Задача 17 (4 балла)

Плоская монохроматическая волна падает под углом θ из вакуума на поверхность одноосного материала. Оптическая ось материала перпендикулярна поверхности, продольная и поперечная диэлектрические проницаемости равны $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ соответственно. Для случаев, когда падающая волна обладает (a) s и (b) p поляризацией, определите направление лучевого вектора преломленной волны, найдите коэффициенты отражения и прохождения. При каких значениях параметров имеет место отрицательное преломление (проекции лучевых векторов падающей и преломленной волны на границу сред противонаправлены)?

Решение:

s - поляризация

Для обыкновенной волны все аналогично изотропному случаю с $n = \sqrt{\varepsilon_\perp}$. Угол падения равен углу отражения, а угол прохождения

$$\sin\theta_s = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}\sin\theta. \tag{1}$$

Коэффициенты отражения и прохождения из формул Френеля:

$$r_s = \frac{\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_\perp}\cos\theta_s}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_\perp}\cos\theta_s} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_\perp - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_\perp - \sin^2\theta}}, \tag{2}$$

$$t_s = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_\perp - \sin^2\theta}}. \tag{3}$$

p - поляризация

Уравнение Френеля для необыкновенной волны

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_\perp} + \frac{n_x^2}{\varepsilon_\parallel} = 1. \tag{4}$$

На границе двух сред $n_{x,1} = n_{x,2} = \sin\theta$. Отсюда находим в одноосной среде

$$n_{z,2} = \sqrt{\varepsilon_\perp}\sqrt{1 - \frac{n_{x,2}^2}{\varepsilon_\parallel}} = \sqrt{\varepsilon_\perp}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel}}. \tag{5}$$

Из связи угла преломления луча с волновым вектором соотношением получаем

$$\tan\theta_p = \frac{n_{x,2}}{n_{z,2}}\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}\sin\theta}{\sqrt{\varepsilon_\parallel^2 - \varepsilon_\parallel\sin^2\theta}} \tag{6}$$

Найдем коэффициент отражения. Из уравнения Максвелла

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{7}$$

имеем для x компоненты падающей (i), отраженной (r) и прошедшей волны (t)

$$E_x^{i,r} = \pm n_{z,1}H_y^{i,r}, \qquad E_x^t = \frac{n_{z,2}H_y^t}{\varepsilon_\perp}. \tag{8}$$

Из граничных условий

$$\begin{cases} H_y^i + H_y^r = H_y^t \\ E_x^i + E_x^r = E_y^t \end{cases} \tag{9}$$

получаем

$$r_p = \frac{H_y^r}{H_y^i} = \frac{\cos\theta - \frac{n_{z,2}}{\varepsilon_\perp}}{\cos\theta + \frac{n_{z,2}}{\varepsilon_\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta}}{\sqrt{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta}}, \tag{10}$$

$$t_p = \frac{n_{z,2}}{\varepsilon_\perp n_{z,1}}\frac{H_y^t}{H_y^i} = \frac{n_{z,2}}{\varepsilon_\perp\cos\theta}(1+r_p) = \frac{2\sqrt{\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta}}{\sqrt{\varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta}}. \tag{11}$$

Можно проверить, что при $\varepsilon_\parallel = \varepsilon_\perp$ получатся формулы Френеля для изотропных сред.

Условие на отрицательное преломление получается если найти направление лучевого вектора. Лучевой вектор является нормалью к изочастотной поверхности (4) $\boldsymbol{s}\cdot\delta\boldsymbol{n} = 0$. Дифференцируя (4) получаем

$$\frac{n_z\delta n_z}{\varepsilon_\perp} + \frac{n_x\delta n_x}{\varepsilon_\parallel} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{s}\parallel\frac{n_z}{\varepsilon_\perp}\boldsymbol{e}_z + \frac{n_x}{\varepsilon_\parallel}\boldsymbol{e}_x, \tag{12}$$

а, значит, условие на отрицательное преломление: $\varepsilon_\parallel < 0$ и $\varepsilon_\perp > 0$.