Задача 16 (6 баллов)

На границу раздела двух изотропных сред под углом θ падает гауссов пучок, описываемый распределением электрического поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения,

$$\boldsymbol{E}_0(y) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2b^2}\right),$$

где y – координата, перпендикулярная плоскости падения, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ – вектор перпендикулярный направлению распространения, характеризующий поляризацию пучка, $b \gg c/(n\omega)$ – ширина пучка. Определите сдвиг Федорова

$$\Delta y = \frac{\int y\, |\boldsymbol{E}_r(y)|^2\, dy}{\int |\boldsymbol{E}_r(y)|^2\, dy}$$

для отраженного пучка $\boldsymbol{E}_r(y)$. Ответ выразите через коэффициенты отражения $r_s(\theta)$, $r_p(\theta)$ и параметры Стокса падающего пучка.

Решение:

Сделаем фурье-разложение исходного пучка

$$\boldsymbol{E}_0(y) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 b \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_y}{\sqrt{2\pi}} e^{-b^2 k_y^2/2} e^{ik_y y} \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi} \boldsymbol{E}_0(k_y) e^{ik_y y}. \tag{1}$$

Конечный волновой вектор k_y приводит к повороту плоскости поляризации:

$$\begin{bmatrix} E_{0,p} \\ E_{0,s} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k_y}{k}\cot(\theta) \\ -\frac{k_y}{k}\cot(\theta) & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Аналогично для отраженной волны

$$\begin{bmatrix} E_{r,p} \\ E_{r,s} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} E_{r,x'} \\ E_{r,y'} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где x', y' - система координат отраженной волны. Тогда для отраженной волны мы получаем

$$\begin{bmatrix} E_{r,x'} \\ E_{r,y'} \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} -r_p(\theta) & 0 \\ 0 & r_s(\theta) \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{bmatrix} \equiv A(k_y) \begin{bmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

С точностью до линейных по k_y слагаемых мы получаем

$$A(k_y) = \begin{bmatrix} -r_p(\theta) & 0 \\ 0 & r_s(\theta) \end{bmatrix} - \frac{k_y}{k}\cot(\theta)(r_s(\theta) + r_p(\theta)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv A_0 + A_1 k_y. \tag{5}$$

Сдвиг Федорова через Фурье компоненты

$$\Delta y = \frac{\int y\,|\boldsymbol{E}_r(y)|^2\,dy}{\int |\boldsymbol{E}_r(y)|^2\,dy} = \frac{\int \boldsymbol{E}_r^\dagger(k_y) i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_y}\boldsymbol{E}_r(k_y)\,dk_y}{\int \boldsymbol{E}_r^\dagger(k_y)\boldsymbol{E}_r(k_y)\,dy}. \tag{6}$$

$$\int \boldsymbol{E}_r^\dagger(k_y) i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_y}\boldsymbol{E}_r(k_y)\,dk_y = i\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\mathcal{E}}_0^\dagger(A_0^\dagger + A_1^\dagger k_y)[A_1 - b^2k_y^2(A_0 + A_1 k_y)]\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 e^{-b^2k_y^2}\,\mathrm{d}k_y\,. \tag{7}$$

Заметим, что слагаемые с k_y в первой степени при интегрировании с четной функцией дают ноль, поэтому

$$\int \boldsymbol{E}_r^\dagger(k_y) i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k_y}\boldsymbol{E}_r(k_y)\,dk_y = i\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\mathcal{E}}_0^\dagger(A_0^\dagger A_1 - b^2k_y^2A_0^\dagger A_1 - b^2k_y^2A_1^\dagger A_0)\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 e^{-b^2k_y^2} \approx$$

$$\approx \frac{ib}{2\sqrt{2}}\boldsymbol{\mathcal{E}}_0^\dagger(A_0^\dagger A_1 - A_1^\dagger A_0)\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \tag{8}$$

Аналогично получаем

$$\int \boldsymbol{E}_r^\dagger(k_y)\boldsymbol{E}_r(k_y)\,dy \approx \frac{b}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\mathcal{E}}_0^\dagger A_0^\dagger A_0\boldsymbol{\mathcal{E}}_0. \tag{9}$$

Вычисление дает

$$A_0^\dagger A_1 - A_1^\dagger A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cot(\theta)}{k}(|r_s|^2 + |r_p|^2 + 2r_s r_p^*) \\ -\frac{\cot(\theta)}{k}(|r_s|^2 + |r_p|^2 + 2r_s^* r_p) & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$A_0^\dagger A_0 = \begin{bmatrix} |r_p|^2 & 0 \\ 0 & |r_s|^2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Перемножая с векторами $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ получаем

$$\frac{i}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}_0^\dagger(A_0^\dagger A_1 - A_1^\dagger A_0)\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = -\frac{\cot(\theta)}{2k}\left(|r_s + r_p|^2 S_3 + \mathrm{Im}[r_s r_p^*]S_1\right), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_0^\dagger A_0^\dagger A_0\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = \frac{|r_s|^2 + |r_p|^2}{2} + S_1\frac{|r_p|^2 - |r_s|^2}{2} \tag{13}$$

Окончательно получаем

$$\Delta y = -\frac{\cot(\theta)}{k}\frac{|r_s + r_p|^2 S_3 + \mathrm{Im}[r_s r_p^*]S_1}{|r_s|^2 + |r_p|^2 + S_1(|r_p|^2 - |r_s|^2)} \tag{14}$$