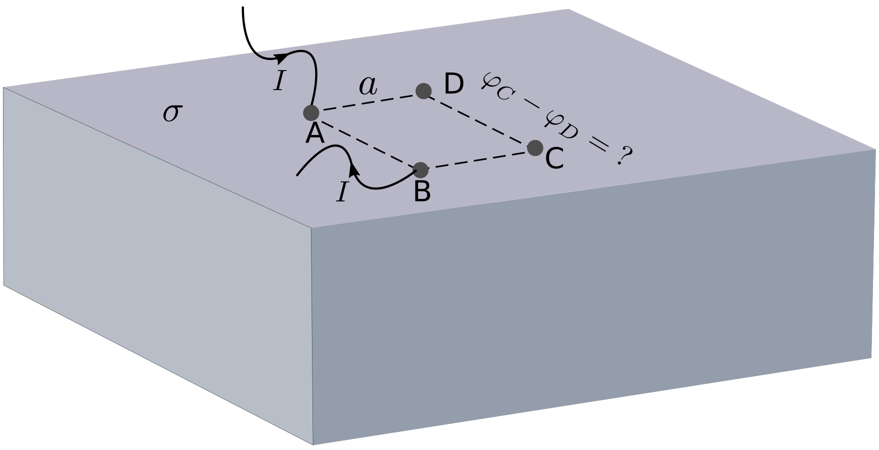
Задача 1 (6 баллов)

К плоской поверхности очень большого объемного проводника с удельной проводимостью σ подключены четыре контакта в точках A, B, C и D, являющихся вершинами квадрата со стороной a. К контактам A и B подключен источник, выдающий ток I. Найдите напряжение между контактами C и D.



Решение: Найдем поле и потенциал, который создает втекающий в начало координат ток в точке $\boldsymbol{r}$. Для этого зеркально дополним проводник до всего пространства, отразив его относительно плоскости, в которую втекает ток. Теперь наше пространство является симметричным и в начало координат втекает ток $I' = 2I$.

По определению плотности тока

$$I' = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,, \tag{1}$$

где Ω - поверхность бесконечно малой области $\mathcal{V}$ вокруг точечного контакта. По теореме Стокса

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}V\,. \tag{2}$$

Поскольку этот интеграл должен быть равен I' для сколько угодно малой области $\mathcal{V}$ следует, что

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = I'\delta(\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

где $\delta(\boldsymbol{r})$ - дельта-функция. Из закона Ома следует, что

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E} = -\sigma\boldsymbol{\nabla}\varphi, \tag{4}$$

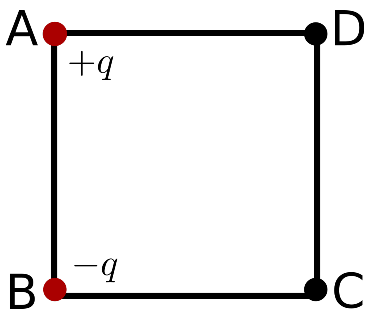
а, значит, что втекающий ток создает распределение потенциала, которое находится из уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{I'}{\sigma}\delta(\boldsymbol{r}). \tag{5}$$

Можно считать, что втекающий ток создает потенциал, аналогичный точечному заряду величиной $q = \frac{I}{2\pi\sigma}$. Его потенциал хорошо известен

$$\varphi = \frac{I'}{4\pi\sigma r} = \frac{I}{2\pi\sigma r}. \tag{6}$$

Для вытекающего тока все аналогично, меняется только знак заряда. Таким образом, наша задача свелась к электростатической задаче



Тогда потенциал в точке C

$$\varphi_C = \frac{q}{\sqrt{2}a} - \frac{q}{a} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{q}{a}, \tag{7}$$

а в точке D

$$\varphi_D = \frac{q}{a} - \frac{q}{\sqrt{2}a} = -\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\frac{q}{a} = -\varphi_C. \tag{8}$$

И окончательный ответ для разности потенциалов

$$\varphi_C - \varphi_D = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})q}{a} = \frac{(1-\sqrt{2})I}{\sqrt{2}\pi\sigma a}. \tag{9}$$