Задача 11 (2 балла)

Металлический шар радиуса a с проводимостью σ помещен во внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{B}_0^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. В квазимагнитостатическом приближении определите магнитное во всем пространстве. Из вида магнитного поля снаружи шара,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{m}}{r}\,,$$

определите магнитную поляризуемость α, связывающую магнитный момент шара с внешним полем, $\boldsymbol{m} = \alpha \boldsymbol{B}_0$.

Найдите асимптотические поведение поляризуемости при (a) $a \to 0$, (b) $\sigma \to \infty$. (c) Также определите поляризуемость сверхпроводящего шара, проводимость которого описывается формулой Друде с $\tau = \infty$: $\sigma(\omega) = \mathrm{i} n e^2/(m\omega)$.

Решение: [см. Ландау и Лифшиц т.8, пар.59, Задача 1]

Внутри шара ($r < a$):

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{B} + k^2 \boldsymbol{B} = 0, \qquad k = \frac{1+i}{\delta} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \quad \Delta \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Решение уравнения на вектор $\boldsymbol{A}$ внутри шара дается с помощью сферической функции Бесселя $j_0(x) = \sin(x)/x$

$$\boldsymbol{A} = \beta \boldsymbol{\nabla} \times [j_0(kr)\boldsymbol{B}_0]. \tag{2}$$

Тогда поле внутри шара

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{in}} = \boldsymbol{\nabla} \times [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}]. \tag{3}$$

Вычисление дает

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{in}} = \beta\left(\frac{k j_0'(kr)}{r} + k^2 j_0(kr)\right)\boldsymbol{B}_0 - \beta\left(\frac{3k j_0'(kr)}{r} + k^2 j_0(kr)\right)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{n}), \tag{4}$$

где мы ввели $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$.

Поле снаружи шара ($r > a$):

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}_0 + \alpha \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\boldsymbol{B}_0}{r} = \boldsymbol{B}_0 + \alpha \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{B}_0}{r^3} \tag{5}$$

Сшиваем граничные условия при $r = a$:

$$\begin{cases} \beta\Big(\frac{kj_0'(ka)}{r} + k^2 j_0(ka)\Big) = 1 - \frac{\alpha}{a^3} \\ -\beta\Big(\frac{3kj_0'(kr)}{r} + k^2 j_0(kr)\Big) = \frac{3\alpha}{a^3} \end{cases} \tag{6}$$

и находим

$$\alpha = -\frac{a^3}{2}\left(1 + \frac{3j_0'(ka)}{kaj_0(ka)}\right) = -\frac{a^3}{2}\left(1 + \frac{3}{ka}\cot(ka) - \frac{3}{(ka)^2}\right). \tag{7}$$

Рассмотрим предельные случаи:

(a) $ka \to 0$

$$\alpha \approx \frac{k^2 a^5}{30}. \tag{8}$$

(b) Случай $\sigma \to \infty$, из-за того, что $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$, эквивалентен приближению $ka \to \infty$. В этом случае

$$\alpha \approx -\frac{a^3}{2}. \tag{9}$$

Этот предельный случай соответсвует шару из идеального металла. Данный ответ также может быть получен из условия $\boldsymbol{B}^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ на поверхности шара.

(c) Подставляя $\sigma(\omega) = \mathrm{i}ne^2/(m\omega)$, получаем, что для сверхпроводника $k = \mathrm{i}\omega_p/c$ является чисто мнимым. Таким образом, магнитное поле проникает в сверхпроводник на глубину $\sim c/\omega_p$. Для поляризуемости получаем выражение

$$\alpha = -\frac{a^3}{2}\left(1 - \frac{c\coth\left(\frac{\omega_p a}{c}\right)}{a\omega_p} + \frac{3c^2}{(\omega_p a)^2}\right). \tag{10}$$