Задача 1 (10 баллов)

Полупространство $z > 0$ заполнено одноосной магнитной средой, тензора диэлектрической и магнитной проницаемости которой имеют вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}.$$

(a) Определите показатель преломления TE- и TM-поляризованных волн внутри среды.
(b) На поверхность среды из вакуума под углом θ падает плоская электромагнитная волна. Определите, каким условиям должны удовлетворять величины $\varepsilon_\perp$, $\varepsilon_\parallel$, $\mu_\perp$, $\mu_\parallel$, чтобы коэффициент отражения равнялся нулю при любом угле θ одновременно для s и p поляризаций волны.

Решение:

Волновое уравнение ($k_y = 0$):

$$\boldsymbol{k} \times (\mu^{-1} \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E})) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{\varepsilon} \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} \frac{k_z^2}{\mu_\perp} & 0 & -\frac{k_x k_z}{\mu_\perp} \\ 0 & \frac{k_z^2}{\mu_\perp} + \frac{k_x^2}{\mu_\parallel} & 0 \\ -\frac{k_x k_z}{\mu_\perp} & 0 & \frac{k_x^2}{\mu_\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_\perp E_x \\ \varepsilon_\perp E_y \\ \varepsilon_\parallel E_z \end{bmatrix} \tag{2}$$

TE - поляризация $E_{x,z} = 0$, $E_y \neq 0$, тогда изочастотная поверхность при $z > 0$

$$\frac{n_{z,2}^2}{\varepsilon_\perp \mu_\perp} + \frac{n_{x,2}^2}{\varepsilon_\perp \mu_\parallel} = 1. \tag{3}$$

Отсюда показатель преломления

$$n_s^2(\theta') = \varepsilon_\perp \left(\frac{\cos^2(\theta')}{\mu_\perp} + \frac{\sin^2(\theta')}{\mu_\parallel} \right)^{-1}. \tag{4}$$

Перпендикулярная компонента вектора $\boldsymbol{n}$ сохраняется: $n_{x,1} = n_{x,2}$. Отсюда находим:

$$\sin\theta = n_s(\theta') \sin\theta'. \tag{5}$$

Кроме того, сохраняются тангенциальные компоненты полей $E_{y,1} = E_{y,2}$ и $H_{x,1} = H_{x,2}$. Поле H_x находится из уравнения Максвелла $H_x = -\mu_{xx}^{-1} n_z E_y$. Так как отражение отсутствует $E_{y,1}$ состоит только из падающей волны E_0. Тогда условие равенства тангенциальных компонент:

$$E_0 = E_t, \qquad n_{z,1} E_0 = \frac{1}{\mu_\perp} n_{z,2} E_t. \tag{6}$$

Отсюда, дополнительно к (5), находим условие

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta'}{\mu_\perp}. \tag{7}$$

Комбинируя (5) и (7) находим условие на отсутствие отражения:

$$\frac{\varepsilon_\perp \left(\sin^2(\theta') + \frac{\cos^2(\theta')}{\mu_\perp^2}\right)}{\frac{\cos^2(\theta')}{\mu_\perp} + \frac{\sin^2(\theta')}{\mu_\parallel}} = 1. \tag{8}$$

Это условие выполняется для любого θ' при

$$\varepsilon_\perp = \mu_\perp = \frac{1}{\mu_\parallel}. \tag{9}$$

ТМ - поляризация $E_{x,z} \neq 0$, $E_y = 0$, тогда изочастотная поверхность при $z > 0$

$$\frac{n_x^2}{\mu_\perp \varepsilon_\parallel} + \frac{n_z^2}{\mu_\perp \varepsilon_\perp} = 1. \tag{10}$$

Отсюда показатель преломления

$$n_p^2(\theta') = \mu_\perp \left(\frac{\sin^2(\theta')}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2(\theta')}{\varepsilon_\perp}\right)^{-1}. \tag{11}$$

Далее, аналогично случаю ТЕ - поляризации, получаем условие:

$$\mu_\perp = \frac{1}{\varepsilon_\parallel} = \varepsilon_\perp. \tag{12}$$

Окончательный ответ

$$\varepsilon_\perp = \mu_\perp = \varepsilon_\parallel^{-1} = \mu_\parallel^{-1}. \tag{13}$$

Задача 2 (10 баллов)

В моноатомных двумерных слоях, обладающих тригональной симметрией, тензор нелинейной восприимчивости имеет вид $\chi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{r}) = \chi^{(2\text{D})}_{\alpha\beta\gamma}\delta(z)$, где у $\chi^{(2\text{D})}_{\alpha\beta\gamma}$ отличны от нуля лишь компоненты

$$\chi^{(2\text{D})}_{x'x'x'} = -\chi^{(2\text{D})}_{x'y'y'} = -\chi^{(2\text{D})}_{y'x'y'} = -\chi^{(2\text{D})}_{y'y'x'} \equiv \chi_0\,. \tag{14}$$

Здесь (x', y') – оси в плоскости слоя, соответствующие его определенным кристаллографическим направлениям.

Слой ориентирован так, что его оси (x', y') повернуты на угол ϕ относительно лабораторных осей (x, y). На слой по нормали падает свет на частоте ω, линейно поляризованный вдоль оси x. Определите параметры Стокса в лабораторной системе координат для света на частоте 2ω, испущенного слоем.

Решение: В лабораторной системе отсчета $\boldsymbol{E}_\omega = \begin{bmatrix} Ee^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix}^t$, тогда в системе отсчета пластинки

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_\omega = \begin{bmatrix} E\cos\varphi \\ E\sin\varphi \end{bmatrix} e^{-i\omega t}. \tag{15}$$

Введем вектор $\boldsymbol{P}^{2\text{D}}_{2\omega}$, так что $\boldsymbol{P}_{2\omega}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}^{2\text{D}}_{2\omega}\delta(z)$. Тогда, согласно определению тензора χ: $\boldsymbol{P}_{2\omega}(\boldsymbol{r}) = \hat{\chi}^{(2)}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_\omega\boldsymbol{E}_\omega$. Аналогично в системе отсчета пластинки $\tilde{\boldsymbol{P}}_{2\omega}(\boldsymbol{r}) = \hat{\chi}^{(2)}(\boldsymbol{r})\tilde{\boldsymbol{E}}_\omega\tilde{\boldsymbol{E}}_\omega$ и подставив (14) получаем

$$\tilde{\boldsymbol{P}}^{2\text{D}}_{2\omega} = \chi_0 E^2 e^{-2i\omega t}\begin{bmatrix} \cos(2\varphi) \\ -\sin(2\varphi) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Найдем теперь поле, которое генерируется на частоте $\omega' = 2\omega$. Из уравнений Максвелла

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_{\omega'} = \frac{i\omega'}{c}\boldsymbol{H}_{\omega'}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}_{\omega'} = -\frac{i\omega'}{c}\boldsymbol{D}_{\omega'} = -\frac{i\omega'}{c}\boldsymbol{E}_{\omega'} - \frac{4\pi i\omega'}{c}\boldsymbol{P}_{\omega'}, \tag{17}$$

находим

$$-\Delta\boldsymbol{E}_{\omega'} - \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\boldsymbol{E}_{\omega'} = 4\pi\left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\boldsymbol{P}_{\omega'}(\boldsymbol{r}). \tag{18}$$

Для системы отсчета пластиники все аналогично, и, учитывая что компоненты полей зависят только от координаты z получаем

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\right]\tilde{\boldsymbol{E}}_{\omega'} = 4\pi\left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\boldsymbol{P}^{2\text{D}}_{2\omega}\delta(z). \tag{19}$$

Такое уравнение решается с помощью функции Грина

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\right]e^{i(\omega'/c)|z|-i\omega' t}=-2i\frac{\omega'}{c}\delta(z)e^{-i\omega' t} \tag{20}$$

и мы получаем

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_{2\omega}=2\pi i\chi_0\left(\frac{2\omega}{c}\right)e^{i(2\omega/c)|z|-2i\omega t}E^2\begin{bmatrix}\cos(2\varphi)\\-\sin(2\varphi)\end{bmatrix}\equiv\mathcal{C}\begin{bmatrix}\cos(2\varphi)\\-\sin(2\varphi)\end{bmatrix}. \tag{21}$$

Переходя назад в лабораторную систему отсчета

$$\boldsymbol{E}_{2\omega}=\begin{bmatrix}\cos(\varphi)&\sin(\varphi)\\-\sin(\varphi)&\cos(\varphi)\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{E}}_{2\omega}=\mathcal{C}\begin{bmatrix}\cos(3\varphi)\\-\sin(3\varphi)\end{bmatrix} \tag{22}$$

получаем параметры Стокса

$$S_1=\cos(6\varphi),\qquad S_2=0,\qquad S_3=-\sin(6\varphi). \tag{23}$$