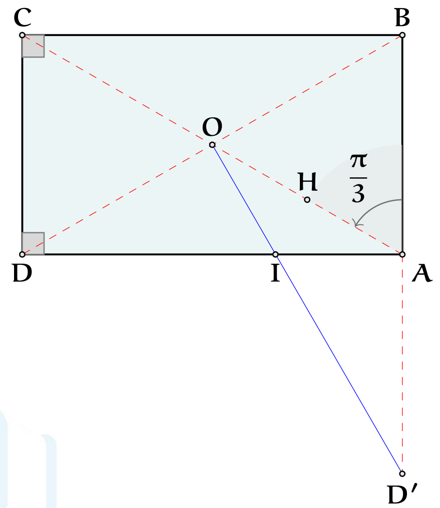
Exercice 1 60 min 5 pts



Le plan $\mathscr{P}$ est orienté dans le sens direct.
Dans la figure ci-contre :

- $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- $D' = S_A(B)$ et $H = O \star A$.
- Les droites (OD') et (AD) se coupent au point I.

A-

1. Montrer que la droite (OD') est la médiatrice de $[BD]$.
2. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en O et B en D.
   b. Montrer que $f(D') = B$.
   c. Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre I.
   d. Montrer que $f(D) = D'$.
3. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et $g = h \circ f$.
   a. Montrer que g est une similitude directe dont on précisera le rapport et l'angle.
   b. Déterminer $g(B)$ et $g(D)$ puis montrer que $g(O) = H$.
   c. En déduire que $g \circ g \circ g(D') = H$.
   d. Soit Ω le centre de g. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(H, 8)$ et $(D', -1)$.

B- Soit le point G symétrique de O par rapport à A.

1. On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en B.
   a. Déterminer le rapport de S et mesure de son angle.
   b. Montrer que $S(B) = C$.
2. Soit σ la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C.
   a. Justifier que σ admet un centre.

b) Déterminer $\sigma \circ \sigma(A)$. En déduire que G est le centre de σ.

c) Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par G coupe la demi-droite $[D'O)$ en L.

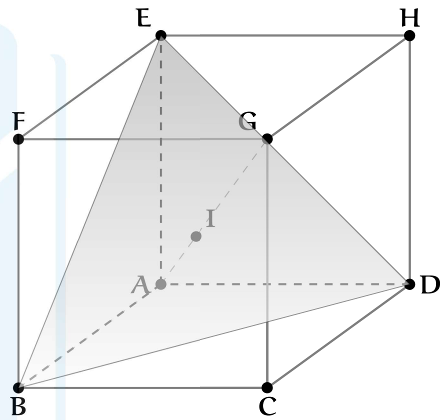
Montrer que la demi-droite $[GL)$ est l'axe de σ.

d) La droite (GL) coupe (AB) en J et coupe (BC) en K.

Montrer que $\sigma(J) = K$

3) Déterminer l'ensemble $\Gamma = \{M \in \mathscr{P} \text{ tel que } \sigma(M) = S(M)\}$

Exercice 2 — 48 min — 4 pts



Dans la figure ci-contre :

- $ABCDEFGH$ est un cube d'arrête 1.
- Le point I est le centre de gravité du triangle BDE.
- On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

I-

1) Montrer que le triangle BDE est équilatèral.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE).

3) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

II- Soit k un réel non nul.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et on note M_k l'image de G par h et $\mathscr{P}_k$ le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE).

Le plan $\mathscr{P}_k$ coupe (BC) en N_k.

1) Identifier : $\mathscr{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ et calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.

2) a) Déterminer les coordonnées du point M_k.

b) Trouver une équation du plan $\mathscr{P}_k$.

3) a) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1, 3k-1, 0)$.

b) Pour quelle valeur de k la droite (M_kN_k) est-elle perpendiculaire à la fois aux droites (AG) et (BC) ?

c) Pour quelle valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?

Exercice 3 — 60 min — 5 pts

1. a) Discuter suivant l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.

   b) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $(E_1) : 67^x \equiv 1 \pmod{5}$.

2. a) Montrer que $5^{66} \equiv 1 \pmod{67}$.

   b) Soit p le plus petit entier naturel non nul tel que $5^p \equiv 1 \pmod{67}$.

   Montrer que p divise 66.

   c) Vérifier que $5^3 \equiv 58 \pmod{67}$; $5^6 \equiv 14 \pmod{67}$; $5^{11} \equiv 66 \pmod{67}$ et $5^{22} \equiv 1 \pmod{67}$.

   Déduire p.

3. On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation $(E_2) : 5^y \equiv 1 \pmod{67}$.
Soit y une solution de (E_2) tel que $y = 22q + r$ où q et r sont respectivement le quotient et Le reste de la division euclidienne de y par 22.
Montrer que $y = 22q$.

4. On considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation $(E) : 67^x + 5^y \equiv 1 \pmod{335}$.

   a) Montrer que si (x, y) est solution de (E) alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

   b) Montrer que si (x, y) est une solution de (E) alors $(x, y) = (4k, 22q)$ où $(k, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

   c) Montrer que pour tout $(k, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $67^{4k} + 5^{22q} \equiv 1 \pmod{5}$ et $67^{4k} + 5^{22q} \equiv 1 \pmod{67}$.

   d) Déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4 — 84 min — 7 pts

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et φ_n la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n}\ln(x)$.

   a) Dresser le tableau de variation de φ_n.

   b) Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0 ; +\infty[$ et que $\alpha_n > 1$.

   c) Soit $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$de la restriction de φ_1 à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e} ; 1\right]$.

   Calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide engendré par la rotation de $\mathscr{C}_1$ autour de $(O, \vec{\imath})$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 1$, on a : $\varphi_{n+1}(x) > \varphi_n(x)$.

   b) Montrer que la suite (α_n) est croissante non majorée.

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}} \ln x$.

a) Vérifier que pour tout $x > 0, f_n'(x) = e^{-\frac{x}{n}}\varphi_n(x)$.

b) Dresser alors le tableau de variation de f_n.

c) Tracer $(\mathscr{C}_2)$ courbe représentative de f_2 dans un nouveau repère orthonormé.

(unité graphique $2\ cm$ et prendra $\alpha_2 \approx 2.35$)

4 On considère dans $]0;+\infty[$ l'équation différentielle $(E_n) : y' + \frac{1}{n}y = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{x}$.

a) Montrer que f_n est une solution de ((E_n).

b) Soit g_n une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$.

Montrer que g_n est solution de (E_n) si et seulement si $g_n - f_n$ est solution d'une équation différentielle (F_n) que l'on précisera.

c) Résoudre (F_n) puis déterminer l'ensemble des solutions de (E_n).

d) Déterminer la solution g de (E_n) telle que sa courbe coupe l'axe $(O, \overrightarrow{\imath})$au point d'abscisse e^{-1}.

5 Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = e^{-\frac{x}{n}}(1+\ln(x))$ et soit (u_p) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_p = \int_1^p g(x)dx$.

a) Montrer que la suite (u_p) est croissante.

b) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, on a : $e^{-\frac{x}{n}} \leqslant g(x) \leqslant 1 + \ln x$.

c) En déduire que : $-n\left(e^{-\frac{p}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}\right) \leqslant u_p \leqslant p\ln(p)$