Question 1. Consider the following bivariate distributionp(x, y)of two discrete random variablesXandYCompute
(a) The marginal distributionsp(x)andp(y)
(b) The conditional distributionsp(x|Y=y1)andp(x|Y=y3)

A	B	C	D	E	F	G
	x1	x2	x3	x4	x5	
y1	0.01	0.02	0.03	0.1	0.1	0.26
y2	0.05	0.1	0.05	0.07	0.2	0.47
y3	0.1	0.05	0.03	0.05	0.04	0.27
	0.16	0.17	0.11	0.22	0.34	1

a) The marginal distribution of P(x) are :

X = x1	0.16
X = x2	0.17
X = x3	0.11
X = x4	0.22
X = x5	0.34

P(y) =

Y = y1	0.26
Y = y2	0.47
Y = y3	0.27

b)

We have the Formula for conditional distrinution: P(A|B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

P(x= X1|Y=1)	0.0384
P(x = X2|Y=1)	0.0769
P(x = X3|Y=1)	0.1153
P(x = X4|Y=1)	0.3846
P(x = X5|Y=1)	0.3846

P(x= X1|Y=3)	0.3703
P(x = X2|Y=3)	0.1851
P(x = X3|Y=3)	0.1111
P(x = X4|Y=3)	0.1851
P(x = X5|Y=3)	0.1481

Question 2. Consider two random variables x, y with joint distributionp(x, y). Showthat:EX[X] =EY[EX[x|y]]Here,EX[x|y]denotes the expected value of x under the conditionaldistributionp(x, y)

~~Solution~~

Q2:

$$E_x[X] = E_y[E_x[x|y]]$$

$$E_Y[E_x(x|y)] = E_y[\sum_i x_i \cdot P(X = x_i | Y = y_i)]$$

$$= EY[\sum_i x_i \frac{P(x = x_i \cap, y = y_j)}{P(Y = y_j)}]$$

$$= \sum_j [\sum_i \{ x_i \frac{P(x = x_i \cap y = y_j}{P(Y = y_j)} \}.$$

$$= \sum_j \sum_i x_i \cdot P(x = x_i, y = y_j)$$

$$= \sum_i [x_i \{ \sum_j P(x = x_i, y = y_j) \}]$$

$$= \sum_i x_i \cdot P(x = x_i)$$

$$= \cancel{\sum_i} \cancel{x} E(x).$$

Question 3. Một cuộc điều tra cho thấy, ở 1 thành phố 20.7% dân số dùng sản phẩm X ,50%dùng loại sản phẩm Y và trong những người dùng Y thì 36.5% dùng X. Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong Thành phố đó,tính xác xuất để người ấy:

(a) Dùng cả X và Y.

(b) Dùng Y, và biết rằng người đó không dùng X.

a) P(X) : Xác suất người được hỏi dùng sản phẩm X
P(Y): Xác suất người được hỏi dùng sản phẩm Y

Từ đề bài ta có:

- P(X) = 0.27
- P(Y) = 0.5
- P(X|Y) = 0.365

P(X,Y) = P(Y|X) * P(X) = P(X|Y) * P(Y) = 0.365 * 0.5 =0.1825

b) Using Bayes Theorem

P(Y|X_bar) = $\frac{P(Y \cap X\_bar)}{P(X_{bar})}$

P(X_bar) = 1 - P(X) = 1 – 0.207 = 0.793

P(Y ∩ X_bar) = P(Y) * P(X_bar | Y)

P(X_bar | Y) = P($X\_bar \ \cap \ Y$) / P(Y) = (P(Y) – P(X ∩ Y)) / P(Y) = (0.5 – 0.1825) / 0.5 = 0.635

=>> P(Y ∩ X_bar) = 0.5 * 0.635 = 0.3175

Conclusion: P(Y|X_bar) = $\frac{P(Y \cap X\_bar)}{P(X_{bar})}$ = 0.3175 / 0.793 = 0.4003

Question 4. Prove the relationship:VX=EX[x2]−(EX[x])2, which relates thestandard definition of the variance to the raw-score expression for thevariance

Q 4:

Prove: $V_X = E_X(x^2) - (E_X[x])^2$

~~Variance~~

$$V(x) = \sum_{x \in S} (x-u)^2 f(x)$$

$$E(x) = \sum x f(x)$$

$$E(x^2) = \sum x^2 f(x)$$

$$V_X[x] = E_X(x-u)^2$$
$$= E_X(x^2 - 2ux + u^2)$$
$$= E_X(x^2) - 2u E_X(x) + u^2$$

$$u = E_X(x)$$

$$V_X[x] = E_X[x^2) - 2(E_X(x))(E_X(x)) + [E_X(x)]^2$$
$$= E_X[x^2] - 2(E_X(x))^2 + (E_X(x))^2$$

$$V_X[x] = E_X[x^2] - [E_X(x)]^2$$

Question 5. Giả sử bạn đứng trước ba ô cửa mà đằng sau nó là một trong hai thứ:con dê hoặc một chiếc xe hơi giá trị. Bạn mong muốn mở trúng ô cửacó chiếc xe để được nhận nó (nếu mở trúng ô cửa có dê thì bạn phảirinh nó về nhà).Monty yêu cầu bạn chọn một trong các ô cửa. Dĩ nhiên bạn chọn mộtcách “hú họa” tại xác suất lúc này để nhận xe hơi ở mỗi ô cửa đều là1/3. Giả sử bạn chọn ô cửa số 1.Monty sẽ giúp bạn LOẠI TRỪ 1 ĐÁP ÁN SAI bằng cách mở một ôcửa có dê trong hai ô cửa còn lại (dĩ nhiên ông ta đã biết mỗi ô cửa cógì). Sau đó bạn được lựa chọn LẦN HAI: Giữ nguyên ô cửa ban đầuhay đổi sang ô cửa còn lại chưa được lật mở?

Giả sử ô 1 là ô có xe hơi:

- Nếu người chơi chọn cửa 1 và sau đó Monty sẽ mở ra cửa có dê (là 2 hoặc 3), nhưng người chơi không tiếp tục chọn ô 1 mà chọn cửa còn lại => người chơi thua

- Nếu chọn cửa 2, tất nhiên Monty sẽ không mở cửa 1 tại vì có dê, mà cửa Monty sẽ mở cho người chơi là cửa 3 tuy nhiên người chơi đổi sang cửa 1 => người chơi thắng

- Nếu chọn cửa 3, tất nhiên Monty sẽ không mở cửa 1 tại vì có dê, mà cửa Monty sẽ mở cho người chơi là cửa 2 tuy nhiên người chơi đổi sang cửa 1 => người chơi thắng

⇨ Xác suất thắng khi giữ nguyên là 1/3
⇨ Xác suất thắng khi đổi cửa là 2/3

Vẫn giả sử xe nằm ở ô 1:

- A là biến cố xe ở ô 1
- B là biến cố Monty mở ô 2 có dê(vì đã chọn ô 1)

⇨ P(A) = 1/3
⇨ P(B|A) = 1/2)(Monty chỉ có thể ở cửa 2 hoặc 3)

Vậy xác suất nhận được xe khi giữ nguyên cửa đã chọn sau khi 2 cửa còn lại được mở là P(A|B) = 1/3 y hệt P(A)

- C là biến cố xe ở ô 3

⇨ P(C) = 1 – P(A) = 2/3 (xung khắc)

Conclusion: Chọn 1 cửa tuy nhiên sau khi được Montey loại trừ 1 đáp án sai thì không giữ nguyên cửa đã chọn mà đổi sang cửa còn lại thì xác suất thắng là 2/3 => XÁC SUẤT TRÚNG XE LỚN HƠN