Задача 10 (4 балла)

В парамагнетике динамика намагниченности описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}_L \times \boldsymbol{M}] - \frac{\boldsymbol{M}_\parallel - \boldsymbol{M}_0}{T_1} - \frac{\boldsymbol{M}_\perp}{T_2}\,, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_L = \gamma\boldsymbol{B}$ – частота ларморовской прецессии магнитного момента в магнитном поле $\boldsymbol{B}$, γ – гиромагнитная константа, $\boldsymbol{M}_0 = \tilde{\chi}_M\boldsymbol{B}$ – намагниченность в стационарных условиях, $\boldsymbol{M}_\parallel$ и $\boldsymbol{M}_\perp$ – компоненты вектора $\boldsymbol{M}$, параллельные и перпендикулярные $\boldsymbol{B}$, $T_{1,2}$ – продольное и поперечное время релаксации намагниченности.

Рассмотрите парамагнетик, помещенный в постоянное магнитное поле $\boldsymbol{B}_0 \parallel z$. Пусть к системе дополнительно приложено переменное магнитное поле $\boldsymbol{B}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\boldsymbol{B}_1^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $|\boldsymbol{B}_1| \ll |\boldsymbol{B}_0|$. Найдите обусловленную этим полем поправку к намагниченности вида $\boldsymbol{M}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{M}_1^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ и определите тензор восприимчивости $\tilde{\chi}_{1,ij}(\omega)$, описывающий линейный отклик $\boldsymbol{M}_{1,i} = \tilde{\chi}_{1,ij}\boldsymbol{B}_{1,j}$. Постройте график зависимости компонент тензора $\tilde{\chi}_{1,ij}(\omega)/\tilde{\chi}_M$ от ω при $\gamma B_0 T_2 = 10$, $T_1 = T_2/2$.

Решение:

Без приложенного поля $\boldsymbol{B}_1$ в стационарном случае:

$$M_x^{(0)} = M_y^{(0)} = 0, \qquad M_z^{(0)} = \tilde{\chi}_M B_0. \tag{2}$$

При приложении внешнего поля B_1 под углом θ при условии $B_1 \ll B_0$ вектор направления суммарного поля $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{n}_B = B_0\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{B}_1$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{n}_B = \boldsymbol{e}_z + \frac{B_{1,x}}{B_0}\boldsymbol{e}_x + \frac{B_{1,y}}{B_0}\boldsymbol{e}_y. \tag{3}$$

Тогда компонента вектора (в нулевом и в первом порядке по $\boldsymbol{B}_1$) $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^{(0)} + \boldsymbol{M}^{(1)}$ параллельная $\boldsymbol{B}$ с точностью до первого порядка по B_1

$$\boldsymbol{M}_\parallel = \boldsymbol{n}_B(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}_B) = \left(\boldsymbol{e}_z + \frac{B_{1,x}}{B_0}\boldsymbol{e}_x + \frac{B_{1,y}}{B_0}\boldsymbol{e}_y\right)(M_z^{(0)} + M_z^{(1)}) = \\ = [(2)] = (M_z^{(0)} + M_z^{(1)})\boldsymbol{e}_z + \chi(B_{1,x}\boldsymbol{e}_x + B_{1,y}\boldsymbol{e}_y). \tag{4}$$

Компонента $\boldsymbol{M}_\perp = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_\parallel$. С учетом слагаемых до первого порядка получаем

$$\boldsymbol{M}_\perp = M_x^{(1)}\boldsymbol{e}_x + M_y^{(1)}\boldsymbol{e}_y - \chi(B_{1,x}\boldsymbol{e}_x + B_{1,y}\boldsymbol{e}_y) \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) для $\boldsymbol{M}^{(1)}$ имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}^{(1)}}{\mathrm{d}t} = \gamma B_0\big[\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{M}^{(1)}\big] + \gamma\tilde{\chi}_M B_0[\boldsymbol{B}_1 \times \boldsymbol{e}_z] - \frac{M_z^{(1)}\boldsymbol{e}_z}{T_1} - \\ - \frac{M_x^{(1)}\boldsymbol{e}_x + M_y^{(1)}\boldsymbol{e}_y}{T_2} + \frac{\tilde{\chi}_M B_{1,z}\boldsymbol{e}_z}{T_1} + \frac{\tilde{\chi}_M(B_{1,x}\boldsymbol{e}_x + B_{1,y}\boldsymbol{e}_y)}{T_2} \quad (6)$$

При приложении поля вдоль оси z ненулевой будет только компонента $M_z^{(1)}$

$$\frac{\mathrm{d}M_z^{(1)}}{\mathrm{d}t} = -\frac{M_z^{(1)} - \tilde{\chi}_M B_{1,z}}{T_1} \quad \Rightarrow \quad M_z^{(1)} = \frac{\tilde{\chi}_M B_{1,z}}{(1 - i\omega T_1)}. \quad (7)$$

Пусть поле $\boldsymbol{B}_1$ приложено вдоль оси x. Тогда получаем систему уравнений на $M_{x,y}^{(1)}$:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}M_x^{(1)}}{\mathrm{d}t} = -\gamma B_0 M_y^{(1)} - \frac{M_x^{(1)}}{T_2} + \frac{\tilde{\chi}_M B_{1,x}}{T_2}, \\ \frac{\mathrm{d}M_y^{(1)}}{\mathrm{d}t} = \gamma B_0 M_x^{(1)} - \gamma\tilde{\chi}_M B_0 B_{1,z} - \frac{M_y^{(1)}}{T_2}. \end{cases} \quad (8)$$

Ищем решение в виде $M_{x',y'} \propto e^{-i\omega t}$ и находим

$$M_x^{(1)} = \tilde{\chi}_{1,xx}(\omega)B_{1,x}, \qquad M_y^{(1)} = \tilde{\chi}_{1,yx}(\omega)B_{1,x}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\chi}_{1,xx}(\omega) = \tilde{\chi}_M \frac{(1 - iT_2\omega) + B_0^2T_2^2\gamma^2}{(1 - iT_2\omega)^2 + B_0^2T_2^2\gamma^2}, \quad \tilde{\chi}_{1,yx}(\omega) = \tilde{\chi}_M \frac{iB_0\gamma\omega T_2^2}{(1 - iT_2\omega)^2 + B_0^2T_2^2\gamma^2}. \quad (10)$$

Аналогично можно получить $\chi_{1,xx}(\omega) = \chi_{1,yy}(\omega), \qquad \chi_{1,xy}(\omega) = -\chi_{1,yx}(\omega)$.

Зависимости компонент показаны на Рисунке 1.

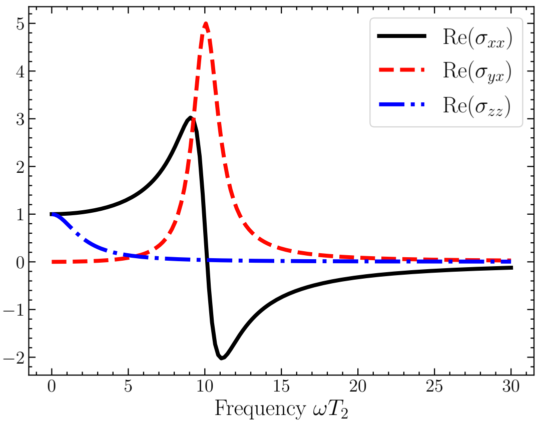

Рис. 1: Компоненты тензора $\tilde{\chi}_1$ при $\gamma B_0 T_2 = 10$, $T_1 = T_2/2$