Задача 5 (4 балла)

Обобщите модель Друде на случай, когда электронный газ помещен в постоянное магнитное поле $\boldsymbol{B} \parallel z$. Найдите компоненты тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}(\omega)$, связывающие Фурье компоненты тока и электрического поля согласно

$$j_\alpha(\omega) = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}(\omega) E_\beta(\omega)\,. \tag{1}$$

Ответ выразите через проводимость на нулевой частоте в отсутствие магнитного поля σ_0 и циклотронную частоту $\omega_c = eB/(mc)$. Постройте зависимости компонент σ_{xx} и σ_{xy} от ω_c при $\omega = 0$, а также от ω при $\omega_c\tau \gg 1$.

Указания по оформлению: Построенные графики вставьте в pdf файл решения. Файл с кодом построения графиков и графики отдельно присылать не нужно.

Решение: Уравнение движение для одного электрона:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{m}{\tau}\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}] \tag{2}$$

Рассмотрим это уравнение по компонентам

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \dfrac{m}{\tau}\dot{x} = qE_x + \dfrac{q}{c}\dot{y}B_z \\ m\ddot{y} + \dfrac{m}{\tau}\dot{y} = qE_y - \dfrac{q}{c}\dot{x}B_z \\ m\ddot{z} + \dfrac{m}{\tau}\dot{z} = qE_z \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что компоненты $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, а σ_{zz} совпадает с σ в нулевом магнитном поле

$$\sigma_{zz} = \frac{q^2 n\tau}{m}\frac{1}{1 - \mathrm{i}\omega\tau}\,, \tag{4}$$

Ищем x и y в виде $x = x_0 e^{-i\omega t}$ и $y = y_0 e^{-i\omega t}$ для $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_\omega e^{-i\omega t}$.

$$\begin{cases} (-\omega^2 - i\omega/\tau)x_0 = \dfrac{q}{m}E_{\omega,x} - i\omega\omega_c y_0 \\ (-\omega^2 - i\omega/\tau)y_0 = \dfrac{q}{m}E_{\omega,y} + i\omega\omega_c x_0 \end{cases}, \tag{5}$$

где $\omega_c = qB_z/(cm)$ —частота циклотронного движения. Для x_0

$$(-\omega^2 - i\omega/\tau)x_0 = \frac{q}{m}E_x - i\omega\omega_c\frac{\frac{q}{m}E_y + i\omega\omega_c x_0}{(-\omega^2 - i\omega/\tau)} \tag{6}$$

$$\frac{(-\omega^2 - i\omega/\tau)^2 - \omega^2\omega_c^2}{(-\omega^2 - i\omega/\tau)}x_0 = \frac{q}{m}E_x^{(0)} - i\omega\omega_c\frac{\frac{q}{m}E_y^{(0)}}{(-\omega^2 - i\omega/\tau)} \tag{7}$$

Решая уравнения и учитывая, что

$$\boldsymbol{j}(t) = en\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \boldsymbol{j}_\omega = -qni\omega\boldsymbol{r}_\omega \tag{8}$$

получаем

$$\sigma = \sigma_0 \begin{pmatrix} \frac{1-\mathrm{i}\omega\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & \frac{\omega_c\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ -\frac{\omega_c\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & \frac{1-\mathrm{i}\omega\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-i\omega\tau} \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \frac{q^2 n\tau}{m}.$$

Возникновение $\sigma_{xy} \neq 0$ — эффект Холла; ток начинает идти поперек электрического поля, т.к. электроны закручиваются в магнитном поле.

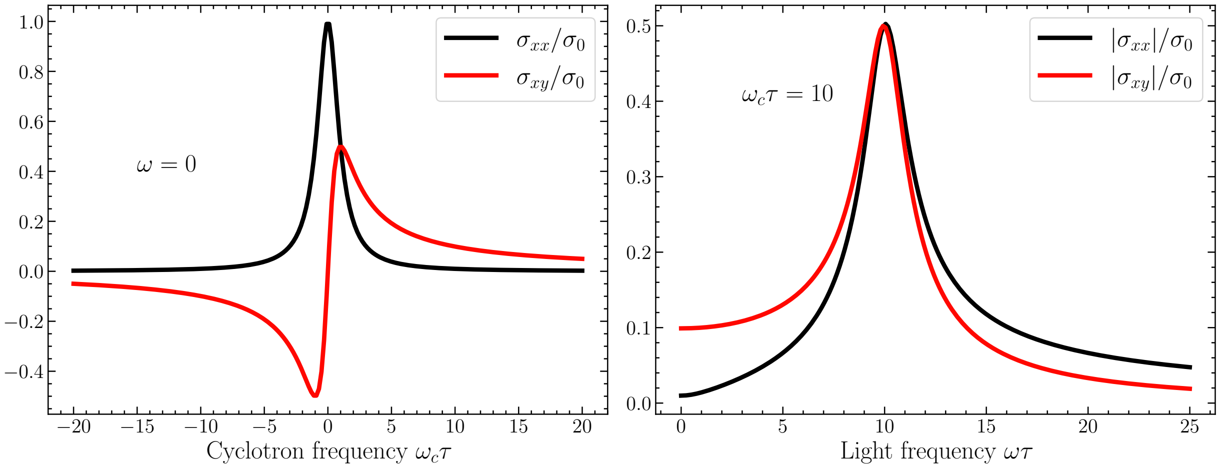

Рис. 1: Зависимость проводимости от циклотронной частоты при в режиме $\omega = 0$ (левая панель) и зависимость от частоты падающей волны при $\omega_c\tau$ (правая панель).

На рисунке 1 показана зависимость компонент проводимости при различных условиях. Видно, что при условии $\omega = \omega_c$ наблюдается **циклотронный резонанс**.