Задача 14 (4 балла)

Матрица Джонса, описывающая прохождение света через анизотропную пластинку в базисе, соответствующем собственным осям пластинки (x_0, y_0), имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} .$$

Пусть собственные оси пластинки (x_0, y_0) повернуты относительно лабораторных осей координат (x, y) на угол φ. Найдите матрицу Мюллера в базисе, соответствующем лабораторной системе координат. Постройте зависимость параметров Стокса прошедшего света от φ в случае, если падающий свет поляризован линейно вдоль оси x, $t_1 = 1$, $t_2 = (1 + \mathrm{i})/2$.

Решение: В системе отсчета пластинки вектор Джонса $\begin{bmatrix} E^{(0)}_{x'} \\ E^{(0)}_{y'} \end{bmatrix}$ падающего света связан с вектором Джонса прошедшего света $\begin{bmatrix} E^{(t)}_{x'} \\ E^{(t)}_{y'} \end{bmatrix}$ по правилу

$$\begin{bmatrix} E^{(t)}_{x'} \\ E^{(t)}_{y'} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E^{(0)}_{x'} \\ E^{(0)}_{y'} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

С другой стороны, компоненты вектора Джонса в лабораторной системе отсчета выражаются через компоненты вектора Джонса в системе отсчета пластинки с помощью матрицы замены координат

$$\begin{bmatrix} E^{(0)}_{x'} \\ E^{(0)}_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^{(0)}_{x} \\ E^{(0)}_{y} \end{bmatrix} \equiv C(\varphi) \begin{bmatrix} E^{(0)}_{x} \\ E^{(0)}_{y} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E^{(t)}_{x'} \\ E^{(t)}_{y'} \end{bmatrix} = C(\varphi) \begin{bmatrix} E^{(t)}_{x} \\ E^{(t)}_{y} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Тогда получаем

$$\begin{bmatrix} E^{(t)}_{x} \\ E^{(t)}_{y} \end{bmatrix} = C^{-1}(\varphi) A C(\varphi) \begin{bmatrix} E^{(0)}_{x} \\ E^{(0)}_{y} \end{bmatrix} \equiv A_L(\varphi) \begin{bmatrix} E^{(0)}_{x} \\ E^{(0)}_{y} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где матрица $A_L(\varphi)$ - матрица Джонса в лабораторной системе отсчета

$$A_L(\varphi) = \begin{bmatrix} t_+ + t_- \cos(2\varphi) & -t_- \sin(2\varphi) \\ -t_- \sin(2\varphi) & t_+ - t_- \cos(2\varphi) \end{bmatrix}, \quad t_\pm = \frac{t_1 \pm t_2}{2}. \tag{4}$$

Матрица плотности света (будем считать $\mathrm{Tr}\left(\hat{J}\right) = 1$):

$$\rho^{(t)} = \left\langle \boldsymbol{E}^{(t)} \boldsymbol{E}^{*(t)} \right\rangle = A_L(\varphi) \left\langle \boldsymbol{E}^{(0)} \boldsymbol{E}^{*(0)} \right\rangle A_L(\varphi)^\dagger = A_L(\varphi) \rho^{(0)} A_L(\varphi)^\dagger. \tag{5}$$

Запишем исходную матрицу через параметры Стокса

$$\rho^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - S_1^{(0)} & S_2^{(0)} - iS_3^{(0)} \\ S_2^{(0)} + iS_3^{(0)} & 1 - S_1^{(0)} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

тогда, после перемножения матриц, получаем

$$S_1^{(t)}\left|E^{(t)}\right|^2 = \rho_{1,1}^{(t)} - \rho_{2,2}^{(t)} = 2\cos(2\varphi)\,\mathrm{Re}[t_+t_-^*] + S_1^{(0)}(|t_+|^2 + |t_-|^2\cos(4\varphi)) - \\ - S_2^{(0)}|t_-|^2\sin(4\varphi) - 2S_3^{(0)}\sin(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+t_-^*], \tag{7a}$$

$$S_2^{(t)}\left|E^{(t)}\right|^2 = \rho_{1,2}^{(t)} + \rho_{2,1}^{(t)} = -2\sin(2\varphi)\,\mathrm{Re}[t_+^*t_-] + S_2^{(0)}(|t_+|^2 - |t_-|^2\cos(4\varphi)) - \\ - S_1^{(0)}|t_-|^2\sin(4\varphi) - 2S_3^{(0)}\cos(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+t_-^*], \tag{7b}$$

$$S_3^{(t)}\left|E^{(t)}\right|^2 = i(\rho_{1,2}^{(t)} - \rho_{2,1}^{(t)}) = S_3^{(0)}(|t_+|^2 - |t_-|^2) - S_1^{(0)}\sin(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+^*t_-] - \\ - S_2^{(0)}\cos(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+^*t_-] \tag{7c}$$

$$\left|E^{(t)}\right|^2 = \rho_{1,1}^{(t)} + \rho_{2,2}^{(t)} = |t_-|^2 + |t_+|^2 + 2\,\mathrm{Re}[t_+^*t_-]\left\{S_1^{(0)}\cos(2\varphi) - S_2^{(0)}\sin(2\varphi)\right\} \tag{7d}$$

Тогда матрица Миллера

$$M = \begin{bmatrix} |t_-|^2 + |t_+|^2 & 2\,\mathrm{Re}[t_+^*t_-]\cos(2\varphi) & -2\,\mathrm{Re}[t_+^*t_-]\sin(2\varphi) & 0 \\ 2\,\mathrm{Re}[t_+^*t_-]\cos(2\varphi) & |t_+|^2 + |t_-|^2\cos(4\varphi) & -|t_-|^2\sin(4\varphi) & -2\cos(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+t_-^*] \\ -2\,\mathrm{Re}[t_+^*t_-]\sin(2\varphi) & -\left|t_-^2\right|\sin(4\varphi) & |t_+|^2 - |t_-|^2\cos(4\varphi) & -2\sin(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+t_-^*] \\ 0 & -2\sin(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+^*t_-] & -2\cos(2\varphi)\,\mathrm{Im}[t_+^*t_-] & |t_+|^2 - |t_-|^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Зависимость параметров Стокса от угла φ построена на Рис. 1.

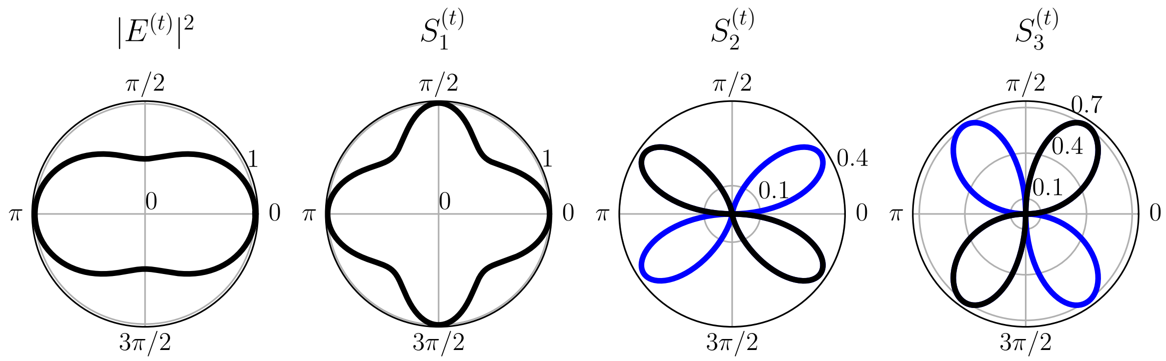

Рис. 1: Прошедшее поле и параметры Стокса для падающего света поляризованного линейно вдоль оси x и $t_1 = 1$, $t_2 = (1 + \mathrm{i})/2$. Синим цветом показаны области, где параметры Стокса отрицательные.