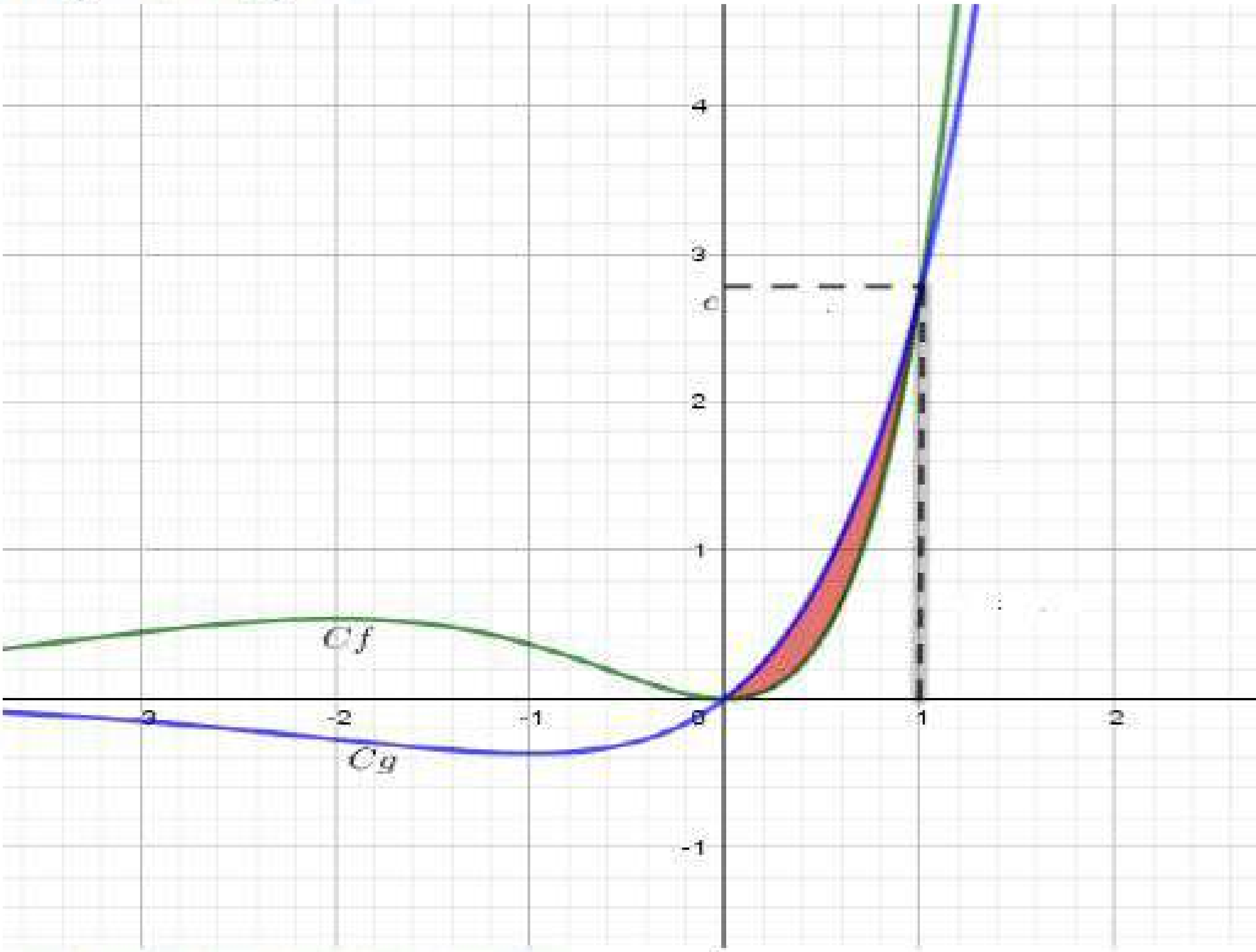
Exercice N°4(3 points)

Soit la suite U_n définie par $U_n = \int_0^1 x^{n+1}e^x dx$

1) En utilisant une intégration par partie calculer U_0.
2) Montrer que la suite U est décroissante.
3) On a représenté Cf et Cg ci-dessous dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

   où $f(x) = x^2e^x$ et $g(x) = xe^x$



4) a- Résoudre graphiquement $g(x) = f(x)$

   a- Comparer f et g sur l'intervalle $[0;1]$.

   b- Déterminer La valeur de la partie en couleur grise sur la figure ci-dessus (vous pouvez calculer U_1).

2) Montrer que pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$; $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{2x^2}$

3) Etudier alors le tableau des variations de f.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\dfrac{1}{2}x$, que peut-on déduire ?

5) Montrer que $f(\alpha)=-\alpha+\dfrac{2}{\alpha}$ puis donner un encadrement $f(\alpha)$.

6) Tracer alors Cf.(on prendra $\alpha=1.15$)

7) Soit la fonction $h(x) = -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}(1+2\ln|x|)$ ou x est un réel non nul

   a- Montrer h est une fonction impaire.

   b- Vérifier si x est strictement positif on aura $h(x) = f(x)$

   c- Déduire alors une construction de Ch où Ch est la courbe représentative de le même repère

8) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les axes x= 1 , x=2

   a- Hachurer la partie A

   b- Vérifier que $\dfrac{1}{2}$ $(\ln x)^2$ est une primitive de de $\dfrac{\ln x}{x}$.

   c- Déterminer la valeur de A .

__Exercice N°3(4 points)__

On considère l'équation (E) :11x-7y=5 où x et y sont des entiers relatifs .

1) Justifiant que (E) admet au moins des solutions dans $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.

2) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de (E) .

3) Résoudre alors (E).

4) On considère l'équation (F) $11x^2-7y^2=5$ où x et y sont des entiers relatifs.

   a- Démontrer que si le couple (x ;y) est une solution de (F) alors $x \equiv 2y^2\,[5]$

   b- Soient x et y des entiers relatifs .Recopier et compléter les deux tableaux suivants.

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5.

   c- En déduire que si le couple (x ;y)est solution de (F) alors x et y sont multiples de 5.

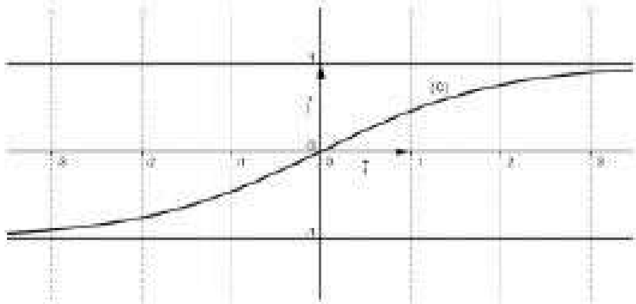
   d- Démontrer que si x et y sont multiple de 5 alors le couple (x ;y) n'est pas solution de (F) .Que peut-on en déduire pour l'équation (F)

Lycée Utique -BIZERTE	Devoir de synthèse N°2	A.S 2020-2021
BAC info	JELASSI Adel	Durée : 3h

Exercice N°1(5 points)

La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ une fonction

f définie sur IR par : $f(x)=\frac{ae^x+b}{e^x+1}$ où a et b sont deux réels. Les droites d'équations : $y=1$ et $y=-1$ sont des asymptotes à (C) respectivement au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. (L'unité graphique : 2cm)



1) a) A l'aide d'une lecture graphique déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) En déduire que : a=1 et b=−1.

2) Montrer que la fonction f est impaire.

3) a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)=-1+\frac{2e^x}{e^x+1}$

b) Calculer, en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations : x=0 et x=1.

c) En déduire, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d'équation y=1 et les droites d'équations x=0 et x=1.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$; pour tout x de J.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et Déterminer le signe de $(f^{-1})'(0)$.

Exercice N°2(6 points)

A) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par g(x)= $4\ln x+x^2-2$.

1) Calculer g'(x) puis déduire son tableau de variation (on doit calculer les limites au bornes de son domaine de définition)

2) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α puis vérifier que $1.1\prec\alpha\prec1.2$

3) Déduire le tableau de signe de g.

B) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par f(x) = $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}(1+2\ln x)$

et Cf sa courbe représentative de dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

4 On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{\sqrt{e}}(x-e)$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction g'

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

a Montrer que g realise un bijection de$]\,0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b Calculer $g(e)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x > 0$

c En déduire la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la tangente T .

d En déduire que $A(e,0)$ est un point d'inflexion à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

5 Dans la figure de l'annexe jointe, on donne la courbe de la fonction logarithme népérien

a Vérifier que le point $C(0,\sqrt{e}) \in T$

b Placer les points $A(e,0)$, $B\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$ et $C(0,\sqrt{e})$ dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

c Tracer dans l'annexe la tangente T et $(\mathscr{C}_f)$.

6 On donne le réel $\lambda \in]0,e[$.

On désigne par $\mathcal{A}_\lambda$ (en ua) l'aire de la partie du plan limitée la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites $x=\lambda$ et $x=e$

a À l'aide d'une intégration par partie montrer que $\mathcal{A}_\lambda = \dfrac{-2}{3}(\lambda - \lambda\ln\lambda)\sqrt{\lambda} + \dfrac{4}{9}(e\sqrt{e} - \lambda\sqrt{\lambda})$

b Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathcal{A}_\lambda$.

Exercice 2

6.5 pts

Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe representative dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1 (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2 (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) Dresser le Tableau de variation de f

(c) Montrer que l'equation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

Vérifier que $-1 < \alpha < \dfrac{-1}{2}$.

(d) Vérifier que $\alpha = -\ln(2)$.

3 Tracer $(\mathscr{C}_f)$ la courbe de f dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

4 (a) Montrer que f admet une fonction reciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

(b) Construire $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1} dans le même repére $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

5 (a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x + 1} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) Vérifier que $F(x) = 3\ln(e^x + 1) - x$ est une primitive de f.

6 Soit λ un réel strictement inférieur à -1.

On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = -1$ et $x = \lambda$.

(a) Montrer que $A(\lambda) = 3\ln(e^\lambda + 1) - \lambda - 3\ln(1 + \dfrac{1}{e}) - 1$.

(b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

Exercice 3

7.5 pts

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1 (a) Vérifie que pour tout $x > 0$, $f(x) = \sqrt{x}(1 - 2\ln\sqrt{x})$

(b) Montrer que f est continue à droite en 0.

(c) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et interpréter graphiquement le résultat.

3 (a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}(1 + \ln x)$

(b) Dresser le tableau de variation de f.

(c) Soit le point $A(e, 0)$ et T la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en A

Montrer que l'équation de la tangente T est : $y = \dfrac{-1}{\sqrt{e}}(x - e)$

Lycée cité Ibn khaldoun Tunis 2 Lycée Ben Guerdane 1 Ali Dhahbi ~ Neji Abdelkarim A.SC : 2023 - 2024	**DEVOIR DE SYNTHESE N°3**	
	Epreuve : **MATHEMATIQUES**	Classes : 4ème Sc de l'informatique
	Durée : 3 h	Coefficient : 3

Le sujet comporte 4 pages numérotées 1/4 à 4/ 4

Exercice 1

6 pts

Une entreprise produit et commercialise des puces GPS .
Elle dispose de deux centres de production **A** et **B** qui produisent respectivement **60**% et **40**% des puces électroniques .
Après leur sortie des centres de production , ces puces sont regroupées dans les laboratoires de contrôle de qualité; où elles sont testées pour savoir si elles sont commercialisables . L'expérience à montré que :

- **80**% des puces sortant du centre de production **A** sont commercialisables
- **75**% de l'ensemble des puces produites sont sélectionnées à l'issue de ce test comme étant commercialisables .

1 Un technicien de contrôle de qualité prélève une puce au hasard pour lui faire passer le test .
On notera les évènements suivants :
A « la puce est issue du centre de production **A** »
B « la puce est issue du centre de production **B** »
T « la puce est sélectionnée à l'issue du test comme étant commercialisable » .

- **a** Décrire la situation par un arbre pondéré.
- **b** Déterminer $P(\mathbf{T})$.
- **c** Sachant que la puce est issue du centre de production **B** . Calculer la probabilité que cette puce soit commercialisable .

2 Sachant que la puce est commercialisable . Calculer la probabilité que cette puce soit issue du centre de production **A** .

3 Pour faire les tests, les techniciens reçoivent les puces par lots de **10** .
On note **X** la variable aléatoire qui à chaque lot choisi au hasard associe le nombre de puces commercialisables qu'il contient.

- **a** Donner la loi de probabilité de **X**.
- **b** Calculer la probabilité qu'au moins une puce du lot ne soit pas commercialisable.
- **c** On envisage de modifier le nombre de puces par lot . (on note **n** le nombre de puces).
Déterminer la taille minimale d'un lot pour que la probabilité que ce lot contienne au moins une puce non commercialisable soit supérieure à $\mathbf{0,98}$.

4 On estime que la durée de vie de ces puces GPS suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \mathbf{0.14}$.
On note **Y** la variable aléatoire qui à une puce choisie au hasard associe sa durée de vie en années

- **a** Calculer la probabilité pour que la durée de vie de puce choisie soit supérieure à **5** ans .
- **b** Une voiture est équipé d'un dispositif qui utilise une de ces puces et qui a été achetée neuve il y a **4** ans . quelle est la probabilité que la puce ne depasse pas **2** ans de plus ?