

### Задача 27 (4 балла)

Диэлектрическая проницаемость газа атомов дается формулой

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + 4\pi\alpha \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

где  $N$  – число атомов,  $\mathbf{r}_i$  – их координаты,  $\alpha$  – поляризуемость одиночного атома. Вычислите коррелятор флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\langle \delta\varepsilon(\mathbf{r})\delta\varepsilon(\mathbf{r}') \rangle$ , где  $\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) - \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle$ , а угловые скобки обозначают усреднение по координатам всех атомов, которые предполагаются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными в объеме  $V$ :

$$\langle A \rangle = \int \frac{d^3r_1}{V} \int \frac{d^3r_2}{V} \dots \int \frac{d^3r_N}{V} A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Считайте, что  $V, N \rightarrow \infty$ , при этом концентрация частиц  $n = N/V$  конечна.

Используя полученное выражение для коррелятора, найдите коэффициент экстинкции. Ответ сравните с рэлеевским сечением рассеяния на одиночном атоме.

**Решение:** Начнем с вычисления средней диэлектрической проницаемости

$$\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle = 1 + 4\pi\alpha n. \quad (1)$$

Тогда среднее отклонение можно записать как

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = 4\pi\alpha \sum_{i=1}^N \left( \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \frac{1}{V} \right), \quad (2)$$

а его коррелятор

$$\begin{aligned} \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r})\delta\varepsilon(\mathbf{r}') \rangle &= (4\pi\alpha)^2 \sum_{i,j=1}^N \left\langle \left( \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \frac{1}{V} \right) \left( \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) - \frac{1}{V} \right) \right\rangle = \\ &= (4\pi\alpha)^2 \sum_{i=1}^N \left( \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \rangle - \frac{1}{V^2} \right) \approx (4\pi\alpha)^2 n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициент экстинкции с учетом изотропии

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \int d\mathbf{r} \langle \delta\varepsilon(\mathbf{r})\delta\varepsilon(\mathbf{r}') \rangle = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} (4\pi\alpha)^2 n = n \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{c^4} \Rightarrow \sigma_{\text{ext}} = \frac{8\pi}{3} \frac{\omega^4}{c^4}. \quad (4)$$

То есть сечение экстинкции дается формулой Рэлея.