

Задача 9 (6 баллов)

Два бесконечных цилиндра радиуса R , оси которых параллельны z , касаются вдоль прямой $x = y = 0$, см. рис. 1. К системе приложено внешнее переменное электрическое поле с амплитудой $\mathbf{E}_0 \parallel x$ и частотой $\omega \ll c/R$. Диэлектрическая проницаемость проводов описывается законом $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$. Найдите амплитуду компоненты электрического поля E_x в точке $(0, y)$, где $y \ll R$, в случае, когда частота ω находится в области плазмонного резонанса, $|\omega_p/\sqrt{2} - \omega| \ll \omega_p$.

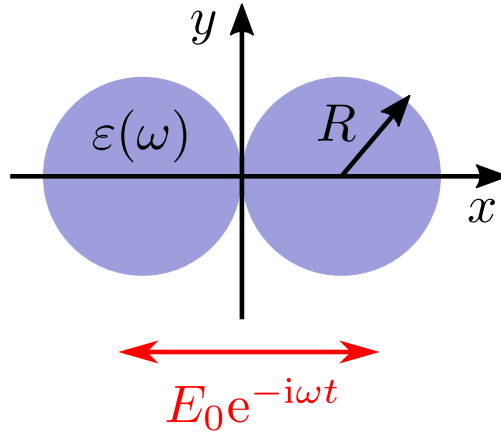


Рис. 1: “Целующиеся” провода во внешнем электрическом поле.

Указание: На лекции с помощью конформного отображения $z' = \frac{R^2}{z}$ задача была сведена к задаче о двумерном диполе между двумя плоскостями (Рис. 2). Решите эту задачу методом изображений.

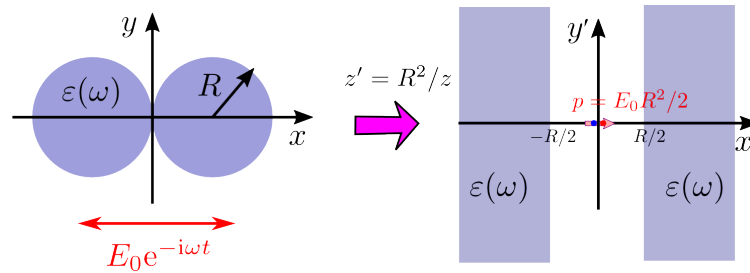


Рис. 2: Конформное отображение “целующихся цилиндров” в диполь между полупространствами

Решение:

Из метода изображений следует, что задача сводится к ряду

$$\varphi(x', y') = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varphi_n(x', y'), \quad (1)$$

где

$$\varphi_n(x', y') = p \left(\frac{1 - \varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)} \right)^n \frac{2|x' - nR|}{(x' - nR)^2 + y'^2}. \quad (2)$$

Возьмем Фурье-образ этой функции по переменной y'

$$\varphi_{n,k}(x') = p \left(\frac{1 - \varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)} \right)^n \times 2|x' - nR| \times \int dy \frac{e^{-iky}}{(x' - nR)^2 + y^2}. \quad (3)$$

Интеграл берется по полюсам (Рис. 3)

$$\int dy \frac{e^{-iky}}{(x' - nR)^2 + y^2} = \int dy \frac{e^{-iky}}{(y - i(x' - nR))(y + i(x' - nR))} \quad (4)$$

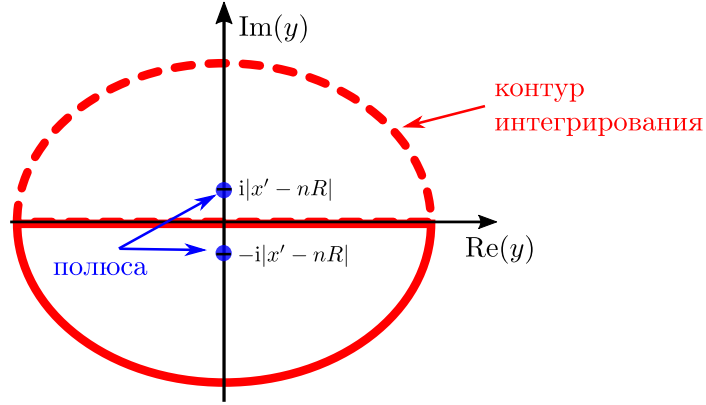


Рис. 3: Контур интегрирования

Если $k > 0$ то замыкать нужно в нижней полуплоскости, а если $k < 0$, то в верхней.

Окончательный ответ

$$\varphi_{n,k}(x') = 2\pi p \left(\frac{1 - \varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)} \right)^n e^{-|k||x' - nR|}. \quad (5)$$

Поскольку мы будем искать поле в точке $x = 0$ нам нужно линейное по x' слагаемое

$$\varphi(x', y') = -2\pi p \int \frac{dk}{2\pi} x' |k| e^{iky'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sign}(n) \left(\frac{1 - \varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)} \right)^n e^{-|k||n|R} \quad (6)$$

Сумма ряда дается находится по формуле бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1 - \varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)} \right)^n e^{-|k||n|R} = \frac{2\varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)^2 + (\varepsilon(\omega)^2 - 1) \cosh(kR)}. \quad (7)$$

Тогда потенциал дается интегралом

$$\varphi(x', y') = -2\pi p \int \frac{dk}{2\pi} x' |k| e^{iky'} \frac{2\varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)^2 + (\varepsilon(\omega)^2 - 1) \cosh(kR)}. \quad (8)$$

Этот интеграл может быть взят, если считать $|k| = \sqrt{k^2 + 0^2}$ и выбрать разрез для квадратного корня, как функции комплексной переменной, вдоль отрицательных значений аргумента. Кроме того нужно учесть, что по принципу причинности $\text{Im}(\varepsilon) \geq 0$, что определяет правило обхода полюсов. Особенности подынтегрального выражения показаны на Рис. 4.

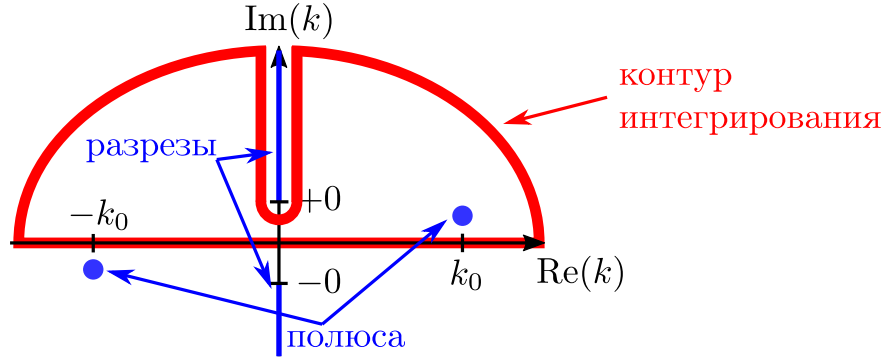


Рис. 4: Контур интегрирования.

Контур интегрирования при $y' > 0$ нужно замыкать в верхнюю полуплоскость, затем нужно обходить разрез и считать вычет. Вычеты находятся из условия равенства нулю знаменателя

$$1 + \varepsilon(\omega)^2 + (\varepsilon(\omega)^2 - 1) \cosh(kR) = 0, \quad (9)$$

которое можно переписать в виде

$$e^{k_0 R} = \left(\frac{1 - \varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)} \right), \quad e^{-k_0 R} = \left(\frac{1 - \varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)} \right). \quad (10)$$

Нам нужен вычет в положительной полуплоскости, который вблизи плазмонного резонанса $\varepsilon(\omega) \approx -1$, так что $k_0 R \gg 1$. Вычет в этой точке

$$\text{Res}_{k_0} \left[x' |k| e^{iky'} \frac{2\varepsilon(\omega)}{1 + \varepsilon(\omega)^2 + (\varepsilon(\omega)^2 - 1) \cosh(kR)} \right] = -\frac{k_0 x'}{R} e^{ik_0 y}. \quad (11)$$

Видно, что вблизи плазмонного резонанса ($\varepsilon \approx -1$) этот вклад в интеграл стремится к бесконечности. Понятно также, что интеграл по берегам разреза не содержит особенностей и будет конечным, поэтому им можно пренебречь. Таким образом, мы находим

потенциал

$$\varphi(x', y') = \frac{2\pi i p k_0 x'}{R} e^{i k_0 y'}. \quad (12)$$

В исходной задаче потенциал равен

$$\varphi(x, y) = \varphi(x', y'), \quad (13)$$

где координаты равны

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}. \quad (14)$$

В области $|x| \ll y \ll R$ эти выражения можно упростить

$$x' = \frac{R^2 x}{y}, \quad y' = \frac{R^2}{y}. \quad (15)$$

так что потенциал

$$\phi = \frac{\pi i R^3 k_0 x}{y^2} e^{i k_0 R^2 / y} E_0, \quad (16)$$

где мы учли значение p .

Так как электрическое поле даётся обычным выражением $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, то при $x = 0$ мы получаем

$$E_x = -\frac{\pi i k_0 R^3}{y^2} e^{i k_0 R^2 / y} E_0 \quad (17)$$

и $E_y = 0$. Учитывая явный вид $\varepsilon(\omega)$ параметр k_0 определяется выражением

$$e^{k_0 R} = \frac{\omega_p^2}{2\omega^2 - \omega_p^2}. \quad (18)$$

Интересно, что даже в электростатическом приближении электрическое поле имеет нетривиальную фазу. Амплитуда поля равна

$$|E_x| = \pi k_0 \frac{R^3}{y^2} E_0 \gg E_0, \quad (19)$$

то есть поле сильно осциллирует и возрастает вблизи точки касания цилиндров.

Задача в более общем виде, численное моделирование амплитуды поля и другие детали есть в статье [D. Y. Lei et al., “Broadband nano-focusing of light using kissing nanowires,” New J. Phys. 12, 093030 (2010)]