Задача 2 (2 балла)

В двумерный проводящий слой с поверхностной проводимостью σ_s в момент времени $t = 0$ помещён внешний заряд, описываемый поверхностной плотностью $\rho_s(x, y) = q\delta(x)\delta(y)$. Найти закон релаксации заряда $\rho_s(x, y, t)$.

Подсказка. Могут пригодиться интегралы с функциями Бесселя:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi e^{\mathrm{i}x\cos\varphi} = 2\pi J_0(x), \quad \int_0^{\infty} J_0(x)\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \,. \tag{1}$$

Решение: (см. Дьяконов и Фурман, ЖЭТФ **92**, 1012-1020 (1987))

На лекции были получены уравнения на поверхностную плотность заряда и электрический потенциал:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \rho_s(t=0) = q\delta(x)\delta(y) \tag{2}$$

$$\varphi(x, y) = \int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|}\rho_s(x', y') \,, \tag{3}$$

Перейдем в представление Фурье:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = \int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} \int \frac{\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y}{(2\pi)^2}\rho_{\boldsymbol{k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\rho}'} = \int \frac{\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\rho}}\rho_{s,\boldsymbol{k}} \int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\rho'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\rho}'} \\ = 2\pi \int \frac{\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\rho}}\rho_{\boldsymbol{k}} \int \mathrm{d}\rho' J_0(k\rho') = 2\pi \int \frac{\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{\rho}}\frac{\rho_{\boldsymbol{k}}}{k} \,,\end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом,

$$\varphi_k = \frac{2\pi}{k}\rho_{s,\boldsymbol{k}} \tag{5}$$

и

$$\frac{\partial \rho_{s,\boldsymbol{k}}}{\partial t} + \sigma k^2 \varphi_{\boldsymbol{k}} = 0 \,. \tag{6}$$

Из начального условия $\rho_{s,\boldsymbol{k}}(t=0) = q$, а значит,

$$\rho_{s,\boldsymbol{k}}(t) = q\mathrm{e}^{-kvt}, \quad v = 2\pi\sigma \,. \tag{7}$$

$$\rho_s(\boldsymbol{\rho}, t) \;=\; q\int \frac{\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y}\mathrm{e}^{-kvt} \;=\; q\int \frac{k\mathrm{d}k}{2\pi}\mathrm{e}^{-vkt}J_0(k\rho) \;=\; \frac{q}{2\pi}\frac{vt}{(\rho^2+(vt)^2)^{3/2}} \,. \tag{8}$$