Задача 18 (4 балла)

Тензор диэлектрической проницаемости электронного газа во внешнем магнитном поле $\boldsymbol{B} \parallel z$ имеет вид $\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\mathrm{i}\sigma_{\alpha\beta}/\omega$, где

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}\begin{pmatrix} \frac{1-\mathrm{i}\omega\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & \frac{\omega_c\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ -\frac{\omega_c\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & \frac{1-\mathrm{i}\omega\tau}{(1-\mathrm{i}\omega\tau)^2+\omega_c^2\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\mathrm{i}\omega\tau} \end{pmatrix}$$

– тензор проводимости (см. задачу 5), $\omega_c = eB_z/(mc)$ – циклотронная частота.

Определите показатели преломления и закон дисперсии плоских электромагнитных волн, распространяющихся в направлении оси z. Постройте зависимости $\mathrm{Re}\,\omega(k_z)/\omega_p$ и $\mathrm{Im}\,\omega(k_z)/\omega_p$ при $\omega_c = 0.2\omega_p$, $\omega_p\tau = 10$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi ne^2/m}$.

Решение: Для попечерных волн имеем

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = n^2\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где n^2 - показатель преломления. Из решения характеристического уравнения получаем

$$n_\pm^2 = 1 + \frac{i\omega_p^2\tau}{\omega(1 - i(\omega \pm \omega_c)\tau)}, \tag{2}$$

где собственным числам $n_\pm$ соответствуют собственные вектора $\begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^t$ и $\begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix}^t$ - σ^+ и σ^- поляризованный свет, соответственно.

Законы дисперсии можно найти из уравнений $n_\pm = k/(\omega_\pm/c)$

$$k^2 = \left(\frac{\omega_\pm}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega_\pm}{c}\right)^2\frac{i\omega_p^2\tau}{\omega_\pm(1 - i(\omega_\pm \pm \omega_c)\tau)}. \tag{3}$$

Проанализируем случай $k = 0$. Тогда из уравнения (3) получим

$$\omega_\pm = \frac{\mp\omega_c\tau + \sqrt{4\omega_p^2\tau^2 - (1 + i\omega_c\tau)^2}}{2\tau} - \frac{i}{2\tau}, \qquad \omega_\pm = 0 \tag{4}$$

При $\tau \to \infty$ и $\omega_c \ll \omega_p$

$$\omega_\pm = \omega_p \mp \frac{\omega_c}{2}. \tag{5}$$

Это можно использовать как начальное предположение при численном решении.

Решение при $k = 0$ дающее $\omega_\pm = 0$ при $k \neq 0$ больше нуля для σ^- поляризованного света. Эта волна с частотой меньшей ω_c (см. рис.) и для $\omega_c \approx 1$ MHz, что характерно для электронов в ионосфере, входит в аудиодиапазон, а значит может быть услышана.

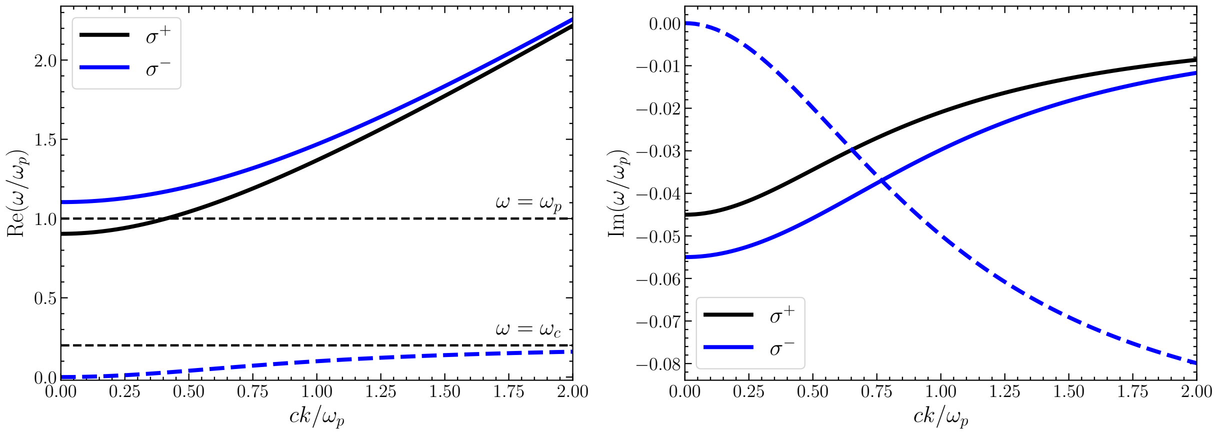

Рис. 1: Зависимости $\mathrm{Re}\,\omega(k_z)/\omega_p$ и $\mathrm{Im}\,\omega(k_z)/\omega_p$ при $\omega_c = 0.2\omega_p$, $\omega_p\tau = 10$