Задача 4 (6 баллов)

В электромагнитном поле с достаточно большими частотой или волновым вектором оказываются возможными процессы рождения реальных или виртуальных электрон-позитронных пар. Поляризуемость вакуума $\chi(\omega, \boldsymbol{k})$, обусловленная с этим эффектом, имеет одновременно временну́ю и пространственную дисперсию, но в силу релятивистской инвариантности зависит лишь от параметра $t = \hbar^2(\omega^2 - c^2\boldsymbol{k}^2)$. Расчеты методами квантовой электродинамики позволяют найти мнимую часть поляризуемости (см., например, В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц , Л.П. Питаевский, Теоретическая физика, т. IV, Квантовая электродинамика, §113, М.: Наука, 1989):

$$\mathrm{Im}\ \chi(t) = \frac{\alpha}{12\pi}\sqrt{\frac{t - 4m^2c^4}{t}}\,\frac{t + 2m^2c^4}{t}\,\theta(t - 4m^2c^4)\,,$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ – постоянная тонкой структуры, e – заряд электрона, m – его масса, θ – функция Хевисайда. Функция $\chi(t)$ является аналитической в верхней полуплоскости, $\mathrm{Im}\, t > 0$, а также известно, что $\chi(0) = 0$.

Воспользуйтесь соотношениям Крамерса-Кронига для величины $\chi(t)/t$ и найдите $\chi(t)$ при малых $t \ll m^2c^4$ с точностью до членов $\propto t$. Используя полученное выражение, найдите линейную по α поправку к потенциалу точечного заряда, обусловленную поляризацией вакуума.