Задача 7 (4 балла)

Найдите дисперсию плазмонных мод в бесконечном металлическом цилиндре радиуса R, проводимость которого описывается формулой Друде. Постройте зависимость $\omega_m(k_zR)$, где m – азимутальный индекс моды, а k_z – волновой вектор вдоль оси цилиндра для $m = 0, 1, 5$. Найдите закон дисперсии в предельных случаях: (a) $k_z \to 0$; (b) $k_z \to \infty$; (c) $m \to \infty$.

Решение: Решение уравнения Лапласа для потенциала в цилиндрических координатах имеет вид

$$\varphi(r) = \begin{cases} \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_m I_m(k_z r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} & r \leq R \\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} B_m K_m(k_z r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} & r \geq R, \end{cases} \tag{1}$$

где $I_m(x)$ и $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя и учтено, что потенциал должен быть конечным в $r = 0$ и затухать при $r \to \infty$.

Граничные условия:

$$\varphi(r = R - 0) = \varphi(r = R + 0), \tag{2a}$$

$$\varepsilon(\omega) \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r}\Big|_{r=R-0} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r}\Big|_{r=R+0} \tag{2b}$$

приводят к тому, что для каждого m

$$A_m I_m(k_z R) - B_m K_m(k_z R) = 0, \tag{3a}$$

$$\varepsilon(\omega) A_m I'_m(k_z R) - B_m K'_m(k_z R) = 0. \tag{3b}$$

Эти уравнения имеют нетривиальные решения в том случае если определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} I_m(k_z R) & -K_m(k_z R) \\ \varepsilon(\omega) I'_m(k_z R) & -K'_m(k_z R) \end{bmatrix} \tag{4}$$

равен нулю. Тогда частота ω_m находится из уравнения

$$-I_m(k_z R) K'_m(k_z R) + K_m(k_z R) \varepsilon(\omega_m) I'_m(k_z R) = 0. \tag{5}$$

Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты дается формулой Друде

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{6}$$

и, таким образом, уравнение (5) приводится к виду

$$W[K_m(k_zR), I_m(k_zR)] - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} K_m(k_zR) I'_m(k_zR) = 0, \tag{7}$$

где $W[K_m(k_zR), I_m(k_zR)]$ - определитель Вронского, значение которого известно (см. напр. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Т. 1, — М.: ИЛ, (1949) или простое доказательство тут)

$$W(K_m(k_zR), I_m(k_zR)) = \frac{1}{k_zR}. \tag{8}$$

Отсюда находим окончательный ответ

$$\omega_m(k_zR) = \omega_p \sqrt{K_m(k_zR) I'_m(k_zR) k_zR}. \tag{9}$$

Проанализируем ответ:

(a) $k_z \to 0$

$$K_m(x) = \begin{cases} -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right] & m = 0 \\ \frac{(m-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m} & m \neq 0 \end{cases} \qquad (x \to 0) \tag{10}$$

$$I_m(x) = \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m, \qquad I'_m(x) = \frac{1}{2}[I_{m-1}(x) + I_{m+1}(x)] \quad (x \to 0) \quad m \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad I'_m(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & m = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} & m > 0 \end{cases} \qquad (x \to 0) \tag{11}$$

Таким образом, для случая $m = 0$

$$\omega_0(k_zR) = \omega_p\, k_zR \sqrt{-\tfrac{1}{2}\, \ln(k_zR)} \qquad (k_z \to 0), \tag{12a}$$

$$\omega_m(k_zR) = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \qquad m \neq 0 \qquad (k_z \to 0). \tag{12b}$$

(b) $k_z \to \infty$

$$K_m(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \qquad I_m(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^{x} \qquad (x \to \infty) \tag{13}$$

и получаем

$$\omega_m(k_zR) = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \qquad (k_z \to \infty). \tag{14}$$

На больших волновых векторах плазмонный резонанс локализуется вблизи границ цилиндра и ведет себя как поверхностный плазмонный резонанс.

(c) $m \to \infty$

Асимптотическое поведение функций Бесселя при большом индексе дается формулами

$$I_m(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\left(\frac{ex}{2m}\right)^m \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m, \quad K_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}}\left(\frac{ex}{2m}\right)^{-m} \approx \frac{1}{2m}m!\left(\frac{2}{x}\right)^m \tag{15}$$

$$\omega_m(k_zR) = \sqrt{\frac{1}{2m}m!\left(\frac{2}{k_zR}\right)^m \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{k_zR}{2}\right)^{m-1} k_zR} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \qquad (m \to \infty). \tag{16}$$

Все предельные случае видны на рисунке 1.

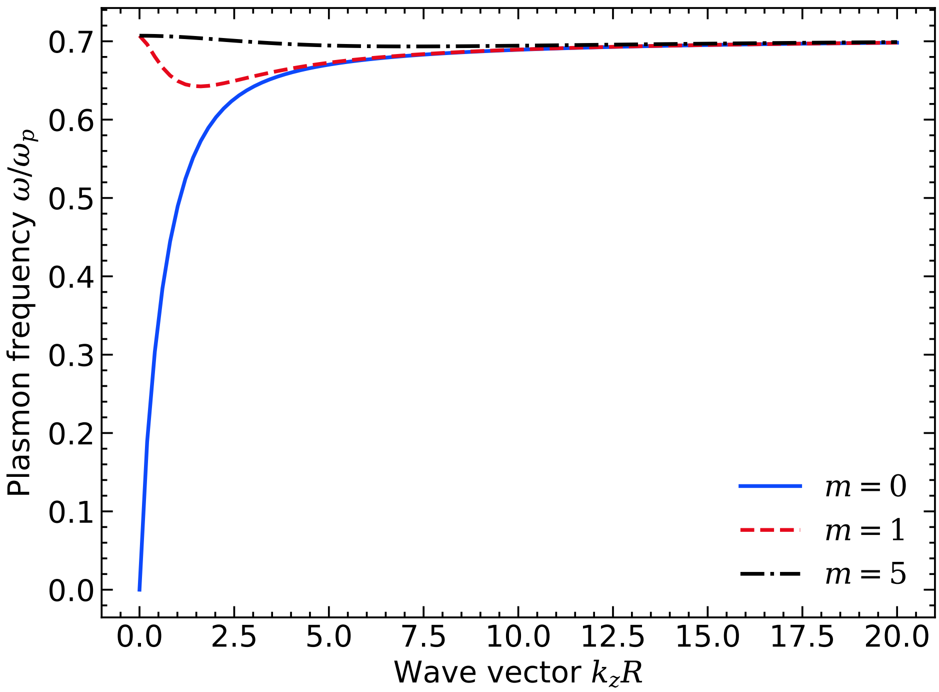

Рис. 1: Зависимость $\omega_m(k_zR)$ для $m = 0, 1, 5$