Задача 22 (4 балла)

Определите, каким условиям должна удовлетворять матрица переноса в базисе бегущих волн для слоя, обладающего симметрией к (a) пространственной инверсии ($\mathcal{P}$-симметрия): $\varepsilon(z) = \varepsilon(-z)$, (b) пространственной инверсии одновременно с комплексным сопряжением ($\mathcal{PT}$-симметрия): $\varepsilon(z) = \varepsilon^*(-z)$. Для обоих случаев выразите матрицу переноса через коэффициенты прохождения t и отражения r для света, падающего слева.

Решение: Обозначим коэффициенты отражения для света, падающего справа на структуру, как r' и t'. Тогда для матрицы переноса в базисе падающих волн

$$T\begin{bmatrix}1\\ r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t\\ 0\end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix}0\\ t'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r'\\ 1\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Решая эту систему уравнений на 4 неизвестных элемента матрицы переноса получим

$$T = \frac{1}{t'}\begin{bmatrix}tt' - rr' & r'\\ -r & 1\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Из постоянства вронскиана решений дифференциального уравнения второго порядка следует $t = t'$.

$\mathcal{P}$ - симметрия

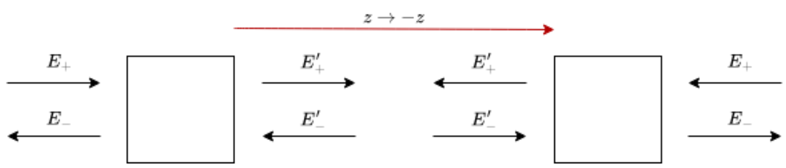

Рис. 1: Иллюстрация прохождения через симметричный барьер $\varepsilon(z) = \varepsilon(-z)$

При прохождении через симметричный барьер (см. Рис. 1) для матрицы переноса верны соотношения

$$T\begin{bmatrix}E_+\\ E_-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E'_+\\ E'_-\end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix}E'_-\\ E'_+\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_-\\ E_+\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Отсюда получаем условие на матрицу переноса

$$T^{-1} = \sigma_x T \sigma_x. \tag{4}$$

Отсюда получаем, что коэффициенты прохождения и отражения для волн налетающих справа и слева равны, $t = t'$, $r = r'$, а значит матрицу переноса можно записать в виде

$$T = \frac{1}{t}\begin{bmatrix} t^2 - r^2 & r \\ -r & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

$\mathcal{T}$ - симметрия

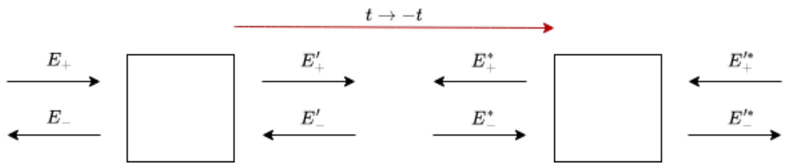

Рис. 2: Иллюстрация прохождения при инверсии времени $\varepsilon(z) = \varepsilon^*(z)$

При инверсии времени (см. Рис. 2) выполняется условие

$$T^* = \sigma_x T \sigma_x. \tag{6}$$

Подставляя в это условие матрицу (2), а также используя $t = t'$, можно выразить коэффициент r' через r и t:

$$r' = -\frac{t}{t^*} r^*. \tag{7}$$

Кроме того, получаем

$$|r|^2 + |t|^2 = |r'|^2 + |t|^2 = 1\,. \tag{8}$$

Подставляя это в матрицу (2) находим

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & -\frac{r^*}{t^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

$\mathcal{PT}$ - симметрия

Из предыдущих пунктов следует, что применение одновременно $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$ операторов приводит к условию

$$T^* = T^{-1}. \tag{10}$$

Подставляя в это условие матрицу (2), а также используя $t = t'$, находим

$$rt^* + r^*t = 0\,, \quad r't^* + r'^*t = 0\,, \qquad\qquad |t|^2 + r'r^* = 1\,. \tag{11}$$

Выражая коэффициент r' через r и t получаем

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{t^*} & \frac{|t|^2-1}{rt^*} \\ -\frac{r}{t} & \frac{1}{t} \end{bmatrix}. \tag{12}$$