Lycée Majida boulila Sfax **2020 - 2021**	**Nombres complexes**	**M^{r}: Belhadj Zied** **4^{ième} Math**

Exercice n°1 : Indiquer la réponse correcte.

1- Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation complexe : $z^2 + (3+i)z + 1 - i = 0$.

a/ $\arg(z_1+z_2) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$ b/ $\arg(z_1-z_2) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$ c/ $\arg(z_1)+\arg(z_2) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

2- Pour tout entier naturel, le nombre complexe $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6n+3} + \left(1-i\sqrt{3}\right)^{6n+3}$ est égal à :

a/ $-2^{6n+4}i$ b/ -2^{6n+4} c/ 2^{6n+4}

3- Soient les nombres complexes $Z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ et $Z_2 = \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) + i\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$, où $\theta \in]0, \pi[$

a/ $Z_1 = Z_2$ b/ $Z_1 - Z_2 \in IR$ c/ $\arg(\frac{Z_1}{Z_2}) \equiv 2\theta\ [2\pi]$

4- $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un r.o.n.d du plan complexe, si M(z) appartient au cercle de centre A(0, -1) et de rayon 1 alors on a :

a/ $|\overline{z}+i| = 1$ b/ $OM = OA$ c/ $z = e^{i\theta} - i$

5- Si $Z = \frac{i}{e^{i\theta}+1}$ avec $\theta \in]0, \pi[$ alors

a/ $Im(z) = \frac{1}{2}$ .b/ $|z| = \frac{1}{2}$ c/ $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta$

Exercice n°2 :

1- Soit l'équation (E) : $z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(2i+1)z - 4i = 0$, $z \in \mathbb{C}$

a- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2- Soit l'équation (E') : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in]0, \pi[$

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') on notera z_1 la solution tel que Im $(z_1) > 0$ et z_2 l'autre solution.

b- Vérifier que $z_1 = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

3- Le plan est rapporté à un r.o.n.d $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, soient $M_1(1+e^{i\theta})$, $M_2(1-e^{i\theta})$ et A(2).

Montrer que OM_1AM_2 est un parallélogramme et déterminer θ pour que OM_1AM_2 soit un losange.

4- A tout point M(z) tel que $z \neq 1$ on associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{1+z}{1-z}$.

a- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que : * z' imaginaire pur * $|z'| = 1$

b- Montrer que si $z' = e^{i\theta}$ alors $z = i\tan\frac{\theta}{2}$ pour $\theta \in]0, \pi[$.

c- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+z)^4 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-z)^4$.

Exercice n°3:

Le plan P est muni d'un r.o.n.d $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, soient A, B, M et M' les points d'affixes respectives 2, - 2, z et z'.

Pour tout nombre complexe z différent de 2, on pose $z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$.

1- Calculer $|z'|$ et Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

2- Déterminer l'ensemble E des ponts M tels que M' = B.

3- Construire le point M ' connaissant le point M.(1)

Exercice n°4 :

Le plan P est muni d'un r.o.n.d $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, soient A et B les points d'affixes respectivesi et 1.

A tout point M d'affixe z différent de i on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\overline{z}+1}{\overline{z}+i}$.

1- Déterminer les nombres complexes z tel que $z' = z$.

2-a- Montrer que pour tout point M distinct de A : $AM.BM' = \sqrt{2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM'}}\right) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b- Construire le point M' à l'aide d'un point M du cercle M' de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice n°5 :

Soit le nombre complexe $z = 1 + i$ et $Z_n = z^n + \overline{z}^n$, avec n est un entier naturel.

1-a- Montrer que $Z_n = r_n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ avec r_n est un réel à préciser en fonction de n.

b- Déterminer valeurs de n pour les quelles Z_n est nul.

c- Montrer que si n est pair alors Z_n est un entier relatif.

2- On suppose que n est un entier naturel pair et on pose n = 2p.

a- Ecrire $(1+i)^n$ et $(1-i)^n$.à l'aide des puissances de i.

b- Soit p un entier naturel. Simplifier : $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ et $i^{2p} + (-i)^{2p}$

c- Pour n = 24 déduire que : $\sum_{p=0}^{12} C_{24}^{2p}(-1)^p = 2^{12}$.

Exercice n°6 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z non nul tel que $\dfrac{z}{\overline{z}}$ soit réel.

2- On considère les points N et Q d'affixes respectives $\overline{z}$ et $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$.

a- Vérifier que $\dfrac{z_Q - z_M}{z_N - z_M} = -\dfrac{z}{\overline{z}}$.

b- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que M, N et Q soient alignés.

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1 - e^{2i\theta}) = 0$ .Où $\theta \in]0,\pi[$.

4- On pose M d'affixe $z = i(1 - e^{i\theta})$.

a- Ecrire z sous forme exponentielle.

b- Déterminer en fonction de θ, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$.

c- Déterminer alors θ pour que le triangle MNQ soit équilatéral.

Exercice n°7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. (L'unité graphique étant 8 cm).

On considère les points A et B d'affixes respectives (-1) et 1 .

Soit z un nombre complexe différent de 0, 1 et (-1). On note M, N et P les points d'affixes respectives z , z^2 et z^3

1- Justifier que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2- Dans cette question, on prend : $z = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

a- Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes z, z^2 et z^3.

b- Construire dans un repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points M, N et P.

c- Donner l'écriture algébrique de $\frac{z_P - z_N}{z_P - z_M}$.

d- En déduire la nature du triangle MNP.

3- Soit E l'ensemble des points M du plan telque MNP soit un triangle rectangle en P.

a- Montrer que $MP^2 + NP^2 = MN^2$ si et seulement si $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.

b- Montrer alors que MNP est un triangle rectangle en P si et seulement si $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

c- Déterminer alors et construire l'ensemble E.

4- On pose $z = re^{i\theta}$ où $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ et r un réel strictement positif.

a- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles P appartient à la demi-droite $[OB)$.

b- Déterminer les affixes des points M tels que le triangle MNP soit rectangle en P et que P appartienne à la demi-droite $[OB)$.

Exercice n°8 :

Pour tout entier $n \geq 2$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation (E) : $(z-1)^{n-1} = e^{in\theta}\left(\overline{z}-1\right)$.

1- Déterminer les racines nièmes de $e^{in\theta}$.

2- Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).

3- Soit z une solution de l'équation (E) différente de 1.

Montrer que : $|z-1| = 1$ et en déduire que : $\overline{z} - 1 = \frac{1}{z-1}$.

4-a- Soit z un nombre complexe différent de 1, montrer que : z est solution de (E) $\Leftrightarrow (z-1)^n = e^{in\theta}$.

Lycée Majida boulila Sfax 2020 - 2021	Isométries du plan	Mr: Belhadj Zied 4ième Math

Exercice n°1: Cocher la réponse correcte :

1- Soient f une symétrie glissante d'axe Δ et g une similitude indirecte d'axe Δ et de rapport 2 :

a/ f ∘ est une translation b/ f ∘ est une homothétie de rapport 2 c/ f ∘ est une rotation

2- Soit $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

La rotation de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ transforme le point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' tel que :

a/ $z' = \left(\sqrt{3} - i\right)z$ b/ $z' = -e^{i\frac{\pi}{3}}z$ c/ $z' = \left(\frac{-i\sqrt{3}+1}{2}\right)z$

2- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul orthogonal à Δ alors $t_{\overrightarrow{U}} \circ$ _ est :

a/ Une symétrie orthogonale b/ Une symétrie glissante c/ une symétrie centrale.

3- Soit $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ un repère orthonormé direct du plan, pour tout point M d'affixe z.

On considère M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs $z_1 = (1+i)z + 2 + 3i$ et $z_2 = (1-i)z - 2 + 2i$ et soit le point I milieu du segment $[M_1 M_2]$ alors I est l'image de M par :

a/ Une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. b/ Une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ c/ Une translation.

Exercice n° 2:

Le plan est orienté dans le sens direct, ABCD est un carré direct de centre O .

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC]..

1- Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a- Donner la nature et les éléments caractéristiques de R'= $S_{(OA)}$ o $S_{(AB)}$.

b- Déterminer la droite Δ tel que R = S_Δ o $S_{(AO)}$.

c- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de R o R'.

d- Soit f = $S_{(DA)}$ o R o R', montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l' axe .

2- Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M (z) associe le point M'(z) tel que z' = $\overline{z}$ - 1.

a- Montrer que g est une isométrie du plan .

b- Déterminer les coordonnées des points I' , O' et B' images respectives de I , O et B par g.

c- Montrer que f = g.

3-Soit h une isométrie du plan qui transforme l'ensemble{A ,B ,D } en { B ,C ,D }et telle que h(A) = C.

a- Déterminer h([BD]).

b- Déterminer alors toutes les isométries du plan qui transforment l'ensemble {A ,B ,D} en l'ensemble { B ,C ,D } et qui transforment A en C .

Exercice n°3 :

Soit ABCD un carré direct de centre I et E le point du plan tel que BED soit un triangle équilatéral direct

On désigne par J et K les milieux respectifs des segments [AD] et [DC].

1- Soit l'isométrie $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ$

a- Montrer que l'application $f \circ$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$

b- En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2-a- Montrer que les points I, C et E sont alignés.

b- Identifier l'application $g = S_{(IK)} \circ$

3-a- Montrer que $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\quad}{12}\,[2\pi]$

b- Déterminer les droites Δ et Δ' tel que $r_{\left(E, \frac{\pi}{3}\right)} = S_{(BE)} \circ \quad _{\left(B, \frac{\quad}{6}\right)} \quad \circ$

c- Caractériser alors l'application $h = r'_{\left(B, \frac{\pi}{6}\right)} \circ \quad _{\left(E, \frac{\quad}{3}\right)}$

c- Montrer que $h \circ$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

d- Soit M un point du plan , on pose $M_1 = g(M)$ et $M_2 = h(M)$ tel que $M_1 \notin (AB)$.

Quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1

4- Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le carré ABCD et tel que $\varphi(C) = A$

a- Montrer que $\varphi(I) = I$ et $\varphi(C) = A$

b- Déterminer alors toutes les isométries φ

Exercice n°4 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\quad}{3}\ [2\pi]$

On note O le milieu de [BC] et R la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

1-a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tels que f(A) = O, f(C) = B.

b- En déduire que f est une rotation dont-on précisera la mesure principale de son angle.

c- Trouver une construction géométrique de son centre I.

d- Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IB}\right)$; en déduire que $I \in [AB]$.

2- On pose $\varphi = S_{(IC)} \circ \quad \circ \quad \circ$

a- Montrer que $\varphi = R \circ f$.

b- Préciser $\varphi(A)$ puis caractériser φ et en déduire que $R^{-1} \circ S_{(AB)} = f \circ S_{(AC).}$

3- Soit g l'antidéplacement tel que g(A) = O et g(C) = B.

a- Montrer que g est une symétrie glissante dont-on précisera l'axe et le vecteur.

b- Soit D le point tel que ABDC est un rectangle, montrer que g(O) = D.

c- On pose B' = g(B). Montrer que B' = S_D(B).

Exercice n°5:

Le plan P est muni d'un r.o.n.d, soient (ζ) est le cercle de centre O et de rayon R et A le point de (C) d'affixe R.

Soit r la rotation de centre O et d'angle dont une mesure est $\frac{2\pi}{n}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier naturel k, on considère la suite des points M_k de (ζ) définis par la relation de récurrence :

$M_{k+1} = r(M_k)$ et $M_0 = A$. On note z_k l'affixe de M_k et z_{k+1} l'affixe de z_{k+1}.

1-a- Montrer que pour tout entier naturel k : $z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k$

b- En déduire que pour tout entier naturel k : $z_k = Re^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

c- Que peut-on dire des points M_n et M_0?

2- Prouver que pour tout entier k : $M_kM_{k+1} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

3- Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots\cdots + M_{n-1}M_n$

Déterminer la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$ et Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice n°6 :

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle équilatéral direct ABC.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segment [BC] et [AC], on pose $D = S_I(A)$ et $A' = S_B(D)$.

1-a- Montrer qu'il existe un déplacement f qui envoie B sur C et A' sur B.

b- Caractériser f.

2- Soit l'application $g = S_I \circ {}_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$.

a- Déterminer g(B), g(C) et montrer que g est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

c- Déterminer $f \circ$ puis caractériser $f \circ$.

d- En déduire que $R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ \quad {}_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ$.

3- Soit l'application $h = S_{(AD)} \circ {}_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$.

a- Déterminer h(B), h(C) et montrer que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c- Caractériser $h \circ$.

4- Soit φ l'antidéplacement qui envoie C sur B, A sur C, montrer que $\varphi = h^{-1}$ et caractériser φ.

Lycée Majida boulila Sfax 2020 - 2021	Arithmétique	M^r: Belhadj Zied 4^{ième} Math

Exercice n°1: Indiquer la réponse correcte.

1- Le chiffre des unités du nombre 9^{3123} est :

a/ 0 b/ 9 c/ 1

2- Soit n un entier supérieur à 3, on pose $a = 2n^2 - 3n + 2$ et $b = n - 1$

a/ $a \wedge b = 2$ b/ $a \wedge b = 1$ c/ $a \wedge b = n - 1$

3- L'entier $N = 5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par :

a/ Par 5 b/ Par 3 c/ Par 7

1- Le chiffre des unités du nombre $6^{2015} + 4^{2015}$ est égal à :

a/ 2 b/ 0 c/ 4

Exercice n°2:

1) Déterminer $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ tel que $7a \equiv 1\,[12]$.

2) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $19x + 12y = 1$.

a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E) alors $x \equiv 7[12]$.

b) Donner une solution particulière de (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

3)a) Soit n un entier et (S) le système : $\begin{cases} n = 19a + 1 \\ n = 12b + 2 \end{cases}$

Montrer que le couple $(a, -b)$ est une solution de (E).

b) Montrer que n est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv 134[228]$.

c) Déduire le plus grand entier inférieur à 2018 solution de (S).

Exercice n°3 :

1-a- Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.

b- Déterminer le plus petit entier naturel qui congru à 2007 modulo 7.

2- Soit n entier naturel qui congru à 5 modulo 7.

a- Déterminer un entier naturel congru à n^3 modulo 7.

b- En déduire que $n^3 + 1$ est divisible par 7.

3- Montrer que si entier naturel est congru à 4 modulo 7 alors $n^3 - 1$ est divisible par 7.

4- On considère le nombre $A = 1999^3 + 2007^3$. Sans calculer A, montrer que A est divisible par 7.

Exercice n°4 :

On admet que 2011 est premier. Soit l'équation (E) : $67x + 2011y = 1$

2- Vérifier que le couple $(-30, 1)$ est une solution particulière de l'équation (E).

3- Montrer alors que les solutions de l'équation (E) sont les couples $(-30 + 2011k, 1 - 67k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4- En déduire la valeur de l'inverse modulo 2011 de l'entier 67.

5-a- soit a un entier, montrer que $a^2 \equiv 1\,[\mathrm{mod}\,2011]$ si et seulement si $a \equiv 1\,[\mathrm{mod}\,2011]$ ou $a \equiv -1\,[\mathrm{mod}\,2011]$.

b- En déduire que 1 et 2010 sont les seuls entiers inférieurs ou égal à 2010 qui sont égaux à leur inverses modulo 2011 .

c- Montrer alors que : $2010! \equiv 2010\,[\mathrm{mod}\ 2011]$.

Exercice n°5 :

1-a- Montrer que : $6^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 11)$ et $6^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$

b- En déduire que $6^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 55)$

2-a- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17 \times -40y = 1$

b- Déterminer l'unique entier naturel u inférieur à 40 tel que $17u \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 40)$

3- Soit a et b deux entiers naturels.

Montrer que si $a^{17} \equiv b (\mathrm{mod}\ 55)$ et si $a^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 55)$ alors $b^{33} \equiv a (\mathrm{mod}\ 55)$

4- Trouver alors le reste dans la division euclidienne de 6^{561}par 55

Lycée Majida boulila Sfax 2020 - 2021	Etude de fonctions	M^r: Belhadj Zied 4^ième Math

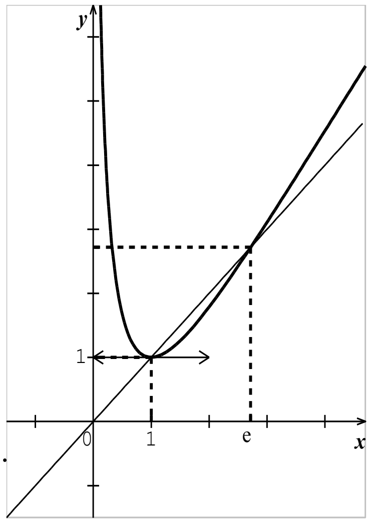
Exercice n°1: Cocher la réponse correcte.

1- Si f est la fonction définie sur IR par : $f(x)=x\text{Ln}|x|$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ alors $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ est

a/ nulle b/ strictement positive c/ strictement négative

2- a/ $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)e^{x}}{x\text{Ln}x}=e$ b/ $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)e^{x}}{x\text{Ln}x}=1$ c/ $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)e^{x}}{x\text{Ln}x}=\frac{1}{e}$

Exercice n°2:



La courbe ci-contre C est celle d'une fonction f continue sur $]0,+\infty[$ et telle que $f(e)=e$ .C admet une branche parabolique de direction asymptotique au voisinage de $+\infty$ la droite d'équation : y = x

1- Par une lecture graphique déterminer :

$f(1)$, $f'(1)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$.

2- Soit h la restriction de f sur $[1,+\infty[$.

a- Montrer que h réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

b- Tracer la courbe Γ de h^{-1}.

4- On admet que pour tout x∈ $]0,+\infty[$: $f(x)=a(\text{Ln}x)^2+b\text{Ln}x+cx$ avec a,b et $c\in$ IR .

a- Montrer que : $f(x)=(\text{Ln}x)^2+x-\text{Ln}x$.

b- Montrer que la fonction F définie par : $F(x)=x(\text{Ln}x)^2-3x\text{Ln}x+3x+\frac{1}{2}x^2$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

c- Dresser le tableau de variations de F sur $]0,+\infty[$.

d- Calculer l'aire de la partie du plan limité par C et Γ.

Exercice n° 3:

I- Soit f la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\text{Ln}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1- Dresser le tableau de variations de f.

2- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$ et que $0,5<\alpha<1$.

3- Tracer la courbe (C) de f sur un r.o.n $(O,\vec{i},\vec{j})$, on précisera la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

II- Soit pour tout $n\in\text{IN}^*$: $S_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}$.

1-a- Montrer que pour tout $n\in\text{IN}^*$: $\frac{1}{n+1}\leq\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}\leq\frac{1}{n}$.

b- Vérifier que pour tout $n\in\text{IN}^*$: $\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\frac{1}{n}-f(n)$ et en déduire: $0\leq f(n)\leq\frac{1}{n(n+1)}$.

2-a- Montrer que pour tout $n\in\text{IN}^*$: $0\leq f(n)+f(n+1)+\cdots+f(2n)\leq S_n$.

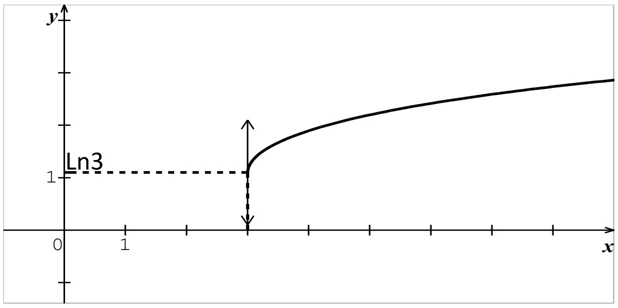
b- Déterminer les réels a et b tel que pour tout $x\in\text{IR}^*\setminus\{-1\}$: $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$.

c- En déduire que pour tout $n\in\text{IN}^*$: $S_n=\frac{n+1}{n(2n+1)}$.

3- En utilisant les questions précédentes déterminer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}f(k)$

Exercice n°4:

La courbe ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[3,+\infty[$ par : $f(x)=\text{Ln}\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)$ dans le r.o.n$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



Soit E la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations : $x=3$, $x=5$ et $y=\text{Ln}3$, on désigne par A l'aire de E en u.a.

1- Hachurer E.

2-a- Vérifier que $f(5)=2\text{Ln}3$.

b- Soit M et N les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées respectives (5,Ln3) et (3,2Ln3). Placer dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les points M, N, P et Q.

c- Calculer l'aire du rectangle MNPQ et l'aire du triangle MPN.

d- En déduire que $\text{Ln}3 < A < 2\text{Ln}3$.

3-a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur l'intervalle $[\text{Ln}3,+\infty[$.

4- Soit g la fonction réciproque de la fonction f et C_g sa courbe dans le r.o.n$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Tracer C_g.

5- Soit E' la partie du plan limitée par C_g et les droites d'équations: $x=\text{Ln}3, x=2\text{Ln}3$ et $y=5$ et A' l'aire de E'.

a- Hachurer E'.

b- Montrer que : $A'=5\text{Ln}3-\int_{\text{Ln}3}^{2\text{Ln}3} g(x)dx$.

6-a- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\text{Ln}3,+\infty[$, $g(x)=\dfrac{e^x+9e^{-x}}{2}$.

b- Calculer $\int_{\text{Ln}3}^{2\text{Ln}3} g(x)dx$ et en déduire la valeur de A.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=xe^{\frac{1-x}{2}}$.

1-a- Dresser le tableau de variations de f.

b- En déduire que pour tout $x\in[0,1]$: $0\le f(x)\le 1$.

2- Soient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=\dfrac{1}{n!2^{n+1}}\int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}}dx$ et $U_n=1+\dfrac{1}{1!2}+\dfrac{1}{2!2^2}+\dfrac{1}{3!2^3}+\cdots+\dfrac{1}{n!2^n}$.

a- Montrer que : $I_1=\sqrt{e}-\dfrac{3}{2}$.

b- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$.

c- En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=\sqrt{e}-I_n$.

3-a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $0\le I_n\le\dfrac{1}{n(n!)2^{n+1}}$.

b- En déduire la limite de la suite (U_n) lorsque n tend vers $(+\infty)$.

Exercice n°6:

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=e^{-\sqrt{x-1}}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b- Dresser le tableau de variations de f.

2-a- Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

3- Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$.

4- Soit F la fonction définie sur $]0,1]$ par : $F(x)=\int_1^{1+(Lnx)^2} f(t)dt$.

a- Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $F'(x)$.

b- En déduire l'expression de F(x) pour tout $x\in]0,1]$.

5- Soient $\alpha>1$ et A_α l'aire du domaine du plan limité par C_f, l'axe des abscisseset les droites : $x=1$ et $x=\alpha$.

a- Montrer que : $A_\alpha = F(f(\alpha))$.

b- Calculer A_α puis $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A_\alpha$

Exercice n°7:

Pour tout $n\in IN^*$, on pose $I_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

1- A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2-a- Montrer que pour tout $t\in IR_+$ on a: $t-\frac{t^2}{2}\le Log(1+t)\le t$.

b- En déduire que pour tout $x\in [0, n]$ on a : $x-\frac{x^2}{2n}\le nLog\left(1+\frac{x}{n}\right)\le x$

c- Montrer alors que pour tout $x\in [0, n]$ on a : $e^{-x}e^{-\frac{x^2}{2n}}\le\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\le e^{-x}$

3- Calculer $\int_0^n e^{-x}dx$ et montrer que $I_n\le 1-e^{-n}$

4-a- Montrer que pour tout $t\in IR_+$ on a: $e^{-t}\ge 1-t$.

b- En déduire que pour tout $x\in [0, n]$ on a : $e^{-x}e^{-\frac{x^2}{2n}}\ge e^{-x}-\frac{x^2}{2n}e^{-x}$.

c- Calculer $\int_0^n x^2e^{-x}dx$, en déduire que $I_n\ge 1-\frac{1}{n}+e^{-n}\left(\frac{1}{n}+\frac{n}{2}\right)$.

d- Montrer que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°8:

Soit f la fonction définie sur IR : $f(x)=\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

I- Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

1- Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

2-a- Montrer que pour tout $t\in[0,+\infty[$: $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ge \frac{1}{1+t}$.

b- En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $F(x)\ge Ln(x+1)$ et calculer la limite de F en $+\infty$.

3- Montrer que F réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

II- Soit G la fonction réciproque de F.

1- Montrer que G est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $G'(x)=\sqrt{1+G^2(x)}$.

2- Calculer $G(0)$ et $G'(0)$.

3- Montrer que G est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$ et que G est une solution de l'équation (F).

Exercice n°9:

Soit f la fonction définie l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par : $f(x)=1+\sin(\pi x)$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1-a- Dresser le tableau de variations de f.

b- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion que l'on précisera.

c- Construire la courbe (C) et préciser la tangente au point d'inflexion.

2-a- Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Tracer la courbe (C ') de la fonction réciproque de f^{-1} de f.

3-a- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]0,2\right[$ et que pour tout $x \in \left]0,2\right[$ $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

b- Montrer que pour tout $x \in \left[0,2\right]$: $f^{-1}(2-x) + f^{-1}(x) = 0$.

4- On considère la suite $\left(U_n\right)$ définie sur IN^* par : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$

a- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \le u_n \le \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$

b- En déduire que la suite $\left(U_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

c- Déterminer la limite de la suite $\left(V_n\right)$ définie surIN^*: $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1-\frac{1}{n+k}\right)$.(14)

4- En déduire que pour tout $x \in \left[0,+\infty\right[$: $G(x) = f(x)$.

Exercice n°10:

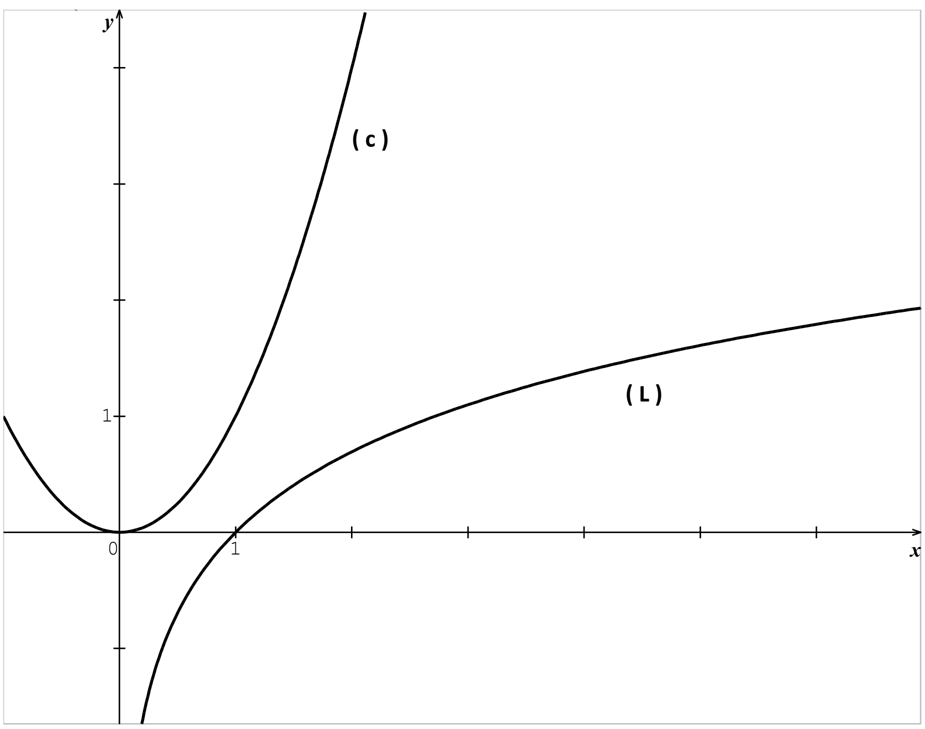
On considère la fonction f_2 définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f_2(x) = x^2 - Lnx$ et on désigne par $\left(\Gamma\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1-a- Calculer $\lim_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f_2(x)$.

b- Calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c- Dresser le tableau de variations de f_2.

2- Dans la figure ci dessous on à tracé dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe (**L**) de la fonction Ln et la courbe (**C**) d'équation $y = x^2$



a- Soit $x>0$, on considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (**L**) et à (**C**).

Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b- Construire alors sur la figure les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives : 2, $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c- Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice n°11 :

1- Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x\ln x}$.

a- Dresser le tableau de variation de g.

b- Montrer que l'équation $g(x)=1$ admet dans $[1,+\infty[$ une unique solution α.

c- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

2- Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{\ln x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter.

b- Dresser le tableau de variation de f.

3- L'annexe représente les courbes représentatives C_1, C_2 et C_3 respectives des fonctions

$x \mapsto \quad \mapsto \quad \mapsto$.

a- Placer, dans l'annexe, les points d'intersection de C_f et C_2.

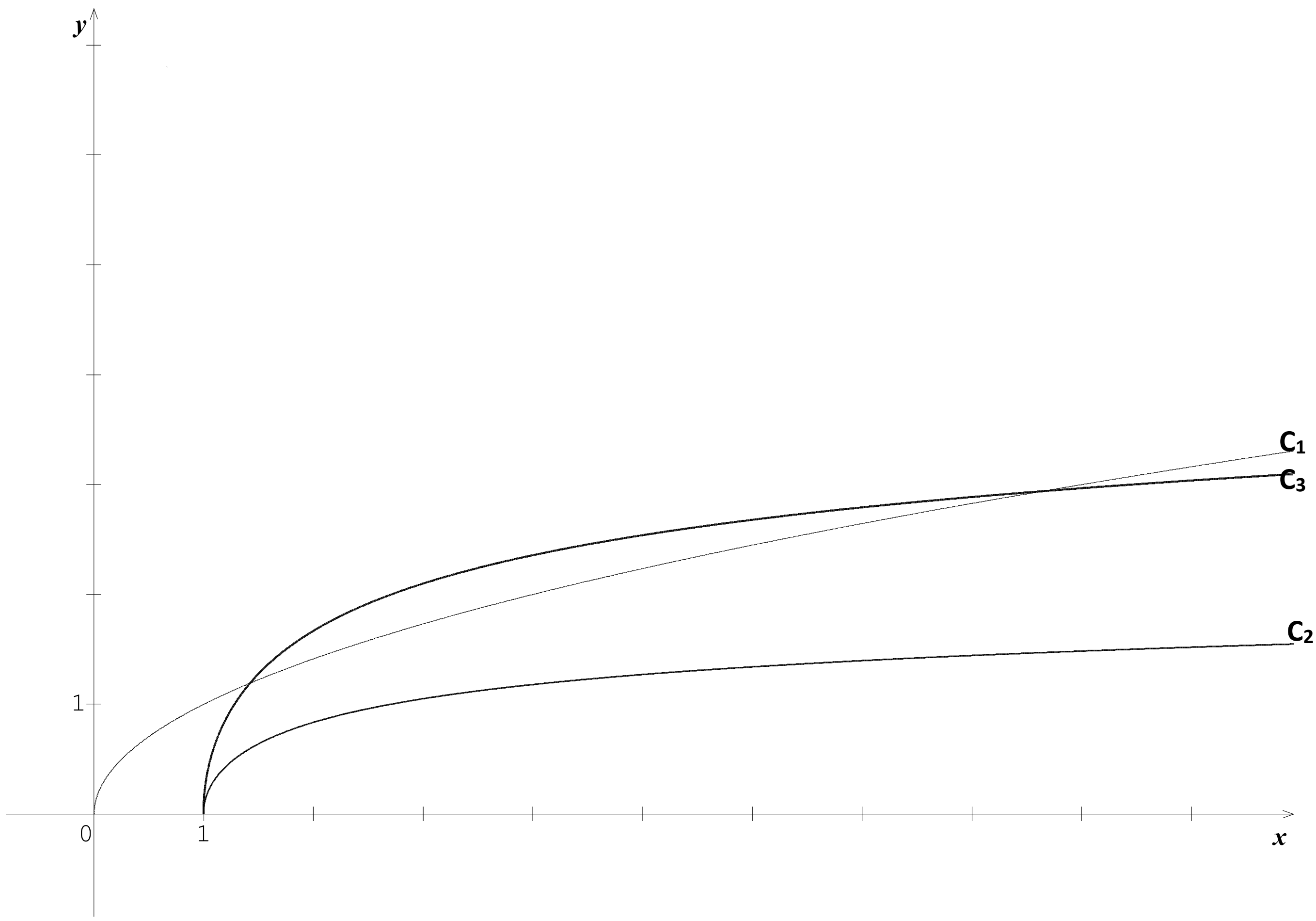
b- Tracer C_f.

4- Placer les points M et N de C_1 et C_2 de même abscisse pour lesquels la distance MN est minimale.

5- On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, C_2 et les droites $x=a$ et $x=b$.

$\mathcal{A}'$ l'aire de la partie du plan limitée par C_1, C_3 et les droites $x=a$ et $x=b$. (avec $1<a<b$)

Comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.



Exercice n°12 :

I- Soient pour tout $n \in IN^*$ les fonctions f_n et F_n définies sur IR par :

$f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$ et $F_n(x) = \int_{e^{-x}}^{e} (1-Lnt)^n dt$

1- Montrer que F_n est dérivable sur IR et en déduire que $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)dt$.

2- En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $x \in IR$ on a :
$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$.

II- Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par : $U_n = F_n(0) = \int_1^e (1 - Lnt)^n dt$.

1- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$.

2- Calculer U_1 et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^e (2 - \ln t)^2 dt$.

3-a- Montrer que la suite (U_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

b- Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $0 \le U_n \le \frac{1}{n}$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

4- Soit pour tout $n \in IN^*$: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\, U_k$.

Montrer que : $S_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)U_n + \frac{1-e}{n} + 1$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice n°13 :

Soit f la fonction définie sur $]-Ln2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a- Dresser le tableau de variations de f.

b- Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

c- Tracer T et (C).

2- Soit g la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : $g(x) = -Ln(1 + \cos x)$.

a- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-Ln2, +\infty[$.

b- Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(Ln2)$.

c- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-Ln2, +\infty[$ et que : $(g^{-1})'(x) = f(x)$.

d- Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations : $x = 0$, $x = Ln2$ et $y = 0$

Montrer que : $\mathcal{A} = \frac{\pi}{6}$ u.a .

Lycée Majida boulila Sfax 2020 - 2021	Probabilités	M^r: Belhadj Zied 4^{ième} Math

Exercice n°1:

Un QCM comporte quatre questions.A chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un élève répond à chacune des quatre questions, pour chaque questions, soit il connait la réponse et répond de façon exacte, soit il ne connait pas, et dans ce cas, il répond au hasard.

On suppose de plus, que la probabilité que cet élève connaisse la réponse à une question donnée est égale à 1/2.

On considère les événements **C**" l'élève connait la réponse " et **J**" la réponse est juste " .

1/ a- l'élève répond à une question du QCM. Construire un arbre de choix décrivant la situation.

b- Montrer que p(J) = 2/3.

c- Calculer la probabilité que l'élève connaisse la réponse sachant que sa réponse est juste.

2/ On attribue la note 1 à toute réponse juste et la note (-0.5) à toute réponse fausse.

Si le total des points est négatif, la note globale attribué au QCM est 0.Soit X la note obtenue par l'élève

a- Déterminer la loi de probabilité de X.

b- Quelle est la probabilité que l'élève ait au moins 2 points à ce QCM?

c- Supposant que tout les élèves se comportent comme l'élève. Quelle moyenne peut-on attendre de à ce QCM?

Exercice n°2:

I- Un récipient contient un gaz constitué de 75% de particules du type A et de 25% de particules du type B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments :$\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$.

La particule du type A entre dans $\mathbf{C_1}$ avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et dans $\mathbf{C_2}$ avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

On pose $\mathbf{C_1}$" la particule entre dans $\mathbf{C_1}$" et $\mathbf{C_2}$ " la particule entre dans $\mathbf{C_2}$".

1-a- l'expérience donne que $p(C_1)=0,375$, montrer que: $p(C_1|B)=p(C_2|B)=0,5$.

b- Etablir l'arbre de probabilité de cette expérience.

c- Sachant que la particule entre dans $\mathbf{C_1}$ calculer la probabilité qu'elle soit du type A.

2- On répète l'expérience 10 fois de suite tout en gardant les mêmes proportions des particules A et B.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois où la particule entre dans $\mathbf{C_1}$.

a- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b- Calculer le nombre moyen de particules dans $\mathbf{C_1}$.

c- Calculer la probabilité qu'au moins une particule entre dans $\mathbf{C_1}$.

Exercice n°3:

Le propriétaire d'un magasin achète des pièces de trois fournisseurs **F_1, F_2 et F_3,** certaines pièces sont du premier choix et les autres du deuxième choix.

Le fournisseur F_1 fournit au magasin **20 %** des pièces parmi eux **60 %** du premier choix.

70 % des pièces fournies par F_2 sont du premier choix et **20 %** des pièces fournies par F_3 sont du premier choix.

On choisit au hasard une pièce de ce magasin et on considère les évènements suivants :

$\mathbf{F_i}$ « la pièce est fournie par le fournisseur F_i » et **C** :« la pièce est du premier choix »

1- Calculer la probabilité que la pièce choisie provienne de F_1 et qu'elle soit du premier choix.

2- On donne **p(C) = 0,52** , $p(F_2)=x$ et $p(F_3)=y$.

a- Montrer que x et y sont solutions du système $\begin{cases} x+y=0,8 \\ 0,7x+0,2y=0,40 \end{cases}$

b- Déterminer alors les valeurs de x et y.

3- Un client achète un lot de **10** pièces.

a- Calculer la probabilité qu'au plus une pièce est du premier choix.

b- Donner le nombre moyen des pièces de premier choix.