Задача 23 (4 балла)

Найдите коэффициент отражения света от полубесконечного фотонного кристалла, состоящего из чередующихся слоев с толщинами d_1 и d_2, показатели преломления которых равны n_1 и n_2, причем $n_1 d_1 = n_2 d_2$. Считайте, что $|n_1 - n_2| \ll n_{1,2}$, а частота света близка к частоте брэгговского резонанса: $|\omega - \omega_B| \ll \omega_B$, где $\omega_B = \pi c/(n_1 d_1 + n_2 d_2)$.

Указание. Коэффициент отражения от полубесконечной периодической структуры дается формулой

$$r = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd} - \tilde{T}_{++}}{\tilde{T}_{+-}},$$

где $\tilde{T}$ – матрица переноса через период структуры, записанная в базисе бегущих волн, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}$ – ее собственное число, $\operatorname{Im} K > 0$. Для выбора верного знака K удобно внести в систему бесконечно малое поглощение при помощи замены $n_{1,2} \to n_{1,2} + \mathrm{i}0$.

Решение: Запишем матрицу переноса через период в базисе бегущих волн

$$\tilde{T} = \tilde{T}_{d_2} \tilde{T}_{21} \tilde{T}_{d_1} \tilde{T}_{12}, \tag{1}$$

где $\tilde{T}_{12}$ и $\tilde{T}_{21}$ - матрицы переноса через границы слоев, а

$$\tilde{T}_{d_{1,2}} = \begin{bmatrix} \exp(in_{1,2}d_{1,2}k) & 0 \\ 0 & \exp(-in_{1,2}d_{1,2}k) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Введем отстройку частоты от брэгговского резонанса

$$kn_1 d_1 = kn_2 d_2 = \frac{\pi}{2}(1+\Omega), \qquad \Omega = \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B}, \qquad |\Omega| \ll 1, \tag{3}$$

а также разность показателей преломления

$$n_{1,2} = n \mp \frac{\Delta n}{2}. \tag{4}$$

Тогда с точностью до Δn мы получаем матрицу

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -e^{i\pi\Omega} & \frac{\Delta n}{2n}(1+e^{i\pi\Omega}) \\ \frac{\Delta n}{2n}(1+e^{-i\pi\Omega}) & -e^{-i\pi\Omega} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Найдем ее собственные числа

$$\lambda_{1,2} = -\frac{e^{-i\pi\Omega}\left[(1+e^{2i\pi\Omega})n \pm (1+e^{i\pi\Omega})\sqrt{(-1+e^{i\pi\Omega})^2 n^2 + e^{i\pi\Omega}\Delta n^2}\right]}{2n}. \tag{6}$$

Чтобы проверить, какое решение нам подходит, можно например рассмотреть случай $\omega = \omega_{\mathrm{Br}}$, тогда

$$\lambda_{1,2} = -1 \mp \frac{\Delta n}{n}. \tag{7}$$

Требование $\mathrm{Im}(K) > 0$ соответствует $|\lambda| < 0$, а значит, мы выбираем λ_1.

Тогда коэффициент отражения

$$r = \frac{\lambda_1 - \tilde{T}_{++}}{\tilde{T}_{+-}}. \tag{8}$$

Подставляя все, раскладывая экспоненту

$$e^{i\Omega\pi} = 1 + i\Omega\pi - (\Omega\pi)^2, \tag{9}$$

и раскладывая по малости Ω и Δn мы получаем

$$r = \frac{in\pi\Omega - \sqrt{\Delta n^2 - n^2\pi^2\Omega^2}}{\Delta n}. \tag{10}$$

Видно, что модуль коэффициента отражения равен 1 внутри стоп-зоны, $|\Omega| \leq \Delta n/(\pi n)$, а при выходе за ее пределы спадает.

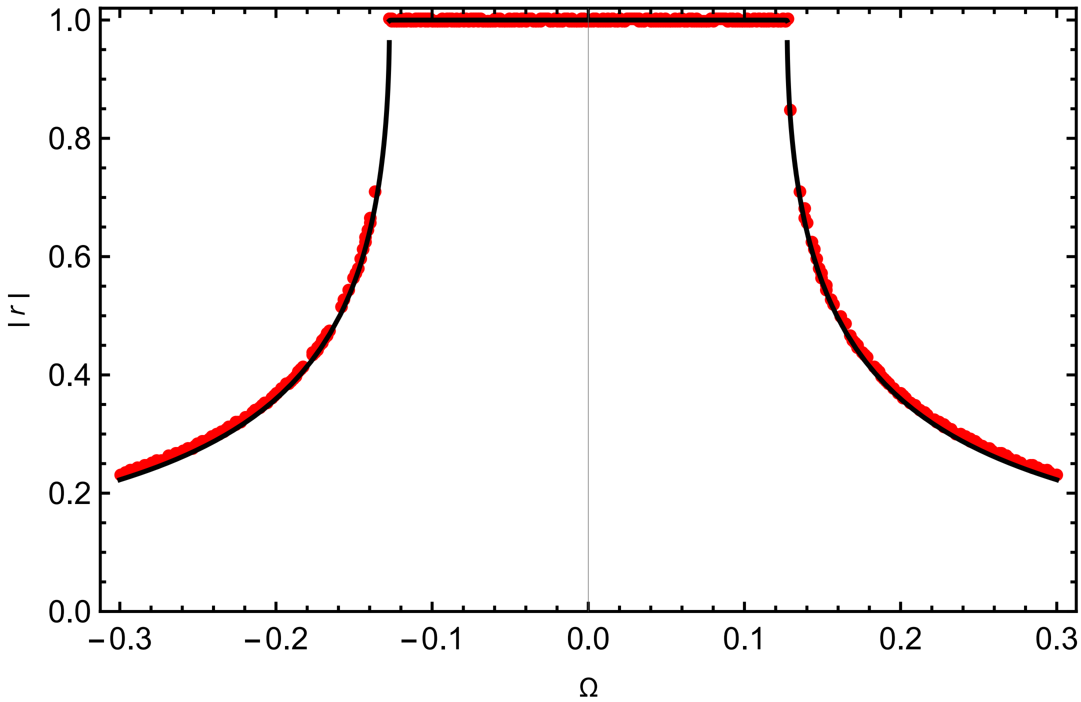

Рис. 1: Модуль коэффициента отражения от полубесконечной структуры. Черная кривая – формула (10), красные точки – численная диагонализация матрицы (1). Параметры $n = 1$ и $\Delta n = 0.2$.