Sujet de révision 7

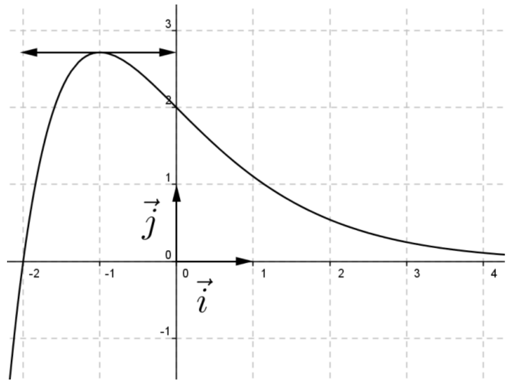
EXERCICE 1 :

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f solution de l'équation (E) : $\boldsymbol{y' + y = e^{-x}}$ et sa tangente au point d'abscisse (-1).

⁎ (C) admet au V$(-\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.

⁎ L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au V$(+\infty)$.

On note F la primitive de f sur IR telle que F(0)=0



1) a) Montrer que f(-1)=e et que F(-1)=3−2e.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction F.

c) Montrer que la courbe (Γ) de la fonction F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

c) Calculer en (u.a) l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

3) a) Montrer que la fonction $u : x \longmapsto xe^{-x}$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$

c) Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $(g - u)$ est solution de (E_0).

d) En déduire que pour tout réel x, on a : $f(x) = (x+2)e^{-x}$

4) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de [-1,+∞[sur un intervalle J qu'on précisera. (On note f^{-1} sa fonction réciproque)

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[-1,+\infty[$.

c) Montrer que la suite (α_n) est croissante sur IN^* et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

EXERCICE 2 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{e^k} = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{3}{e^3} + \dots\dots\dots\dots + (-1)^n \frac{n}{e^n}$$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a , $(2n+2) - (2n+1)e < 0$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$U_{2n+2} - U_{2n} = \frac{1}{e^{2n+2}}\left[(2n+2)-(2n+1)e\right]$$

en déduire que la suite $(U_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

2) Montrer que la suite $(U_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante .

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $U_{2n} > U_{2n+1}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_{2n} - U_{2n+1})$

4) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel α et que $U_3 < \alpha < U_2$

EXERCICE 3 :

On pose $u_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$ pour tout $n \in IN^*$.

1) Donner la valeur du terme u_1.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0 \ \forall\, n \in IN^*$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que :

$u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n \quad \forall\, n \in IN^*$.

4) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 4 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{2x - lnx}{2\sqrt{x}} & si \;\; x > 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$

1) a) Etablir le tableau de variation de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$g(x) = x - 1 + \frac{lnx}{2}$

b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

b) Dresser alors le tableau de variation de f.

3) A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'intégrale $J = \int_1^2 f(x)dx$

4) Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(1+\frac{k}{n})$.

a) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$\frac{1}{n} f(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f(1+\frac{k+1}{n})$

b) Montrer que $J + \frac{f(1)}{n} \leq u_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 5 : Bac 2018

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $1+x\ln x\geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+x\ln x} & \text{si } x>0, \\ f(0)=1. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la **figure 2** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$.

a) Construire le point A de (C_1) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et le point B de (C_2) d'abscisse $1-\dfrac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de (C_f) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de (C_f) et (C_2).

c) Tracer la courbe (C_f).

5) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t+t\ln(t)}\leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\ln(1+\ln x)\leq F(x)\leq\ln x$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

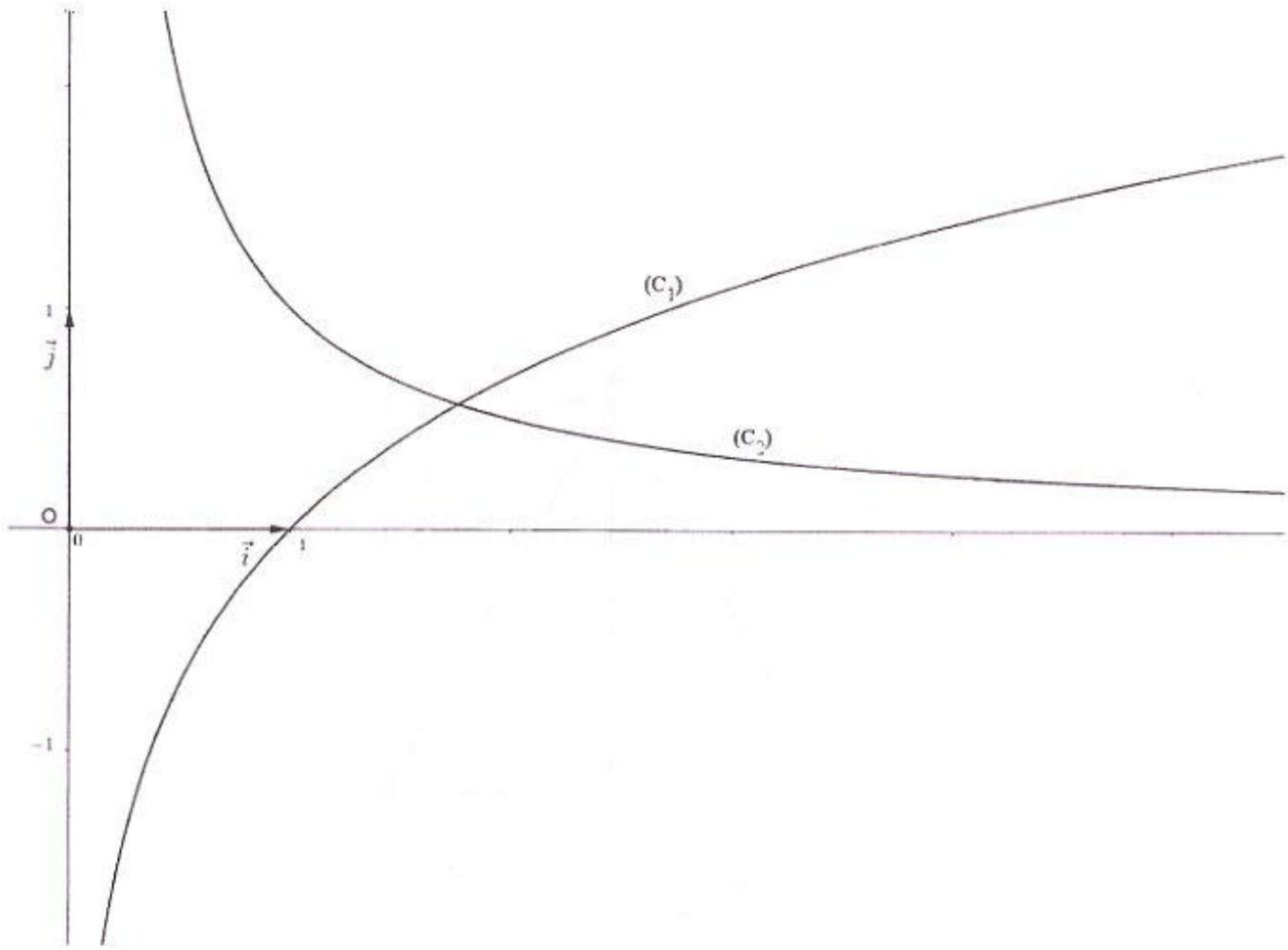
6) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction $h: x\mapsto x-F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x)=n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$.

d) Vérifier que $\dfrac{\alpha_n}{n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$.


(C1)
(C2)
1
-1
O
0
1