Задача 24 (4 балла)

С точностью до членов, квадратичных по волновому вектору, закон дисперсии TE- и TM-поляризованных оптических мод в планарном микрорезонаторе имеет вид

$$\omega_m^{(\mathrm{TE,TM})}(k_x,k_y)=\omega_m(0)+\frac{\hbar(k_x^2+k_y^2)}{2M_{\mathrm{TE,TM}}}\,.$$

Здесь $M_{\mathrm{TE,TM}}$ – константы, имеющие смысл эффективных масс TE- и TM-поляризованных фотонов, запертых в микрорезонаторе. Выразите $M_{\mathrm{TE,TM}}$ через $\partial^2\varphi_{r_{s,p}}/\partial\theta^2\big|_{\theta=0}$, где $\varphi_{r_{s,p}}$ – фазы коэффициентов отражения s- и p-поляризованного света от зеркала, формирующего резонатор.

Решение: Условие на резонанс Фабри-Перо при наклонном падении света ($k_\perp=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$)

$$r^2(k_\perp)e^{2ik_zL}=1\quad\Rightarrow\quad\varphi_{r_{s,p}}+\frac{n\omega_m^{(\mathrm{TE,TM})}(k_\perp)L}{c}\cos\theta=\pi m,\tag{1}$$

где L и n - параметры микрорезонатора, а θ - угол распространения света внутри микрорезонатора

$$\sin\theta=\frac{k_\perp c}{\omega_m^{(\mathrm{TE,TM})}n}.\tag{2}$$

Разложим левую часть для маленьких $k_\perp$, что, в том числе, требует разложения по θ (см. (2))

$$\varphi_{r_{s,p}}(\omega_m(0))+\frac{\partial\varphi_{r_{s,p}}}{\partial\omega}\big(\omega_m^{(\mathrm{TE,TM})}(k_\perp)-\omega_m(0)\big)+\frac{\partial^2\varphi_{r_{s,p}}}{\partial\theta^2}\frac{\theta^2}{2}+\frac{n\omega_m(0)L}{c}+ \\ +\frac{nL}{c}\big(\omega_m^{(\mathrm{TE,TM})}(k_\perp)-\omega_m(0)\big)+\frac{nL\omega_m(0)}{c}\left(\frac{-\theta^2}{2}\right)=\pi m.\tag{3}$$

Вспомним, что $\omega_m(0)$ - резонансная частота для микрорезонатора

$$\varphi_r(\omega_m(0))+\frac{n\omega_m(0)L}{c}=\pi m.\tag{4}$$

Тогда, воспользовавшись формулой для эффективной длины микрорезонатора

$$L^*=L+\frac{c}{n}\frac{\partial\varphi_{r_{s,p}}}{\partial\omega},\tag{5}$$

из формулы (3) получаем

$$\omega_m^{(\mathrm{TE,TM})}(k_\perp)=\omega_m(0)+\frac{c}{nL^*}\left(\frac{nL\omega_m(0)}{c}-\frac{\partial^2\varphi_{r_{s,p}}}{\partial\theta^2}\right)\frac{\theta^2}{2}=\left[k_\perp\approx\frac{\omega_m(0)c}{n}\theta\right]= \\ =\omega_m(0)+\frac{k_\perp^2}{2}\frac{L\omega_m(0)}{L^*}\frac{c^2}{n^2\omega_m(0)^2}\left(1-\frac{c}{nL\omega_m(0)}\frac{\partial^2\varphi_{r_{s,p}}}{\partial\theta^2}\right)\equiv\omega(0)+\frac{\hbar k_\perp^2}{2M_{(\mathrm{TE,TM})}}.\tag{6}$$

Таким образом, мы получили

$$M_{(\mathrm{TE},\mathrm{TM})} = \frac{\hbar\omega_m(0)n^2}{c^2}\frac{L^*}{L}\left(1 - \frac{c}{nL\omega_m(0)}\frac{\partial^2\varphi_{r_{s,p}}}{\partial\theta^2}\right)^{-1}. \tag{7}$$