Задача 26 (4 балла)

Найдите дифференциальное сечение рассеяния плоской линейно поляризованной электромагнитной волны на шаре радиуса $R \ll c/\omega$ из материала с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Рассмотрите частный случаи $\varepsilon = \mu$.

Решение:

Вклад в рассеяние электромагнитной волны на шаре происходит из-за возбуждения в нем электрических и магнитных дипольных моментов. Будем считать, что падающая волна поляризована по оси x

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{e}_x e^{ikz}. \tag{1}$$

Амплитуда рассеяния электрического поля электрическим диполем дается формулой

$$\boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{n}) = -\alpha_e k^2 \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_x), \tag{2}$$

где

$$\alpha_e = R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \tag{3}$$

- поляризуемость частицы, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ и $k = \omega/c$.

Магнитное поле в падающей волне равно $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{e}_y e^{ikz}$. Тогда в силу симметрии уравнений Максвелла рассеяние магнитного поля, излученное магнитным диполем можно записать как

$$\boldsymbol{H}_m^{\text{scat}} = \boldsymbol{f}_h(\boldsymbol{n}) \frac{e^{ikr}}{r}, \qquad \boldsymbol{f}_h(\boldsymbol{n}) = -\alpha_m k^2 \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_y), \tag{4}$$

где, аналогично,

$$\alpha_m = R^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2}. \tag{5}$$

Тогда электрическое поле от излучения магнитного диполя на больших расстояниях будет иметь вид

$$\boldsymbol{E}_m^{\text{scat}} = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_m^{\text{scat}} \equiv \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{n}) \frac{e^{ikr}}{r}, \qquad \boldsymbol{f}_m = -k^2 \alpha_m \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_y \tag{6}$$

Полное рассеянное электрическое поле от магнитного и электрического диполей

$$\boldsymbol{E}^{\text{scat}} = \boldsymbol{E}_p^{\text{scat}} + \boldsymbol{E}_m^{\text{scat}} = (\boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{n})) \frac{e^{ikr}}{r} = \\ = [-\alpha_e k^2 \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_x) - k^2 \alpha_m \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_y] \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{7}$$

Дифференциальное сечение рассеяния

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{scat}} = |\boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{n})|^2 = k^4 \big(&|(\alpha_m + \alpha_e \cos\theta)\cos\varphi\sin\theta|^2 + \\
&+\big|\alpha_e \cos\varphi \sin^2\theta \sin\varphi\big|^2 + \big|\cos\theta(\alpha_m + \alpha_e\cos\theta) + \alpha_e \sin^2\theta\sin^2\varphi\big|^2\Big) = \\
&= \frac{k^4}{4}\big(8\alpha_e\alpha_m\cos\theta + (\alpha_e^2+\alpha_m^2)(3+\cos(2\theta)) - 2(\alpha_e^2-\alpha_m^2)\cos(2\varphi)\sin^2\theta\big),
\end{aligned} \tag{8}
$$

где мы ввели $\boldsymbol{n} = \Big[\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\Big]$

В случае $\varepsilon = \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha_m = \alpha_e$

$$
\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{scat}} = 4k^4\alpha_e^2\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{9}
$$

Заметим, что для рассеяния назад ($\theta = \pi$) дифференциальное сечение обращается в нуль. Это называется эффектом Керкера. Он объясняется тем, что электрический диполь излучает в направлениях z и $-z$ в фазе, а магнитный – в противофазе. Их интерференция приводит к тому, что при равных электрической и магнитной поляризуемостях амплитуда волны, рассеянной назад, обращается в нуль.