Chương IV

PHÂN TÍCH MARKOV VÀ ỨNG DỤNG

1. Các khái niệm cơ bản về xích Markov

1.1. Một số định nghĩa

Nhiều mô hình ngẫu nhiên trong Vận trù học, Kinh tế, Kĩ thuật, Dân số học, Di truyền học,... dựa trên cơ sở là quá trình Markov. Đặc biệt, hiện tại một lĩnh vực mới về Tin – Sinh học (*Bioinformatics*) chuyên nghiên cứu về gene ứng dụng rất mạnh các vấn đề của lí thuyết các quá trình Markov. Trong ngành Cơ điện hiện nay nhiều chuyên gia lí thuyết và thực hành cũng rất quan tâm tới quá trình Markov nói chung, cũng như các quá trình sinh–tử hay quá trình hồi phục nói riêng.

Ví dụ: Xét một hệ thống vật lí tiến triển theo thời gian. Tại thời điểm t = 0, hệ thống có thể rơi vào một trong ba trạng thái (hay vị trí) 1, 2 hoặc 3 một cách ngẫu nhiên. Kí hiệu X(0) là vị trí của hệ thống tại thời điểm t = 0, thì X(0) là một biến ngẫu nhiên, có thể nhận các giá trị 1 hoặc 2 hoặc 3 với các xác suất nhất định. Giả sử rằng căn cứ vào các kết quả quan sát hay nghiên cứu, chúng ta có bảng phân phối xác suất sau cho X(0):

Các giá trị của X(0)	1	2	3
Xác suất tương ứng	0,2	0,5	0,3

Tại các thời điểm tiếp theo, chẳng hạn, t = 1, 2, 3, … vị trí của hệ thống sẽ được mô tả bởi các biến ngẫu nhiên X(1), X(2), X(3), … với các bảng phân phối xác suất tương ứng. Dựa trên ví dụ này, chúng ta xét định nghĩa sau về quá trình ngẫu nhiên.

Định nghĩa 1

Xét một hệ thống vật lí (hay một hệ thống sinh thái, hệ thống dịch vụ,…) tiến triển theo thời gian. Gọi X(t) là vị trí (tình trạng) của hệ tại thời điểm t. Như vậy ứng với mỗi thời điểm t, X(t) chính là một biến ngẫu nhiên mô tả vị trí (tình trạng) của hệ thống. Quá trình $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là một *quá trình ngẫu nhiên.*

Tập hợp các vị trí có thể có của hệ gọi là *không gian trạng thái*. Không gian trạng thái được kí hiệu là S. Trong ví dụ trên, nếu giả sử rằng X(t) chỉ có thể nhận một trong ba giá trị 1, 2, 3 $\forall$t, thì S = {1, 2, 3}.

Giả sử trước thời điểm s, hệ đã ở trạng thái nào đó, còn tại thời điểm s, hệ ở trạng thái i. Chúng ta muốn đánh giá xác suất để tại thời điểm t (t >s), hệ sẽ ở trạng thái j. Nếu xác suất này chỉ phụ thuộc vào bộ bốn (s, i, t, j), tức là P[X(t) = j/X(s) = i] = p(s, i, t, j) là đúng $\forall$i, $\forall$j, $\forall$s, $\forall$t thì điều này có nghĩa là, sự tiến triển của hệ trong tương lai chỉ phụ thuộc vào hiện tại (tình trạng của hệ tại thời điểm s), và hoàn toàn độc lập với quá khứ (*tính không nhớ*). Đó chính là *tính Markov*. Lúc này quá trình ngẫu nhiên X(t) được gọi là *quá trình Markov*.

Trong ví dụ trên P[X(1) = 2/X(0) = 1] là xác suất có điều kiện của sự kiện X(1) = 2 (tại thời điểm t =1, hệ thống nằm tại vị trí 2) với điều kiện X(0) = 1 (tại thời điểm t = 0, hệ thống nằm tại vị trí 1). Nếu quá trình ngẫu nhiên có tính Markov thì xác suất này chỉ phụ thuộc vào tình trạng của hệ tại thời điểm s = 0 và hoàn toàn độc lập với các tình trạng của hệ trong quá khứ (trước thời điểm s = 0).

Định nghĩa 2

Nếu không gian trạng thái S gồm một số hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các trạng thái thì quá trình Markov X(t) được gọi là *xích Markov*. Lúc này, có thể kí hiệu S = {1, 2, 3,...}, tức là các trạng thái được đánh số. Hơn nữa, nếu tập các giá trị t không quá đếm được (chẳng hạn, t = 0, 1, 2,...) thì ta có xích Markov với *thời gian rời rạc*, hay xích Markov rời rạc. Nếu $t \in [0, \infty)$ thì ta có xích Markov với *thời gian liên tục*, hay xích Markov liên tục.

Định nghĩa 3

Xét một xích Markov. Nếu xác suất chuyển trạng thái p(s, i, t, j) = p(s+h, i, t+h, j),$\forall$i, $\forall$j, $\forall$s, $\forall$t và $\forall$h > 0, thì ta nói rằng xích Markov *thuần nhất theo thời gian*.

Đây là một khái niệm mới và sẽ được giải thích ngay sau đây trong mục 1.2. Ngoài ra với mục đích tìm hiểu bước đầu, trong các mục 1.2 và 1.3 chúng ta sẽ chỉ xét xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian. Ví dụ về xích Markov liên tục sẽ được xem xét trong mục 2.4 và 2.5.

1.2. Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

Trong mục này chúng ta đưa ra khái niệm về ma trận xác suất chuyển trạng thái của một xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian với không gian trạng thái gồm N phần tử. Trong trường hợp xích Markov rời rạc và thuần nhất có không gian trạng thái với số phần tử vô hạn đếm được, khái niệm về ma trận xác suất chuyển trạng thái sẽ được xây dựng một cách tương tự.

Ví dụ: Xét lại ví dụ đã có trong mục 1.1, nhưng với một cách minh họa khác trong lĩnh vực dịch vụ. Trong một khu phố 1000 dân (khách hàng) có 3 siêu thị là A, B, và C (A, B, C được coi là các vị trí 1, 2, 3 của hệ thống siêu thị này). Giả sử rằng, trong từng tháng mỗi khách hàng luôn trung thành với một siêu thị. Ngoài ra, cũng giả sử rằng trong tháng đầu số khách vào các siêu thị lần lượt là 200, 500 và 300; tức là có 20% khách hàng vào siêu thị A, 50% vào B và 30% vào C. Như vậy, có thể dự đoán rằng một khách hàng vào A với xác suất 0,2; vào B với xác suất 0,5 và vào C với xác suất 0,3. Để mô tả tình trạng phân chia thị phần trong tháng đầu (tháng 0) của hệ thống siêu thị trên, chúng ta thiết lập biến ngẫu nhiên X(0) với quy tắc: nếu khách hàng mua hàng ở siêu thị A thì đặt X(0)=1, ở siêu thị B thì đặt X(0) = 2, còn ở siêu thị C thì X(0) = 3. Lúc đó, X(0) có bảng phân phối xác suất sau:

Các giá trị của X(0)	1	2	3
Xác suất tương ứng	0,2	0,5	0,3

Kí hiệu $P[X(0) = 1] = \pi_1^{(0)}$, $P[X(0) = 2] = \pi_2^{(0)}$, $P[X(0) = 3] = \pi_3^{(0)}$, thì véc tơ $\Pi^{(0)} = [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \pi_3^{(0)}] = [0{,}2\ 0{,}5\ \ 0{,}3]$ được gọi là *véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm t = 0* hay *véc tơ phân phối ban đầu.* Các thành phần của $\Pi^{(0)}$ cho biết tỉ lệ phần trăm (%) khách hàng vào các siêu thị A, B và C.

Những tháng sau, ta giả sử xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng trước, vào lại A trong tháng sau luôn là 0,8; chuyển sang mua hàng ở B luôn là 0,1 và chuyển sang C luôn là 0,1. Xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị B tháng trước chuyển sang A luôn là 0,07; vào lại B luôn là 0,9 và chuyển sang C luôn là 0,03. Còn xác suất để một người khách, đã vào siêu thị C tháng trước chuyển sang A luôn là 0,083; chuyển sang B luôn là 0,067 và vào lại C luôn là 0,85. Lúc đó các xác suất chuyển của khách hàng được cho thông qua *ma trận xác suất chuyển trạng thái P* (còn gọi là *ma trận chuyển* sau một bước).

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix} = [p_{ij}]_{3\times 3}.$$

Để mô tả tình trạng phân chia thị phần trong tháng t (t = 1, 2, 3, …) của hệ thống siêu thị trên, có thể thiết lập biến ngẫu nhiên X(t) với quy tắc tương tự như khi thiết lập X(0): nếu khách hàng mua hàng ở siêu thị A thì đặt X(t) = 1, ở siêu thị B thì đặt X(t) = 2, còn ở siêu thị C thì X(t) = 3. Vấn đề đặt ra là X(t) có bảng phân phối xác suất như thế nào.

Trước hết ta đi tìm bảng phân phối xác suất cho X(1). Xét $p_{12} = P[(X(1) = 2/X(0) = 1] = 0{,}1$ là xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng 0 chuyển sang mua hàng ở siêu thị B trong tháng 1. Ngoài ra, $P[X(t+1) = 2/X(t) = 1] = 0{,}1\ \forall t$ là số tự nhiên, vì theo giả thiết của bài toán thì xác suất để một người khách, đã vào mua hàng ở siêu thị A tháng trước chuyển sang mua hàng ở B luôn là 0,1. Vậy p_{12} được gọi là *xác suất chuyển sau một bước* từ vị trí 1 sang vị trí 2, bởi vậy có thể dùng kí hiệu $p_{12}^{(1)}$ để chỉ rõ đây là xác suất chuyển sau một bước. Các phần tử p_{ij} $\forall i = 1, 2, 3$ và $\forall j = 1, 2, 3$ của ma trận P có ý nghĩa tương tự.

Dễ thấy rằng trong tháng 1 số khách hàng mua hàng tại siêu thị A là $200 \times 0{,}8 + 500 \times 0{,}07 + 300 \times 0{,}083 = 219{,}9$ (≈ 220); số khách hàng mua hàng tại siêu thị B là $200 \times 0{,}1 + 500 \times 0{,}9 + 300 \times 0{,}067 = 490{,}1$ (≈ 490); còn số khách hàng mua hàng tại siêu thị C sẽ là $200 \times 0{,}1 + 500 \times 0{,}03 + 300 \times 0{,}85 = 290$. Do tổng số khách hàng là 1000, nên X(1) có bảng phân phối xác suất sau:

Các giá trị của X(1)	1	2	3
Xác suất tương ứng	0,2199	0,4901	0,2900

Vậy véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm t = 1 là $\Pi^{(1)} = [\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \pi_3^{(1)}]$ cho biết tỉ lệ phần trăm khách hàng vào các siêu thị A, B và C trong tháng 1. Bằng phép tính ma trận cũng tìm được $\Pi^{(1)}$ như sau:

$$\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} \times P = [0{,}2\ 0{,}5\ 0{,}3] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

$$= [0{,}2199\ \ 0{,}4901\ \ 0{,}2900].$$

Tương tự có thể tìm được $\Pi^{(2)}$:

$$\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = [0{,}2199\ 0{,}4901\ 0{,}2900] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

$$=[0{,}234297\ \ 0{,}48251\ \ 0{,}283193].$$

Sau đây ta đi tìm ma trận xác suất chuyển trạng thái sau hai bước. Kí hiệu $p_{12}^{(2)}$ là xác suất chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2 sau hai bước. Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$p_{12}^{(2)} = P[X(2) = 2 / X(0) = 1] = P[X(1) = 1 / X(0) = 1] \times P[X(2) = 2 / X(1) = 1]$$

$$+ P[X(1) = 2 / X(0) = 1] \times P[X(2) = 2/X(1) = 2]$$

$$+ P[X(1) =3 / X(0) = 1] \times P[X(2) = 2 / X(1) = 3]$$

$$= p_{11}^{(1)}p_{12}^{(1)} + p_{12}^{(1)}p_{22}^{(1)} + p_{13}^{(1)}p_{32}^{(1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} p_{1k}^{(1)} p_{k2}^{(1)} = 0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}067 = 0{,}1767.$$

Một cách hoàn toàn tương tự, ta có xác suất chuyển từ vị trí i sang vị trí j sau hai bước là $p_{ij}^{(2)} = p_{i1}^{(1)}p_{1j}^{(1)} + p_{i2}^{(1)}p_{2j}^{(1)} + p_{i3}^{(1)}p_{3j}^{(1)} = \sum_{k=1}^{3} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(1)}$. Vậy ta có ma trận chuyển sau hai bước là:

$$P^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}]_{3\times 3} = P^{(1)} \times P^{(1)} = P \times P = P^2$$

$$=\begin{bmatrix}0,8 & 0,1 & 0,1\\ 0,07 & 0,9 & 0,03\\ 0,083 & 0,067 & 0,85\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0,8 & 0,1 & 0,1\\ 0,07 & 0,9 & 0,03\\ 0,083 & 0,067 & 0,85\end{bmatrix}.$$

Dễ thấy $\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)}\times P = \Pi^{(0)}\times P^2$. Tương tự, có thể chứng minh được $\Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} \times P^{(m)}$, trong đó $\Pi^{(n+m)}$ và $\Pi^{(n)}$ là các véc tơ phân phối tại các thời điểm t = m + n và t = n, còn $P^{(m)}$ là ma trận xác suất chuyển trạng thái sau m bước.

Do $P^{(m)} = [p_{ij}^{(m)}]_{3\times 3}$ nên P[X(m) = j / X(0) = i] = P[X(n + m) = j / X(n) = i] = P[X(n' + m) = j / X(n') = i] = $p_{ij}^{(m)}$, là xác suất chuyển từ vị trí i sang vị trí j sau m bước. Đặt n = s,
t = n+m và h = n' – n thì có ngay P[X(t) = j / X(s) = i] = P[X(t + h) = j / X(s + h) = i], hay p(s, i, t, j) = p(s + h, i, t + h, j) luôn đúng $\forall$s, $\forall$t, $\forall$h. Từ các phân tích trên đây và đối chiếu với các định nghĩa 1, 2 và 3 mục 1.1, ta thấy quá trình ngẫu nhiên X(t) với t = 0, 1, 2, … trong ví dụ này chính là *một xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian.*

Để khái quát hóa các khái niệm đã trình bày, chúng ta xét xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian X(t), t = 0, 1, 2, … với không gian trạng thái gồm N phần tử mà ta kí hiệu là S = {1, 2, …, N}.

Định nghĩa 1

Giả sử tại thời điểm t = n, X(n) cũng có thể nhận một trong N giá trị 1, 2,…, N với các xác suất tương ứng là $\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_N^{(n)}$ (với $\pi_1^{(n)} + \pi_2^{(n)} + \ldots + \pi_N^{(n)} = 1$) thì véc tơ $\Pi^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_N^{(n)}]$ được gọi là *véc tơ phân phối tại thời điểm t = n*. Với t = 0 ta có *véc tơ phân phối ban đầu* $\Pi^{(0)} = [\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \ldots, \pi_N^{(0)}]$.

Ma trận $P = [p_{ij}]_{N\times N}$, trong đó p_{ij} = p(t, i, t + 1, j) = P[X(t + 1) = j/X(t) = i] $\forall$t là *xác suất chuyển trạng thái từ vị trí i sang vị trí j sau một bước*, $\forall$i = 1, 2, …, N và $\forall$j = 1, 2, …, N, được gọi là *ma trận xác suất chuyển trạng thái* hay *ma trận chuyển* sau một bước.

Ví dụ: Tiếp tục xét ví dụ trên, trong đó đã tìm được $\Pi^{(1)}$ = [0,2199 0,4901 0,2900], $\Pi^{(2)}$ = =[0,234297 0,482510 0,283193]. Dễ thấy, các véc tơ phân phối xác suất $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \Pi^{(3)}$,... tại các thời điểm t = 1, 2, 3, … được tính theo công thức: $\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} \times P$, $\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = \Pi^{(0)} \times P^2$... và $\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times P = \Pi^{(0)} \times P^{n+1}$, $\forall$ n. Sau 21 bước (21 tháng), ta có $\Pi^{(21)}$ = [0,272257 0,455523 0,272220].

Các véc tơ phân phối (hay tỉ lệ phần trăm khách hàng vào các siêu thị A, B, C) sau 1, 2, 3,..., 21 tháng được cho trong bảng IV.1.

Vấn đề đặt ra là liệu $\Pi = \lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}$ có tồn tại không và nếu tồn tại thì được tìm bằng cách nào. Trong ví dụ này, chúng ta sẽ tìm được Π = [0,273 0,454 0,273], biểu thị cho tỉ lệ phần trăm cân bằng dừng (*stationary equilibrium*) số khách hàng vào các siêu thị A, B, C sau một thời gian đủ dài.

Cách tính Π

Xuất phát từ $\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times P$, cho qua giới hạn cả hai vế khi $n \to \infty$ ta có: $\Pi = \Pi \times P$, hay $\Pi \times (I - P) = 0$.

Do P là ma trận đặc biệt (ma trận chuyển) nên nó là ma trận suy biến. Khi viết lại dưới dạng hệ phương trình (3 ẩn, 3 phương trình) ta phải loại bớt một phương trình đi, và thêm vào hệ thức $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ và ràng buộc $\pi_k \geq 0$ (k = 1, 2, 3). Kí hiệu $x = \pi_1$, $y = \pi_2$ và $z = \pi_3$, ta sẽ có hệ:

$$\begin{cases} 0,2x - 0,07y - 0,083z = 0 \\ -0,1x + 0,1y - 0,067z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,273 \\ y = 0,454 \\ z = 0,273 \end{cases}$$

Vậy Π = [0,273 0,454 0,273].

Bảng IV.1. Tỉ lệ phần trăm khách hàng vào các siêu thị

Tháng	*A*	*B*	*C*
1	0.2199	0.4901	0.29
2	0.234297	0.48251	0.283193
3	0.2447183	0.476662631	0.27861905
4	0.2522664	0.472135676	0.2755979
5	0.2577373	0.46861381	0.27364893
6	0.2617056	0.465860633	0.27243373
7	0.2645868	0.463698194	0.27171505
8	0.2666806	0.461991958	0.27132742
9	0.2682041	0.460639762	0.27115613
10	0.269314	0.459563657	0.27112231
11	0.2701238	0.45870389	0.27117228
12	0.2707156	0.458014426	0.27126994
13	0.2711489	0.457459633	0.27139144
14	0.2714668	0.457011789	0.27152141
15	0.2717005	0.456649225	0.27165023
16	0.2718729	0.456354922	0.27177223
17	0.2720002	0.456115454	0.27188433
18	0.2720947	0.455920181	0.27198516
19	0.2721649	0.455760634	0.27207446
20	0.2722173	0.45563005	0.2721526
21	0.2722566	0.455523004	0.27222035

Định nghĩa 2

Xét xích Markov rời rạc và thuần nhất với ma trận chuyển $P = [p_{ij}]_{N\times N}$. Lúc đó, véc tơ phân phối xác suất $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N]$ thỏa mãn điều kiện $\Pi \times (I - P) = 0$ được gọi là *phân phối dừng* của xích Markov đã cho.

Có thể thấy ngay, phân phối dừng Π không phụ thuộc vào $\Pi^{(0)}$ mà chỉ phụ thuộc vào ma trận P.

Một cách toán học, ta nói *mô hình xích Markov rời rạc thuần nhất* chính là bộ ba $(X(t_n), S/\Pi, P)$. Áp dụng mô hình xích Markov để phân tích một vấn đề nào đó trong Kinh tế, Kĩ thuật, Sinh học,... được coi là việc *ứng dụng phân tích Markov.*

1.3. Các tính chất và định lí

Xét xích Markov rời rạc và thuần nhất với ma trận chuyển $P = [p_{ij}]_{N\times N}$. Có thể chứng minh được các tính chất và định lí sau:

Các tính chất

1/ $p^{(n+m)}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p^{(n)}_{ik}\, p^{(m)}_{kj}$ (đây là phương trình *Chapman–Kolmogorov*).

2/ $P^{(2)} = P \times P = P^2$, $P^{(n)} = P^n$ và $P^{(n+m)} = P^{(n)} \times P^{(m)}$.

3/ $\Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} \times P^{(m)}$.

Định lí

1/ Giả sử P là ma trận xác suất chuyển chính quy, tức là tồn tại chỉ số n_0, sao cho $\forall$ i, j, thì xác suất chuyển từ i đến j sau n_0 bước là một số dương: $p_{ij}^{(n_0)} > 0$. Khi đó tồn tại $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N > 0$, và $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_N = 1$ để cho $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, không phụ thuộc vào i.

Các số $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$ được tìm từ hệ phương trình

$$x_j = \sum_{k=1}^{N} x_k p_{kj},\ j = 1, 2, \ldots, N\,;\ x_j \geq 0\ \forall j \text{ và } \sum_{j=1}^{N} x_j = 1.$$

2/ Nếu có các số $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$ thoả mãn điều kiện $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_N = 1$ và $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, không phụ thuộc vào i, thì ma trận P là ma trận chính quy.

Lưu ý

Phân phối $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$ thoả mãn điều kiện $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_N = 1$ và $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, không phụ thuộc vào i, được gọi là phân phối giới hạn. Ngoài ra, nếu điều kiện $\pi_j > 0$, $\forall$j được thỏa mãn thì phân phối này được gọi là *phân phối Ergodic*. Có thể chứng minh được rằng, nếu phân phối giới hạn tồn tại thì đó là phân phối dừng (duy nhất). Tuy nhiên, điều ngược lại không luôn đúng.

2. Một số ứng dụng của phân tích Markov

Phân tích Markov có nhiều ứng dụng trong Kinh tế, Kĩ thuật, Sinh học, Xã hội học, Công nghệ thông tin,… Trong mục này, chúng ta sẽ xem xét các ứng dụng như tìm cân bằng thị phần, xác định chính sách thay thế vật tư thiết bị, dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước, tìm phân phối giới hạn của một hệ thống kĩ thuật và một ứng dụng của quá trình sinh – tử cho hệ thống hàng chờ.

2.1. Tìm cân bằng thị phần

Ta nhắc lại một cách vắn tắt bài toán cho ở mục 1.2: Trong một khu phố 1000 dân (khách hàng) có 3 siêu thị là A, B, và C. Giả sử, trong tháng đầu, số khách vào các siêu thị lần lượt là 200, 500 và 300. Những tháng sau đó, ta giả sử xác suất để một khách hàng (đã vào siêu thị A lúc trước) vào lại A luôn là 0,8; chuyển sang B luôn là 0,1 và chuyển sang C luôn là 0,1... Các xác suất chuyển khác của khách hàng ("trụ lại" B, chuyển sang A, chuyển sang C...) được cho thông qua ma trận chuyển P

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

Lúc đó, theo kết quả đã biết, tỉ lệ phần trăm cân bằng dừng (khi thời gian đủ dài) số khách hàng vào các siêu thị A, B, C là 27,3%, 45,4% và 27,3% có thể tìm được từ hệ $\Pi \times (I - P) = 0$.

2.2. Chính sách thay thế vật tư thiết bị

Trong một hệ thống điện kĩ thuật, các thiết bị cùng một loại được phân ra các tình trạng sau đây: vừa mới thay, còn tốt, vẫn dùng được và đã bị hỏng. Theo số liệu thống kê được, ta có ma trận xác suất chuyển trạng thái như sau:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

trong đó, sau mỗi tuần (xem hàng đầu của ma trận P) có 0%, 80%, 20% và 0% số các thiết bị mới thay chuyển sang tình trạng mới thay, còn tốt, vẫn dùng được và đã bị hỏng. Các hàng khác của ma trận P được giải thích một cách tương tự. Ta đi tìm phân phối dừng Π bằng phương pháp đã biết.

Xuất phát từ $\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)} \times P$, cho qua giới hạn cả hai vế khi $n \to \infty$ ta có: $\Pi = \Pi \times P$, hay $\Pi \times (I - P) = 0$.

Do P là ma trận đặc biệt (ma trận chuyển xác suất) nên nó là ma trận suy biến.

Khi viết lại dưới dạng hệ phương trình (4 ẩn, 4 phương trình) ta phải loại bớt một phương trình đi, và thêm vào hệ thức $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$ và ràng buộc $\pi_k \geq 0$ (k = 1, 2, 3, 4). Kí hiệu $x_1 = \pi_1$, $x_2 = \pi_2$, $x_3 = \pi_3$ và $x_4 = \pi_4$ ta sẽ có hệ:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ -0,8x_1 + 0,4x_2 = 0 \\ -0,2x_1 - 0,4x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ -0,5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 = \dfrac{1}{6} \\ x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy phân phối dừng $\Pi = [1/6 \;\; 1/3 \;\; 1/3 \;\; 1/6]$.

Giả sử rằng chi phí thay mới một thiết bị là 25 nghìn (đồng) và thất thu khi mỗi một thiết bị hỏng là 18,5 nghìn, thì mỗi tuần hệ thống trên phải chi trung bình trên một thiết bị số tiền là: $(1/6)\times 25 + (1/6)\times 18{,}5 = 7{,}25$ nghìn / thiết bị / tuần.

Ta xét phương án thứ hai cho việc thay thế vật tư thiết bị với ma trận xác suất chuyển trạng thái sau đây:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 1,0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận này tương ứng với chính sách mới về thay thế vật tư thiết bị là: thay thế mỗi thiết bị một khi kiểm tra và phát hiện thiết bị ở tình trạng vẫn dùng được. Điều này có thể dẫn tới việc giảm thiểu thất thu do thiết bị hỏng gây nên. Thật vậy, ứng với ma trận P trên đây, phân phối dừng $\Pi = [1/4 \;\; 1/2 \;\; 1/4]$. Lúc này, mỗi tuần hệ thống trên phải chi trung bình trên một thiết bị số tiền là: $(1/4)\times 25 + (0)\times 18{,}5 = 6{,}25$ nghìn / thiết bị / tuần. Như vậy hệ thống sẽ tiết kiệm được 1 nghìn / thiết bị / một tuần. Nếu hệ thống có 2000 thiết bị, thì nhờ chính sách thay thế vật tư mới, mỗi tuần hệ thống sẽ tiết kiệm được 2 triệu (đồng).

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

Một công ti kinh doanh trong ngành điện chuyên về sửa chữa và thay thế phụ tùng đề ra chính sách tín dụng: đáp ứng yêu cầu của khách hàng trước, thanh toán sau. Phần nhiều hợp đồng sẽ được thanh toán đúng thời hạn, một tỉ lệ nhất định sẽ được công ti cho thanh toán chậm, còn một số ít không thanh toán được. Theo kinh nghiệm, sau hai hay ba hợp đồng thanh toán chậm của một khách hàng nào đó là hợp đồng không thanh toán được sau một thời gian dài, công ti coi đây là hợp đồng "xấu" và sẽ cắt bỏ chính sách tín dụng với khách hàng đó. Như vậy tại từng thời điểm các hợp đồng có thể rơi vào một trong các tình trạng (trạng thái) sau:

– S_0: hợp đồng được thanh toán,

– S_1: hợp đồng không được thanh toán,

– S_2: hợp đồng sẽ được thanh toán đúng thời hạn,

– S_3: hợp đồng sẽ được thanh toán chậm.

Sau đây là ma trận xác suất chuyển trạng thái (sau từng tháng):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Hiện tại công ti có các hợp đồng phải thanh toán đúng hạn với tổng số 500 triệu, và các hợp đồng cho thanh toán chậm với tổng số 100 triệu. Hãy xác định trong tổng trên có bao nhiêu sẽ được thanh toán, còn bao nhiêu sẽ là nợ "xấu" không đòi được.

Đây là bài toán khá phức tạp liên quan tới phân loại các trạng thái của xích Markov là vấn đề chúng ta sẽ không trình bày trong giáo trình này. Tuy nhiên, có thể thấy ngay rằng các trạng thái S_0 và S_1 là các trạng thái "hấp thụ" (*absorbing state*), tức là mọi hợp đồng dù hiện đang ở trạng thái nào thì cuối cùng sau một thời gian nhất định cũng sẽ rơi vào một trong hai trạng thái trên. Trong khi đó các trạng thái S_2 và S_3 được gọi là các trạng thái truyền ứng (hay các trạng thái di chuyển).

Để tìm câu trả lời cho vấn đề đặt ra, chúng ta cần thực hiện các bước sau: Trước hết, ta chia ma trận P theo khối.

$$P = \begin{bmatrix} J & O \\ K & M \end{bmatrix} \text{ với } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Sau đó, ta tìm ma trận R = I – M và ma trận nghịch đảo của nó R^{-1}, ở đây I là ma trận đơn vị cùng cỡ với ma trận M. Ta có:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5254 & 0,3390 \\ 0,3390 & 1,1864 \end{bmatrix},$$

và tính được:

$$R^{-1} \times K = \begin{bmatrix} 0,8983 & 0,1017 \\ 0,6441 & 0,3559 \end{bmatrix}.$$

Các phần tử trong ma trận trên có ý nghĩa đặc biệt. Trong số các hợp đồng hiện tại ở trạng thái S_2 (phải thanh toán đúng kì hạn) cuối cùng sau một thời gian nhất định có 89,83% sẽ rơi vào trạng thái S_0 (được thanh toán) và 10,17% sẽ rơi vào trạng thái S_1 (không dược thanh toán). Còn trong số các hợp đồng hiện tại ở trạng thái S_3 (thanh toán chậm) cuối cùng sau một thời gian nhất định có 64,41% sẽ rơi vào trạng thái S_0 (được thanh toán) và 35,59% sẽ rơi vào trạng thái S_1 (không được thanh toán).

Thực hiện phép tính:

$$[500\ 100]\times\begin{bmatrix}0{,}8983 & 0{,}1017\\ 0{,}6441 & 0{,}3559\end{bmatrix} = [459{,}32\ \ 140{,}68],$$

ta thấy trong 500 triệu phải thanh toán đúng kì hạn và 100 triệu thanh toán chậm cuối cùng sẽ có 459,32 triệu được thanh toán và 140,68 triệu là nợ “xấu” không đòi được. Để cải thiện tình trạng này, công ti cần nghiên cứu tìm ra một chính sách tín dụng hợp lí hơn.

Ngoài ra, ma trận R^{-1} còn cho biết các thông tin sau:

– Tổng của các phần tử trên hàng thứ nhất là 1,8644 là thời gian trung bình (tháng) mà một hợp đồng dạng phải thanh toán đúng kì hạn sẽ trải qua trước khi rơi vào một trong các trạng thái hấp thụ, tức là trở thành hợp đồng thanh toán được hoặc hợp đồng “xấu”.

– Tổng các phần tử trên hàng thứ hai của R^{-1} cũng có ý nghĩa tương tự đối với các hợp đồng dạng thanh toán chậm.

– Phần tử nằm trên hàng 1 và cột 1 của R^{-1} cho biết thời gian trung bình (tháng) mà một hợp đồng dạng phải thanh toán đúng hạn sẽ ở trong trạng thái S_2 trước khi nó rơi vào một trong các trạng thái hấp thụ là 1,5254 tháng. Phần tử nằm trên hàng 1 và cột 2 cho biết thời gian trung bình (tháng) mà một hợp đồng dạng phải thanh toán đúng hạn sẽ ở trong trạng thái S_3 trước khi nó rơi vào một trong các trạng thái hấp thụ là 0,3390 tháng.

– Các phần tử nằm trên hàng 2 của ma trận R^{-1} có ý nghĩa tương tự đối với một hợp đồng dạng được thanh toán chậm.

Sau đây, chúng ta sẽ đưa ra *một số công thức giải thích* các phân tích trên đây cho trường hợp ma trận xác suất chuyển trạng thái của xích Markov có dạng sau:

$$P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0{,}5 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1\end{bmatrix} \text{(như trong bài toán trên)},$$

$$= \begin{bmatrix}J & O\\ K & M\end{bmatrix} \text{ với } J = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, K= \begin{bmatrix}p_{20} & p_{21}\\ p_{30} & p_{31}\end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, M= \begin{bmatrix}p_{22} & p_{23}\\ p_{32} & p_{33}\end{bmatrix},$$

trong đó $\boldsymbol{p_{ij}}$ là xác suất chuyển từ trạng thái S_i sang trạng thái S_j sau một bước. Không gian trạng thái gồm bốn trạng thái S_0, S_1, S_2 và S_3; các trạng thái S_0 và S_1 là các trạng thái hấp thụ, còn S_2 và S_3 là các trạng thái truyền ứng. Chúng ta dùng các kí hiệu:

$$U = \begin{bmatrix} u_{20} & u_{21} \\ u_{30} & u_{31} \end{bmatrix},$$

với $\boldsymbol{u_{ik}}$ là xác suất hấp thụ vào trạng thái S_k khi trạng thái ban đầu là S_i, k = 0, 1, còn i = 2, 3.

$$V = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

với $\boldsymbol{v_i}$ là thời gian trung bình cho tới khi rơi vào một trong các trạng thái hấp thụ nếu trạng thái ban đầu là S_i, i = 2, 3.

$$W = \begin{bmatrix} w_{22} & w_{23} \\ w_{32} & w_{33} \end{bmatrix},$$

với $\boldsymbol{w_{ij}}$ là thời gian trung bình xích Markov ở trong trạng thái S_j trước khi nó rơi vào một trong các trạng thái hấp thụ nếu trạng thái ban đầu là S_i, i = 2, 3. Lúc đó:

$$U = (I - M)^{-1},\ V = (I - M)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ và } W = (I - M)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chú ý: Việc chứng minh các công thức trên cho trường hợp tổng quát thực ra cũng không quá khó, có thể tìm thấy trong các sách tham khảo về quá trình Markov. Cách ứng dụng phân tích Markov như trong mục này còn có thể được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác như Sinh học, Xã hội học, Lí thuyết nhận dạng và Thiết kế các hệ thống kĩ thuật, trong đó có Kĩ thuật điện.

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

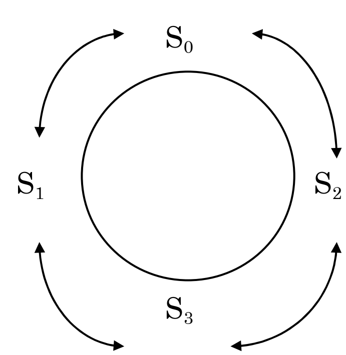
Một hệ thống kĩ thuật có hai chi tiết có thể bị hỏng ở bất kì thời điểm nào. Tại mỗi thời điểm hệ thống có thể rơi vào một trong những trạng thái sau (xem hình IV.1):

S_0: cả 2 chi tiết tốt;

S_1: chi tiết 1 hỏng, chi tiết 2 bình thường;

S_2: chi tiết 1 bình thường, chi tiết 2 hỏng;

S_3: cả hai chi tiết đều hỏng.



Hình IV.1. Sơ đồ các trạng thái

Nói cách khác, tại mỗi thời điểm t, biến X(t) có thể rơi vào một trong các vị trí / trạng thái S_0, S_1, S_2 và S_3. Chú ý rằng lúc này ta có xích Markov (thời gian) liên tục với không gian trạng thái $S = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$. Sau đây, chúng ta sẽ tìm cách xác định phân phối giới hạn (*long run distribution*) của $\{X(t)\}_{t\geq 0}$. Đây là một vấn đề khá phức tạp nên chúng ta chỉ có thể trình bày vấn đề một cách vắn tắt.

Trước hết ta nhắc lại về phân phối Poát−xông và phân phối mũ. Giả sử dòng tín hiệu đến (hay xảy ra) tuân theo phân phối Poát−xông $\mathscr{P}(\lambda)$ với λ là số tín hiệu đến trung bình trong một khoảng thời gian nhất định (coi là một đơn vị thời gian), λ còn được gọi là cường độ của dòng tín hiệu đến. Lúc đó, trong khoảng thời gian như trên thì số tín hiệu xảy ra sẽ nhận giá trị k với xác suất $\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Ta gọi phần tử xác suất P là xác suất xuất hiện (ít nhất) một tín hiệu trong khoảng thời gian Δt. Thế thì, do tính "đơn nhất" của quá trình Poát−xông, P cũng là xác suất xuất hiện đúng một tín hiệu trong khoảng thời gian Δt. Theo công thức đã biết thì $P = \lambda\Delta t$ (chính xác tới vô cùng bé $o(\Delta t)$). Chẳng hạn, nếu $\lambda = 6$ tín hiệu/ 1 phút và $\Delta t = 2$ giây, ta sẽ có $P = \lambda\Delta t = 6 \times (1/30) = 1/5 = 0{,}2$. Từ đó, ta thấy xác suất để có 1 tín hiệu đến trong khoảng thời gian 2 giây là 0,2.

Xét biến ngẫu nhiên T (chẳng hạn thời gian phục vụ một tín hiệu trong một hệ dịch vụ), có phân phối mũ $\varepsilon(\mu)$ với hàm mật độ là $f(\tau) = \mu e^{-\mu\tau}$. μ cũng được gọi là cường độ phục vụ hay cường độ của "*dòng phục vụ*". Hàm phân phối xác suất của T sẽ là

$$F(\tau) = P(T \leq \tau) = \int_0^{\tau} f(t)dt = \int_0^{\tau} \mu e^{-\mu t}dt = 1 - e^{-\mu\tau}.$$

Còn kì vọng toán và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên T là

$$m_T = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} \mu t e^{-\mu t}dt = \frac{1}{\mu};\ \delta_T = \frac{1}{\mu}.$$

Ta nhận thấy ngay rằng:

$$P(0 \leq T \leq \Delta t) = F(\Delta t) - F(0) = 1 - e^{-\mu\Delta t} - [1 - e^0]$$

$$= 1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\,\Delta t \quad \text{(chính xác tới vô cùng bé } o(\Delta t)\text{)}.$$

Chú ý: Nếu dòng tín hiệu đến có phân phối Poát−xông $\mathscr{P}(\lambda)$ thì thời gian giữa hai tín hiệu liên tiếp có phân phối mũ $\varepsilon(\lambda)$.

Chúng ta quay lại bài toán đang xét. Gọi λ_1 số lần chi tiết 1 hỏng và λ_2 số lần chi tiết 2 hỏng (tính trung bình) trên 1 đơn vị thời gian. Lúc đó, ta có thể coi dòng tín hiệu chi tiết 1 và 2 hỏng là dòng Poát–xông với các tham số λ_1 và λ_2. Gọi T_1 và T_2 là thời gian sửa chữa chi tiết 1 và 2, có phân phối mũ với các kì vọng tsc_1 và tsc_2 là thời gian sửa chữa (trung bình) chi tiết 1 và chi tiết 2. Vậy T_1 và T_2 có phân phối mũ $\varepsilon(\mu_1)$ và $\varepsilon(\mu_2)$, với $\mu_1 = 1/tsc_1$ và $\mu_2 = 1/tsc_2$.

Tại thời điểm t ta có biến ngẫu nhiên $X(t) = X_t$ với phân phối xác suất sau đây:

X_t	S_0	S_1	S_2	S_3
P	$\pi_0(t)$	$\pi_1(t)$	$\pi_2(t)$	$\pi_3(t)$

Ta tính $\pi_0(t + \Delta t)$ tại thời điểm tiếp theo $(t + \Delta t)$ trong hai trường hợp sau đây:

– Trường hợp 1: Tại thời điểm t, hệ thống ở trạng thái S_0 và tại thời điểm $t + \Delta t$, hệ thống vẫn ở trạng thái S_0 (không hỏng).

– Trường hợp 2: Tại thời điểm t, hệ thống ở trạng thái S_1 hoặc S_2, còn tại thời điểm $t + \Delta t$ hệ thống ở trạng thái S_0.

Do đó, $\pi_0(t + \Delta t) = \pi_0(t)\,[1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t] + \pi_1(t)\,\mu_1\,\Delta t + \pi_2(t)\,\mu_2\,\Delta t$ (*). Thật vậy, xác suất do trường hợp 2 gây nên là $\pi_1(t)\mu_1\,\Delta t + \pi_2(t)\mu_2\,\Delta t$, với $\mu_1\Delta t = P(0 \le T_1 \le \Delta t)$ là xác suất sửa chữa xong chi tiết 1 trong khoảng thời gian Δt và $\mu_2\,\Delta t = P(0 \le T_2 \le \Delta t)$ là xác suất sửa chữa xong chi tiết 2 trong khoảng thời gian Δt. Trong khi đó, xác suất do trường hợp 1 gây nên là $\pi_0(t)[1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t]$, với $\lambda_1\Delta t$: xác suất hỏng chi tiết 1 trong khoảng Δt, còn $\lambda_2\Delta t$: xác suất hỏng chi tiết 2 trong khoảng Δt.

Nói cách khác, chúng ta đã thực hiện công thức xác suất đầy đủ $\pi_0(t + \Delta t) = \pi_0(t)p_{00} + \pi_1(t)p_{10} + \pi_2(t)p_{20}$, trong đó: p_{i0} là xác suất hệ ở trạng thái S_i tại thời điểm t và chuyển sang trạng thái S_0 tại thời điểm $(t+ \Delta t)$.

Từ (*) ta có: $\dfrac{\pi_0(t+\Delta t) - \pi_0(t)}{\Delta t} = \pi_1(t)\mu_1 + \pi_2(t)\mu_2 - \pi_0(t)\lambda_1 - \pi_0(t)\lambda_2$.

Cho $\Delta t \to 0$ (vế phải không liên quan với Δt) thì

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = \pi_1(t)\mu_1 + \pi_2(t)\mu_2 - \pi_0(t)\lambda_1 - \pi_0(t)\lambda_2$$

Khi t rất lớn (hệ thống hoạt động trong một khoảng thời gian đủ dài) thì hệ thống dần ổn định với phân phối giới hạn có thể tìm được, tức là: $[\pi_0(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t)] \to [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3]$. Vậy ta có:

$$\pi_1\mu_1 + \pi_1\mu_2 - \pi_0\lambda_1 - \pi_0\lambda_2 = 0 \text{ (vì } \frac{d\pi_0(t)}{dt} = 0 \text{ khi t đủ lớn).}$$

Một cách tương tự, ta đi đến hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_0}{dt} = \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 = 0 \\ \dfrac{d\pi_1}{dt} = \lambda_1\pi_0 + \mu_2\pi_3 - (\lambda_2 + \mu_1)\pi_1 = 0 \\ \dfrac{d\pi_2}{dt} = \lambda_2\pi_0 + \mu_1\pi_3 - (\lambda_1 + \mu_2)\pi_2 = 0 \\ \dfrac{d\pi_3}{dt} = \lambda_2\pi_1 + \lambda_1\pi_2 - (\mu_1 + \mu_2)\pi_3 = 0 \end{cases}$$

Một cách tổng quát, phân phối giới hạn được tìm từ hệ phương trình: $-\pi_j q_{jj} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}$ hay $\sum_{i \in S} \pi_i q_{ij} = 0, \forall j \in S$ (**), và $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, trong đó $-q_{ii}$ *là cường độ chuyển từ trạng thái i sang các trạng thái khác (không kể i), còn q_{ij} là cường độ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j, được định nghĩa như sau:*

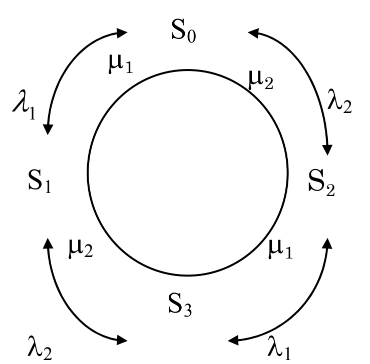
$$q_{ii} = -\lim_{\Delta t \to 0}(P[X(t+\Delta t) \neq i / X(t) = i] / \Delta t),$$

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0}(P[X(t+\Delta t) = j / X(t) = i] / \Delta t),$$

Lúc đó, $Q = [q_{ij}]$ được gọi là *ma trận cường độ*. Từ điều kiện (**) ta thấy, để tìm phân phối giới hạn cần phải giải hệ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]Q = 0$ hay $Q^T[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]^T = 0$.

Ví dụ: Cho $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$. Từ sơ đồ cường độ chuyển trạng thái cho trên hình IV.2, có thể tìm được ma trận cường độ Q, với Q^T có dạng sau:

$$Q^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$



Hình IV.2. Sơ đồ cường độ chuyển trạng thái

Giải thích: $q_{00} = -3$ vì cường độ chuyển từ trạng thái S_0 sang các trạng thái khác là $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$, còn $q_{10} = 2$ là cường độ chuyển từ trạng thái S_1 vào trạng thái S_0.

Giải hệ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]Q = 0$ hay $Q^T[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]^T = 0$ (với điều kiện bổ trợ $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$) có kết quả: $\pi_0 = 6/15 = 0,4$; $\pi_1 = 3/15 = 0,2$; $\pi_2 = 4/15 = 0,27$; $\pi_3 = 2/15 = 0,13$. Cần chú ý rằng, hệ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]\, Q = 0$ theo một nghĩa nhất định là tương tự với hệ $\Pi \times (I - P) = 0$, như đã trình bày trong các mục 1.2 và 2.1.

Giả sử lợi nhuận / 1 đơn vị thời gian hệ thống mang lại trong các trường hợp có thể xảy ra như sau: nếu hệ thống trong trạng thái S_0 thì lợi nhuận là 8 USD, tại S_1 là 3 USD, tại S_2 là 5 USD, tại S_3 là 0 USD. Vậy lợi nhuận trung bình / 1 đơn vị thời gian là

$$8 \times 0,4 + 3 \times 0,2 + 5 \times 0,27 = 5,15 \text{ (USD)}.$$

Qua ví dụ ta thấy $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ được xác định căn cứ vào các giá trị đã biết λ_1, λ_2, μ_1, μ_2.

λ_1, λ_2: số lần chi tiết hỏng (tuỳ thuộc hệ thống cụ thể),

μ_1, μ_2 : các tham số sửa chữa cần đưa vào.

Lợi nhuận cuối cùng của hệ thống phụ thuộc vào λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 và được xác định bằng cách giải bài toán tối ưu sau:

$$\text{Lợi nhuận } L = c_0\pi_0 + c_1\pi_1 + c_2\pi_2 \to \text{Max}$$

(c_0, c_1, c_2: lợi nhuận từng trạng thái)

với các ràng buộc:

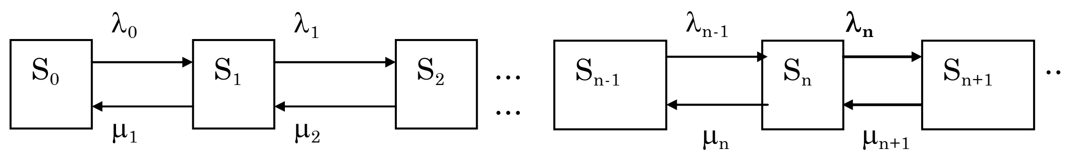
$$\begin{cases} \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 = 0 \\ \lambda_1\pi_0 + \mu_2\pi_3 - (\lambda_2 + \mu_1)\pi_1 = 0 \\ \lambda_2\pi_0 + \mu_1\pi_3 - (\lambda_1 + \mu_2)\pi_2 = 0 \\ \lambda_2\pi_1 + \lambda_1\pi_2 - (\mu_1 + \mu_2)\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \ge 0;\ \mu_1, \mu_2 \ge 0 \end{cases}$$

Lưu ý: Bài toán trên đây có 6 biến (λ_1, λ_2 đã biết). Ta phải tìm được μ_1, μ_2 từ bài toán để có phương hướng xây dựng hệ thống với lợi nhuận lớn nhất.

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh–tử cho hệ thống hàng chờ

Quá trình sinh–tử được ứng dụng khá rộng rãi trong Lí thuyết độ tin cậy, là một môn học của ngành Điện / Điện tử, và một số ngành khoa học kĩ thuật khác cũng như trong Quản trị kinh doanh và Vận trù học.

Quá trình sinh – tử là trường hợp riêng của xích Markov thuần nhất thời gian liên tục, với không gian trạng thái S không quá đếm được $S = \{S_0, S_1, S_2, ..., S_n, \dots\}$ và ma trận cường độ $Q = [q_{ij}]$ có tính chất $q_{ij} = 0$ với $|i - j| \ge 2$. Điều này có nghĩa là việc chuyển trạng thái trong quá trình sinh–tử chỉ có thể tới "1 đơn vị lên hoặc xuống" (xem hình IV.3).



Hình IV.3. Sơ đồ chuyển trạng thái trong quá trình sinh - tử

Từ trạng thái S_n tại thời điểm t hệ X(t) chỉ có thể chuyển tới một trong các trạng thái S_{n+1}, S_n hoặc S_{n-1}. Vì vậy chúng ta có các cường độ chuyển:

$$\mu_0 = \lambda_{-1} = 0 = q_{00},\ q_{n,\,n+1} = \lambda_n,\ q_{n,\,n-1} = \mu_n \text{ và } q_{n,\,n} = -(\lambda_n + \mu_n)\ \forall n.$$

Trong trường hợp $\lambda_n, \mu_n > 0$, $\forall n > 0$, theo định lí đã được chứng minh, phân phối giới hạn có thể tìm được bằng cách giải hệ: $[\pi_0\ \ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3 \ldots]Q = 0$, với ma trận cường độ Q đã biết.

Ma trận chuyển vị của Q có dạng:

$$Q^T = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{10} & \cdots & q_{n0} & q_{n+1,0} & \cdots \\ q_{01} & q_{11} & \cdots & q_{n1} & q_{n+1,1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{0n} & q_{1n} & \cdots & q_{nn} & q_{n+1,n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Ta có $[\pi_0\ \ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3 \ldots]Q = 0 \Leftrightarrow Q^T[\pi_0\ \ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3 \ldots]^T = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} q_{00} & q_{10} & q_{20} & \cdots \\ q_{01} & q_{11} & q_{21} & \cdots \\ q_{02} & q_{12} & q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{bmatrix}.$$

hay:

$$\begin{cases} q_{00}\pi_0 + q_{10}\pi_1 + q_{20}\pi_2 + \ldots = 0, \\ q_{01}\pi_0 + q_{11}\pi_1 + q_{21}\pi_2 + \ldots = 0, \\ q_{02}\pi_0 + q_{12}\pi_1 + q_{22}\pi_2 + \ldots = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

Do tính chất đặc biệt, như đã phân tích ở trên, của ma trận cường độ Q của quá trình sinh–tử, hệ trên được viết một cách tường minh hơn như sau:

$$\begin{cases} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 \qquad\qquad + \ldots = 0, \\ \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 + \ldots = 0, \\ \lambda_1\pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3 + \ldots = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

Từ đây dễ dàng tìm được $\pi_{n+1} = (\lambda_n/\mu_{n+1})\pi_n$, $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$ để đi tới công thức tính $\pi_i, \forall i$.

$$\begin{cases} \pi_1 = (\lambda_0/\mu_1)\pi_0, \\ \pi_2 = (\lambda_1/\mu_2)\pi_1 = (\lambda_1\lambda_0/\mu_2\mu_1)\pi_0, \\ \pi_3 = (\lambda_2/\mu_3)\pi_2 = (\lambda_2\lambda_1/\mu_3\mu_2)\pi_1 = (\lambda_2\lambda_1\lambda_0/\mu_3\mu_2\mu_1)\pi_0, \\ \ldots \\ \pi_{n+1} = (\lambda_n/\mu_{n+1})\pi_n = \ldots = (\lambda_n\lambda_{n-1}\ldots\lambda_0/\mu_{n+1}\mu_n\ldots\mu_1)\pi_0, \\ \ldots \end{cases}$$

Với điều kiện $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$, cuối cùng ta có:

$$\pi_0 = 1/\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k\lambda_{k-1}\ldots\lambda_0/\mu_{k+1}\mu_k\ldots\mu_1)\right).$$

Đặc biệt khi $\mu_n = 0$, $\forall n$, thì quá trình sinh−tử trở thành quá trình sinh thuần khiết (*pure birth process*). Quá trình sinh thuần khiết với $\lambda_n = \lambda$ là quá trình Poát−xông với tham số λ.

Ví dụ: Giả sử dòng khách hàng đến mua vé ở một văn phòng bán vé với M quầy phục vụ là dòng Poát−xông với tham số $\lambda = 6$ khách hàng / 1 phút (điều này cũng có nghĩa là khách hàng đến phòng bán vé với các thời điểm đến tuân theo luật phân phối mũ với tham số $\lambda = 6$).

Ngoài ra, còn biết nguyên tắc phục vụ là FCFS (*First come first serve*) và thời gian phục vụ tại mỗi quầy có luật phân phối mũ với kì vọng 1/3 (phút).

Cần trả lời hai câu hỏi sau đây:

− Số quầy hàng tối thiểu là bao nhiêu để hàng chờ không trở nên dài vô hạn?

− Giả sử N_t là số khách hàng đang chờ hay đang được phục vụ tại thời điểm t. Chọn M = 4 và một khách hàng sẽ chờ để được phục vụ nếu $N_t \le 4$, chờ với xác suất 0,5 nếu
$N_t = 5$ và sẽ bỏ đi nếu $N_t = 6$. Hãy xác định phân phối dừng của quá trình này?

Trước hết, trong ví dụ này chúng ta có một quá trình sinh−tử với không gian trạng thái S = { $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$}, trong đó S_n là trạng thái trong văn phòng có n khách hàng. Các cường độ chuyển là $\lambda_k = 6$ với k = 0, 1, 2,... còn $\mu_k = 3k$ với $k \le M$ và $\mu_k = 3M$ với $k > M$ (điều này là do biến cực tiểu của các biến ngẫu nhiên với phân phối mũ độc lập cũng có phân phối mũ với tham số bằng tổng các tham số của các phân phối mũ tương ứng).

Do $\lambda_k / \mu_{k+1} = 6/3M < 1$ (khi $k \ge M$) nên với $M \ge 3$ thì:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k \lambda_{k-1} \ldots \lambda_0 / \mu_{k+1} \mu_k \ldots \mu_1) < \infty.$$

Bởi vậy hàng đợi sẽ không dài vô hạn (nếu trái lại, khi chuỗi phân kì, thì $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \ldots = 0,$ nên số khách trong hàng đợi sẽ dần tới một số hữu hạn khi $t \to \infty$ với xác suất bằng 0).

Trong câu hỏi thứ hai, ta có $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 6$, $\lambda_5 = 3$. Theo công thức tính $\pi_0 = 1/(1+\sum_{k=0}^{5} (\lambda_k \lambda_{k-1} \ldots \lambda_0 / \mu_{k+1} \mu_k \ldots \mu_1))$ ta có ngay $\pi_0 = 12/89$. Từ đó tính ra $\pi_1 =$ 24/89,

$\pi_2 = 24/89$, $\pi_3 = 16/89$, $\pi_4 = 8/89$, $\pi_5 = 4/89$ và $\pi_6 = 1/89$.

3. Mô phỏng xích Markov

3.1. Mô phỏng xích Markov thời gian rời rạc

Phương pháp 1

Xích Markov rời rạc và thuần nhất còn có thể được kí hiệu là $X_0, X_1, X_2, \ldots$ Giả sử không gian trạng thái là S gồm hữu hạn trạng thái: S = {0, 1, 2,..., N} và ma trận xác suất chuyển trạng thái đã được biết là $P = [p_{ij}]_{N \times N}$. Chúng ta sẽ mô phỏng xích Markov rời rạc và thuần nhất thông qua ví dụ đã trình bày ở các mục 1.2 và 2.1 của chương này.

Ta có phân phối ban đầu là:

X_0	1	2	3
$\Pi^{(0)}$	$\pi_1^{(0)} = 0,2$	$\pi_2^{(0)} = 0,5$	$\pi_3^{(0)} = 0,3$

Để mô phỏng X_0 ta áp dụng phương pháp mô phỏng phân phối rời rạc đã học ở chương III. Trên máy tính, ta phát sinh ra một số ngẫu nhiên r = RANDOM[0,1) theo luật phân phối đều U[0,1) trong [0,1). Nếu $r \le 0,2$ ta lấy $X_0 = 1$; nếu $0,2 < r \le 0,7$ thì ta lấy $X_0 = 2$; còn nếu $r > 0,7$ thì đặt $X_0 = 3$. Căn cứ kết quả mô phỏng X_0, ta mô phỏng X_1 dựa trên ma trận xác suất chuyển trạng thái:

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

Giả sử đã biết $X_0 = 2$, lúc đó ta cần mô phỏng biến ngẫu nhiên X_1 căn cứ phân phối sau:

X_1	1	2	3
Xác suất tương ứng	$p_{21} = 0{,}07$	$p_{22} = 0{,}9$	$p_{23} = 0{,}03$

Điều này có thể được thực hiện tương tự như khi mô phỏng X_0. Cần chú ý rằng, trong hàng thứ hai của bảng trên ta có phân phối xác suất có điều kiện của X_1 với điều kiện $X_0 = 2$. Các bước tiếp theo mô phỏng X_2, X_3,... được tiến hành tương tự (cho tới X_{500} chẳng hạn).

Lặp lại quy trình này bắt đầu từ X_0 cho một số bước lặp L đủ lớn (chẳng hạn 1000 lần), ta sẽ có một bộ 1000 số liệu cho X_{500}. Từ đó, có thể tìm được bảng phân phối tần suất (còn gọi là xác suất thực nghiệm) của X_{500} qua thí nghiệm mô phỏng trên đây đối với X_{500}. Như vậy, ta tìm được véc tơ phân phối (xác suất thực nghiệm) $\Pi^{(500)}$. Cuối cùng, chúng ta có kết quả tìm gần đúng phân phối dừng là: $\Pi \approx \Pi^{(500)}$.

Chú ý:

– Trong ví dụ trên đây, ta thấy có thể dùng mô phỏng để tìm phân phối dừng. Tuy nhiên, mục đích chủ yếu của phương pháp 1 là nhằm mô phỏng các xích Markov rời rạc thuần nhất, là các quá trình có thể xảy ra trong các hệ thống phức tạp.

– Khi không gian trạng thái S gồm một số lớn các trạng thái thì phương pháp mô phỏng trên yêu cầu thời gian chạy máy tính khá lớn. Để khắc phục điều này, chúng ta xem xét phương pháp 2 sau đây.

Phương pháp 2

Xét một hệ thống kĩ thuật được biểu diễn bởi xích Markov rời rạc thuần nhất $\{X_t\}$, t = 0, 1, 2,... với không gian trạng thái S có N trạng thái (N khá lớn) và ma trận chuyển trạng thái $P = [p_{ij}]_{N\times N}$. Xét thời điểm n, tại thời điểm này giả sử đã mô phỏng được $X_n = s$. Ta sẽ mô phỏng thời gian T_n là thời gian tới lần nhảy tiếp theo sớm nhất mà $X_{t+Tn} \neq s$. Do xích Markov là rời rạc nên T_n chỉ có thể nhận các giá trị 1, 2, … Đặt $p = p_{ss}$, dễ thấy T_n có phân phối hình học như sau:

Tn	1	2	...	k	...
Xác suất tương ứng	$1-p$	$(1-p)p$	...	$(1-p)p^{k-1}$	...

Mô phỏng phân phối này ta tìm được giá trị T_n. Còn X_{n+Tn} có phân phối xác suất như sau:

X_{n+Tn}	1	2	...	s	...	N
Xác suất tương ứng	$p_{s1}/(1-p_{ss})$	$p_{s2}/(1-p_{ss})$	...	0	...	$p_{sN}/(1-p_{ss})$

Cách mô phỏng này sẽ tiết kiệm hơn thời gian chạy máy tính (khi N khá lớn), nhưng việc lập trình sẽ phức tạp hơn ít nhiều.

Xét ví dụ như đã trình bày trên, nếu dùng phương pháp 2, một cách hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng tìm được phân phối dừng $\Pi^{(*)} \approx \Pi^{(500)}$.

3.2. Mô phỏng xích Markov thời gian liên tục

Xét xích Markov thời gian liên tục $\{X(t)\}_{t\in[0,\infty)}$. Giả sử rằng xích đi vào trạng thái i tại thời điểm nào đó, chẳng hạn thời điểm 0, và không rời khỏi trạng thái này cho đến thời điểm s. Lúc đó, do tính "không nhớ" của quá trình Markov, xác suất để xích vẫn tiếp tục ở nguyên trạng thái đó cho tới thời điểm (t + s) sẽ là:

$$P\{(T_i > s + t)/(Ti > s)\} = P\{T_i > t\}$$

trong đó T_i là thời gian quá trình dừng lại ở trạng thái i. Dễ thấy, nếu T_i có phân phối mũ với hàm phân phối $F(T_i < \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$ thì đẳng thức trên được thoả mãn. Điều ngược lại cũng có thể chứng minh được. Vậy T_i có phân phối mũ.

Từ nhận xét trên, ta có thể đưa ra một *định nghĩa khác cho xích Markov thời gian liên tục.* Xích Markov thời gian liên tục là một quá trình ngẫu nhiên có các tính chất sau mỗi khi nó đi vào trạng thái i:

– Lượng thời gian T_i xích dừng lại tại trạng thái i trước khi nó chuyển sang trạng thái khác là một biến ngẫu nhiên với phân phối mũ có tham số v_i (hay có kì vọng $1/v_i$).

– Một khi quá trình rời khỏi trạng thái i, nó sẽ đi vào trạng thái j nào đó (độc lập với T_i) với các xác suất p_{ij} thoả mãn $\sum_j p_{ij} = 1, p_{ii} = 0, \forall i$.

Vậy để mô phỏng xích Markov thời gian liên tục, chúng ta cần mô phỏng dãy τ_0, τ_1, τ_2,... (các lượng thời gian τ_r xích dừng lại tại trạng thái J_r trước khi nó chuyển sang trạng thái khác) và dãy J_0, J_1, J_2,... (các trạng thái mà xích chuyển đến). Để phát sinh τ_r, như trên đã nói, ta cần biết tham số v_{Jr} của phân phối mũ tương ứng. Còn để phát sinh trạng thái xích Markov chuyển đến J_r $\forall r$, chúng ta có bảng phân phối xác suất sau:

Trạng thái đến	1	2	...	i	...	N
Xác suất tương ứng	p_{i1}	p_{i2}	...	0	...	p_{iN}

Trong bảng trên, $i = J_{r-1}$ là trạng thái của xích tại bước r – 1 (với các xác suất p_{ij} thoả mãn $\sum_j p_{ij} = 1, p_{ii} = 0, \forall i$).

Để thực hiện mô phỏng xích Markov thời gian liên tục, có thể sử dụng số liệu của ví dụ đã xét trong mục 2.4 hay 2.5.