Задача 1 (8 баллов)

Тензор проводимости электронного газа, помещенного во внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B} \parallel z$, при условии $\omega_c\tau \gg 1$ дается выражением (см. домашнюю задачу 5)

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m}\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\omega^2-\omega_c^2} & -\dfrac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2} & 0 \\ \dfrac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2} & \dfrac{\mathrm{i}\omega}{\omega^2-\omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\mathrm{i}}{\omega} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\omega_c = eB/(mc)$ – циклотронная частота. Найдите частоту плазменных колебаний, распространяющихся в объемном материале с проводимостью (1) в направлении (a) параллельном и (b) перпендикулярном оси z.

Решение: Положим, что волна распространяется в плоскости (xz). Тогда будем искать решение для плотности заряда $\rho(x,z) = \rho_0 e^{ik_x x + ik_z z}$. Из уравнения

$$\Delta\varphi(x,z) = -4\pi\rho(x,z) \tag{2}$$

находим

$$\varphi(x,z) = \frac{4\pi\rho_0}{k_x^2+k_z^2}e^{ik_x x+ik_z z}. \tag{3}$$

Тогда поле волны

$$E_{x(z)}(x,z) = -\frac{4\pi\rho_0 i k_{x(z)}}{k_x^2+k_z^2}e^{ik_x x+ik_z z}. \tag{4}$$

Из уравнения непрерывности имеем

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\sigma(\omega)\boldsymbol{E}(x,z)) = i\omega\rho(x,z) \tag{5}$$

и получаем

$$\omega = -\frac{4i\pi(k_x^2\sigma_{xx}+k_z^2\sigma_{zz})}{k_x^2+k_z^2}. \tag{6}$$

(a) $k_x = 0$:

$$\omega = -4i\pi\sigma_{zz} \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}. \tag{7}$$

Таким образом, магнитное поле не влияет на частоту плазмона, распространяющегося в направлении магнитного поля.

(b) $k_z = 0$:

$$\omega = -4i\pi\sigma_{xx} \quad \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\omega_p^2+\omega_c^2}. \tag{8}$$

Такие возбуждения, распространяющиеся в направлении перпендикулярном магнитному полю, называется *магнитоплазмонами*.

Задача 2 (8 баллов)

Шаровая оболочка, сделанная из магнитного материала с проницаемостью μ, помещена в статическое внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B}_0$. Внутренний и внешний радиусы оболочки равны соответственно r_1 и r_2. Найдите величину магнитного поля внутри оболочки. Рассмотрите предельные случаи (a) $r_1 \to 0$ и (b) $r_1 \to r_2$

Решение: При отсутствии токов $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0$ из уравнения Максвелла находим $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0$. Тогда можно ввести аналог электростатического потенциала $\psi(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}).$$

Таким образом мы свели задачу к аналогичной задаче об экранировании электрического поля диэлектрической оболочкой. Такая задача решена в книге Ландау, Лифшиц, том 8, см. пар. 9, задача 2. Поле внутри оболочки:

$$\boldsymbol{B}_{\rm in} = \frac{9\mu\boldsymbol{B}_0}{(\mu+2)(2\mu+1) - 2(\mu-1)^2(r_1/r_2)^2}. \tag{9}$$

(a) В предельном случае $r_1 \to 0$

$$\boldsymbol{B}_{\rm in} = \frac{9\mu\boldsymbol{B}_0}{(\mu+2)(2\mu+1)}\,. \tag{10}$$

Этот случай соответсвует шару с очень маленькой полостью в центре. Пренебрегая наличием полости, поле внутри шара дается формулой (аналогично электростатической задаче)

$$\boldsymbol{H}_{\rm layer} = \frac{3}{\mu+2}\boldsymbol{H}_0.$$

Поле внутри полости $H_{\rm in}$ связано связано в шаре $H_{\rm layer}$ аналогичной формулой, где нужно заменить $\mu \to 1/\mu$,

$$\boldsymbol{H}_{\rm in} = \frac{3}{2/\mu+1}\boldsymbol{H}_{\rm layer} = \frac{9\mu}{(\mu+2)(2\mu+1)}\boldsymbol{H}_0. \tag{11}$$

(b) В случае $r_1 \to r_2$ толщина оболочки стремится к нулю, и поле не экранируется

$$\boldsymbol{B}_{\rm in} = \boldsymbol{B}_0. \tag{12}$$

Задача 3 (8 баллов)

В металле с проводимостью σ вырезана шарообразная полость радиуса a. В ее центр помещен магнитный диполь $\boldsymbol{m}(t) = \boldsymbol{m}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{m}_0^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Используя квазимагнитостатическое приближение, найдите магнитное поле внутри полости. Рассмотрите предельный случай $\sigma \to \infty$.

Решение: Задача решается аналогично домашней задаче 11. Поле внутри полости будет состоять из поля магнитного диполя и постоянного поля, обусловленного токами в металле:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}} = \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{m}_0 \cdot \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{m}_0}{r^3} + \beta \boldsymbol{m}_0, \tag{13}$$

где β – неизвестная константа, определяющая величину поля внутри плости.

Поле снаружи шара должно удовлетворять уравнению

$$\Delta \boldsymbol{H}_{\mathrm{out}} + k^2 \boldsymbol{H}_{\mathrm{out}} = 0\,, \qquad k = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1+\mathrm{i}) \tag{14}$$

и, при этом, быть затухать при $r \to \infty$. Для соответствующего скалярного уравнения решением является сферическая функция Ханкеля

$$h_0(kr) = \frac{e^{\mathrm{i}kr}}{kr}.$$

Тогда решение векторного уравнения можно построить как

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{out}} = \alpha \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times [h_0(kr)\boldsymbol{m}_0]. \tag{15}$$

Вычисляя роторы аналогично домашней задаче 11, получаем

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{out}} = \alpha\left(\frac{kh_0'(kr)}{r} + k^2 h_0(kr)\right)\boldsymbol{m}_0 - \alpha\left(\frac{3kh_0'(kr)}{r} + k^2 h_0(kr)\right)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{m}_0 \cdot \boldsymbol{n}). \tag{16}$$

Из сшивки всех компонент поля при $r = a$ находим

$$\beta = \frac{2k^2/3a}{1 - ika - k^2a^2/3}. \tag{17}$$

В случае $\sigma \to \infty$ получаем

$$\beta \to -\frac{2}{a^3}. \tag{18}$$

Этот предельный случай соответствует сверхпроводящему металлу. При этом нормальная компонента магнитного поля на поверхности металла обращается в нуль, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}(a) = 0$, как видно из уравнения (13).