Задача 13 (2 балла)

Верхняя поляритонная ветвь вблизи $k = 0$ описывается законом дисперсии $\omega(k) = \omega_{\parallel} + \alpha k^2$. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение электромагнитного поля, соответствующего таким волнам, имеет вид

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{e}_x E_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2\delta^2}\right) .$$

Найдите распределения полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ в последующие моменты времени $t > 0$.

Решение: Разложим поле в момент времени $t = 0$ в интеграл Фурье

$$E_{x,k}(t=0) = E_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, e^{-ikz} \exp\left(-\frac{z^2}{2\delta^2}\right) = E_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \exp\left[-\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta} - \frac{ik\delta}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{k^2\delta^2}{2}\right] =$$

$$= E_0\sqrt{2}\delta \mathrm{e}^{-k^2\delta^2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = E_0\sqrt{2\pi}\delta \mathrm{e}^{-k^2\delta^2/2} \quad (1)$$

Поле в момент времени t:

$$E_{x,k}(t) = E_{x,k}(t=0)\mathrm{e}^{-i\omega(k)t} = E_0\sqrt{2\pi}\delta \mathrm{e}^{-k^2\delta^2/2 - i\omega(k)t}. \quad (2)$$

Тогда поле в реальном пространстве

$$E_x(z,t) = E_0\sqrt{2\pi}\delta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{-k^2\delta^2/2 - i\omega(k)t + ikz} = E_0\sqrt{2\pi}\delta e^{-i\omega_{\parallel}t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{-k^2\delta^2/2 - i\alpha k^2 t + ikz} =$$

$$= E_0\sqrt{2\pi}\delta e^{-i\omega_{\parallel}t} \exp\left[-\frac{z^2}{2\delta^2 + 4i\alpha t}\right] \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \exp\left[-\left(k\sqrt{\frac{\delta^2}{2} + i\alpha t} - \frac{iz}{\sqrt{2\delta^2 + 4i\alpha t}}\right)^2\right] =$$

$$= E_0 e^{-i\omega_{\parallel}t} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 2i\alpha t}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\delta^2 + 4i\alpha t}\right]$$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 2i\alpha t}} E_0\, \mathrm{e}^{-i\omega_{\parallel}t + \mathrm{i}\alpha t z^2/(\delta^4 + 4\alpha^2 t^2)}\, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\delta^2 + 4\alpha^2 t^2/\delta^2)}}. \quad (3)$$

Пространственное распределение $|E_x(z,t)|^2$ определяется последним множителем данного уравнения. Распределение является гауссовым, его ширина растет со временем как $\sqrt{\delta^2 + 4\alpha^2 t^2/\delta^2}$. Таким образом, наличие квадратичных членов в законе дисперсии волн приводит к размыванию волнового пакета.