Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°20**	$4^{\text{ème}}$ M

1

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 - e^{x}(x+1)$.
   a. Dresser le tableau de variation de g.
   b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   c. Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1
   d. Déterminer le signe de g.
2. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{e^{x} - 1}$.
   On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 2 cm).
   a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   c. Tracer C.
3. L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la courbe de la restriction de f à $[0, 1]$ autour de l'axe $(O, \vec{i})$.

2 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{x} - e^{-x}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = \int_{0}^{u(x)} \sqrt{4+t^2}\, dt$. Soit $I = \int_{0}^{\frac{3}{2}} \sqrt{4+t^2}\, dt$.

1. a. Calculer $F(0)$.
   b. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
   c. Déterminer alors l'expression de F pour tout réel x.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x} - e^{-x} = \frac{3}{2}$. En déduire la valeur de I.

3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{\ln 2}^{n} e^{-x} \ln(e^{x} - 1)\, dx$.

1. Calculer, en fonction de n, $I_n = \int_{\ln 2}^{n} \frac{1}{e^{x} - 1}\, dx,\ n \geq 1$.
2. a. Montrer que pour tout $n \geq 1,\ u_n = I_n - e^{-n} \ln(e^{n} - 1)$.
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{0}^{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x}\, dx$.

1. a. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.
   b. En déduire que pour tout réel x de $[0, n]$, $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x} \leq e^{-x}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1,\ u_n \leq 1 - e^{-n}$.
3. a. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $e^{-t} \geq 1 - t$.
   b. En déduire que pour tout réel x de $[0, n]$, $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}} \geq e^{-x} - \frac{x^2}{2n} e^{-x}$.
   c. Calculer $\int_{0}^{n} x^2 e^{-x} dx$, $n \geq 1$.

d. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1 + e^{-n}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

4. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5 A) Soit f la fonction définie sur $I =]-\ln 2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$. (C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Préciser l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

c) Tracer T et (C).

:) Soit g la fonction définie sur $]0,\pi[$ par $g(x) = -\ln(1+\cos x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur I.

b) Soit $h = g^{-1}$. Montrer que h est dérivable sur I et que $h'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

c) Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par (C) et les droites $x = 0$, $y = 0$ et $x = \ln 2$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n \, dt$.

1) a) Exprimer $F_1(x)$ en fonction de $h(x)$. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculer $F_2(x)$ en fonction de x. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} F_2(x) = \ln 2$.

) a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$. En déduire que $0 \leq F_n(x) \leq \frac{2}{n}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b) Montrer que F_n admet une limite finie notée L_n lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{2}{n}\left(1 - [f(x)]^n\right)$.

d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n + L_{n+2} = \frac{2}{n}$ puis calculer L_3 et L_4.

6 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

① Etudier f et tracer sa courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

② Soit $\alpha > 0$. On désigne par $\mathcal{H}(\alpha)$ la partie du plan limitée par C_f, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \alpha + 1$.

a) Colorier $\mathcal{H}(0.5)$ et $\mathcal{H}(2)$.

b) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} \, dt$.

Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer $F'(x)$.

c) En déduire la valeur de α pour laquelle l'aire de la partie $\mathcal{H}(\alpha)$ soit minimale.

7 1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = (2x-1)e^{2x} + 1$.

Dresser le tableau de variation de φ. En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de f.

3. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \int_1^{\ln x} f(t)dt$.

Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x \ln x}$.

4. On pose $h(x) = \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$, $x > 1$.

a. Vérifier que pour tout $x > 1$, $h(x) = \dfrac{1}{x-1}\int_0^{\ln x} f(t)dt$.

b. Soit $x > 1$, Montrer qu'il existe $c \in [0, \ln x]$ tel que $h(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} f(c)$.

c. En déduire que g est dérivable à droite en 1 et déterminer $g'_d(1)$.

5. a. Montrer que pour tout $x \geq e$, $g(x) \geq \int_1^{\ln x} \dfrac{2t-1}{t}dt$.

b. Dresser le tableau de variation de g. (On ne cherchera pas à calculer $g(1)$).

$\boxed{8}$ Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = e^{-x\sqrt{\ln x}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résulatat graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que $\mathscr{C}$ coupe la droite $\Delta : y = 0.5x$ en un seul point d'abscisse α et que $1.19 < \alpha < 1.2$
4. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   b. Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction réciproque de f.
6. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, l'axe des abscisses, la droite $x = \dfrac{\alpha}{2}$ et la droite $x = \alpha$.

   a. Montrer que $\mathcal{A} = 2\int_1^{\alpha} f(x)dx + 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$.

   b. En déduire que $1 - \dfrac{\alpha^2}{2} \leq \mathcal{A} \leq 2\alpha - 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$.

$\boxed{9}$ 1. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Etudier f et tracer $\mathscr{C}$.

Lycée pilote Sfax *Smaoui sofiène*	***Série d'exercices n°24***	***4ème M***

1 L'éspace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et $A(2,2,2)$.

① Ecrire une équation du plan Q passant par A et parallèle à P.

② a) Montrer que la droite (OA) est une perpendiculaire commune aux plans P et Q.

b) En déduire une équation de la sphère S, tangente à P et à Q, dont le centre I est un point de (OA).

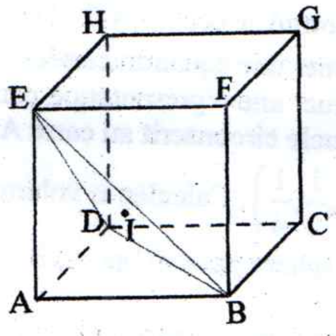
③ Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

On désigne par (S_1) la sphère image de (S) par t.

a) Etudier la position relative de (S_1) et Q.

b) Déterminer $S_1 \cap (OA)$.

2 Dans la figure ci-contre :



ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

Le point I est le centre de gravité du triangle BDE.

On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

I / ① Montrer que le triangle BDE est équilatèral.

② Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE).

③ Montrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

II / Soit k un réel non nul.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et on note M_k l'image de G par h et (P_k) le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE).

Le plan (P_k) coupe (BC) en N_k.

② a) Déterminer les coordonnées du point M_k.

b) Trouver une équation du plan P_k.

c) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1,3k-1,0)$.

③ a) Pour quelle valeur de k la droite (M_kN_k) est-elle perpendiculaire à la fois aux droites (AG) et (BC)?

b) Pour quelle valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale?

3

L'espace **E** est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

1. a) Vérifier que E a pour coordonnées $(0,2\,3)$.

   b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

2. a) Soit (P) le plan d'équation : $x-2y-z+5=0$. Montrer que (P) est parallèle au plan (ABC).

   b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier

   que K appartient au plan (P).

3. Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

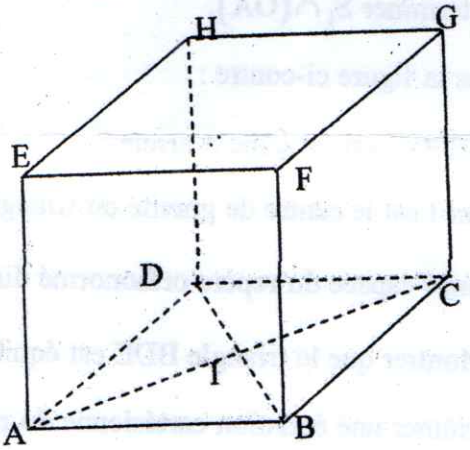
   a) Déterminer le rapport de h.

   b) Le plan (P) coupe les arêtes $[EA]$ et $[EB]$ respectivement en I et J.

   Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

4

Dans la figure ci –contre ABCDEFGH est un cube de centre O et I le milieu de [AC]. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) a) Déterminer une équation cartésienne du plan $P=(EFG)$

b) Déterminer une représentation paramétrique de l'axe Δ du cercle circonscrit au carré ABCD

c) Soit $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, Calculer le volume du tétraèdre IBCΩ

2) Soit S la sphère passant par A, B, C et tangente au plan P.

Montrer que S a pour centre Ω et déterminer son rayon

3) Soit h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le $M'(x',y',z')$ tel que $\begin{cases} x'=2x-\frac{1}{2} \\ y'=2y-\frac{1}{2} \\ z'=2z \end{cases}$. On note S' l'image de S par h

a) Caractériser h

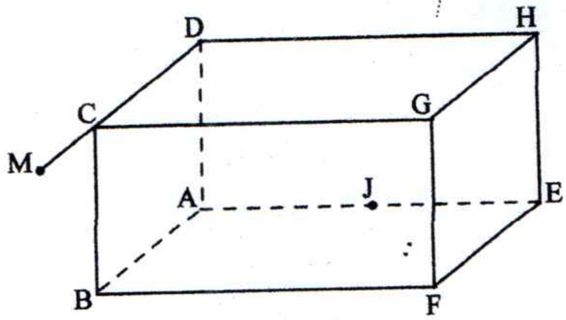
b) Donner une équation cartésienne du plan Q tel que $h(Q)=P$

c) Déterminer $S'\cap(ABC)$

d) L'image du plan (BCH) par h coupe respectivement les droites (AC) et (BD) en C' et B'. Déterminer le volume du tétraèdre $IB'C'O$.

5

Dans le graphique ci-contre, ABCDEFGH est un parallélépipède droit tel que $AB = AD = \frac{AE}{2} = 1$.



M est le point tel que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

J est le milieu du segment $[AE]$.

1. a. Montrer que les droites (CE) et (FM) sont sécantes.

   (On $note$ I le $point$ $d'intersection$ de (CE) et (FM))

   b. On désigne par h l'homothétie de centre I qui transforme C en E.
   Déterminer $h((CD))$ et $h((FM))$ puis en déduire $h(M)$.

   c. Prouver que 2 est le rapport de h.

2. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AD})$.

   a. Vérifier que $I(2, -2, 2)$.

   b. On pose $N\left(1, 0, \frac{3}{2}\right)$. Montrer que $h(N) = H$.

   c. Calculer le volume du tétraèdre IMCN et déduire le volume du tétraèdre IFEH.

3. Soit $S = \{M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 4z + 8 = 0\}$.

   a. Monter que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

   b. Vérifier que S est tangente au plan (ABC).

   c. On pose $h(S) = S'$.
   Montrer que S' est tangente au plan (EFH) en un point dont on précisera les coordonnées.