Série de révision n°1

Exercice n°1

1. On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = xe^x - e^x + 1$.
   (a) Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x) = \int_0^x te^t dt$.
   (b) Montrer que $\forall x \geq 0$, $\frac{1}{2}x^2 \leq h(x) \leq \frac{1}{2}x^2 e^x$.
   (c) En déduire $\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x^2}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = e^{\sqrt{x}} - (e+1)\sqrt{x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Vérifier que $\forall x > 0$, $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} - \frac{h(\sqrt{x})}{x} - \frac{e}{\sqrt{x}}$.
   (b) Montrer alors que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -\infty$. Interpréter.
   (c) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter.

3. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β. Vérifier que $0 < \alpha < 1 < (\ln^2(e+1)) < \beta$.
   (c) On pose pour $x > 0$, $\mu(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. Montrer que $f(x) = 0 \iff \mu(x) = e + 1$.
   (d) Dans la feuille annexe, on a tracé dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_\mu)$ de la fonction μ. Construire dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C})$ (on prendra $\ln(e+1) \approx 1.31$).

4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$.
   (a) Montrer que $\int_\alpha^\beta e^{\sqrt{t}} dt = 2(e^{\sqrt{\beta}}(\sqrt{\beta} - 1) - e^{\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha} - 1))$.
   (b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

On donne ci-dessous, le tableau de variation de la fonction f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ définie par: $f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - (e + \frac{1}{n})\sqrt{x}$.

Tableau de variation de $f_n(x)$

x	0	$\ln^2(e+\frac{1}{n})$	$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	$+$	$-$	$+$
Variation de f_n	1	$1-(e+\frac{1}{n})\ln(e+\frac{1}{n})$	$+\infty$

1. (a) Montrer que $f_n(\ln^2(e + \frac{1}{n})) < 0$.
   (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_n et β_n. Vérifier que $0 < \alpha_n < 1 < \ln^2(e + \frac{1}{n}) < \beta_n$.

2. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$ et que $f_{n+1}(\beta_n) > 0$.
   (b) En déduire que la suite (α_n) est strictement croissante et la suite (β_n) est strictement décroissante.

3. (a) Montrer que les restrictions μ_1 et μ_2 de μ respectivement à $I_1 = [0, 1]$ et $I_2 = [1,+\infty[$ réalisent des bijections de I_1 et I_2 sur des intervalles que l'on déterminera.
   (b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_1(\alpha_n) = e + \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_2^{-1} \circ \mu_1(\alpha_n) = \beta_n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \beta_n$.

Exercice n°2 Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

1. Montrer que $p^2 \equiv 1 \pmod 3$.

2. (a) Montrer qu'il existe un entier naturel q tel que $p^2 - 1 \equiv 4q(q+1)$.
   (b) En déduire que $p^2 \equiv 1 \pmod 8$.

3. En utilisant le lemme de Gauss, montrer que $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

4. Soit a un entier naturel tel que a et 24 sont premiers entre eux.
   (a) Montrer que $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$.
   (b) Déterminer le reste modulo 24 de 883^2.
   (c) Existe-t-il des entiers naturels $a_1, a_2, \ldots, a_{83}$ tels que pour tout $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 83\}$, a_k et 24 sont premiers entre eux et $\sum_{k=1}^{83} a_k^2 = 883$?

5. Soit le couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E): $p^x + y^{p-1} = 883$.
   (a) Montrer que $p < 883$.
   (b) Montrer que p ne divise pas y.
   (c) Montrer que $y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, puis en déduire que p divise 882.
   (d) Déterminer p.
   (e) Déterminer alors les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui vérifient (E): $p^x + y^{p-1} = 883$.

Exercice n°3 Le plan est orienté dans le sens direct. Soit OBC un triangle équilatéral direct inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. A est le symétrique de C par rapport à O. J et K sont les points diamétralement opposés respectivement à B et C.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$.

2. Soit T la translation de vecteur $\vec{OB}$. Déterminer la droite Δ telle que $T = S_\Delta \circ S_{(OZ)}$.

3. Montrer que $T \circ R$ est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

4. Soit E le point tel que $\vec{CE} = \vec{BO}$.
   (a) Montrer que ABE est équilatéral de centre O.
   (b) On considère une isométrie du plan qui transforme A en C et O en B. On pose $g = t_{\vec{BO}} \circ f$.
      i. Déterminer $g(O)$ et $g(A)$.
      ii. Montrer que g est soit la symétrie orthogonale d'axe (OB) soit la rotation de centre O d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
      iii. Caractériser alors les isométries f du plan qui transforment A en C et O en B.

5. On pose $h = t_{\vec{OB}} \circ S_{(OB)}$ et $r = R(K, -\frac{2\pi}{3})$.
   (a) Déterminer $h(M)$.
   (b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = r(M)$.

Exercice n°4 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
A)

1. Justifier l'existence de $F(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.

3. (a) Vérifier que $\forall t \in [1, +\infty[$: $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$. En déduire que $\forall x \geq 2 : F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$.
   (b) Prouver que $\forall x \geq 2 : F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$.

4. Montrer que F est majorée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = L$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2 \sin^2 t} dt$.

(a) Montrer que $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} e^{-x^2}$. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_F$.

B)

1. On pose $x \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(t) = f(x \tan t)$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $g'(t) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}$.
   (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$.
2. On admettant que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $(f(x^2))' = -2xe^{-x^2} F(x)$.
3. Soit $h(x) = f(x) + (F(x))^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer alors que h est constante et calculer cette constante.
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2$.

C) On pose pour $n \geq 0$, $u_n = \int_0^x t^n e^{-t^2} dt$ et $\vartheta_n = \lim_{x \to +\infty} u_n$.

1. Vérifier que $\vartheta_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geq 2 : \vartheta_n = \frac{n-1}{2} \vartheta_{n-2}$.
   (b) En déduire que $\vartheta_n \vartheta_{n+1} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^{n+1} . n}$.
   (c) Déterminer alors les termes ϑ_1 et ϑ_3 de la suite (ϑ_n).

Exercice n°5 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : mz^2 - 2i(6-m)z + 8(2-\overline{m}) = 0$. Soit $m \in \mathbb{C}^*$ tel que $|m| = 2$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, M, N et P d'affixes respectives: $z_A = i$, $z_M = m$, $z_N = 2i\overline{m}$ et $z_P = 4\overline{m} - 2i$.

1. On pose $m = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.
   (a) Écrire z_P sous forme exponentielle.
   (b) Montrer que les points A, N et P ne sont pas alignés.
   (c) Existe-t-il une position de m pour laquelle le triangle ANP est rectangle en A?
   (d) Montrer que $MN^2 = 4(5 - 4\sin(2\theta))$. Déterminer la valeur de θ pour laquelle MN est minimale.
2. Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ définie par $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = i\overline{z} - 2i$.
   (a) Montrer que f est une isométrie du plan.
   (b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f. En déduire que f est une symétrie orthogonale.
   (c) Déterminer alors l'ensemble des points M lorsque m varie.

Annexe Ex 1