2) Sachant que la machine a déjà fonctionné 3 ans ,quelle est la probabilité reste fonctionnelle encore 4 ans.

EXERCICEN° 4 (7 pts)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$f(x) = \begin{cases} -x + 2Ln(1+x) & ; \quad si\ x \in]-1,0[\\ x - 1 + e^{-x} \ ; & \quad si\ x \geq 0 \end{cases}$ et on désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Etudier la continuité de f en 0.

   b-Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

2) a- calculer $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

   b- calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ puis démontrer que la droite $D: y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

   c- Etudier la position relative de C_f et D.

3) a- calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle de son domaine de définition et en déduire que $\forall x \in]-1,+\infty[\ ; \ f'(x) \geq 0$.

   b- Dresser alors le tableau de variation de f.

4) On considère h la restriction de f sur $]-1,0[$.

   a- Justifier que h réalise une bijection de $]-1,0[$ sur un intervalle J qu'on déterminera.

   b- On a tracé C_f sur la feuille annexe (***figure 2***) ;tracer $C_{h^{-1}}$ dans le même repère.

5) Soit α un réel strictement supérieur à 1 ($\alpha > 1$) ; on désigne par $\Gamma(\alpha)$ la partie du plan limitée par C_f ;D; Δ : x = 1 et ; Δ' : x = α

   a- Hachurer **sur la figure 2** la partie $\Gamma(\alpha)$

   b- Exprimer en fonction de α ; $A(\alpha)$ l'aire de$\Gamma(\alpha)$.

   c- Trouver : $\lim_{\alpha\to +\infty} A(\alpha)$.

   d- Calculer : $I = \int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$.

BON TRAVAIL

BONNE REUSSITE

b) Exprimer alors (V_n) en fonction de n.
c) Montrer que $U_n = Ln(3 + (\frac{2}{3})^n)$.
d) Retrouver la limite de la suite (U_n)

EXERCICE N° 3 (5 pts)

Une usine fabrique des tablettes de chocolats ; à l'issue de la fabrication, l'usine considère que certaines tablettes de chocolats ne sont pas bien finies (cassées ; mal emballées,...).

L'usine dispose deux chaines de fabrications :

*la chaine A : une chaine lente pour laquelle la probabilité d'obtenir une tablette bien finie est 0,98

* la chaine B : une chaine rapide pour laquelle la probabilité d'obtenir une tablette bien finie est 0,95

$I/$ à la fin de la journée on prélève au hasard une tablette de chocolat ; on note les évènements suivants : A « la tablette est fabriquée par A »

et F « la tablette est bien finie »

On désigne par x la probabilité de l'évènement A.

1) Construire un arbre pondéré qui correspond à cette situation.
2) Montrer que $P(F) = 0.03x + 0.95$
3) On remarque que 96% des tablettes de chocolats sont bien finies ; montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$.

$II/$ on prélève au hasard successivement et avec remise 3 tablettes ; soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de tablettes fabriquées par la chaine A .

1) Donner la loi de X
2) Calculer $E(x)$ et $V(X)$.

$III/$ L'usine a acheté une machine électronique pour tester la qualité du cacao ; Y : la durée de vie de cette machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$; trouver à 10^{-2} prés:

1) $P(Y \leq 5)$ et $P(Y > 2)$.

EXAMENDU BACALOREAT BLANC	Lycée : ZARZIS
EPREUVE : MATHEMATIQUES	Section : sciences de l'informatique
Durée: 3H	Coefficient de l'épreuve : 3

Le sujet comporte 4 pages dont une page(feuille annexe)

à rendre avec la copie

EXERCICE N° 1 (4 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): (z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A=\sqrt{3}-i$; $z_B=\sqrt{3}+i$; $z_C=2i$ et $z_D=-\sqrt{3}-i$.

   a) Montrer que A, B, C et D appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre o et de rayon R=2.
   b) Placer les points A, B, C et D soigneusement sur la feuille annexe ***(figure 1)***
3) Calculer : $(z_C-z_D)\overline{(z_C-z_B)}$ et en déduire la nature du triangle DBC.
4) Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant

$|z-2i|=|z-\sqrt{3}-i|$.

   a) Déterminer et représenter Δ sur la ***figure 1*** de la feuille annexe.
   b) Trouver l'affixe de G le point d'intersection de Δ et (BC).

EXERCICE N° 2(4 pts)

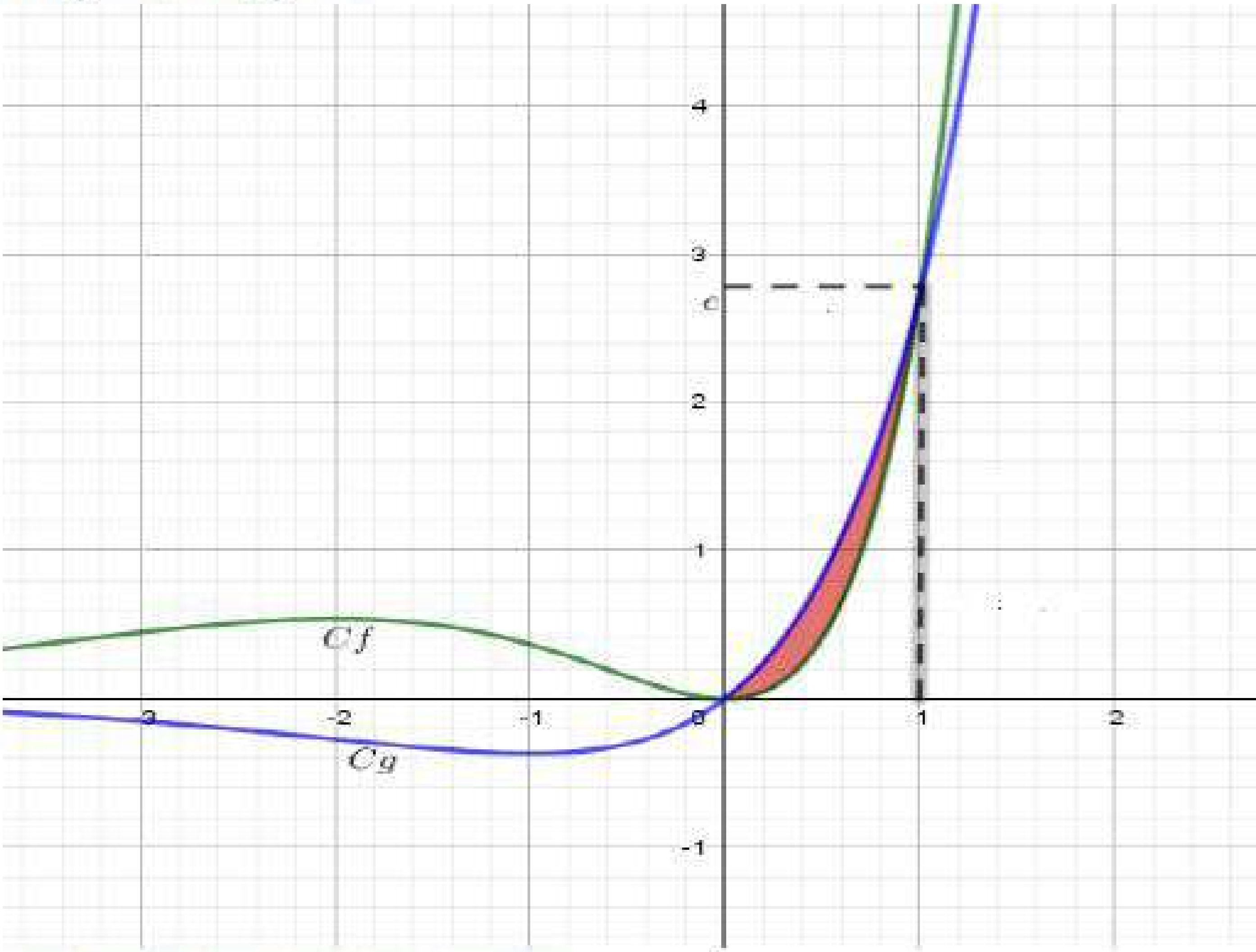
1) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0=2Ln2$ et $U_{n+1}=Ln(\frac{2}{3}e^{U_n}+1)$
   a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\ U_n>Ln3$.
   b) Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}\ e^{U_n}-e^{U_n+1}=\frac{1}{3}(e^{U_n}-3)$.
   c) Comparer alors e^{U_n} et e^{U_n+1} et en déduire que (U_n) est décroissante.
   d) Justifier que (U_n) est convergente et trouver sa limite l
2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n=e^{U_n}-3$
   a) Montrer que (V_n) est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$

Exercice N°4(3 points)

Soit la suite U_n définie par $U_n = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

1) En utilisant une intégration par partie calculer U_0.
2) Montrer que la suite U est décroissante.
3) On a représenté Cf et Cg ci-dessous dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

   où $f(x) = x^2e^x$ et $g(x) = xe^x$



4) a- Résoudre graphiquement g(x) = f(x)

   a- Comparer f et g sur l'intervalle $[0;1]$.

   b- Déterminer La valeur de la partie en couleur grise sur la figure ci-dessus (vous pouvez calculer U_1).

2) Montrer que pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$; $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x^2}$

3) Etudier alors le tableau des variations de f .

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\dfrac{1}{2}x$, que peut-on déduire ?

5) Montrer que $f(\alpha)=-\alpha+\dfrac{2}{\alpha}$ puis donner un encadrement $f(\alpha)$.

6) Tracer alors Cf.(on prendra α =1.15)

7) Soit la fonction $h(x) = -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}(1+2\ln|x|)$ ou x est un réel non nul

   a- Montrer h est une fonction impaire.
   b- Vérifier si x est strictement positif on aura h(x) = f(x)
   c- Déduire alors une construction de Ch où Ch est la courbe représentative de le même repère

8) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les axes x= 1 , x=2

   a- Hachurer la partie A
   b- Vérifier que $\dfrac{1}{2}$ (lnx) ^{2} est une primitive de de $\dfrac{\ln x}{x}$.
   c- Déterminer la valeur de A .

<u>Exercice N°3(4 points)</u>

On considère l'équation (E) :11x-7y=5 où x et y sont des entiers relatifs .

1) Justifiant que (E) admet au moins des solutions dans $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.
2) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de (E) .
3) Résoudre alors (E).
4) On considère l'équation (F) $11x^2-7y^2=5$ où x et y sont des entiers relatifs.

   a- Démontrer que si le couple (x ;y) est une solution de (F) alors $x \equiv 2y^2\,[5]$

   b- Soient x et y des entiers relatifs .Recopier et compléter les deux tableaux suivants.

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de 2 y^2 par 5.

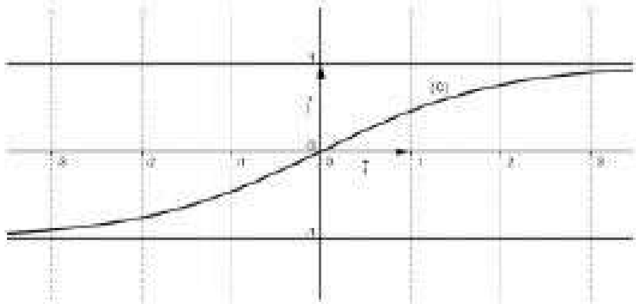
   c- En déduire que si le couple (x ;y)est solution de (F) alors x et y sont multiples de 5.

   d- Démontrer que si x et y sont multiple de 5 alors le couple (x ;y) n'est pas solution de (F) .Que peut-on en déduire pour l'équation (F)

Lycée Utique -BIZERTE	Devoir de synthèse N°2	A.S 2020-2021
BAC info	JELASSI Adel	Durée : 3h

Exercice N°1(5 points)

La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie sur IR par : $f(x)=\frac{ae^x+b}{e^x+1}$ où a et b sont deux réels. Les droites d'équations : y =1 et y =−1 sont des asymptotes à (C) respectivement au voisinage de +∞ et au voisinage de −∞. (L'unité graphique : 2cm)



1) a) A l'aide d'une lecture graphique déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) En déduire que : a=1 et b=−1.

2) Montrer que la fonction f est impaire.

3) a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)= -1+\frac{2e^x}{e^x+1}$

b) Calculer, en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations : x=0 et x=1.

c) En déduire, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation y=1 et les droites d'équations x=0 et x=1.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$; pour tout x de J.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et Déterminer le signe de $(f^{-1})'(0)$.

Exercice N°2(6 points)

A) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par g(x)= $4\ln x + x^2 - 2$.

1) Calculer g'(x) puis déduire son tableau de variation (on doit calculer les limites au bornes de son domaine de définition)

2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α puis vérifier que $1.1 \prec \alpha \prec 1.2$

3) Déduire le tableau de signe de g.

B) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par f(x) = $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)$

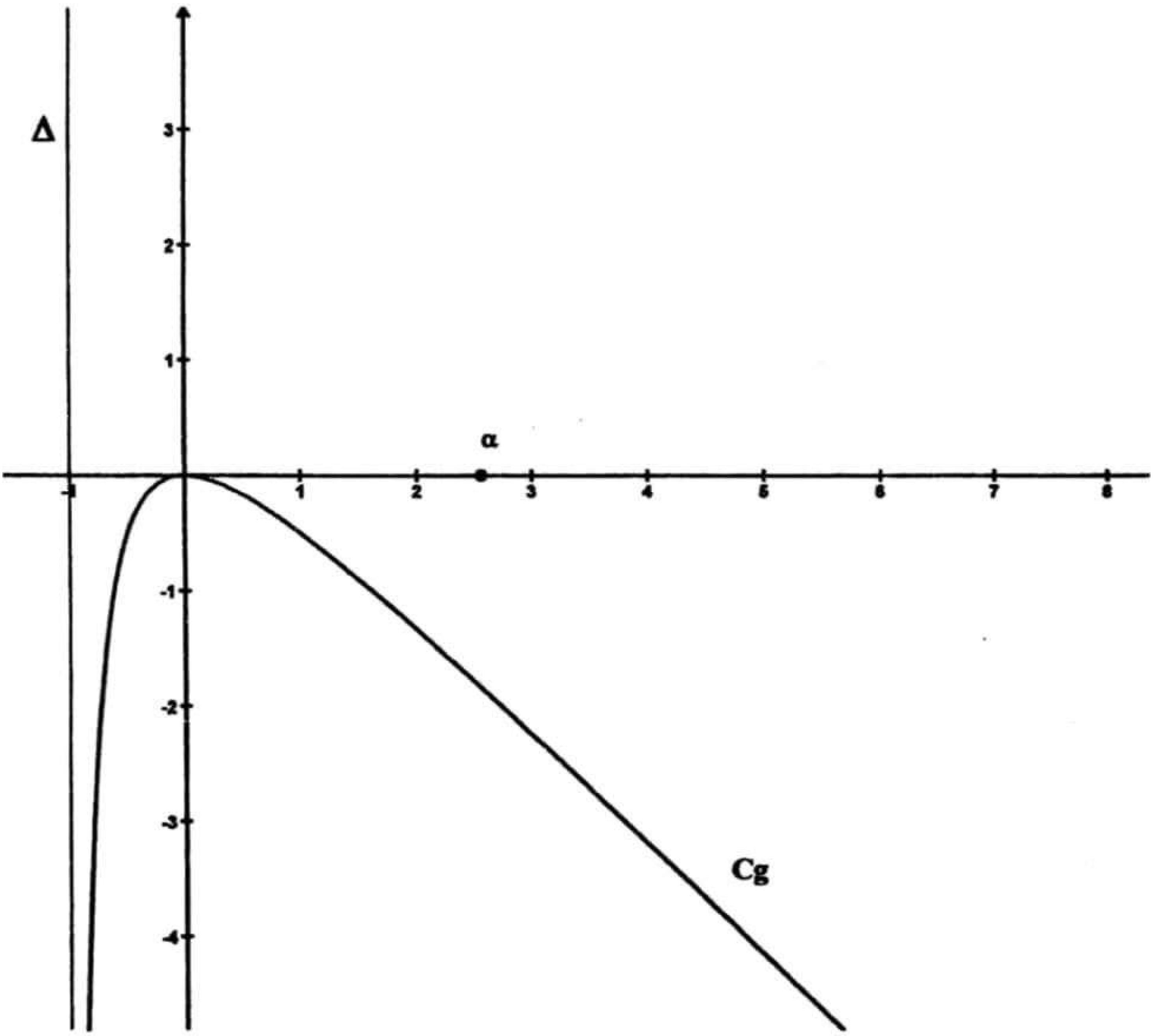
et Cf sa courbe représentative de dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : ....

Exercice 4



Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = -2x + x\ln(x+1)$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(x+1)$.

b) Le tableau ci-dessous indique la variation de la **fonction dérivée** f' de f.

Le réel α vérifie $f'(\alpha) = 0$.

x	-1		α		$+\infty$
f' (x)	‖	↗	0	↗	

Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]-1,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3) Dans **l'annexe ci-jointe (page 4)**, on a tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe C_g de la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = \frac{-x^2}{x+1}$, la droite $\Delta : x = -1$ et on a placé le réel α.

a) Vérifier que $\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$

b) En déduire que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

c) Construire la point P d'abscisse α de la courbe $\mathcal{C}_f$.

4) a) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points que l'on déterminera.

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

5) a) Vérifier que pour tout $x > -1$ on a : $g(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$.

b) Montrer que $\int_0^\alpha g(x)\,dx = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln(\alpha+1)$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, monter que :

$$\int_0^\alpha x\ln(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1) + \frac{1}{2}\int_0^\alpha g(x)\,dx.$$

d) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $\mathcal{A} = \frac{3\alpha^3 - \alpha^2 + 4}{4(\alpha+1)}$.

Exercice 2 (5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que la matrice A est inversible.

b) Calculer $A \times B$. En déduire la matrice inverse A^{-1} de la matrice A.

2) On considère le système (S) : $\begin{cases} 4x + 2y + z = -8 \\ y + z = 2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$ où x, y et z sont des réels.

a) Donner l'écriture matricielle du système (S).

b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).

3) Soit l'application f définie par $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$; où $z \in \mathbb{C}$ et a, b et c sont des réels.

a) Déterminer a, b et c sachant que : $f(2) = f(1 - i) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$.

4) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = 1 - i$.

a) Montrer que le triangle OAB est rectangle en B.

b) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

Montrer que le quadrilatère $OBAC$ est un carré.

Exercice 3 (4 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $11x - 7y = 5$.

a) Vérifier que le couple $(10 , 15)$ est solution de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (F): $11x^2 - 7y^2 = 5$.

a) Montrer que si le couple (x, y) est une solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2\ [5]$.

b) Soient x et y deux entiers relatifs. Recopier et compléter les tableaux suivants :

Modulo5 ; x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo5 ; x^2 est congru à					

Modulo5 ; y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo5 ; $2y^2$ est congru à					

c) Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

d) En déduire que si le couple (x, y) est une solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

e) Montrer que si x et y sont des multiples de 5 , alors le couple (x, y) n'est pas une solution de (F).

Que peut-on conclure ?