Задача 28 (не обязательная, 6 баллов)

Бесконечное плоское идеальное зеркало, параллельное плоскости (x, y), колеблется вдоль оси z, так что его координата описывается гармоническим законом: $u(t) = u_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t} + u_0^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$. На зеркало по нормали падает плоская электромагнитная волна с частотой ω_0, описываемая векторным потенциалом $A_x^{(0)}(z,t) = A_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t-z/c)} + \text{c.c.}$ Отраженный свет помимо исходной частоты ω_0 содержит также комбинационные частоты $\omega_S = \omega - \Omega$, $\omega_{aS} = \omega + \Omega$ и описывается векторным потенциалом

$$A_x^{(r)}(z,t) = A_r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0(t+z/c)} + A_{aS} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{aS}(t+z/c)} + A_S \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_S(t+z/c)} + \text{c.c.}$$

(a) На поверхности зеркала выполняется граничное условие $A_x\big|_{z=u(t)} = 0$. В линейном порядке по $u_0\omega/c \ll 1$ определите амплитуды стоксова и анти-стоксова рассеяния, A_S и A_{aS}.

(b) Вычислите плотности потока энергии, соответствующие падающей и рассеянным волнам. Считая, что энергия переносится фотонами с энергией $\hbar\omega$, найдите соответствующие плотности потока фотонов J_0, J_S, J_{aS}. Вычислите вероятность стоксова и анти-стоксова рассеяния $p_S = J_S/J_0$, $p_{aS} = J_{aS}/J_0$.

(c) Вычислите среднее изменение энергии фотона в при его отражении от зеркала: $\Delta E = p_{aS}(\hbar\omega_{aS} - \hbar\omega_0) + p_S(\hbar\omega_S - \hbar\omega_0)$. В силу закона сохранения энергии, эта энергия забирается от энергии механических колебаний зеркала. Считая, что масса единицы площади зеркала равна m, найдите декремент затухания колебаний зеркала.