



### Exercice 1

Une urne contient quatre boules rouges numérotées 0, 1, 1, 2, trois boules blanches numérotées 0, 1, 2 et deux boules vertes numérotées 0, 2.

1) On tire simultanément trois boules. Calculer la probabilité des événements suivants :

- a)  $A$  : « Obtenir trois boules rouges ».
- b)  $B$  : « Obtenir une seule boule rouge et une seule boule numérotée 1.
- c)  $C$  : « Obtenir une seule boule numérotée 1 sachant que les trois boules tirées sont rouges.

2) On lance une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir face est le double d'obtenir pile.

- \* Si on obtient face on tire successivement et avec remise trois boules.
- \* Si on obtient pile on tire successivement et sans remise trois boules.

On considère les événements suivants :

$F$  : « Obtenir face »

$D$  : « Les boules sont tri couleurs »

- a) Calculer  $p(F)$
- b) Calculer  $p(D/F)$  et  $p(F/D)$

### Exercice 2

Un sac contient 12 boules indiscernables au toucher : 7 sont rouges parmi les quelles 3 portent le numéro 1 et 4 portent le numéro 2. 5 sont blanches parmi les quelles 2 portent le numéro 1 et 3 portent le numéro 2.

A) On tire au hasard et simultanément deux boules du sac

- 1) Préciser l'univers  $\Omega$  et calculer son cardinal.
- 2) Déterminer la probabilité des événements suivants :

- $A$  : « Les deux boules sont de la même couleur ».
- $B$  : « Les deux boules portent le même numéro ».
- $C$  : « Au moins une des deux boules porte le numéro 1 ».

B) On tire au hasard une boule :

- \* Si elle est blanche portant le numéro 2 ; elle n'est pas remise dans le sac et on tire une deuxième boule.
- \* Si elle n'est pas blanche portant le numéro 2 ; elle est remise dans le sac et on tire une deuxième boule

On considère les événements suivants :

- $E$  : « La première boule tirée est blanche portant le numéro 2 ».
- $F$  : « La deuxième boule tirée est blanche ».

1) Modéliser la situation par un arbre pondérée.

2) Calculer  $p(E)$ ,  $p(F / E)$ , et  $p(F / \overline{E})$ .

3) Calculer  $p(F)$ .

4) Calculer  $p(E / F)$ .

### Exercice 3

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue  $n$  tirages ( $n \in \mathbb{N}$ ) successifs d'une boule en respectant la règle suivante :

- \* Si la boule tirée est rouge on la remet dans l'urne.
- \* Si la boule tirée est blanche on ne la remet pas dans l'urne

1) Dans cette question  $n = 3$

Pour chaque entier  $k \in \{1, 2, 3\}$  on note  $E_k$  l'événement : « Seule la  $k^{\text{ème}}$  boule tirée est blanche »  
par exemple  $E_2 = R_1 \cap B_2 \cap R_3$  c'est-à-dire : la première est rouge ( $R_1$ ), la deuxième est blanche ( $B_2$ ) et la troisième est rouge ( $R_3$ ).

a) Montrer que la probabilité de l'événement  $E_1$  est  $p(E_1) = \frac{8}{75}$

b) Calculer  $p(E_2)$  et  $p(E_3)$ . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles

c) En déduire que  $p(E) = \frac{182}{675}$  avec :  $E$  : « Une seule boule est blanche parmi les trois tirées »

d) Sachant que l'événement  $E$  est réalisé, chercher la probabilité pour que la boule blanche tirée soit obtenue au 1<sup>er</sup> tirage

2) On effectue maintenant  $n$  tirages,  $n \geq 2$ .

a) Déterminer en fonction de  $n$ , la probabilité  $p_n$  d'avoir au moins une boule blanche parmi les  $n$  boules tirées

b) Déterminer la plus petite valeur de  $n$  pour que  $p_n \geq 0,99$  ?

### Exercice 4

Une urne  $U_1$  contient 3 boules blanches et 3 boules rouges.

Une urne  $U_2$  contient 2 boules blanches et 4 boules rouges.

Un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées 1, 1, 0, 0, 0, 0.

On lance une fois le dé :

- \* Si la face supérieure du dé est marquée 1, on tire simultanément 3 boules de  $U_1$
- \* Si la face supérieure du dé est marquée 0, on tire successivement avec remise 2 boules de  $U_2$

Soient les événements  $A$  : « obtenir 1 sur la face supérieure du dé ».

$B$  : « obtenir 0 sur la face supérieure du dé » et  $R$  : « obtenir une seule boule rouge »

1) a) Calculer  $p(A)$ ,  $p(B)$ ,  $p(R/A)$  et  $p(R/B)$

b) En déduire  $p(R)$

2) On a constaté qu'une boule est rouge, qu'elle est la probabilité pour que le tirage se fait de  $U_1$

### Exercice 5

Un magasin vend 1000 pochettes en cuir parmi lesquelles certaines sont défectueuses. Ces pochettes sont fabriquées par trois usines  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  selon le tableau suivant

	Usine $U_1$	Usine $U_2$	Usine $U_3$
Nombre de pochettes	200	350	450
Pourcentage de pochettes défectueuses	5%	4%	2%

On choisit au hasard une pochette de ces 1000 pochettes et on considère les événements suivants :

$A$  : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine  $U_1$  ».

$B$  : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine  $U_2$  ».

$C$  : « La pochette choisie est fabriquée par l'usine  $U_3$  ».

$D$  : « La pochette choisie est défectueuse ».

1) Modéliser la situation par un arbre pondérée.

2) a) Prouver que  $p(D \cap A) = \frac{1}{100}$

b) Calculer les probabilités suivantes :  $p(D \cap B)$ ,  $p(D \cap C)$  et  $p(D)$

3) Sachant que la pochette choisie n'est pas défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle soit fabriquée par l'usine  $U_1$  ?

4) La pochette est vendue à 50 Dinar si elle est produite par l'usine  $U_1$ , à 60 Dinar si elle est produite par l'usine  $U_2$  et à 80 Dinar si elle est produite par l'usine  $U_3$ .

Une réduction de 30 % est faite sur le prix de chaque pochette défectueuse.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au prix final d'une pochette choisie au hasard.

a) Montrer que les valeurs de  $X$  sont 35, 42, 50, 56, 60 et 80.

b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

### Exercice 6

Une classe est formée de 10 bons élèves et de 20 moyens

1) On tire au hasard et simultanément 3 copies d'un devoir de cette classe

Calculer la probabilité des événements suivants :

$A_1$  : « les copies tirées sont des copies de bons élèves ».

$A_2$  : « une et une seule copie est d'un bon élève ».

2) On tire au hasard successivement et sans remise 3 copies d'un devoir de cette classe

Calculer la probabilité des événements  $A_1$  et  $A_2$

3) La probabilité pour qu'un bon élève fasse une bonne épreuve de mathématique au baccalauréat est de 0,7

La probabilité pour qu'un élève moyen fasse une bonne épreuve de mathématique au baccalauréat est de 0,4

On prend au hasard une copie de l'épreuve de mathématique et on considère les événements suivants :

$B$  : « la copie prise est une bonne copie ».

$C$  : « la copie provient d'un bon élève ».

a) Calculer  $p(C)$  ;  $p(B/C)$

b) Calculer  $p(B)$

c) On prend une copie et on constate qu'elle est bonne ; qu'elle est la probabilité pour qu'elle provienne d'un bon élève ?

### Exercice 7

Deux éleveurs  $E_1$  et  $E_2$  produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois.

\* 10% des petits poissons de l'éleveur  $E_1$  meurent entre l'âge de deux et trois mois, 75% deviennent rouges et les restants deviennent gris.

\* 5% des petits poissons de l'éleveur  $E_2$  meurent entre l'âge de deux et trois mois, 65% deviennent rouges et les restants deviennent gris.

Une animalerie achète les petits poissons à l'âge de deux mois 60% de chez l'éleveur  $E_1$  et 40% de chez l'éleveur  $E_2$ .

on considère les événements suivants :

$S$  : « le petit poisson a survécu à l'âge de trois mois »

$R$  : l'événement « le poisson devient rouge »

$G$  : l'événement « le poisson devient gris »

1) Modéliser la situation par un arbre pondérée.

2) Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie ( c'est-à-dire à l'âge de deux mois).

a) Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est : 0.92.

b) Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c) Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois , quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage.

3) L'enfant a acheté cinq poissons, quelle est la probabilité qu'au bout d'un mois au moins un de ses poissons devient rouge.

### Exercice 8

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs  $F_1$  ;  $F_2$  et  $F_3$

Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.

La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur  $F_1$  le tiers par le fournisseur  $F_2$  et le reste par le fournisseur  $F_3$

Une étude statistique a montré que :

\* 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur  $F_1$  ont un défaut ;

\* 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur  $F_2$  ont un défaut ;

\* sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

1) On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

On considère les événements  $F_1$  ;  $F_2$  ;  $F_3$  et  $D$  suivants :

\*  $F_1$  : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur  $F_1$  »

\*  $F_2$  : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur  $F_2$  »

\*  $F_3$  : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur  $F_3$  »

\*  $D$  : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

- \*  $F_1$  : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur  $F_1$  »
- \*  $F_2$  : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur  $F_2$  »
- \*  $F_3$  : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur  $F_3$  »
- \*  $D$  : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.

Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.

b) Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur  $F_1$  et présente un défaut.

c) Calculer la probabilité de l'évènement  $F_2 \cap D$ .

d) En déduire la probabilité de l'évènement  $F_3 \cap D$ .

e) Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur  $F_3$ , quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2) L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.

On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

a) Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

b) Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

### Exercice 9

Une équipe de football participe chaque année à deux tournois l'un concerne la coupe et l'autre concerne le championnat.

La probabilité pour que cette équipe gagne le championnat est de 0,4, celle que cette équipe gagne la coupe quand elle a gagné le championnat est de 0,7 et la probabilité que cette équipe gagne la coupe quand elle n'a pas gagné le championnat est de 0,3.

On considère les évènements suivants :

B : « L'équipe gagne le championnat »

C : « L'équipe gagne la coupe »

1) a) Donner un arbre pondéré qui illustre les données ci-dessus.

b) Calculer la probabilité pour que cette équipe ne gagne ni le championnat ni la coupe.

c) Calculer la probabilité pour que cette équipe gagne la coupe.

2) La fédération de football consacre 200 milles dinars pour l'équipe qui remporte le championnat et 100 milles dinars pour l'équipe qui remporte la coupe.

Quel est le revenu moyen de cette équipe ?

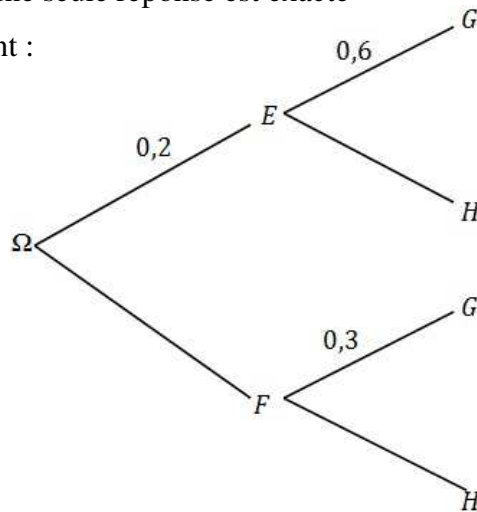
3) Cette équipe participe 5 années successives à ces deux tournois, le résultat de chaque année est indépendant des résultats des autres années.

Calculer la probabilité pour que cette équipe remporte au moins deux fois le doublé : coupe et championnat.

### Exercice 10

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte

1) On considère l'arbre pondéré suivant :



- a)  $p(F/H) = 0,7$       b)  $p(F/H) = 0,56$       c)  $p(F/H) = 0,875$

2) La durée de vie  $X$ , exprimé en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.

La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à :

- a)  $e^{-4}$       b)  $1 - 0,4e^{-4}$       c)  $1 - e^{-4}$

3) Une variable aléatoire  $X$  a pour loi de probabilité:

$x_i$	1	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Alors l'écart type de  $X$  est égale à :

- a)  $\frac{3}{2}$       b) 2      c)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

### Exercice 11

Un site archéologique propose deux types de visite (guidée ou non guidée). Chaque visiteur peut utiliser son appareil photographique en payant un supplément. Une étude statistique a montré que :

- \* 70% des visiteurs choisissent la visite guidée.
- \* 18% des visiteurs choisissent la visite non guidée et payent le supplément.
- \* Parmi les visiteurs ayant choisi la visite guidée, 80% payent le supplément.

On choisit un visiteur au hasard et on note les événements suivants :

G : « Le visiteur choisit la visite guidée. »

S : « Le visiteur paye le supplément. »

1) a) Calculer  $p(G)$ ,  $p(S \cap \bar{G})$  et  $p(S / \bar{G})$ .

b) Montrer que  $p(S) = 0,74$ .

2) La visite non guidée coûte 15 dinars, la visite guidée coûte 25 dinars et le supplément revient à 10 dinars.

Soit  $X$  l'aléa numérique égal à la dépense du visiteur en dinars.

a) Donner la loi de  $X$ .

b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

3) Un groupe de 20 visiteurs arrive sur le site. On suppose que les choix des visiteurs pour le type de visite et le paiement du supplément sont indépendants.

Calculer la probabilité pour qu'au moins deux visiteurs dépensent 25 dinars.

### Exercice 12

Un sondage effectué récemment dans un lycée à propos de l'élimination du bonus de 25% pour les candidats à l'examen du baccalauréat donne les résultats suivants :

- 65% des personnes interrogées sont contre l'élimination du bonus de 25%.
- Parmi les personnes qui sont contre cette élimination, 70% sont des élèves passables.
- 52,5% des personnes interrogées sont des élèves passables

❖ On note  $C$  l'évènement : « l'élève interrogé est contre l'élimination »

❖ On note  $P$  l'évènement : « l'élève interrogé est passable »

1.) Construire un arbre pondéré et donner les probabilités  $P(C)$ ,  $P(P/C)$  et  $P(P)$

2.) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit passable et soit pour cette élimination.

3.) On interroge un élève passable. Quelle est la probabilité qu'il soit contre l'élimination du bonus de 25%?

4.) On choisit au hasard 5 personnes parmi celles qui ont été interrogées lors du sondage.

(On suppose que les choix des 5 personnes sont indépendants les uns des autres).

Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 2 qui soient pour l'élimination et soit passable?

### Exercice 13

Une usine fabrique en série un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'usine pouvait présenter deux types de défaut :

Un défaut de soudure avec une probabilité égale à : 0,08

Un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à : 0,15

Le contrôle a montré que les deux défauts sont indépendants et que la probabilité pour qu'un composant électronique ait les deux défauts est de 0,05

Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) Déterminer la probabilité qu'un article fabriqué par l'usine soit défectueux.

2) Un commerçant passe une commande de 10 articles à l'usine. Soit  $X$  la variable aléatoire qui à cet ensemble de 10 articles associe le nombre d'articles défectueux. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . Calculer  $V(X)$ .

### Exercice 14

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques.

La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

1) Sachant que  $p(X > 10) = 0,286$ , montrer que  $\lambda = 0,125$  au centième près.

Dans la suite de l'exercice on prendra  $\lambda = 0,125$ .

2) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 années, qu'elle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

4) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5) Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

### Exercice 15

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , avec  $\lambda > 0$ .

1) Déterminer  $\lambda$ , arrondi à  $10^{-2}$  près, pour que  $p(X > 6) = 0,3$ .

Pour la suite de l'exercice, on prendra  $\lambda = 0,2$ .

2) À quel instant  $t$ , à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3) Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est  $e^{-0,4}$ .

4) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à  $10^{-2}$  près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5) On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

### Exercice 16

La durée de vie d'un réfrigérateur, exprimée en années, jusqu'à survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ .

1) Déterminer  $\lambda$  arrondi à  $10^{-2}$  près, pour que la probabilité qu'un réfrigérateur pris au hasard ne tombe pas en panne au cours des six premières années soit égale à 0,3. Pour la suite de l'exercice on prend :  $\lambda = 0,06$

2) A quel instant  $t$ , à un mois près, la probabilité qu'un réfrigérateur tombe en panne pour la première fois est-elle de : 0,45 ?

3) Montrer que la probabilité qu'un réfrigérateur n'ait pas eu de panne au cours des quinze premières années est de : 0,6.

4) Sachant qu'un réfrigérateur n'a pas eu de panne au cours des dix premières années, qu'elle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de quinze ans

5) on considère un lot de 10 réfrigérateurs fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un réfrigérateur qui n'ait pas eu de panne au cours des cinq premières années