Задача 4 (6 баллов)

В электромагнитном поле с достаточно большими частотой или волновым вектором оказываются возможными процессы рождения реальных или виртуальных электрон-позитронных пар. Поляризуемость вакуума $\chi(\omega, \boldsymbol{k})$, обусловленная с этим эффектом, имеет одновременно временну́ю и пространственную дисперсию, но в силу релятивистской инвариантности зависит лишь от параметра $t = \hbar^2(\omega^2 - c^2\boldsymbol{k}^2)$. Расчеты методами квантовой электродинамики позволяют найти мнимую часть поляризуемости (см., например, В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц , Л.П. Питаевский, Теоретическая физика, т. IV, Квантовая электродинамика, §113, М.: Наука, 1989):

$$\mathrm{Im}\ \chi(t) = \frac{\alpha}{12\pi}\sqrt{\frac{t-4m^2c^4}{t}}\,\frac{t+2m^2c^4}{t}\,\theta(t-4m^2c^4)\,,$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ – постоянная тонкой структуры, e – заряд электрона, m – его масса, θ – функция Хевисайда. Функция $\chi(t)$ является аналитической в верхней полуплоскости, $\mathrm{Im}\, t > 0$, а также известно, что $\chi(0) = 0$.

Воспользуйтесь соотношением Крамерса-Кронига для величины $\chi(t)/t$ и найдите $\chi(t)$ при малых $t \ll m^2c^4$ с точностью до членов $\propto t$. Используя полученное выражение, найдите линейную по α поправку к потенциалу точечного заряда, обусловленную поляризацией вакуума.

Решение: Из соотношения Крамерса-Кронига находим

$$\frac{\chi(t)}{t} = \frac{\alpha}{12\pi}\int\limits_{4m^2c^4}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t'}{t'}\sqrt{\frac{t'-4m^2c^4}{t'}}\,\frac{t'+2m^2c^4}{t'^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{12\pi}\left\{\int\limits_{4m^2c^4}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t'}{t'^2}\sqrt{\frac{t'-4m^2c^4}{t'}} + 2m^2c^4\int\limits_{4m^2c^4}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t'}{t'^3}\sqrt{\frac{t'-4m^2c^4}{t'}}\right\} \equiv \frac{\alpha}{12\pi}\{\mathcal{I}_1 + 2m^2c^4\mathcal{I}_2\} \quad (1)$$

Первый интграл приводится к виду

$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{4m^2c^4}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t'}{t'^2}\sqrt{\frac{t'-4m^2c^4}{t'}} = [y=\sqrt{t'},\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}t'/2/\sqrt{t'}] = 2\int\limits_{2m}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^4}\sqrt{y^2-4m^2c^4} =$$

$$= 4mc^2\int\limits_{2m}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^4}\sqrt{\frac{y^2}{4m^2c^4}-1} = \left[y = 2mc^2\,\mathrm{ch}(x),\ \mathrm{d}y = 2mc^2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2m^2c^4}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^4(x)} =$$

$$= \frac{1}{2m^2c^4}\left[\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2(x)} - \int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^4(x)}\right], \quad (2)$$

а второй

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{4m^2c^4}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t'}{t'^3}\sqrt{\frac{t'-4m^2c^4}{t'}} = \frac{1}{8m^4c^8}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^6(x)} = \frac{1}{8m^4c^8}\left[\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^4(x)} - \int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^6(x)}\right], \tag{3}$$

где мы использовали аналогичные (2) замены.

Для вычисления таких интегралов докажем свойство для понижения степени знаменателя (в более общем виде свойства интегралов есть, например, тут)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^n(x)} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(n-1)\,\mathrm{ch}^{n-1}(x)} - \frac{n-2}{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^{n-2}(x)} \tag{4}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^n(x)} = \int \frac{\mathrm{d}[\mathrm{th}(x)]}{\mathrm{ch}^{n-2}(x)} = \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^{n-2}(x)} - (n-2)\int\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^n(x)} = \\ = \frac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{ch}^{n-2}(x)} - (n-2)\int\frac{\mathrm{d}x\,[\mathrm{ch}^2(x)-1]}{\mathrm{ch}^n(x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^n(x)} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(n-1)\,\mathrm{ch}^{n-1}(x)} - \frac{n-2}{n-1}\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^{n-2}(x)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что в наших пределах

$$\left.\frac{\mathrm{sh}(x)}{(n-1)\,\mathrm{ch}^{n-1}(x)}\right|_0^{\infty} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, мы свели оба интеграла (2) и (3) к интегралу

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1. \tag{7}$$

Откуда следует, что $\mathcal{I}_1 = \frac{1}{6m^2}$ и $\mathcal{I}_2 = \frac{1}{60m^4}$ и окончательный ответ

$$\chi(t) = \frac{\alpha t}{60\pi m^2c^4} \;\Rightarrow\; \chi(k) = -\frac{\alpha\hbar^2k^2}{60\pi m^2c^2}, \tag{8}$$

где мы положили $\omega = 0$, поскольку рассматривается статическая задача.

Фурье-образ кулоновского потенциала известен с лекций:

$$\varphi(k) = \frac{4\pi e}{\varepsilon(k)k^2} = \frac{4\pi e}{(1+4\pi\chi(k))k^2} \approx \frac{4\pi e}{k^2} + \frac{4\pi\alpha e\hbar^2}{15m^2c^2} \tag{9}$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\varphi(k) = \frac{e}{r} + \frac{4}{15}\frac{e\alpha\hbar^2}{m^2c^2}\delta(\boldsymbol{r}) \tag{10}$$

Полученная поправка к закону Кулона приводит к сдвигу электронных уровней в атоме водорода (лэмбовский сдвиг). Так как поправка пропорциональна δ-функции, то сдвиг уровня определяется электронной плотностью в точке $\boldsymbol{r} = 0$, которая отлична от нуля лишь для состояний s типа. В частности, за счет сдвига $2s$ уровня снимается случайное вырождение межу $2s$ и $2p$ состояниями. Расщепление между энергиями этих состояний, равное $\approx 1\,$ГГц, было обнаружено экспериментально У.Ю. Лэмбом в 1947 году, а затем объяснено теоретически Х. Бете.