LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE 2019/2020	**Bac blanc 1** **Mathématiques** **Durée : 3 heures**
$4^{ème}$ **Sciences 3**	**Mr. Salah Hannachi**

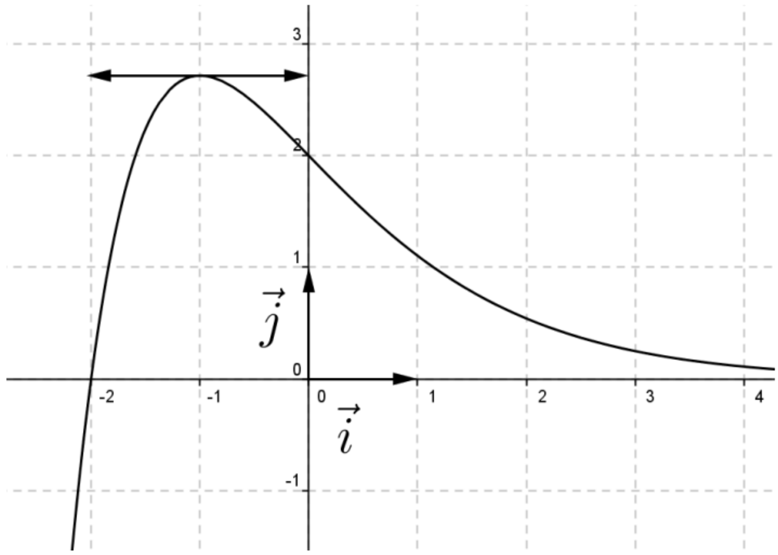
Le sujet comporte quatre exercices répartis en trois pages

EXERCICE 1 : 5 points

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f solution de l'équation différentielle (E): $y' + y = e^{-x}$ et sa tangente au point d'abscisse (-1)

-La courbe(C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$

-L'axes des abscisses est une asymptote à la courbe (C)



1) Par lecture graphique déterminer

a) $f(0)$ *et* $f'(-1)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) a)Montrer que $f'(0) = -1$

b) En déduire une équation de la tangente à (C) point d'abscisse 0

3) a)Montrer que $f(-1) = e$

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

4) a) Montrer que la fonction $u : x \longmapsto xe^{-x}$ est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$

c) Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $(g - u)$ est solution de (E_0).

d) En déduire que pour tout réel x, on a : $f(x) = (x+2)e^{-x}$

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de [-1,+∞[sur un intervalle J qu'on précisera. (On note f^{-1} sa fonction réciproque)

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle $[-1,+\infty[$.

c) Montrer que la suite (α_n) est croissante sur IN^* et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

EXERCICE 2 : 6 points

On donne les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $b = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $c = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

1) Vérifier que $a^2 + b^2 = 0$.

2) Vérifier que $\bar{c}.(a+b) = 2$. En déduire que $a + b = c$

3) On donne dans C l'équation $(E) : z^2 - cz + \frac{c^2}{2} = 0$ et l'équation (E') : $z^2 - b\sqrt{2}.z - a^2 = 0$

a) Montrer que le nombre complexe a est une solution de (E)

b) Déduire que b est la deuxième solution de (E).

c) Montrer que $\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2 - c\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right) + \frac{c^2}{2} = -i\left(z^2 - b\sqrt{2}.z - a^2\right)$

d) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équations (E').

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$,on donne les points

I, A et C d'affixes respectives i , a^2 et c

a) Construire les points I et A. (On prendra 3cm comme unité graphique)

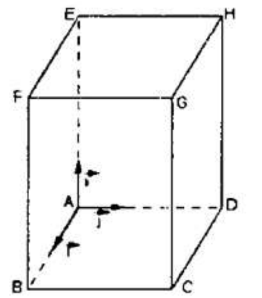
b) Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}}\left(i + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = i$ puis déduire que $c = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(a^2 - i\right) + i$

c) Montrer que IAC est un triangle équilatéral direct.

d) Déduire une construction du point C

EXERCICE 3 : 3 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$.



1) Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE}$ est égal à :

a) $-8\vec{k}$ b) $-8\vec{i}$ c) $-8\vec{j}$

2) Soit P le plan (FHC). La droite (BD) est :

a) Strictement parallèle à P b) Perpendiculaire à P c) Contenue dans P

3) Le produit mixte $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right)$ est égal à :

a) 0 b) -24 c) 24

4) L'intersection de la sphère S de centre A et de rayon 4 avec le plan Q d'équation cartésienne $y = 3$ est le cercle :

a) de centre C et de rayon $\sqrt{7}$. b) de centre D et de rayon $\sqrt{7}$. c) de centre D et de rayon 4.

EXERCICE 4 : ***6 points***

Dans la figure ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = (ax+b)^2.e^x$, où $a > 0$ et $b < 0$.

La courbe (C') admet une asymptote d'équation : y =0 au voisinage de $(-\infty)$ et une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ de direction celle de l'axe $(O,\vec{j})$.

I/ 1) A l'aide des valeurs graphiques de $f'(0)$ et $f'(-1)$, montrer que $a = 1$ et $b = -1$

2) **Par une lecture graphique :**

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la courbe (C) de f admet deux points d'inflexion A et B.

II/ 1) Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

2) Vérifier que $f(x) - f'(x) = (2-2x)e^x$. En déduire la position de (C) par rapport à (C').

3) Tracer (C) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend $\alpha = -1-\sqrt{2}$ et $\beta = -1+\sqrt{2}$)

III/ Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C), (C') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

IV/ On pose $u_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$ pour tout $n \in IN^*$.

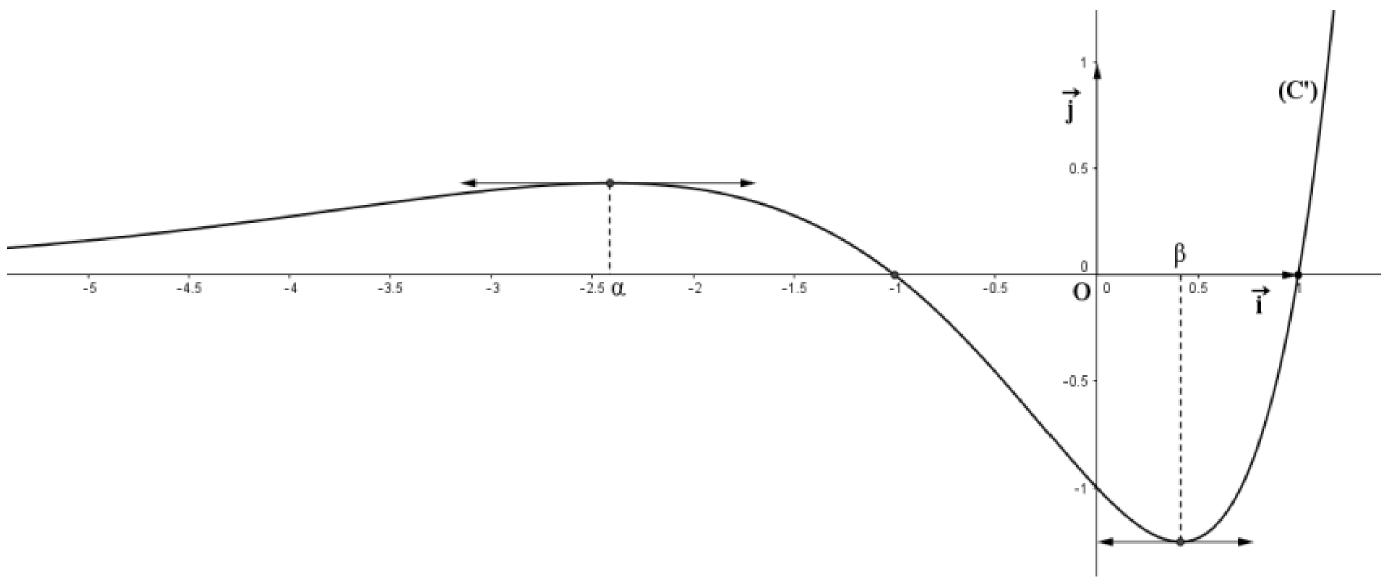
1) Donner la valeur du terme u_1.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0 \ \forall\, n \in IN^*$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que : $u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n \ \ \forall\, n \in IN^*$.

4) Montrer que pour tout $\in IN^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$



Bonne chance