Задача 1 (8 баллов)

Планарный резонатор образован двумя зеркалами с коэффициентами прохождения t_1 и t_2 ($|t_1|, |t_2| \ll 1$), расположенными на расстоянии d друг от друга. Резонатор заполнен средой с показателем преломления n. Найдите максимальное значение модуля коэффициента прохождения через резонатор, которое может быть достигнуто при изменении частоты падающего света.

Решение:

Найдем коэффициент прохождения через планарный микрорезонатор сложив вклады от всех возможных путей многократного прохода

$$t = t_1 e^{ikd} t_2 + t_1 e^{ikd} r_2 e^{ikd} r_1 e^{ikd} t_2 + .. = \frac{t_1 t_2 e^{ikd}}{1 - r_2 r_1 e^{2ikd}}, \tag{1}$$

где $k = n\omega/c$.

Обозначим $r_{1,2} = |r_{1,2}| e^{i\varphi_{1,2}}$. Тогда

$$|t| = \frac{|t_1||t_2|}{\sqrt{(1 - |r_1||r_2|)^2 + 4\sin^2(\theta)|r_1|^2|r_2|^2}}, \tag{2}$$

где мы ввели

$$\theta = kd + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что $|t|$ максимальный при $\theta = 0$. При этом условии

$$|t| = \frac{|t_1||t_2|}{1 - |r_1||r_2|} \approx \frac{2|t_1||t_2|}{|t_1| + |t_2|}. \tag{4}$$

Задача 2 (8 баллов)

Квантовая яма может быть описана как бесконечно тонкий двумерный слой с коэффициентами отражения и прохождения

$$r(\omega) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma_0}{\omega - \omega_0 + \mathrm{i}(\Gamma + \Gamma_0)}\,, \qquad t(\omega) = 1 + r(\omega)\,, \tag{5}$$

которые одинаковы для света, падающего с обеих сторон. Здесь ω_0 – частота экситонного резонанса, Γ_0 и Γ – параметры, описывающее радиационное и нерадиационное затухания экситона.

(a) Определите матрицу переноса через квантовую яму в базисе бегущих волн.

(b) Рассмотрите структуру, состоящую из двух квантовых ям, разделенных диэлектрическим слоем с толщиной d и показателем преломления n, которые подобраны так, что на частоте ω_0 выполняется условие Брэгга: $n\omega_0 d/c = \pi$. Найдите коэффициенты отражения и прохождения света через структуру на частоте ω_0. Сравните их с $r(\omega_0)$ и $t(\omega_0)$ от одной ямы.

Решение: Поскольку коэффициенты отражения и прохождения одинаковые для света с обеих сторон, то можно воспользоваться матрицей переноса для симметричного барьера

$$T_{\mathrm{QW}} = \frac{1}{t(\omega)} \begin{bmatrix} t^2(\omega) - r^2(\omega) & r(\omega) \\ -r(\omega) & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Матрица переноса через структуру из двух квантовых ям

$$T_{\mathrm{DQW}} = T_{\mathrm{QW}} \begin{bmatrix} e^{ikd} & 0 \\ 0 & e^{-ikd} \end{bmatrix} T_{\mathrm{QW}}. \tag{7}$$

Заметим, что структура из двух квантовых ям так же является симметричной, а значит полный коэффициент прохождения $\tilde{t}$

$$\frac{1}{\tilde{t}} = (T_{\mathrm{DQW}})_{2,2}. \tag{8}$$

На брэгговской частоте получаем

$$\tilde{t}(\omega_0) = \frac{t^2(\omega_0)}{r^2(\omega_0) - 1} = \frac{t(\omega_0)}{r(\omega_0) - 1} = -\frac{\Gamma}{2\Gamma_0 + \Gamma}. \tag{9}$$

При этом для одной квантовой ямы

$$t(\omega_0) = \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma_0}. \tag{10}$$

Аналогично, находим элемент $(T_{\mathrm{DQW}})_{2,1}$ и

$$\tilde{r}(\omega) = \frac{2r(\omega)}{1 - r(\omega)} = -\frac{2\Gamma_0}{\Gamma + 2\Gamma_0}. \tag{11}$$

Заметим, что формула (5) отличается от (11) заменой $\Gamma_0 \to 2\Gamma_0$. В общем случае, для структуры из N ям

$$\tilde{r}_N = \frac{-iN\Gamma_0}{\omega - \omega_0 + i(\Gamma + N\Gamma_0)}, \qquad \tilde{t}_N = (-1)^N \frac{\omega - \omega_0 - i\Gamma}{\omega - \omega_0 + i(\Gamma + N\Gamma_0)}. \tag{12}$$

При $N \to \infty$ модуль коэффициента отражения в резонансе стремится к единице.