Задача 15 (6 баллов)

Плоская электромагнитная волна, падает по нормали на металлический слой толщины d, описываемый диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi \mathrm{i}\sigma(\omega)}{\omega},$$

где $\sigma(\omega)$ – проводимость. Найдите амплитудные коэффициенты прохождения и отражения. Рассмотрите предельный случай $d \to 0$, $\sigma \to \infty$, но $\sigma d \to \sigma_s$, соответствующий двумерному слою с поверхностной проводимостью σ_s.

Решение:

Уравнения Максвелла при отсутствии внешних зарядов и токов имеют вид:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Из этих уравнений (вместе с $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$) находим

$$-\Delta \boldsymbol{E}(\omega) + k^2(\omega)\boldsymbol{E}(\omega) = 0, \tag{2}$$

где

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}. \tag{3}$$

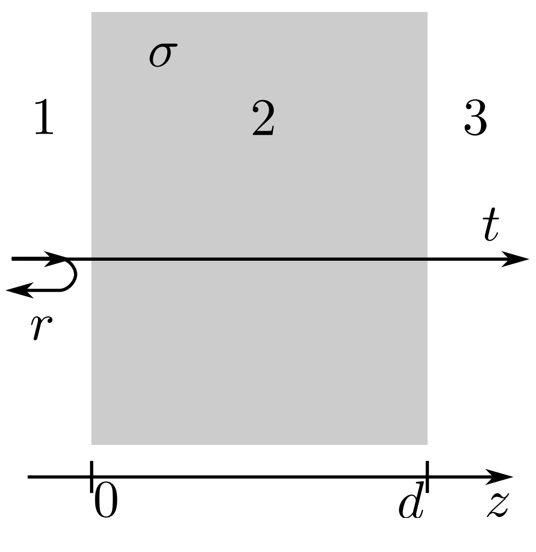

Рис. 1: Рисунок системы

В зонах 1 и 3 (см. Рис. 1)

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \equiv k,$$

а в зоне 2

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 + \frac{4\pi i\sigma(\omega)}{\omega}} \equiv \varkappa.$$

Решение уравнения (2) в зоне 1 (считаем, что поле $\boldsymbol{E}$ направлено вдоль x):

$$E_1(z) = E_0 e^{ikz} + rE_0 e^{-ikz}, \tag{4}$$

в зоне 2:

$$E_2(z) = E_0 a\cos(\varkappa z) + E_0 b\sin(\varkappa z), \tag{5}$$

и в зоне 3:

$$E_3(z) = tE_0 e^{ikz}. \tag{6}$$

Тангенциальные компоненты поля на границах сохраняются, значит

$$\begin{gathered} E_1(z=0) = E_2(z=0), \quad E_2(z=d) = E_3(z=d), \\ H_{1,y}(z=0) = \frac{c}{i\omega}\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}z}(z=0) = H_{2,y}(z=0) = \frac{c}{i\omega}\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z}(z=0), \\ H_{2,y}(z=d) = \frac{c}{i\omega}\frac{\mathrm{d}E_2}{\mathrm{d}z}(z=d) = H_{3,y}(z=d) = \frac{c}{i\omega}\frac{\mathrm{d}E_3}{\mathrm{d}z}(z=d). \end{gathered} \tag{7}$$

То есть сохраняется как само поле $E(z)$, так и его производная. Получаем отсюда систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 + r = a, \\ a\cos(\varkappa d) + b\sin(\varkappa d) = te^{ikd}, \\ ik(1-r) = b\varkappa, \\ -a\varkappa\sin(\varkappa d) + b\varkappa\cos(\varkappa d) = ikte^{ikd}. \end{cases} \tag{8}$$

Из этой системы находим

$$r = \frac{(k^2 - \varkappa^2)\sin(\varkappa d)}{2ik\varkappa\cos(\varkappa d) + (k^2 + \varkappa^2)\sin(\varkappa d)}, \tag{9a}$$

$$t = \frac{2ie^{-ikd}k\varkappa}{2ik\varkappa\cos(\varkappa d) + (k^2 + \varkappa^2)\sin(\varkappa d)}. \tag{9b}$$

В пределе $d \to 0$ $\varkappa d$ стремится к нулю, однако

$$\varkappa^2 d = k^2\left(1 + \frac{4\pi \mathrm{i}\sigma(\omega)}{\omega}\right)d \to \frac{4\pi i k^2\sigma_d}{\omega}.$$

Тогда, раскладывая тригонометрические функции с точностью до линейных по $\varkappa d$ получаем

$$r_{2D} = -\frac{\frac{2\pi}{c}\sigma_d}{1 + \frac{2\pi}{c}\sigma_d}, \qquad t_{2D} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi}{c}\sigma_d}. \tag{10}$$