k_2) - \omega| \gg |\omega_X(k_1) - \omega| \tag{22}$$

поэтому $Z \approx ck_1/\omega \approx \sqrt{\varepsilon_b}$ и коэффициент отражения $r \approx (1 - \sqrt{\varepsilon_b})/(1 + \sqrt{\varepsilon_b})$ переходит в формулу Френеля.