Nhập môn
Phân tích độ phức tạp thuật toán

Chủ đề 5: Các công cụ toán học để phân tích độ phức tạp thuật toán

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nội dung chủ đề 5

- Tổng quan về các công cụ toán học dùng để phân tích thuật toán
- Phương pháp xác suất
- Phương pháp hàm sinh
- Các kết quả toán học về hoán vị
- Các kết quả toán học hướng bài toán

Công cụ toán học để phân tích thuật toán

- Phân hoạch, phân lớp, đếm, tính tổng, chặt miền giá trị
  → Đã minh họa một phần (ở chủ đề trước)
- Quy nạp và công thức truy hồi
  → Từ bản chất lặp của hầu hết các thuật toán
- Áp dụng lý thuyết xác suất
  → Từ bản chất ngẫu nhiên của dữ liệu
- Phương pháp hàm sinh
  → Công cụ để đếm, giải công thức truy hồi, tính trung bình và phương sai
- Tính chất của các hoán vị
  →Bản chất tự nhiên của các thuật toán có thao tác đổi chỗ
- Tính chất toán học hướng bài toán
  → Những thuật toán quá đặc thù, không thể dùng công cụ chung

Thường được áp dụng lồng trong các phương pháp khác

Áp dụng lý thuyết xác suất

- Chỉ dùng cho các thao tác có số lần thực hiện thay đổi ngẫu nhiên theo dữ liệu
- Số lần thực hiện của thao tác (tùy thuộc theo phân bố dữ liệu) được qui về một biến ngẫu nhiên X
- Xác định phạm vi của X: $0 \leq X < m$

  → X là biến ngẫu nhiên rời rạc $\in \{0, 1, \ldots, m\text{-}1\}$
- Đặt $p_i = \mathbf{P}(X = i)$ thì $p_i = 0 \text{ khi } i \geq m$. Tính và khảo sát các đại lượng:
  - Kỳ vọng **E**(X) đặc trưng cho số lượng thao tác
  - Phương sai **Var**(X) đặc trưng cho độ lệch kỳ vọng

Ví dụ minh họa

- Xem minh họa trực tiếp trên bảng…
- Khảo sát các ví dụ, giới hạn số phần tử n của mảng bằng với giá trị cụ thể
  - Ví dụ về thuật toán tìm kiếm tuần tự
  - Ví dụ về thuật toán tìm phần tử lớn nhất
  - Ví dụ về thuật toán kiểm tra dãy tăng
- Nêu vấn đề khó khăn khi khảo sát trường hợp tổng quát…
- Liên hệ với khảo sát thực nghiệm…

Nội dung chủ đề 5

- ☐ Tổng quan về các công cụ toán học dùng để phân tích thuật toán
- ☐ Phương pháp xác suất
- ☐ Phương pháp hàm sinh
- ☐ Các kết quả toán học về hoán vị
- ☐ Các kết quả toán học hướng bài toán

Định nghĩa hàm sinh

- Cho dãy số $\{a_n\}$. Nếu chuỗi số $\Sigma a_n x^n$ luôn hội tụ khi $|x| < R$, với R là số thực dương thì hàm
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
được gọi là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$.
- Ví dụ:
  - Hàm $f(x) = 1/(1 - x)$ là hàm sinh của dãy 1, 1, 1, … với bán kính hội tụ là R = 1.
  - Hàm sinh của dãy $\{2^n\}$ là $g(x) = 1 / (1 - 2x)$ với bán kính hội tụ là R = ½.

Xem giải thích và bình luận trên bảng…

Tính chất của hàm sinh (1)

Giả sử $f(x)$, $g(x)$ lần lượt là hàm sinh của các dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ với bán kính hội tụ tương ứng là R_1, R_2. Khi đó ta có:

a) $h(x) = f(x) + g(x)$ là hàm sinh của dãy $\{a_n + b_n\}$ với bán kính hội tụ $R = \min(R_1, R_2)$.

b) c$f(x)$ (c là hằng số) là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$ với cùng một bán kính hội tụ R_1 của hàm $f(x)$.

c) $h(x) = f(x)g(x)$ là hàm sinh của dãy số $\{c_n\}$ với bán kính hội tụ $R = \min(R_1, R_2)$, trong đó $\{c_n\}$ là dãy nhân định nghĩa như sau:

$$c_0 = a_0 b_0 \; ; \; c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \; ; \; c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \; ;$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \; ; \; c_4 = \cdots$$

Tính chất của hàm sinh (2)

d) Hệ quả tính chất trên khi dãy $\{b_n\}$ là 1, 1, …
Hàm $h(x) = f(x)/(1 - x)$ là hàm sinh của dãy:

$$c_0 = a_0 \;;\; c_1 = a_0 + a_1 \;;\; c_2 = a_0 + a_1 + a_2 \;;$$

$$c_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \;, \cdots$$

với bán kính hội tụ $R = \min(R_1, 1)$.

e) Đạo hàm $f'(x)$ là hàm sinh dãy $\{(n+1)a_{n+1}\}$ với cùng bán kính hội R_1 của hàm $f(x)$, tức là

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

Một số hàm sinh đặc biệt

- Một số hàm sinh có sẵn để dùng được thiết lập nhờ vào các tính chất hàm sinh
  - Tính chất nhân hàm sinh và hệ quả
  - Tính chất lấy đạo hàm của hàm sinh

  → Bảng tra cứu các hàm sinh thông dụng…
- Khi cần phải dùng hàm sinh khác

  → Tra cứu trong các tài liệu giải tích toán học

Ví dụ áp dụng:
Dùng hàm sinh như công cụ đếm

- Ví dụ về đếm bộ nghiệm nguyên
  - Bộ nghiệm 2 và 3 ẩn, liên hệ với phương pháp sơ cấp
  - Bộ nghiệm k ẩn
- Bài toán tháp Hà nội

Định nghĩa hàm sinh dãy xác suất

- Cho dãy số phân bố xác suất $\{p_n\}$, tức là ta có điều kiện $0 \leq p_k \leq 1$ và $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, khi đó hàm sinh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$$

gọi là một hàm sinh dãy xác suất.

- Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc tương ứng với dãy phân bô xác suất nói trên, nghĩa là ta có $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. Về mặt toán học thì hàm f có liên hệ mật thiết với biến ngẫu nhiên X.

Định lý hàm sinh dãy xác suất

Hai biến ngẫu nhiên X, Y có dãy phân bố xác suất tương ứng là $\{p_n\}$, $\{q_n\}$.

Gọi F, G là hàm sinh tương ứng của $\{p_n\}$, $\{q_n\}$.

a) Kỳ vọng của X là $Mean(X)$ =$Mean(F)$= $F'(1)$.

b) Phương sai của X là
$Var(X)$ = $Var(F)$ = $F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2$.

c) Hàm $H(x) = F(x)G(x)$ cũng là hàm sinh của dãy xác suất nhân của $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$. Hơn nữa: $Mean(FG)$ = $Mean(F)$ + $Mean(G)$,

$Var(FG)$ = $Var(F)$ + $Var(G)$.

Áp dụng hàm sinh dãy xác suất

- Áp dụng cho các trường hợp thuật toán đơn giản trên mảng với n = 3, 4 phần tử

  → So sánh với cách tính cụ thể
- Áp dụng cho các trường hợp tổng quát

  → Những thuật toán tiêu biểu…
- Xem minh họa trực tiếp trên bảng với các ví dụ tiêu biểu…

Nội dung chủ đề 5

- Tổng quan về các công cụ toán học dùng để phân tích thuật toán
- Phương pháp xác suất
- Phương pháp hàm sinh
- Các kết quả toán học về hoán vị
- Các kết quả toán học hướng bài toán

Định nghĩa hoán vị

- Cho S là một tập hợp gồm n đối tượng phân biệt, một hoán vị của n đối tượng nầy là một song ánh từ S vào S.
- Xét S={1, 2, 3, 4}. Ánh xạ $\varphi : S \rightarrow S$ định nghĩa bởi $\varphi(1)=3$, $\varphi(2)=4$, $\varphi(3)=1$, $\varphi(4)=2$ là một hoán vị của S.
- Ký hiệu
  - Ma trận 2 dòng → Đơn giản hóa thành 1 dòng
  - Ký hiệu chu trình
  - Lưu ý việc nhầm ký hiệu

Vài tính chất cơ bản

- Nếu S có n phần tử thì có tất cả $n!$ hoán vị. Hàm $n!$ được xác định như sau: 0!=1 và

  $n!$ =1 x 2 x 3 x … x n nếu n nguyên dương.
- Hàm $n!$ tăng rất nhanh, giá trị 10! là 3.628.800 (khoảng 3,6 triệu).
- Công thức xấp xỉ Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
- Ước lượng: $n! = O(n^n)$ và $log(n!) = O(n\, log(n))$.
- Dễ dàng lũy thừa μ của mỗi số nguyên tố p trong $n!$ (p^μ là ước số của $n!$ nhưng $p^{\mu+1}$ thì không)

$$\mu(p) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$$

Nghịch thế

Định nghĩa và ví dụ

- Cho $\sigma = a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$ là một hoán vị của tập Ω = {1, 2, …, n}. Một nghịch thế của hoán vị σ là một cặp (a_i, a_j) thỏa điều kiện $i < j$ và $a_i > a_j$.
- **Ví dụ**. Hoán vị 3 1 4 2 của tập {1, 2, 3, 4} có 3 nghịch thế là (3, 1), (3, 2), (4, 2).
- Số lượng nghịch thế của mỗi hoán vị n phần tử liên quan đến nhiều thuật toán trên mảng n phần tử.

Bảng nghịch thế của một hoán vị

- Cho $\sigma = a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$ là một hoán vị của tập Ω = {1, 2, …, n}. Với mỗi $i \in \Omega$, gọi b_i là số lượng phần tử j ở bên trái i trong σ mà thỏa $j > i$.
- Khi đó dãy $b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$ được gọi là bảng nghịch thế của hoán vị σ.
- Ý nghĩa của bảng nghịch thế

  → Xem minh họa trực tiếp trên bảng…

Ví dụ về bảng nghịch thế

- Với n = 5. Xem hoán vị $\sigma = 5\ 1\ 3\ 2\ 4$ của tập hợp {1, 2, 3, 4, 5}. Ta có:

  Left(1) = {5}; b_1=1

  Left(2) = {5, 3}; b_2=2

  Left(3) = {5}; b_3=1;

  Left(4) = {5}; b_4=1;

  Left(5)=∅; b_5=0;

- Do đó bảng nghịch thế của hoán vị nầy là: 1 2 1 1 0.

Tính chất tương ứng song ánh

Mệnh đề:

Có sự tương ứng song ánh giữa tập hợp các bảng nghịch thế và tập hợp các hoán vị.

a) Với mỗi hoán vị σ và b_i trong bảng nghịch thế của σ, ta có $0 \le b_i \le n - i$. Cụ thể với $i = 1$ hay $i = n$ ta có:

b_n = 0 và b_1 = số lượng phần tử bên trái 1 trong σ.

b) Mỗi hoán vị có một bảng nghịch thế duy nhất và ngược lại bất kỳ dãy $b = b_1\ b_2 \ldots b_n$ với $0 \le b_i \le n - i$, tồn tại duy nhất một hoán vị mà có bảng nghịch thế là b.

Điều nầy có nghĩa là tồn tại phép tương ứng 1-1 giữa tập các hoán vị của tập hợp n phần tử và tập các bảng nghịch thế của các hoán vị đó.

Ví dụ minh họa

- Xem dãy b = 1 2 1 1 0, ta sẽ xây dựng một hoán vị của tập {1, 2, 3, 4, 5} mà có bảng nghịch thế là b.
  - Viết số 5
  - Do b_4=1 nên số 4 được chèn vào sau số 5: 5 4
  - Do b_3=1 nên số 3 được chèn vào sau số 5: 5 3 4
  - Do b_2=2 nên số 2 được chèn vào sau số 3: 5 3 2 4
  - Do b_1=1 nên số 1 được chèn vào sau số 5: 5 1 3 2 4

Số nghịch thế trung bình của một hoán vị

- Xét một hoán vị σ có bảng nghịch thế là $b_1\ b_2 \ldots b_n$, số các nghịch thế có trong σ là $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Giá trị nầy thay đổi tùy theo hoán vị σ.
- **Mệnh đề**: Giá trị trung bình của số lượng các nghịch thế của một hoán vị n phần tử là $n(n - 1)/4$.
- Diễn giải về ý nghĩa…

Ví dụ

- với n=3, ta có 6 hoán vị sau đây:
  - 1 2 3: 0 nghịch thế
  - 1 3 2: 1 nghịch thế
  - 2 1 3: 1 nghịch thế
  - 2 3 1: 2 nghịch thế
  - 3 1 2: 2 nghịch thế
  - 3 2 1: 3 nghịch thế
- Giá trị trung bình:
  (0+1+1+2+2+3)/6 = 9/6 = 3/2.

Chứng minh mệnh đề về số nghịch thế trung bình

Xem minh họa trực tiếp trên bảng…

- Áp dụng phương pháp hàm sinh

  → Bài toán đếm bộ nghiệm của hệ

- Bình luận về cách chứng minh
- Có thể dùng phương pháp sơ cấp?

CÂU HỎI

&

THẢO LUẬN