Exercice : 1(Contrôle 2019)

1) Montrer que $5^5 \equiv 1[11]$ et en déduire que $5^{2019} \equiv 9[11]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-3y=11$.

a) Vérifier que $(1\,;-2)$ est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

3) Soit (a,b) une solution de (E) et d= P.G.C.D. (a,b).

Montrer que les valeurs possibles de d sont 1 et 11.

4) Soit $n = 3\times 16^{2019}+1$.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 11.

b) Déterminer alors P.G.C.D.$(3\times 16^{2019}+1\ ;\ 5\times 16^{2019}-2)$.

Exercice : 2

1) On considère dans ZxZ l'équation (E) : $7x+18y=9$.

a) Vérifier que le couple (9, -3) est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans ZxZ l'équation (E).

2) Soit la matrice A = $\begin{pmatrix} 7n-5 & 9m-2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, avec n et m sont deux entiers relatifs.

a) Calculer le déterminant de A.

b) Montrer que A est non inversible si et seulement si le couple (n,m) solution de l'équation (E).

c) Trouver alors les entiers relatifs n et m pour que A soit inversible.

Exercice : 3 (Contrôle 2017)

1) On considère l'équation

(E_1) $5x-7y=3$, où x et y sont des entiers relatifs

a) Vérifier que $(2\ ,\ 1)$ est une solution de (E_1)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1)

c) Soit $(a\ ,\ b)$ une solution de (E_1). On note d = PGCD $(a\ ,\ b)$, préciser les valeurs possibles de d

d) Pour chaque valeur de d donner un exemple de solution

2) On considère l'équation

(E_2) $5x^2-7y^2=3$, où x et y sont des entiers relatifs

a)) Montrer que si x et y sont des multiples de 3, alors le couple (x,y) n'est pas solution de (E_2)

b) Montrer que si le couple (x,y) est une solution de (E_2) alors $2x^2 \equiv y^2[3]$

c) Soit z un entier relatif, compléter les congruences suivantes:

Si $z \equiv 1[3]$ alors $z^2 \equiv ..[3]$

Si $z \equiv 2[3]$ alors $z^2 \equiv ..[3]$

d) En déduire que l'équation (E_2) n'admet pas de solution.

Exercice : 4

Afin de maximiser la recette hebdomadaire, un artisan a effectué une étude statistique pour établir le prix de vente unitaire le plus adapté.

Les résultats sont donnés dans ce tableau:

Prix de vente unitaire x_i (en dinars)	1	1,5	2	2,5	3,5	4	4,5	5
Nombre d'objets vendus y_i	123	110	90	80	68	50	39	21

1) a) Représenter le nuage de points de la série statistique double (x_i , y_i) dans un repère orthogonal du plan.

b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine? Justifier votre réponse.

2) Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrées (les coefficients seront arrondis à l'unité).

3) On suppose que cet ajustement reste bien valable.

a) Montrer que la recette hebdomadaire en dinars est donnée par la fonction g définie par $g(x) = -24x^2 + 144x$, où x est le prix unitaire de vente en dinars.

b) Determiner alors le prix unitaire de vente qui permet de réaliser une recette maximale.

Exercice : 5

1) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x) = -x + 1 - 2\ln x$.

a) Déterminer le sens de variations de la fonction g.

b) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations la fonction f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution β

et que $\beta \in]0,56\,;0,57[$.

4) Dans l'annexe, on a construit dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (Γ) de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{x}$ et l'unique point d'inflexion A pour la courbe (C) ainsi que la tangente à (C) en ce point.

a) Etudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ)

b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C).

5) Soit I_λ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement supérieur à 1.

a) Montrer que $I_\lambda = 1-\frac{1}{\lambda}(1+\ln\lambda)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_\lambda$.

Exercice : 6

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les 5 minutes, la température T de ce liquide.
Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de 20°C :

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
T (en °C)	100	68.5	50	37.8	31	26.5	24	22	21.5	20.9	20.5	20.3	20.2

On pose $\theta = \ln(T-20)$.

Les valeurs de θ, arrondies à 10^{-2} près, sont données dans le tableau qui suit :

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4.38	3.88	3.40	2.88	2.40	1.87	1.39	0.69	0.41	- 0.10	- 0.69	-1.2	-1.60

1) a) Construire le nuage de points de la série (t, θ), dans le repère proposé dans l'annexe ci-jointe **(figure 1)**.

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série (t, θ). Interpréter le résultat.

2) a) Donner une équation de la droite de régression de θ en t.

(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à 10^{-3} près).

b) En déduire que l'expression de T en fonction de t est de la forme $T = 20+\alpha e^{\beta t}$.

α et β étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à 10^{-1} près.

c) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.

d) La température de cette tasse de café atteindra t- elle 18°C ? Expliquer.

Exercice : 7

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x^2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

c) Déduire que le point $A(1\,,\ln 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

3) Dans l'annexe ci-jointe, on donne le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C) et les points A, $E(0\,,\ln 2-1)$ et $K(1-\ln 2\,,0)$.

a) Soit T la tangente à (C) au point A. Montrer qu'une équation de T est $y = x - 1 + \ln 2$.

b) Montrer que T coupe l'axe des ordonnées au point E et l'axe des abscisses en K.

c) Tracer la tangente T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit L l'aire du triangle OKE et S l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

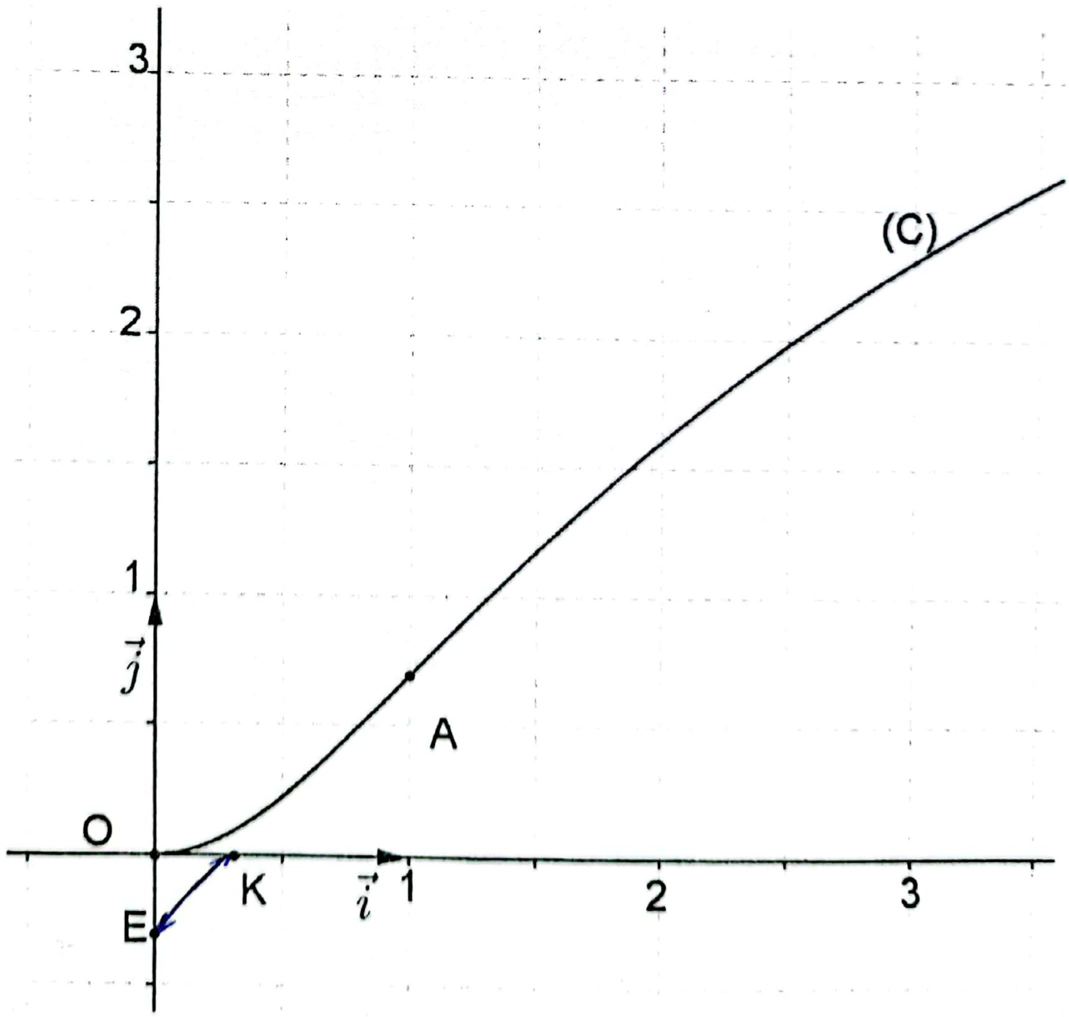
a) Montrer que $L = \dfrac{(1-\ln 2)^2}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\ln(1+x^2) \leq \ln(1+x)$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.

d) En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$.

e) Montrer que $\dfrac{(1-\ln 2)^2}{2} \leq S \leq \ln 2 - \dfrac{1}{2}$.



Sujet de révision : 1

Exercice : 1

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \,;\, n \in IN \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 3$.

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \ln(U_n - 3)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_n - \ln 3$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = \ln 2 - n\ln 3$

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 3 + \frac{2}{3^n}$.

d) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice : 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) a) Montrer par récurrence que $u_n \succ -1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et donner son premier terme v_0.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice : 3

Exercice : 3

Le premier exercice d'un examen est un questionnaire à choix multiples (QCM) formé de quatre questions indépendantes. Pour chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Un candidat coche au hasard une seule réponse pour chaque question.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : le candidat coche la réponse exacte de la première question seulement.

   B : le candidat coche une seule réponse exacte.

   C : le candidat ne coche aucune réponse exacte.

2) Une réponse exacte vaut 1 point et une réponse fausse vaut 0 point.

   On désigne par X la variable aléatoire égale à la note totale attribuée au candidat dans cet exercice.

   a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b) Donner la loi de probabilité de X.

   c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

Exercice : 4

Si une femme enceinte porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une grossesse **unique** sinon on dit qu'elle a une grossesse **multiple**.

Dans une ville, une étude faite sur une population de femmes enceintes montre que

- le pourcentage des femmes ayant une grossesse multiple est de 5%,
- parmi les femmes ayant une grossesse multiple, 55% finissent par accoucher dans le délai prévu,
- parmi les femmes ayant une grossesse unique, 92 % finissent par accoucher dans le délai prévu.

On choisit au hasard une femme de cette population.
On désigne par U et D les évènements suivants :
U : « la femme a une grossesse unique ».
D : « la femme accouche dans le délai prévu ».

1) a) Déterminer $p(U)$

b) En utilisant les évènements U et D, traduire en terme de probabilités les pourcentages 92 % et 55 %.

2) a) Calculer $p(D)$.

b) Une femme a accouché dans le délai prévu, montrer que la probabilité que sa grossesse soit unique est égale à 0,9694.

3) Le service de maternité de cette ville prévoit qu'en Juillet 2017, n femmes enceintes devraient accoucher dans le délai prévu, ($n \geq 2$).

On note p_n la probabilité qu'au moins une de ces femmes ait une grossesse multiple.

a) Exprimer p_n en fonction de n.

b) Quel est le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 dans le délai prévu pour que la probabilité p_n soit supérieure à 0,9 ?

Exercice : 5

La durée de vie (en années) d'un appareil électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) a) Déterminer λ pour que $p(X \geq 8) = 0.28$

b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inférieure ou égale à trois mois.

c) Déterminer T tel que $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$.

2) Sachant qu'un appareil a déjà dépassé six ans, quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne quatre ans de plus.

3) Une personne achète n appareils électroniques identiques ($n \in \mathbb{N}^*$) du modèle précédent.

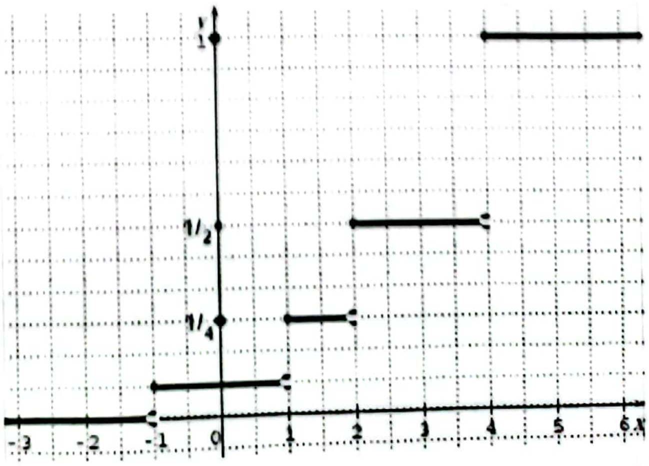
On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.

a) Exprimer, en fonction de n, la probanilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que 8 ans ?

b) Déterminer n pour que $p_n \geq 0.998$.

Exercice : 6

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction de répartition F d'un aléa numérique X.



a) Calculer $p(X \leq 4)$ et $p(X > 2)$

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer E(X)

Montrer que $5^5 \equiv 1[11]$

Exercice . 7

Soit la suite définie sur IN par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1) calculer I_0.

2) a) Montrer que (I_n) est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$: $I_n \geq 0$ et en déduire que (I_n) est convergente.

3) a)Montrer que pour tout $x \in [0.1]$ et $n \in IN$ on a : $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$.

b) En déduire que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

4) a) Par une intégration par partie : montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.

b) En déduire la valeur de I_1.

Exercice . 8

On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2.

U_1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, U_2 contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs

1) Une première épreuve consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

   A : « Obtenir deux jetons noirs »

   B : « Obtenir deux jetons de même couleur »

   C : « Obtenir un jeton blanc et un seul ».

2) Une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer un jeton de cette urne.

   a – Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à $\frac{1}{2}$.

   b – Calculer la probabilité de tirer un jeton de l'urne U_1, sachant qu'il est blanc.

3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ($n \geqslant 2$), en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

   Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

   a – Donner la loi de probabilité de X.

   b – Calculer son espérance et sa variance.

   c – Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice . 9

Le tableau de variation suivant est celui de la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$f(x) = 2 - x + \ln x$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$
f	1 ↘	$-\infty$

1) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1,+\infty[$ une unique solution notée α et que $\ln \alpha = \alpha - 2$.

b) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \ ; \quad n \in N \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $1 \leq u_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice : 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement ce résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout réel x, on a $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) En déduire que pour tout réel x dans $[0, 1]$, on a $0 \le f(x) \le 1$.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

4. On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = a \text{ avec } 0 < a < 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le u_n \le 1$.

   b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{1-u_n} \ge 1$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   d) En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

1) Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 3$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

Exercice : 11

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{3}{u_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 - v_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \dfrac{8}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

c) Calculer la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice : 11

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (1 - \ln x)^2$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

$]0;+\infty[$

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{2}{x}(1-\ln x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Tracer la courbe (C).

3) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto x(5+\ln^2 x - 4\ln x)$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer alors $\mathcal{A}$.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, e]$.

a) Montrer que g est une bijection de $]0, e]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') de la fonction g^{-1} réciproque de g.

c) Montrer que pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = e^{1-\sqrt{x}}$.

5) On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\,dx$.

a) Exploiter le graphique pour établir que $\mathcal{A} = \left(\int_0^1 e^{1-\sqrt{x}}\,dx\right) - 1$.

b) Montrer alors que $\mathcal{A} = eI - 1$ et donner la valeur de I.

Série révision contrôle 2

Exercice : 1 (Principale 2018)

On considère les deux suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 5 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 3x_n - 2$$

$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 3y_n + 8$$

1) On définit la suite (u_n), par $u_n = x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

 a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

 b) En déduire que pour tout entier naturel n, $x_n = 4 \times 3^n + 1$.

2) a) Montrer que $PGCD(x_n, x_{n+1})$ divise 2.

 b) En déduire que $PGCD(x_n, x_{n+1}) = 1$.

3) a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $5x_n - 4y_n = 21$.

 b) En déduire l'expression de y_n en fonction de n.

 c) Déterminer les valeurs possibles du $PGCD(x_n, y_n)$.

4) a) Donner, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

 b) Montrer que si $n \equiv 5[6]$ alors $PGCD(x_n, y_n) = 7$.

 c) Déterminer $PGCD(x_{2018}, y_{2018})$.

Exercice : 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et f(1).

2) Montrer que la droite $\Delta : x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f).

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) a- Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

 b-Montrer que (C_f) est située au dessus de D.

 c-Tracer (C_f).

5) Soit g la restriction de f à $[-1, +\infty[$.

 a- Montrer que g réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.

 b- Montrer que g^{-1} est dérivable en $2\sqrt{2}$ et que $(g^{-1})'(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

 c- Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [2, +\infty[$.

Exercice : 2 (Contrôle 2018)

1) On considère l'équation (E) : $5x - 26y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

 a) Vérifier que $(-5, -1)$ est une solution de (E)

 b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2) On assimile chaque lettre de l'alphabet à un entier comme l'indique le tableau ci – dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier n correspondant dans le tableau.
- on calcule le reste de la division euclidienne de $5n+2$ par 26 que l'on note m
- à l'entier m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

a) Vérifier que la lettre F est « codée » B.

b) Coder le mot BAC, sachant que le codage s'effectue "lettre par lettre" et dans l'ordre.

3) a) Montrer que pour tous entiers n et m, on a :

$$5n+2 \equiv m[26] \Leftrightarrow n \equiv 21m+10[26]$$

b) En déduire un procédé permettant de reconnaitre une lettre « codée »

c) Reconnaitre le mot dont le code est « UA ».

Exercice : 4

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2+\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1)a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)=\frac{8}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}$ $\forall x \in IR$

b)Dresser le tableau de variation de f.

2)a)Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

b) Vérifier que I(0 ;2) est un centre de symétrie pour (C).

3)Tracer T et (C) .

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b)Tracer dans le même repère (C') la courbe représentative de g^{-1} fonction réciproque de g.

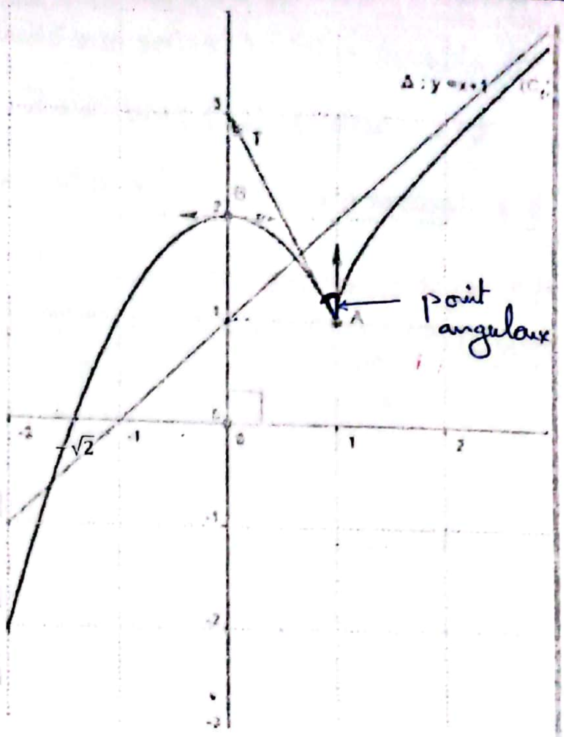
c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour x ∃ J.

Bon Courage

1

Serie

La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur IR et qui admet une asymptote $\Delta: y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$.



1) Par lecture graphique déterminer :

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x + 1)]$

b) $\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-1}{x-1}$; $\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-1}{x-1}$

c) La fonction f est elle dérivable au point d'abscisse 1 ? Justifier votre réponse.

d) $f(0)$; $f(-\sqrt{2})$ et $f'(0)$

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Sachant que la fonction f est la dérivée d'une fonction F, déterminer les variations de F.

Exercice n°2 :(6 Pts)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - x + 1 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{3x+1}{x+1} & si\ x > 1 \end{cases}$

est (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Donner le domaine de définition de f.

b) Montrer que f est continue en 1.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Que peut-on déduire.

b) Ecrire les équations des demis-tangentes à (C_f) au point d'abscisse 1.

3) a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

4) a) Monter que $f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & si\ x < 1 \\ \frac{2}{(x+1)^2} & si\ x > 1 \end{cases}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

5) Tracer les demis-tangentes ; l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et (C_f) dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & si\ \ x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

1°) Etudier la continuité de f sur R

2°) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1

b) Construire les demi-tangentes de f au point d'abscisse 1

c) Dresser le tableau de variation de f sur $[1, +\infty[$

3°) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle K à préciser

b) Explicité $f^{-1}(x)$ pour $x \in K$

4°) Montrer que $f(x) = \frac{1}{2}x$ admet une unique solution α sur $]1,2[$

5°) a) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire que $|2\sqrt{x} - \alpha x| \leq |x(x-\alpha)|$

3)

Soit la fonction f définie sur $I =]-\infty, 0[$ *par* $f(x) = x + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

On désigne par C_f *sa courbe représentative dans le plan munie d'un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a. Justifier que f est dérivable sur I.

b. Montrer que $f'(x) = 1 + \frac{1}{2x^2 \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$ *pour tout x appartient à I.*

2) a. Déterminer $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *, interpréter graphiquement ce résultat.*

b. Déterminer une équation de l'asymptote Δ *de* C_f *au voisinage de* $-\infty$*.*

3) Dresser le tableau de variation de f sur I.

4) a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet dans sur* $](-2);(-1)[$ *une unique solution* α

b. Donner un encadrement de α *à* 10^{-1} *prés.*

c. En déduire le signe de f.

5) Montrer que $\alpha = \frac{1}{1-\alpha^2}$.

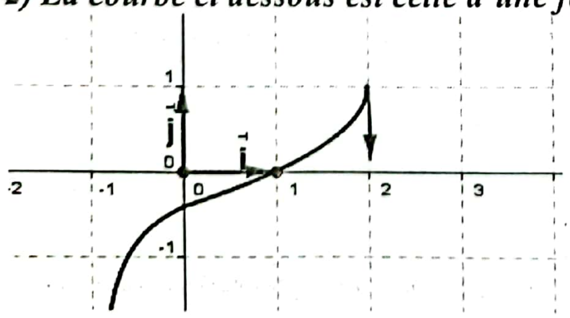
6) a) Montrer que f est une bijection de $]-\infty, 0[$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

b) Calculer $f^{-1}(0)$ *et montrer que* f^{-1} *est dérivable en 0 .*

c) Montrer que $(f^{-1})'(0) = 1 - \frac{1}{2\alpha^3}$.

4) Choisir la bonne réponse

La courbe ci dessous est celle d'une fonction f continue sur $]-1, 2]$ *alors :*



a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = +\infty$ *b)* $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = -\infty$ *c)* $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-1}{x-2} = 2$

Soit f une fonction définie sur [0 ;1] par : $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ *alors sa fonction réciproque sur [0 ;1] est :*

a) $f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{2y - y^2}$ *b)* $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 + y^2}$ *c)* $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 - y^2}$

Sujet de révision : 3

logarithme
suite
Complexe
Arithmétique

Exercice : 1

Le tableau de variation suivant est celui de la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par :

$f(x) = 2 - x + \ln x$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty$

1) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]1,+\infty[$ une unique solution notée α et que $\ln\alpha = \alpha - 2$.

b) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n \ ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $1 \le u_n \le \alpha$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice : 2 BacInfo2013

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Justifier que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout réel x, on a $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) En déduire que pour tout réel x dans $[0, 1]$, on a $0 \le f(x) \le 1$.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

4. On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = a \text{ avec } 0 < a < 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0 \le u_n \le 1$.

b) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $e^{1-u_n} \ge 1$.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

d) En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice : 3

A) 1) Vérifier que (3 - 2 i) est une racine carrée de (5 - 12 i) .

2) Résoudre dans l'équation : (E) $iZ^2 + (5-2i)Z - (2+4i) = 0$.

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les point A , B et C d'affixes respectives : $Z_A = i$, $Z_B = 2+4i$ et $Z_C = 4+i$.

1) a) Placer les points A , B et C .

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B .

2) Soit I milieu du segment [AC] et D le point d'affixe $Z_D = 2(1-i)$.

a) Déterminer l'affixe du point I .

b) Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires .

c) Montrer que ABCD est un losange .

3) Déterminer l'ensemble des points M_Z tels que : $\begin{cases} |Z-2-i| = 3 \\ \text{et} \\ |Z-i| = |Z-4-i| \end{cases}$

Exercice : 4

On considère l'équation (E) : $5x - 4y = 1$ où x et y sont deux inconnues entières .

1) a) Vérifier que (1 ; 1) est une solution particulière de (E).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) On donne les suites (U_n) et (V_n) qui sont définies sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = V_n + 4 \end{cases}$$

a) Justifier que (U_n) et (V_n) sont arithmétiques et préciser leurs raisons

b) Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

c) En déduire qu'on a : $U_p = V_q$ si et seulement si $5p - 4q = 1$.

d) Déterminer tous les couples (p ; q) avec p et q entiers naturels inferieurs à 15 tels que $U_p = V_q$.

Exercice : 5

Une usine fabrique deux types d'ordinateurs :

Type 1 : Des ordinateurs équipés de quatre ports USB.

Type 2 : Des ordinateurs équipés de sept ports USB.

Le nombre total de ports USB utilisés par jour est 400.

On désigne par a et b respectivement le nombre d'ordinateurs du type 1 et le nombre d'ordinateurs du type 2 fabriqués par jour dans cette usine.

1) Calculer 4a + 7b.

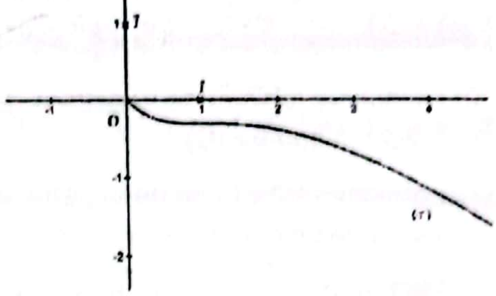
2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $4x + 7y = 400$ (on pourra remarquer que le couple (100, 0) est une solution particulière).

3) Déduire le nombre d'ordinateurs de chaque type fabriqués par jour, sachant que la capacité totale de production de l'usine est comprise entre 68 et 72 ordinateurs par jour.

Sujet de révision : 2

Exercice : 1

1) La courbe (Γ) ci-contre, est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=-x+\ln(1+x^2)$.



(Γ) coupe l'axe des abscisses uniquement en O.

Par une lecture graphique, justifier que :

pour tout réel $x\in[0,+\infty[$ on a : $\ln(1+x^2)\le x$.

2) On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0=\dfrac{3}{2} \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln(1+U_n^2)\ ,\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $U_n>0$.

b- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $U_{n+1}\le\dfrac{1}{2}U_n$.

c- En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $U_n\le\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d- Déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

logarithme népérien

Suites

Arithmétique

Complexe

3) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n=U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n$.

a- Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante.

b-Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $S_n\le 3-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c- Déduire que la suite (S_n) est convergente.

Exercice : 2

Bac 2020

On considère dans l'ensemble des entiers relatifs le système (S) : $\begin{cases} n\equiv 1[4] \\ n\equiv 3[5]. \end{cases}$

1) Vérifier que 13 est une solution de (S).

2) a) Montrer que si n est une solution de (S) alors $(n-13)$ est divisible par 4 et par 5.

b) Montrer que si un entier p est divisible par 4 et par 5 alors p est divisible par 20

c) En déduire que si n est une solution de (S) alors $n-13\equiv 0[20]$.

3) a) Vérifier que pour tous entiers relatifs n et k on a :

$n-13=20k$ si et seulement si $n-1=4(3+5k)$.

b) Montrer que si $n-13\equiv 0[20]$ alors n est une solution du système (S).

c) En déduire l'ensemble des solutions du système (S)

4) Un puzzle contient N pièces, si on les range par 4 il en reste une seule pièce et si on les range par 5 il en reste 3 pièces.

Déterminer N sachant qu'il est compris entre 40 et 60.

Exercice : 3

A) 1) *Vérifier que (3 - 2 i) est une racine carrée de (5 - 12 i) .*

2) *Résoudre dans □ l'équation : (E) $iZ^2 + (5-2i)Z - (2+4i) = 0$.*

B) *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

On considère les point A , B et C d'affixes respectives : $Z_A = i$, $Z_B = 2 + 4i$ et $Z_C = 4 + i$.

1) a) *Placer les points A , B et C .*

b) *Montrer que le triangle ABC est isocèle en B .*

2) *Soit I milieu du segment [AC] et D le point d'affixe $Z_D = 2(1 - i)$.*

a) *Déterminer l'affixe du point I .*

b) *Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires .*

c) *Montrer que ABCD est un losange .*

3) *Déterminer l'ensemble des points M_Z tels que :* $\begin{cases} |Z-2-i| = 3 \\ \text{et} \\ |Z-i| = |Z-4-i| \end{cases}$

Exercice : 4

On considère l'équation (E) : $5x - 4y = 1$ où x et y sont deux inconnues entières .

1) a) *Vérifier que (1 ; 1) est une solution particulière de (E).*

b) *En déduire l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

2) *On donne les suites (U_n) et (V_n) qui sont définies sur IN par :*

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = V_n + 4 \end{cases}$$

a) *Justifier que (U_n) et (V_n) sont arithmétiques et préciser leurs raisons*

b) *Exprimer U_n et V_n en fonction de n*

c) *En déduire qu'on a : $U_p = V_q$ si et seulement si $5p - 4q = 1$.*

d) *Déterminer tous les couples (p ; q) avec p et q entiers naturels inferieurs à 15 tels que $U_p = V_q$.*

Exercice : 5

Une usine fabrique deux types d'ordinateurs

Type 1 : Des ordinateurs équipés de quatre ports USB.

Type 2 : Des ordinateurs équipés de sept ports USB.

Le nombre total de ports USB utilisés par jour est 400.

On désigne par a et b respectivement le nombre d'ordinateurs du type 1 et le nombre d'ordinateurs du type 2 fabriqués par jour dans cette usine.

1) Calculer 4a + 7b.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $4x + 7y = 400$ (on pourra remarquer que le couple (100, 0) est une solution particulière).

3) Déduire le nombre d'ordinateurs de chaque type fabriqués par jour, sachant que la capacité totale de production de l'usine est comprise entre 68 et 72 ordinateurs par jour.

Sujet de révision : 1

Exercice : 1

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \, ; n \in IN \end{cases}$

Suites
Complexes
Arithmétique
fonction exponencielle
point d'inflexion
limites

1) a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 3$.

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \ln(U_n - 3)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_n - \ln 3$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = \ln 2 - n \ln 3$

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 3 + \frac{2}{3^n}$.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice : 2 Bac 2018

1) On considère l'équation (E) : $5x - 26y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier que $(-5, -1)$ est une solution de (E).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E)

2) On assimile chaque lettre de l'alphabet à un entier comme l'indique le tableau ci – dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier n correspondant dans le tableau.
- on calcule le reste de la division euclidienne de $5n + 2$ par 26 que l'on note m.
- à l'entier m, on associe la lettre correspondante dans le tableau

a) Vérifier que la lettre F est « codée » B.

b) Coder le mot BAC, sachant que le codage s'effectue "lettre par lettre" et dans l'ordre.

3) a) Montrer que pour tous entiers n et m, on a :

$$5n + 2 \equiv m[26] \Leftrightarrow n \equiv 21m + 10[26]$$

b) En déduire un procédé permettant de reconnaitre une lettre « codée »

c) Reconnaitre le mot dont le code est « UA ».

Exercice : 3 Bac 2020

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (2x + 1)e^{2x}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -4xe^{2x}$.

b) Etudier le sens de variation de g et déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1+(x+1)e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et que la droite $D: y=x+1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

c) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite D.

3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) a) Montrer que $A(0,2)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C)

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A.

c) Tracer D, T et (C).

5) Soit α un réel strictement supérieur à (-1).

On désigne par A_α l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations $x=-1$ et $x=\alpha$.

a) montrer que $A_\alpha=\frac{1}{4}e^2-\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{4}\right)e^{-2\alpha}$.

b) Calculer $\lim_{\alpha\to+\infty} A_\alpha$.

Exercice : 4

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et D d'affixes respectifs $z_A=2+2i$, $z_B=-2+i$ et $z_D=3+2i$

1) Placer les points A, B et D
2) Soit C le symétrique de D par rapport à la droite $(O,\vec{u})$. Déterminer l'affixe de C
3) a) Calculer AB, AC et BC

   b) En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en A
4) Soit $P(z)=z^2+az-2+2i$, ou a est un nombre complexe

   a) Déterminer a sachant que z_A est une solution de l'équation $P(z)=0$

   b) Déterminer la forme algébrique de $(2+i)^2$

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z)=0$

Exercice : 5

Dans le plan complexe, on donne les points A(-2+i), B(-3i) et C(i).
À tout point M(z) tel que $z\neq-3i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z'=\frac{z+2-i}{3-iz}$$

1) a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' soit réel.

   b) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur.

   c) Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que $|z'|=1$.

2) a) Montrer que $|z'-i|\cdot|z+3i|=2\sqrt{5}$ avec $z\neq-3i$.

   b) En déduire que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Sujet de révision : 4

Exercice : 1 Bac 2019

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 , \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n}\left(1-\sqrt{1+u_n}\right)$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln\left(1+u_n\right)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln 2$.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice : 2 Bac 2019

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

c) Déduire que le point $A(1 , \ln 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

3) Dans l'annexe ci-jointe, on donne le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C) et les points A, $E(0 , \ln 2 - 1)$ et $K(1-\ln 2 , 0)$.

a) Soit T la tangente à (C) au point A. Montrer qu'une équation de T est $y = x - 1 + \ln 2$.

b) Montrer que T coupe l'axe des ordonnées au point E et l'axe des abscisses en K .

c) Tracer la tangente T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit L l'aire du triangle OKE et S l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que $L = \frac{(1-\ln 2)^2}{2}$.

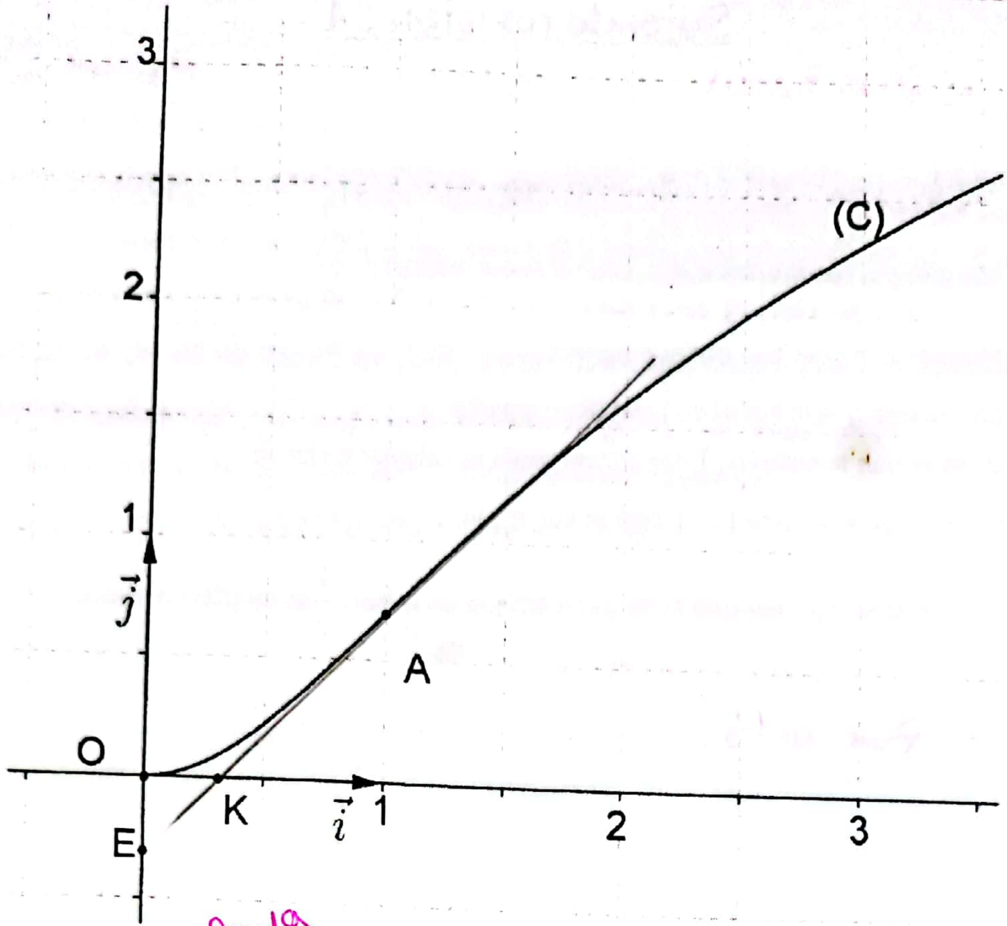
b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\ln(1+x^2) \leq \ln(1+x)$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$.

En ~~déduire~~ admet que $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2 - 1$.

d) Montrer que $\frac{(1-\ln 2)^2}{2} \leq S \leq \ln 2 - \frac{1}{2}$.

BACHA!



Exercice : 3 Bac 2019

1) Montrer que $5^5 \equiv 1[11]$ et en déduire que $5^{2019} \equiv 9[11]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-3y=11$.

a) Vérifier que $(1\,;-2)$ est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

3) Soit (a,b) une solution de (E) et d= P.G.C.D. (a,b).

Montrer que les valeurs possibles de d sont 1 et 11.

4) Soit $n = 3\times16^{2019}+1$.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 11.

b) Déterminer alors P.G.C.D.$(3\times16^{2019}+1\ ;\ 5\times16^{2019}-2)$.

Exercice : 4 ~~Bac 2015~~ Bac 2011

1) Soit n un entier naturel, on pose $S_n = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $4^{n+1} - 3.S_n = 1$

b) Résoudre dans $\times$, l'équation $256x - 85y = 1$

2) On suppose que le prix d'achat d'un ordinateur de bureau et celui d'un ordinateur portable sont des valeurs entières exprimées en dinars.

Sachant que le prix d'achat de 256 ordinateurs de bureau diminué de cinq dinars est égal au prix d'achat de 85 ordinateurs portables et que le prix d'un ordinateur de bureau est compris entre 400 dinars et 500 dinars. Déterminer le prix d'achat d'un ordinateur de bureau et celui d'un ordinateur portable.

Sujet de révision : 5

Exercice : 1

1) a) Vérifier que $(2 - 2i)^2 = -8i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2+8i)z - 15 + 10i = 0$.

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+3i$, $z_B = -1$ et $z_C = 5i$.

a) Calculer $(z_B - z_A)\overline{(z_C - z_A)}$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

3) Soit x et y deux entiers tels que $y \neq 0$.

Dans le plan P, on considère les points M et N d'affixes respectives x et iy. On se propose de déterminer les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A.

a) Montrer que $(z_M - z_A)\overline{(z_N - z_A)} = (-2x - 3y + 13) + i(-xy + 3x + 2y)$.

b) Montrer que $(-2x - 3y + 13) + i(-xy + 3x + 2y) \neq 0$.

c) Montrer que le triangle AMN est rectangle en A si et seulement si $2x + 3y = 13$.

4) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x + 3y = 13$.

a) En utilisant la question 2), donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) Trouver les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A et $-4 \leq x \leq 4$.

Exercice : 2

1)Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) :$2x+3y=5$.

2)Dans la suites les âges sont exprimés en années.

En 2009 un père d'ont l'âge n est compris entre 50 et 55.a deux fils A et B d'âge respectif a et b.

On suppose que

-en 2001 l'âge du père était le double de l'âge du fils A

-en 2006 l'âge du père dépassait de trois ans le triple de l'âge du fils B.

a) Montrer que n, a et b vérifient

$$\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$$

b) Vérifier que (a ; -b) est une solution de (E)

c)En déduire les âges n ; a et b du père et de ses deux fils.

Exercice : 3

1) On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Montrer que la restriction de f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$. On note f^{-1} sa réciproque.

3) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) On définit la suite (u_n) par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq e$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) a) Montrer que pour tout $x\geq e$, $f'(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{2}{\ln x}\right)^2$.

b) En déduire que pour tout $x\geq e$, $0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{4}$

6) a) Montrer, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-e|\leq\dfrac{1}{4}|u_n-e|$

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-e|\leq\dfrac{1}{4^n}$

c) Retrouver ainsi la limite de la suite (u_n).

Exercice : 4 2018 contr

1) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$U_1=\dfrac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $U_n = U_{n-1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

a) Calculer U_2 et U_3.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_{n+1}=e^{\frac{-1}{n(n+1)}}V_n$.

a) Calculer V_2 et V_3.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n>0$.

c) Montrer que la suite V est décroissante et en déduire qu'elle converge.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $V_n=e^{-U_{n-1}}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.