Задача 25 (6 баллов)

Цилиндрический резонатор представляет собой бесконечный круговой цилиндр радиуса R из материала с диэлектрической проницаемостью ε_1, помещенный в однородную среду с диэлектрической проницаемостью ε_2. Собственные моды такого резонатора можно характеризовать волновым вектором вдоль оси цилиндра k_z и азимутальным квантовым числом m. Их электромагнитное поле зависит от координат как $E, H \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z + \mathrm{i}m\phi}$, где z – координата вдоль оси цилиндра, φ – угол в плоскости (x, y).

Рассмотрите запертые внутри цилиндра квазистационарные моды с $k_z = 0$ и произвольным m. Получите уравнения на собственные комплексные частоты TE- и TM-поляризованных мод. При каждом m уравнения имеют бесконечное число корней. Для $R = 1\,\mu\mathrm{m}$, $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $m = 0, 1, 2, ...10$ путем численного решения уравнений найдите их корень $\omega_{m,0}^{(\mathrm{TE,TM})}$, обладающий с наименьшей вещественной частью. Постройте графики зависимостей $\mathrm{Re}\,\omega_{m,0}^{(\mathrm{TE,TM})}$ и $\mathrm{Re}\,\omega_{m,0}^{(\mathrm{TE,TM})}$ от m.

Указание. В соответствие с определением квазистационарной (утекающей) моды, ее электромагнитное поле при $\rho > R$ должно иметь вид расходящейся цилиндрической волны: $E, H \propto \mathrm{H}_m^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_2}\,\omega\rho/c)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$, где $\mathrm{H}^{(1)}$ – функция Ганкеля, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Формат решения. В качестве ответа пришлите .zip файл, который содержит:

- pdf файл с формулой, по которой ведется вычисление
- код решения
- pdf файлы с графиками

Решение: Из-за цилиндрической симметрии задачи, решение уравнений Максвелла дается одной из функций $Z_m(x)$, которая является решением уравнения Бесселя и удовлетворяет граничным условиям.

- TM - мода ($\boldsymbol{E} \perp \hat{\boldsymbol{z}}$)

$$\boldsymbol{E} = C_{\mathrm{TM}} Z_m(k\rho) e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{z}}, \tag{1}$$

Из уравнения Максвелла

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H} \tag{2}$$

находим поле $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = C_{\mathrm{TM}} e^{im\varphi}\left[\frac{mc}{\omega\rho} Z_m(k\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{ic}{\omega}\frac{\partial Z_m(k\rho)}{\partial\rho}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right] \tag{3}$$

где $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\hat{\boldsymbol{z}}$ - единичные орты и мы воспользовались уравнением ротора с цилиндрических координатах.

Для описание полей внутри цилиндра $\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}$, $\boldsymbol{H}^{\mathrm{in}}$ выберем функцию Бесселя $J_m(x)$, конечную в нуле, а для описание полей снаружи $\boldsymbol{E}^{\mathrm{out}}$, $\boldsymbol{H}^{\mathrm{out}}$ - функцию Ганкеля $H_m^{(1)}$. Граничные условия

$$E_z^{\mathrm{in}}(\rho = R) = E_z^{\mathrm{out}}(\rho = R), \quad H_\varphi^{\mathrm{in}}(\rho = R) = H_\varphi^{\mathrm{out}}(\rho = R), \tag{4}$$

дают уравнения:

$$\begin{aligned} &C_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{in}} J_m(\sqrt{\varepsilon_1}\omega R/c) = C_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{out}} H_m^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_2}\omega R/c), \\ &\qquad C_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{in}} \left.\frac{\partial J_m\big(\sqrt{\varepsilon_1}\omega\rho/c\big)}{\partial\rho}\right|_{\rho=R} = C_{\mathrm{TM}}^{\mathrm{out}} \left.\frac{\partial H_m^{(1)}\big(\sqrt{\varepsilon_2}\omega\rho/c\big)}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Поделив второе уравнение на первое и расписывая производную получаем уравнение на определение закона дисперсии

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1} J_m'\big(\sqrt{\varepsilon_1}\omega R/c\big)}{J_m\big(\sqrt{\varepsilon_1}\omega R/c\big)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} H_m'^{(1)}\big(\sqrt{\varepsilon_2}\omega R/c\big)}{H_m^{(1)}\big(\sqrt{\varepsilon_2}\omega R/c\big)} \tag{6}$$

- Для TE - волны ($\boldsymbol{H} \perp \hat{\boldsymbol{z}}$) проделывая аналогичные вычисления, начиная с магнитного поля, мы получаем

$$\frac{J_m'\big(\sqrt{\varepsilon_1}\omega R/c\big)}{\sqrt{\varepsilon_1} J_m\big(\sqrt{\varepsilon_1}\omega R/c\big)} = \frac{H_m'^{(1)}\big(\sqrt{\varepsilon_2}\omega R/c\big)}{\sqrt{\varepsilon_2} H_m^{(1)}\big(\sqrt{\varepsilon_2}\omega R/c\big)} \tag{7}$$

.

Результаты численного расчета мод показаны на Рис. 1. Видно, что зависимость от m является линейной функцией. Этот результат можно получить аналитически: для локализованной моды длина волны света должна укладываться целое число раз по окружности внутри микрорезонатора:

$$2\pi R = m\frac{\lambda}{n}, \tag{8}$$

где n - эффективный показатель преломления. Отсюда находим

$$\omega = \frac{cm}{Rn}. \tag{9}$$

Из Рис. 1 видно, что $n \in (\sqrt{\varepsilon_2}, \sqrt{\varepsilon_1})$.

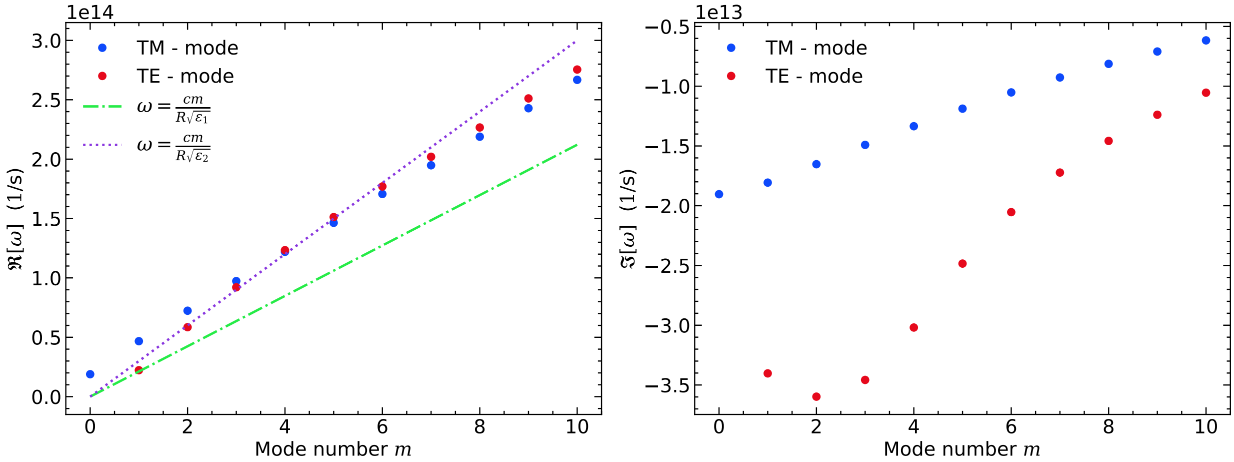

Рис. 1: Результаты численного расчета мод цилиндрического резонатора.