

Nhập môn

Phân tích độ phức tạp thuật toán

Chủ đề 5: Các công cụ toán học để phân tích độ phức tạp thuật toán



KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nội dung chủ đề 5

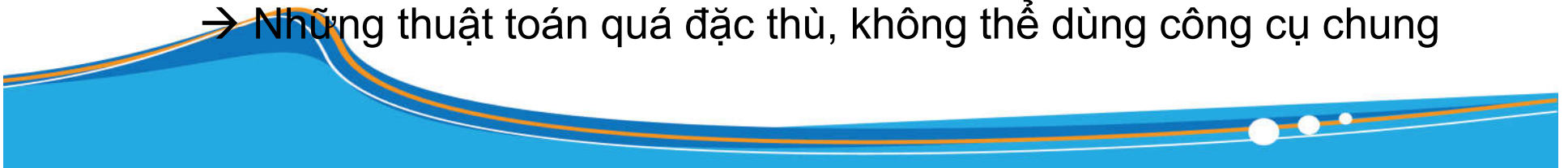
- ☐ Tổng quan về các công cụ toán học dùng để phân tích thuật toán
- ☐ Phương pháp xác suất
- ☐ Phương pháp hàm sinh
- ☐ Các kết quả toán học về hoán vị
- ☐ Các kết quả toán học hướng bài toán



Công cụ toán học để phân tích thuật toán

- ☐ Phân hoạch, phân lớp, đếm, tính tổng, chặt miền giá trị
 - Đã minh họa một phần (ở chủ đề trước)
- ☐ Quy nạp và công thức truy hồi
 - Từ bản chất lặp của hầu hết các thuật toán
- ☐ Áp dụng lý thuyết xác suất
 - Từ bản chất ngẫu nhiên của dữ liệu
- ☐ Phương pháp hàm sinh
 - Công cụ để đếm, giải công thức truy hồi, tính trung bình và phương sai
- ☐ Tính chất của các hoán vị
 - Bản chất tự nhiên của các thuật toán có thao tác đổi chỗ
- ☐ Tính chất toán học hướng bài toán
 - Những thuật toán quá đặc thù, không thể dùng công cụ chung

Thường được áp dụng lồng trong các phương pháp khác

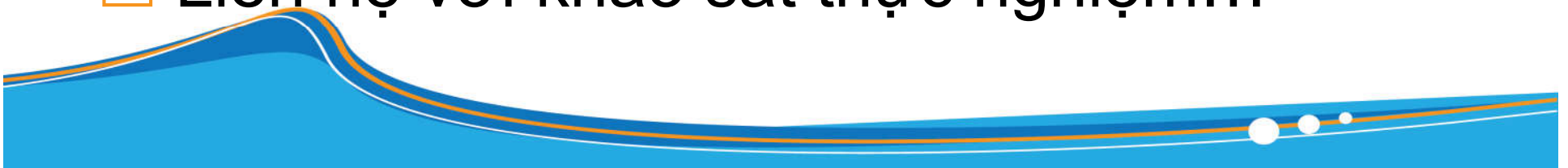


Áp dụng lý thuyết xác suất

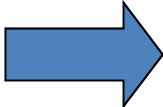
- Chỉ dùng cho các thao tác có số lần thực hiện thay đổi ngẫu nhiên theo dữ liệu
- Số lần thực hiện của thao tác (tùy thuộc theo phân bố dữ liệu) được quy về một biến ngẫu nhiên X
- Xác định phạm vi của X : $0 \leq X < m$
→ X là biến ngẫu nhiên rời rạc $\in \{0, 1, \dots, m-1\}$
- Đặt $p_i = \mathbf{P}(X = i)$ thì $p_i = 0$ khi $i \geq m$. Tính và khảo sát các đại lượng:
 - Kỳ vọng $\mathbf{E}(X)$ đặc trưng cho số lượng thao tác
 - Phương sai $\mathbf{Var}(X)$ đặc trưng cho độ lệch kỳ vọng

Ví dụ minh họa

- ☐ Xem minh họa trực tiếp trên bảng...
- ☐ Khảo sát các ví dụ, giới hạn số phần tử n của mảng bằng với giá trị cụ thể
 - ☐ Ví dụ về thuật toán tìm kiếm tuần tự
 - ☐ Ví dụ về thuật toán tìm phần tử lớn nhất
 - ☐ Ví dụ về thuật toán kiểm tra dãy tăng
- ☐ Nêu vấn đề khó khăn khi khảo sát trường hợp tổng quát...
- ☐ Liên hệ với khảo sát thực nghiệm...



Nội dung chủ đề 5

- ☐ Tổng quan về các công cụ toán học dùng để phân tích thuật toán
- ☐ Phương pháp xác suất
-  ☐ Phương pháp hàm sinh
- ☐ Các kết quả toán học về hoán vị
- ☐ Các kết quả toán học hướng bài toán



Định nghĩa hàm sinh

- Cho dãy số $\{a_n\}$. Nếu chuỗi số $\sum a_n x^n$ luôn hội tụ khi $|x| < R$, với R là số thực dương thì hàm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

được gọi là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$.

- Ví dụ:

- Hàm $f(x) = 1/(1 - x)$ là hàm sinh của dãy $1, 1, 1, \dots$ với bán kính hội tụ là $R = 1$.
- Hàm sinh của dãy $\{2^n\}$ là $g(x) = 1 / (1 - 2x)$ với bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{2}$.

Xem giải thích và bình luận trên bảng...



Tính chất của hàm sinh (1)

Giả sử $f(x)$, $g(x)$ lần lượt là hàm sinh của các dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ với bán kính hội tụ tương ứng là R_1 , R_2 . Khi đó ta có:

- a) $h(x) = f(x) + g(x)$ là hàm sinh của dãy $\{a_n + b_n\}$ với bán kính hội tụ $R = \min(R_1, R_2)$.
- b) $cf(x)$ (c là hằng số) là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$ với cùng một bán kính hội tụ R_1 của hàm $f(x)$.
- c) $h(x) = f(x)g(x)$ là hàm sinh của dãy số $\{c_n\}$ với bán kính hội tụ $R = \min(R_1, R_2)$, trong đó $\{c_n\}$ là dãy nhân định nghĩa như sau:

$$c_0 = a_0 b_0 ; c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 ; c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 ;$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 ; c_4 = \dots$$



Tính chất của hàm sinh (2)

- d) Hệ quả tính chất trên khi dãy $\{b_n\}$ là $1, 1, \dots$
Hàm $h(x) = f(x)/(1 - x)$ là hàm sinh của dãy:

$$c_0 = a_0 ; c_1 = a_0 + a_1 ; c_2 = a_0 + a_1 + a_2 ;$$

$$c_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n , \dots$$

với bán kính hội tụ $R = \min(R_1, 1)$.

- e) Đạo hàm $f'(x)$ là hàm sinh dãy $\{(n+1)a_{n+1}\}$
với cùng bán kính hội R_1 của hàm $f(x)$, tức là
- $$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$



Một số hàm sinh đặc biệt

- Một số hàm sinh có sẵn để dùng được thiết lập nhờ vào các tính chất hàm sinh
 - ▣ Tính chất nhân hàm sinh và hệ quả
 - ▣ Tính chất lấy đạo hàm của hàm sinh
 - Bảng tra cứu các hàm sinh thông dụng...
- Khi cần phải dùng hàm sinh khác
 - Tra cứu trong các tài liệu giải tích toán học



Ví dụ áp dụng: Dùng hàm sinh như công cụ đếm

- Ví dụ về đếm bộ nghiệm nguyên
 - Bộ nghiệm 2 và 3 ẩn, liên hệ với phương pháp sơ cấp
 - Bộ nghiệm k ẩn
- Bài toán tháp Hà nội



Định nghĩa hàm sinh dãy xác suất

- Cho dãy số phân bố xác suất $\{p_n\}$, tức là ta có điều kiện $0 \leq p_k \leq 1$ và $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, khi đó hàm sinh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$$

gọi là một hàm sinh dãy xác suất.

- Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc tương ứng với dãy phân bố xác suất nói trên, nghĩa là ta có $p_k = \mathbf{P}(X = k)$. Về mặt toán học thì hàm f có liên hệ mật thiết với biến ngẫu nhiên X .



Định lý hàm sinh dãy xác suất

Hai biến ngẫu nhiên X, Y có dãy phân bố xác suất tương ứng là $\{p_n\}, \{q_n\}$.

Gọi F, G là hàm sinh tương ứng của $\{p_n\}, \{q_n\}$.

a) Kỳ vọng của X là $Mean(X) = Mean(F) = F'(1)$.

b) Phương sai của X là

$$Var(X) = Var(F) = F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2.$$

c) Hàm $H(x) = F(x)G(x)$ cũng là hàm sinh của dãy xác suất nhân của $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$. Hơn nữa: $Mean(FG) = Mean(F) + Mean(G)$,

$$Var(FG) = Var(F) + Var(G).$$

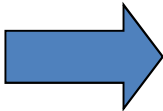


Áp dụng hàm sinh dãy xác suất

- ☐ Áp dụng cho các trường hợp thuật toán đơn giản trên mảng với $n = 3, 4$ phần tử
→ So sánh với cách tính cụ thể
- ☐ Áp dụng cho các trường hợp tổng quát
→ Những thuật toán tiêu biểu...
- ☐ Xem minh họa trực tiếp trên bảng với các ví dụ tiêu biểu...



Nội dung chủ đề 5

- ☐ Tổng quan về các công cụ toán học dùng để phân tích thuật toán
- ☐ Phương pháp xác suất
- ☐ Phương pháp hàm sinh
-  ☐ Các kết quả toán học về hoán vị
- ☐ Các kết quả toán học hướng bài toán



Định nghĩa hoán vị

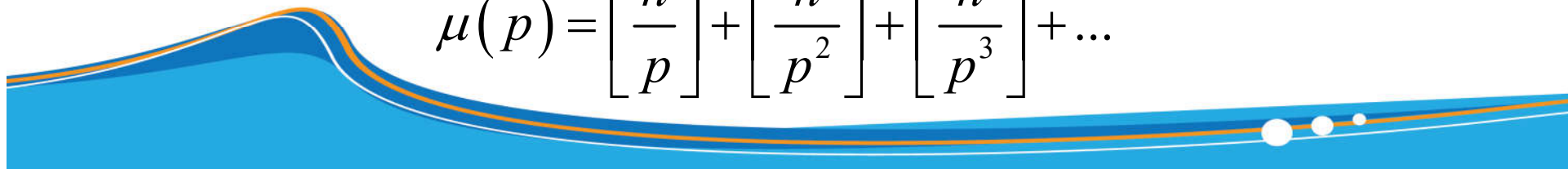
- Cho S là một tập hợp gồm n đối tượng phân biệt, một hoán vị của n đối tượng này là một song ánh từ S vào S .
- Xét $S=\{1, 2, 3, 4\}$. Ánh xạ $\varphi : S \rightarrow S$ định nghĩa bởi $\varphi(1)=3$, $\varphi(2)=4$, $\varphi(3)=1$, $\varphi(4)=2$ là một hoán vị của S .
- Ký hiệu
 - Ma trận 2 dòng \rightarrow Đơn giản hóa thành 1 dòng
 - Ký hiệu chu trình
 - Lưu ý việc nhầm ký hiệu

Vài tính chất cơ bản

- Nếu S có n phần tử thì có tất cả $n!$ hoán vị. Hàm $n!$ được xác định như sau: $0!=1$ và

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$
 nếu n nguyên dương.
- Hàm $n!$ tăng rất nhanh, giá trị $10!$ là 3.628.800 (khoảng 3,6 triệu).
- Công thức xấp xỉ Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- Ước lượng: $n! = O(n^n)$ và $\log(n!) = O(n \log(n))$.
- Dễ dàng lũy thừa μ của mỗi số nguyên tố p trong $n!$ (p^μ là ước số của $n!$ nhưng $p^{\mu+1}$ thì không)

$$\mu(p) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$



Nghịch thế

Định nghĩa và ví dụ

- Cho $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$ là một hoán vị của tập $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Một nghịch thế của hoán vị σ là một cặp (a_i, a_j) thỏa điều kiện $i < j$ và $a_i > a_j$.
- **Ví dụ.** Hoán vị 3 1 4 2 của tập $\{1, 2, 3, 4\}$ có 3 nghịch thế là $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$.
- Số lượng nghịch thế của mỗi hoán vị n phần tử liên quan đến nhiều thuật toán trên mảng n phần tử.

Bảng nghịch thế của một hoán vị

- Cho $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$ là một hoán vị của tập $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Với mỗi $i \in \Omega$, gọi b_i là số lượng phần tử j ở bên trái i trong σ mà thỏa $j > i$.
- Khi đó dãy $b_1 b_2 \dots b_n$ được gọi là bảng nghịch thế của hoán vị σ .
- Ý nghĩa của bảng nghịch thế
→ Xem minh họa trực tiếp trên bảng...



Ví dụ về bảng nghịch thế

- Với $n = 5$. Xem hoán vị $\sigma = 5 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4$ của tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ta có:

$$\text{Left}(1) = \{5\}; b_1=1$$

$$\text{Left}(2) = \{5, 3\}; b_2=2$$

$$\text{Left}(3) = \{5\}; b_3=1;$$

$$\text{Left}(4) = \{5\}; b_4=1;$$

$$\text{Left}(5)=\emptyset; b_5=0;$$

- Do đó bảng nghịch thế của hoán vị này là: 1 2 1 1 0.



Tính chất tương ứng song ánh

Mệnh đề:

Có sự tương ứng song ánh giữa tập hợp các bảng nghịch thế và tập hợp các hoán vị.

- a) Với mỗi hoán vị σ và b_i trong bảng nghịch thế của σ , ta có $0 \leq b_i \leq n - i$. Cụ thể với $i = 1$ hay $i = n$ ta có:

$$b_n = 0 \text{ và } b_1 = \text{số lượng phần tử bên trái 1 trong } \sigma.$$

- b) Mỗi hoán vị có một bảng nghịch thế duy nhất và ngược lại bất kỳ dãy $b = b_1 b_2 \dots b_n$ với $0 \leq b_i \leq n - i$, tồn tại duy nhất một hoán vị mà có bảng nghịch thế là b .

Điều này có nghĩa là tồn tại phép tương ứng 1-1 giữa tập các hoán vị của tập hợp n phần tử và tập các bảng nghịch thế của các hoán vị đó.



Ví dụ minh họa

- Xem dãy $b = 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0$, ta sẽ xây dựng một hoán vị của tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ mà có bảng nghịch thế là b .
 - Viết số 5
 - Do $b_4=1$ nên số 4 được chèn vào sau số 5: 5 4
 - Do $b_3=1$ nên số 3 được chèn vào sau số 5: 5 3 4
 - Do $b_2=2$ nên số 2 được chèn vào sau số 3: 5 3 2 4
 - Do $b_1=1$ nên số 1 được chèn vào sau số 5: 5 1 3 2 4



Số nghịch thể trung bình của một hoán vị

- Xét một hoán vị σ có bảng nghịch thể là $b_1 b_2 \dots b_n$, số các nghịch thể có trong σ là $b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Giá trị này thay đổi tùy theo hoán vị σ .
- **Mệnh đề:** Giá trị trung bình của số lượng các nghịch thể của một hoán vị n phần tử là $n(n - 1)/4$.
- Diễn giải về ý nghĩa...



Ví dụ

□ với $n=3$, ta có 6 hoán vị sau đây:

1 2 3: 0 nghịch thế

1 3 2: 1 nghịch thế

2 1 3: 1 nghịch thế

2 3 1: 2 nghịch thế

3 1 2: 2 nghịch thế

3 2 1: 3 nghịch thế

□ Giá trị trung bình:

$$(0+1+1+2+2+3)/6 = 9/6 = 3/2.$$





Chứng minh mệnh đề về số nghịch thế trung bình

Xem minh họa trực tiếp trên bảng...

- ☐ Áp dụng phương pháp hàm sinh
 - Bài toán đếm bộ nghiệm của hệ
- ☐ Bình luận về cách chứng minh
- ☐ Có thể dùng phương pháp sơ cấp?



CÂU HỎI & THẢO LUẬN

