Задача 6 (6 баллов)

В электронном газе, находящемся с состоянии термодинамического равновесия, концентрация электронов зависит от электростатического потенциала $\varphi(\boldsymbol{r})$. Индуцированное потенциалом изменение электронной концентрации определяется формулой

$$\delta n_{\mathrm{ind}}(\boldsymbol{r}) = Ce\varphi(\boldsymbol{r})\,,$$

где константа C называется сжимаемостью электронного газа. Найдите потенциал точечного стороннего заряда, помещенного в двумерный электронный газ.

Решение: Уравнение Максвелла

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi(e\delta(r) - e\delta n_{ind}), \tag{1}$$

с учетом того, что $\varepsilon = 1$ и

$$\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

приводится к виду

$$-\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) = 4\pi(e\delta(r) - e\delta n_{ind}). \tag{3}$$

Это уравнение решается с помощью преобразования Фурье. Сначала сделаем Фурье по координатам перпендикулярным z

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(\rho, z) = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}\varphi_{\boldsymbol{k}}(z) \tag{4}$$

$$e\delta n_{ind} = e^2\varphi(\boldsymbol{r})C \tag{5}$$

$$\left(k^2 - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right)\varphi_{\boldsymbol{k}}(z) = 4\pi e(\delta(z) - eC\varphi_{\boldsymbol{k}}(z)\delta(z)). \tag{6}$$

Теперь сделаем Фурье по z:

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(z) = \int \frac{\mathrm{d}k_z}{2\pi}\varphi_{kz}e^{ik_z z}, \tag{7}$$

тогда в правой части

$$\int e^{-ik_z z}\delta(z)\varphi_{\boldsymbol{k}}(z)\,\mathrm{d}z = \varphi_{\boldsymbol{k}}(0) \tag{8}$$

и окончательное уравнение имеет вид

$$\left(k^2 + k_z^2\right)\varphi_{kz} = 4\pi e(1 - eC\varphi_{\boldsymbol{k}}(0)) \quad\Rightarrow\quad \varphi_{kz} = \frac{4\pi e}{(k^2 + k_z^2)}(1 - eC\varphi_{\boldsymbol{k}}(0)). \tag{9}$$

Обратное преобразование Фурье по z дает

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(z) = \int \frac{\mathrm{d}k_z}{2\pi} e^{ik_z z} \frac{4\pi e}{(k^2 + k_z^2)} (1 - eC\varphi_{\boldsymbol{k}}(0)) = \frac{2\pi e}{k} (1 - eC\varphi_{\boldsymbol{k}}(0)) e^{-kz}. \tag{10}$$

В плоскости слоя $z = 0$ мы получаем

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(0) = \frac{2\pi e}{k + 2\pi e^2 C} \equiv \frac{2\pi e}{(k + k_s)}, \tag{11}$$

где $k_s \equiv 2\pi e^2 C$ - обратная длина экранирования.

Потенциал в $\boldsymbol{r}$ - пространстве получается

$$\varphi(\rho, z = 0) = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} \varphi_{\boldsymbol{k}}(0) = \frac{e^2}{\rho} + \frac{\pi e^2 k_s}{2} [\mathrm{Y}_0(k_s\rho) - \mathrm{H}_0(k_s\rho)], \tag{12}$$

где $\mathrm{Y}_0(k_s\rho)$ и $\mathrm{H}_0(k_s\rho)$ - функции Бесселя второго рода и Струве соответственно.

Этот ответ есть в обзоре Tsuneya Ando, Alan B. Fowler, and Frank Stern. "Electronic properties of two-dimensional systems." Reviews of Modern Physics **54** (1982).