LYCÉE DE TABARKA Prof : MERSANI IMED A.S : 2021-2022	**Sujet de révision N ° 11**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : 4 Heures	**Date : 2021-2022**

Exercice 1 (3.5 points)

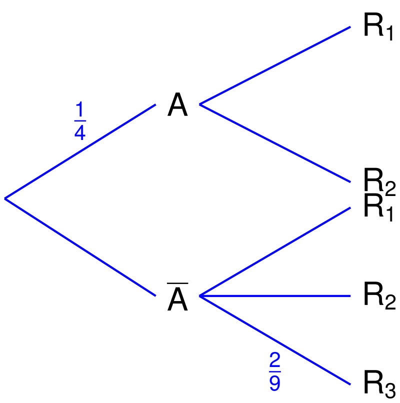
Pour préparer lexamen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :
La formation avec conduite accompagnée et la formation traditionnelle.
On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir lexamen du permis de conduire.
Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée; parmi elles, 50 ont réussi lexamen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

— 225 personnes se sont présentées à lexamen suite à une formation traditionnelle; parmi elles, 100 ont réussi lexamen à leur première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :
A : "la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée" .
R_1 : "la personne a réussi lexamen à la première présentation ".
R_2 : " la personne a réussi lexamen à la deuxième présentation ".
R_3 : " la personne a réussi lexamen à la troisième présentation ".
Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme dune fraction irréductible.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous associé à cette épreuve



2) a/ Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussit lexamen à sa deuxième présentation.

b/ Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi lexamen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

c/ La personne interrogée a réussi lexamen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité quelle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

3) On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle sest présentée à lexamen jusquà sa réussite.

a/ Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b/ Calculer lespérance mathématique de cette variable.

4) On choisit, successivement de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Calculer la probabilité p_n de lévènement F : " au moins une personne à réussi lexamen à la troisième tentative ".

b/ Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [AD] et [AJ].

1) Soit f la similitude directe qui envoie D sur O et C sur I.
Donner le rapport et l'angle de f.

2) **a/** Déterminer les images des droites (BC) et (BD) par f et en déduire f(B).

b/ Déterminer l'image du carré ABCD par f et en déduire f(A).

c/ Montrer que f(I) = K.

3) Soit Ω le centre de f.
Montrer que Ω est le point d'intersection des droites (BJ) et (CK) puis placer Ω.

4) Soit g la similitude indirecte qui envoie D sur O et C sur I.

a/ Montrer que $g = S_{(OI)} \circ f$ et déterminer g(B).

b/ Donner la forme réduite de g.

5) On suppose que AB = 4 et on munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{j} = \overrightarrow{AK}$.

a/ Donner l'écriture complexe de f puis montrer que l'affixe de Ω est $z_\Omega = \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$.

b/ Montrer que g a pour écriture complexe $z' = -\frac{1}{2}i\overline{z} + 4 + 2i$.

c/ Caractériser alors $g^{-1} \circ f$.

Exercice 3 (5 points)

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
A- On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2209x - 46y = 1$.

1) **a/** Vérifier que le couple $(1, 48)$ est une solution de (E).

b/ Résoudre alors, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E).

c/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} 2209x - 46y = 1 \\ x \equiv y \pmod 5 \end{cases}$.

d/ Soit l'entier naturel $N = \sum_{k=0}^{47} 47^k$.

Montrer que le couple $(47^{46}, N)$ est une solution de (E). En déduire le reste de N modulo 2209.

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{2209} \equiv 3 \pmod{47}$.

a/ Montrer que si x est une solution de (F) alors x et 47 sont premiers entre eux.

b/ Déduire que si x est une solution de (F) alors $x^{46} \equiv 1 \pmod{47}$.

c/ Montrer que si x est une solution de (F) alors $x \equiv 3 \pmod{47}$.

d/ Déduire l'ensemble des solutions de l'équation (F).

B- Soient p et q deux entiers naturels **premiers** vérifiant : $p < q$ et $10^{p+q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

1) **a/** Montrer que p et 10 sont premiers entre eux.

b/ En déduire que $10^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$ et $10^{q} \equiv 1 \pmod{p}$.

2) **a/** Montrer que $p-1$ est q sont premiers entre eux.

b/ Prouver que $p = 3$, en déduire que $10^{q+2} \equiv 1 \pmod{q}$.

3) **a/** En utilisant le théorème de Fermat, montrer que $10^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.

b/ En déduire que $q = 37$.

Exercice 4 (7.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = e^{-x} - \ln(1-x) - 2$ et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{x} + x - 1$.

a/ Dresser le tableau de variation de u.

b/ Calculer u(0) puis déduire le signe de u(x) sur $\mathbb{R}$.

2) **a/** Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = (1-x)\left[\frac{e^{-x}}{-x}\left(1 - \frac{1}{1-x}\right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x}\right] - 2$.

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter ce résultat graphiquement.

b/ Vérifier que pour tout $x < 1$, $f'(x) = \frac{e^{-x}u(x)}{1-x}$.

c/ Dresser le tableau de variation de f.

3) On a tracé dans l'annexe ci-jointe les courbes $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions h et g définies par $h(x) = e^{-x}$ et $g(x) = \ln(1-x) + 2$.
$\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives α et β avec $\alpha < \beta$.

a/ Justifier que α et β sont les seules solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $]-\infty, 1[$.

b/ Placer les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses α et β.

c/ Tracer $\mathscr{C}_f$ dans l'annexe.

4) Soit la fonction F définie sur $]-\infty, 1]$ par $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x < 1 \\ F(1) = -\frac{1}{e} \end{cases}$. On note Γ la courbe de F dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a :

$$\int_0^x \ln(1-t)\,dt = (x-1)\ln(1-x) - x$$

Déduire que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, on a : $F(x) = (1-x)(1+\ln(1-x)) - e^{-x}$.

b/ Montrer que F est continue à gauche en 1.

c/ Étudier la dérivabilité de F à gauche en 1 puis interpréter ce résultat graphiquement.

d/ Dresser le tableau de variation de F.

5) **a/** Montrer que le point O est un point d'inflexion de Γ.

b/ On a placé aussi dans l'annexe sur l'axe des ordonnées les points d'ordonnées $F(\alpha)$ et $F(\beta)$. Tarcer Γ dans l'annexe.

c/ On note $\mathcal{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie hachurée du plan.
Montrer que $\mathcal{A} = \beta e^{-\beta} - \alpha e^{-\alpha} + \alpha - \beta$.

6) On considère les suites réelles définies sur $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ par $W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k}{n}}$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1-\frac{k}{n}\right)$.

a/ Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n = W_n - U_n - 2 + \frac{2}{n}$.

b/ Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $W_n = \dfrac{e^{-1} - e^{-\frac{1}{n}}}{n\left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right)}$.

c/ Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 1 - \frac{1}{e}$.

7) **a/** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in \left\{0, 1, 2, ..., n-2\right\}$, on a :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(1-t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{k}{n}\right).$$

b/ En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n} - 1 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

c/ Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{e}$.

8) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $V_n = \sqrt[n]{\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}}$.
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $U_n = \ln(V_n)$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

NOM :..PRÉNOM :..NŘ :............