CAPÍTULO 4

# Valuación con flujos de efectivo descontados

¿Qué tienen en común los jugadores de beisbol Jason Varitek, Mark Teixeira y C.C. Sabathia? Estos tres atletas firmaron contratos muy importantes a finales de 2008 o principios de 2009. Según se informó, los valores de los contratos ascendieron a 10 millones, 180 millones y 161.5 millones de dólares, respectivamente. Sin embargo, los reportes de cifras como éstas con frecuencia son engañosos. Por ejemplo, en febrero de 2009, Jason Varitek firmó un contrato con los Medias Rojas de Boston. Su contrato estipulaba salarios de 5 millones y una opción del club de 5 millones de dólares para 2010, lo que hacía un total de 10 millones de dólares. Nada mal, en especial para alguien que se gana la vida usando las "herramientas de la ignorancia" (como se conoce en la jerga popular al equipamiento del *catcher*).

Una revisión más a fondo de estas cifras muestra que a Jason, Mark y C.C. les fue muy bien, pero no ganaron nada parecido a las cifras mencionadas. Si se toma el contrato de Mark como ejemplo, aunque se informó que el valor era de 180 millones de dólares, en realidad esa suma debería pagarse a lo largo de varios años. Consistía en un bono de 5 millones al firmar el contrato más 175 millones en salarios y bonos futuros. Los 175 millones habrían de distribuirse así: 20 millones al año en 2009 y 2010 y 22.5 millones al año de 2011 a 2016. Debido a que los pagos se distribuirán a través del tiempo, se debe considerar el valor del dinero en el tiempo, lo cual significa que su contrato valía menos de lo que se había anunciado. En realidad, ¿cuánto ganó? Este capítulo le proporcionará las "herramientas del conocimiento" necesarias para responder esta pregunta.

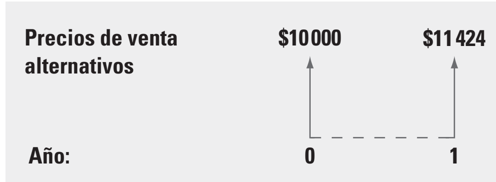
## 4.1 Valuación: el caso de un solo periodo

Keith Vaughn desea vender un terreno en una zona rural de Alaska. Ayer le ofrecieron 10 000 dólares por la propiedad. Estaba a punto de aceptar la oferta cuando otro interesado le ofreció 11 424 dólares. Sin embargo, la segunda oferta se pagaría dentro de un año. Keith está satisfecho pues ambos compradores son honrados y financieramente solventes, por lo que no teme que la oferta que seleccione deje de cumplirse. Estas dos ofertas se representan como flujos de efectivo en la figura 4.1. ¿Qué oferta debe elegir Keith?

Mike Tuttle, asesor financiero de Keith, señala que si Keith acepta la primera oferta, podría invertir los 10 000 dólares en el banco a una tasa asegurada de 12%. Al final del año tendría:

$$\underset{\substack{\text{Retorno}\\\text{del principal}}}{\$10\,000} + \underset{\text{Intereses}}{(0.12 \times \$10\,000)} = \$10\,000 \times 1.12 = 11\,200 \text{ dólares}$$

**Figura 4.1**
**Flujo de efectivo de la venta de Keith Vaughn**




En razón de que esta cifra es inferior a los 11 424 dólares que Keith podría recibir de la segunda oferta, Mike le recomienda que acepte esta última. Este análisis se basa en el concepto de **valor futuro (VF)**, o **valor compuesto**, que es el valor de una suma después de invertirla a lo largo de uno o más periodos. El valor futuro o compuesto de 10 000 dólares a una tasa de 12% anual asciende a 11 200 dólares.

Otro método emplea el concepto de **valor presente (VP)**. Se puede determinar el valor presente mediante la siguiente pregunta: ¿hoy, qué cantidad de dinero debe depositar en el banco Keith de tal modo que tenga 11 424 dólares el año siguiente? La respuesta se escribe de manera algebraica como:

$$\text{VP} \times 1.12 = 11\ 424 \text{ dólares}$$

Queremos obtener el valor de VP, el monto de dinero que reditúa 11 424 dólares si se invierte hoy a una tasa de 12%. Despejando VP se tiene:

$$\text{VP} = \frac{\$11\,424}{1.12} = \$10\ 200$$

La fórmula del VP se escribe así:

**Valor presente de la inversión:**

$$\text{VP} = \frac{C_1}{1 + r} \qquad \textbf{(4.1)}$$

donde $C_1$ es el flujo de efectivo en la fecha 1 y $r$ es la tasa de rendimiento que Keith requiere sobre la venta de su terreno. Algunas veces se denomina *tasa de descuento*.

El *análisis del valor presente* indica que un pago de 11 424 dólares que se recibirá el año siguiente hoy tiene un valor presente de 10 200 dólares. En otras palabras, a una tasa de interés de 12%, para Keith es igual recibir 10 200 dólares hoy que 11 424 el año siguiente. Si hoy le entregaran 10 200 dólares, podría invertirlos en el banco y recibir 11 424 el año siguiente.

Ya que la segunda oferta tiene un valor presente de 10 200 dólares, mientras que la primera oferta es de sólo 10 000 dólares, el análisis del valor presente también indica que Keith debe aceptar la segunda oferta. En otras palabras, tanto el análisis del valor futuro como el análisis del valor presente conducen a la misma decisión. Y como debe ser, el análisis del valor presente y el análisis del valor futuro siempre deben conducir a la misma decisión.

A pesar de lo sencillo que es este ejemplo, contiene los principios básicos con los que se trabajará a lo largo de los siguientes capítulos. A continuación se presenta otro ejemplo para desarrollar el concepto del valor presente neto.

## EJEMPLO 4.1

**Valor presente** Lida Jennings, analista financiera de Kaufman & Broad, una empresa líder en el área de bienes raíces, considera la posibilidad de recomendar que Kaufman & Broad invierta en un terreno que tiene un costo de 85 000 dólares. Ella está segura de que el próximo año el terreno tendrá un valor de 91 000 dólares, lo que representa una ganancia segura de 6 000 dólares. Dado que la tasa de interés garantizada del banco es de 10%, ¿debe Kaufman & Broad realizar la inversión en el terreno? La alternativa de la señora Jennings se describe en la figura 4.2 con una gráfica del tiempo para el flujo de efectivo.

Un momento de reflexión es todo lo que se requiere para convencerla de que éste no es un negocio atractivo. Si invierte 85 000 dólares en el terreno, tendrá 91 000 dólares disponibles el año siguiente. Suponga

**Figura 4.2** **Flujos de efectivo de la inversión en el terreno**


ahora que Kaufman & Broad invierte los mismos 85 000 dólares en el banco. A una tasa de interés de 10%, estos 85 000 dólares aumentarían así:

$$(1 + .10) \times \$85\,000 = \$93\,500$$

al año siguiente.

Sería ilógico comprar el terreno cuando la inversión de 85 000 dólares en el mercado financiero produciría una cantidad adicional de 2 500 dólares (es decir, 93 500 dólares provenientes del banco menos 91 000 dólares provenientes de la inversión en el terreno). Éste es un cálculo del valor futuro.

Por otra parte, ella podría calcular el valor presente del precio de venta el año siguiente como:

$$\text{Valor presente} = \frac{\$91\,000}{1.10} = \$82\,727.27$$

En razón de que el valor presente del precio de venta del año siguiente es inferior al precio de compra de este año de 85 000 dólares, el análisis del valor presente también indica que ella no debe recomendar la compra de la propiedad.

Con frecuencia, los analistas financieros desean determinar el *costo* o *beneficio* exacto de una decisión. En el ejemplo 4.1, la decisión de comprar este año y de vender el año siguiente se puede evaluar como:

$$-\$2\,273 = \underbrace{-\ \$85\,000}_{\substack{\text{Costo}\\ \text{terreno hoy}}} + \underbrace{\frac{\$91\,000}{1.10}}_{\substack{\text{Valor presente}\\ \text{del precio de venta del año próximo}}}$$

La fórmula del VPN se escribe como sigue:

**Valor presente neto de la inversión:**

$$\text{VPN} = -\text{Costo} + \text{VP} \qquad \textbf{(4.2)}$$

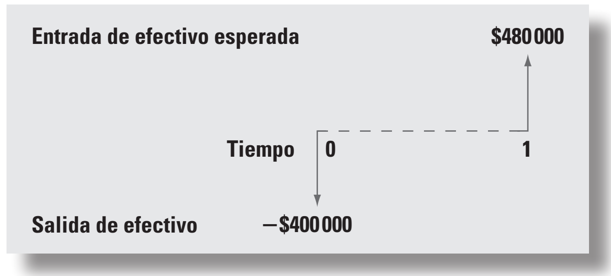
La ecuación 4.2 indica que el valor de la inversión es de −2 273 dólares después de considerar todos los beneficios y todos los costos en la fecha 0. Por lo tanto, se dice que −2 273 dólares es el **valor presente neto (VPN)** de la inversión. Es decir, el VPN es el valor presente de los flujos de efectivo futuros menos el valor presente del costo de la inversión. Debido a que el valor presente neto es negativo, Lida Jennings no debe recomendar la compra del terreno.

Los ejemplos de Vaughn y Jennings transcurren en condiciones de absoluta certeza. Es decir, Keith Vaughn sabe con plena certeza que podría vender su terreno hoy y cobrar 11 424 el año siguiente. De manera similar, Lida Jennings sabe con absoluta certeza que Kaufman & Broad podría recibir 91 000 dólares por la venta de su terreno. Desafortunadamente, con frecuencia los hombres de negocios no conocen los flujos de efectivo futuros. Esta incertidumbre se trata en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4.2**

**Incertidumbre y valuación** Professional Artworks, Inc., es una empresa que especula con arte moderno. El administrador considera la compra de un Picasso original en 400 000 dólares con la intención de venderlo al cabo de un año, pues espera que, al final de ese plazo, la pintura tenga un valor de 480 000 dólares. Los flujos de efectivo relevantes se muestran en la figura 4.3.

**Figura 4.3** **Flujos de efectivo de la inversión en pinturas**




Desde luego, esto es sólo una expectativa, pues la pintura podría valer una cantidad superior o inferior a 480 000 dólares. Suponga que la tasa de interés garantizada que conceden los bancos es de 10%. ¿Debería la empresa comprar la pieza de arte?

La primera idea podría ser llevar a cabo el descuento a la tasa de interés, lo que daría:

$$\frac{\$480\,000}{1.10} = \$436\,364$$

Debido a que 436 364 dólares es una cantidad mayor que 400 000 dólares, a primera vista se podría pensar que conviene comprar la pintura. Sin embargo, el rendimiento que se puede ganar sobre una inversión libre de riesgo es de 10%. Puesto que la pintura es una inversión muy riesgosa, se requiere una tasa de descuento más alta. El administrador elige una tasa de 25% para reflejar este riesgo. En otras palabras, sostiene que un rendimiento esperado de 25% es una compensación justa por una inversión tan riesgosa como lo es esta pintura.

El valor presente de la pintura se convierte en:

$$\frac{\$480\,000}{1.25} = \$384\,000$$

De este modo, el administrador considera que la pintura se encuentra sobrevaluada en 400 000 dólares y no hace la compra.

El análisis anterior es típico de la toma de decisiones en las corporaciones de hoy, aunque los ejemplos del mundo real son, desde luego, mucho más complejos. Por desgracia, cualquier ejemplo con riesgo implica un problema que no se presenta en un ejemplo sin riesgo. En un ejemplo con flujos de efectivo libres de riesgo, la tasa de interés apropiada se puede determinar verificando la que ofrecen algunos bancos. La selección de la tasa de descuento para una inversión riesgosa es una tarea muy difícil. En este momento no sabemos si la tasa de descuento de la pintura del ejemplo 4.2 debería ser de 11, 25, 52% o algún otro porcentaje.

Debido a que la elección de la tasa de descuento es tan difícil, aquí sólo mencionamos el tema. Debemos esperar hasta que el material específico sobre riesgo y rendimiento se cubra en capítulos posteriores para entonces presentar un análisis ajustado por el riesgo.

# 4.2 El caso de periodos múltiples

La sección anterior presentó el cálculo del valor futuro y del valor presente únicamente para un periodo. A continuación se realizarán los cálculos para el caso de periodos múltiples.

## *Valor futuro y capitalización (o composición)*

Suponga que una persona fuera a realizar un préstamo de 1 dólar. Al final del primer año, el prestatario le debería al prestamista el monto principal más el interés sobre el préstamo a la tasa de interés $r$. En el caso específico en el que la tasa de interés es, digamos, de 9%, el prestatario le debe al prestamista:

$$\$1 \times (1 + r) = \$1 \times 1.09 = \$1.09$$

Sin embargo, al final del año, el prestamista tiene dos opciones. Puede optar por retirar del mercado financiero los 1.09 dólares, o de una manera más general $(1 + r)$, o puede dejarlo en el mercado y prestarlo una vez más por un segundo año. El proceso de dejar el dinero en el mercado financiero y prestarlo durante otro año se denomina **capitalización** o **composición**.

Suponga que el prestamista decide capitalizar su préstamo durante otro año. Para ello, toma los fondos del primer año de su préstamo, 1.09 dólares, y presta esta cantidad durante el año siguiente. Al final del año, el prestatario le deberá:

$$\$1 \times (1 + r) \times (1 + r) = \$1 \times (1 + r)^2 = 1 + 2r + r^2$$
$$\$1 \times (1.09) \times (1.09) = \$1 \times (1.09)^2 = \$1 + \$0.18 + \$0.0081 = \$1.1881$$

Éste es el total que recibirá dentro de dos años al capitalizar el préstamo.

En otras palabras, al brindar una oportunidad inmediata para prestar, el mercado de capitales permite al inversionista transformar 1 dólar de hoy en 1.1881 dólares al cabo de dos años. Al final de tres años el efectivo será de $\$1 \times (1.09)^3 = \$1.2950$.

El aspecto más importante que se debe notar aquí es que el monto total que recibe el prestamista no es sólo el dólar que prestó más el valor de dos años de intereses sobre esta cantidad:

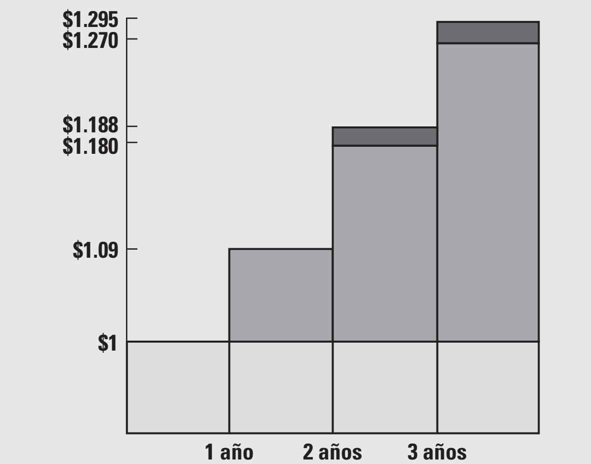
$$2 \times r = 2 \times \$0.09 = \$0.18$$

El prestamista también obtiene un monto de $r^2$, que es el interés en el segundo año sobre el interés que ganó en el primer año. El término $2 \times r$ representa el **interés simple** sobre los dos años, y el término $r^2$ se denomina *interés sobre interés*. En nuestro ejemplo, este último monto es exactamente de:

$$r^2 = (\$0.09)^2 = \$0.0081$$

Cuando el efectivo se invierte a **interés compuesto**, cada pago de intereses se reinvierte. Con interés simple, el interés no se reinvierte. La afirmación de Benjamín Franklin: “El dinero gana dinero y el dinero que gana el dinero gana más dinero” es una forma muy pintoresca de explicar el interés compuesto. La diferencia entre el interés compuesto y el interés simple se ilustra en la figura 4.4. En este ejemplo, la diferencia no es considerable porque el préstamo es de 1 dólar. Si el préstamo fuera de 1 millón, el prestamista recibiría 1 188 100 dólares en un plazo de dos años. De este monto, 8 100 dólares son intereses sobre intereses. La lección es que los números pequeños que aparecen después del punto decimal pueden convertirse en grandes cantidades cuando las transacciones implican grandes cantidades. Además, entre más tiempo dure el préstamo, más importancia asumen los intereses sobre intereses.

**Figura 4.4** **Interés simple y compuesto**




**El área sombreada más oscura indica la diferencia entre el interés compuesto y el interés simple. La diferencia es sustancial a lo largo de un periodo de varios años o décadas.**

La fórmula general de una inversión a lo largo de muchos periodos se puede escribir como:

**Valor futuro de una inversión:**

$$\text{VF} = C_0 \times (1 + r)^{\mathcal{T}} \tag{4.3}$$

donde $C_0$ es el efectivo que se invertirá en la fecha 0 (es decir, hoy), $r$ es la tasa de interés por periodo y $\mathcal{T}$ es el número de periodos en los que se invierte el efectivo.

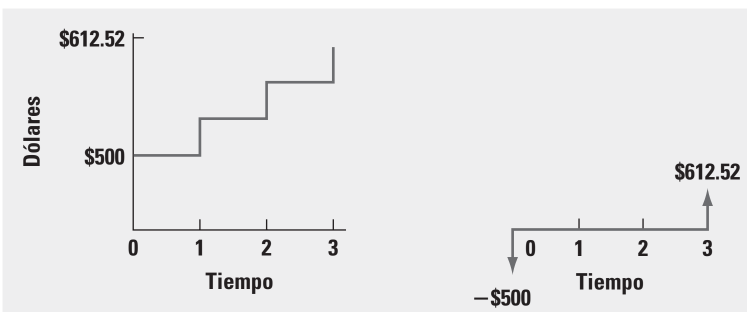
## EJEMPLO 4.3

**Intereses sobre intereses** Suh-Pyng Ku ha depositado 500 dólares en una cuenta de ahorro en el First National Bank of Kent. La cuenta gana 7% capitalizable al año. ¿Qué cantidad tendrá la señora Ku al final de tres años? La respuesta es:

$$\$500 \times 1.07 \times 1.07 \times 1.07 = \$500 \times (1.07)^3 \times \$612.52$$

La figura 4.5 ilustra el crecimiento de la cuenta de Ku.

**Figura 4.5** **Cuenta de ahorro de Suh-Pyng Ku**



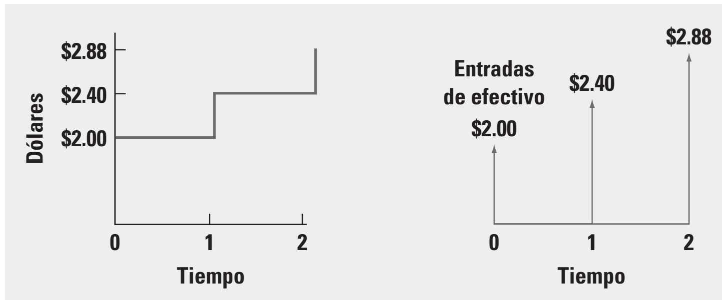
**EJEMPLO 4.4**

**Crecimiento compuesto** Jay Ritter invirtió 1 000 dólares en acciones de SDH Company. Esta empresa paga un dividendo actual de 2 dólares, suma que se espera crezca 20% anual durante los dos años siguientes. ¿Cuál será el dividendo de SDH Company después de dos años? Un cálculo simple da:

$$\$2 \times (1.20)^2 = \$2.88$$

La figura 4.6 ilustra el valor creciente de los dividendos de SDH.

**Figura 4.6** **Crecimiento de los dividendos de SDH**




Los dos ejemplos anteriores se pueden calcular en alguna de varias formas. Los cálculos pueden hacerse a mano, por calculadora, con una hoja electrónica o con la ayuda de una tabla. Introducimos las hojas de cálculo electrónicas un poco más adelante y mostramos el uso de una calculadora en el apéndice 4B del sitio web. La tabla apropiada se encuentra en el cuadro A.3, que aparece al final del texto. Esta tabla presenta *el valor futuro de 1 dólar al final de T periodos*. En la tabla se debe localizar la tasa de interés apropiada sobre la horizontal y el número apropiado de periodos sobre la vertical. Por ejemplo, Suh-Pyng Ku examinaría la siguiente parte del cuadro A.3:

| | Tasa de interés | | |
|---|---|---|---|
| **Periodo** | **6%** | **7%** | **8%** |
| 1 | 1.0600 | 1.0700 | 1.0800 |
| 2 | 1.1236 | 1.1449 | 1.1664 |
| 3 | 1.1910 | $\boxed{1.2250}$ | 1.2597 |
| 4 | 1.2625 | 1.3108 | 1.3605 |

Podría calcular el valor futuro de sus 500 dólares así:

$$\underset{\substack{\text{Inversión}\\ \text{inicial}}}{\$500} \times \underset{\substack{\text{Valor futuro}\\ \text{de 1 dólar}}}{1.2250} = \$612.50$$

En el ejemplo de Suh-Pyng Ku le proporcionamos tanto la inversión inicial como la tasa de interés y luego le pedimos que calcule el valor futuro. En otro caso, la tasa de interés podría desconocerse, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4.5**

**Determinación de la tasa de interés** Carl Voigt, quien hace poco ganó 10 000 dólares en la lotería, desea adquirir un automóvil dentro de cinco años. Carl estima que el automóvil costará 16 105 dólares en ese momento. Sus flujos de efectivo se muestran en la figura 4.7.

¿Qué tasa de interés deberá ganar para poder adquirir el automóvil?

(*continúa*)

**Figura 4.7** **Flujos de efectivo de la compra del automóvil de Carl Voigt**


La razón del precio de compra al efectivo inicial es:

$$\frac{\$16105}{\$10\ 000} = 1.6105$$

Por lo tanto, debe ganar una tasa de interés que permita que 1 dólar se convierta en 1.6105 dólares dentro de cinco años. El cuadro A.3 indica que una tasa de interés de 10% le permitirá comprar el automóvil.

Podemos expresar el problema algebraicamente como:

$$\$10\,000 \times (1 + r)^5 = \$16\ 105$$

donde $r$ es la tasa de interés necesaria para comprar el automóvil. Debido a que $16 105/$10 000 = 1.6105 se tiene:

$$(1 + r)^5 = 1.6105$$
$$r = 10\%$$

Podemos encontrar el valor de $r$ ya sea con la tabla, una hoja de cálculo electrónica o una calculadora manual.

## *El poder de la capitalización: una digresión*

La mayoría de las personas que han tenido alguna experiencia con los procesos de capitalización se han impresionado con su poder en periodos prolongados. Por ejemplo, observe el mercado de valores. Ibbotson y Sinquefield han calculado lo que redituó el mercado de valores en su conjunto desde 1926 hasta 2008.[1] Concluyeron que un dólar colocado en estas acciones al inicio de 1926 habría tenido un valor de 2 049.45 dólares a finales de 2008. Esto equivale a 9.62% compuesto anualmente durante 83 años; es decir, $(1.0962)^{83} = 2\ 049.45$, pasando por alto un pequeño error de redondeo.

El ejemplo ilustra la gran diferencia entre el interés compuesto y el interés simple. A 9.62%, el interés simple sobre 1 dólar es de 9.62 centavos por año. El interés simple a lo largo de 83 años es de $7.98 (= 83 × $0.0962). Es decir, un individuo que retirara 9.62 centavos cada año habría retirado $7.98 (= 83 × $0.0962) durante 83 años. Esto es muy inferior a los 2 049.45 dólares que se obtuvieron mediante la reinversión tanto del principal como de los intereses.

Los resultados son más impresionantes en periodos incluso más prolongados. Una persona sin experiencia en capitalización podría pensar que el valor de 1 dólar al final de 166 años sería el doble del valor de 1 dólar al final de 83 años, si la tasa anual de rendimiento fuese la misma. En realidad, el valor de 1 dólar al final de 166 años sería el *cuadrado* del valor de 1 dólar al final de 83 años. Es decir, si la tasa anual de rendimiento fuera siempre la misma, una inversión de 1 dólar en acciones comunes valdría $4 200 245.30 [=$1 × (2 049.45 × 2 049.45)].

Hace algunos años, un arqueólogo desenterró una reliquia donde se hacía constar que Julio César le prestó el equivalente romano de un centavo a alguien. En razón de que no había registros de que el centavo se hubiera pagado alguna vez, el arqueólogo se preguntó cuál sería

[1] *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation (SBBI). 2009 Yearbook.* Morningstar, Chicago, 2009.

el interés y el principal si un descendiente de Julio César tratara de cobrarle a un descendiente del prestatario en el siglo XX. El arqueólogo consideró que una tasa de 6% podría ser apropiada. Para su sorpresa, el principal y los intereses adeudados después de más de 2 000 años eran muy superiores a la totalidad de la riqueza existente en la Tierra.

El poder de la capitalización puede explicar por qué los padres de las familias adineradas con frecuencia legan su riqueza a sus nietos en lugar de sus hijos. Es decir, saltan una generación. Los padres prefieren hacer a sus nietos muy ricos en lugar de hacer a sus hijos moderadamente ricos. Se ha descubierto que en estas familias los nietos tienen una visión más positiva del poder de la capitalización que los hijos.

**EJEMPLO 4.6**

**¿Cuánto por esa isla?** Algunas personas han afirmado que fue el mejor trato inmobiliario de la historia. En 1626, Peter Minuit, director general de Nuevos Países Bajos, la colonia de la Compañía Neerlandesa de las Indias Occidentales en América del Norte, supuestamente compró la isla de Manhattan a los indígenas norteamericanos por 60 florines de chucherías. En 1667, los holandeses fueron obligados por los británicos a intercambiarla por Surinam (quizá el peor trato inmobiliario de toda la historia). Parece barato; pero, ¿de veras los holandeses obtuvieron la mejor parte del trato? Se dice que 60 florines valían aproximadamente 24 dólares al tipo de cambio vigente en aquel entonces. Si los indígenas hubieran vendido las chucherías a valor de mercado justo y hubieran invertido los 24 dólares a una tasa de 5% (libre de impuestos), hoy, casi 383 años después, valdrían más de 3 100 millones de dólares. Actualmente no hay duda de que Manhattan vale más de 3 100 millones y, por lo tanto, a una tasa de rendimiento de 5% los indígenas se llevaron la peor parte de la transacción. No obstante, si hubieran invertido el dinero a una tasa de 10%, el monto que habrían recibido valdría más o menos:

$$\$24(1 + r)^T = 24 \times 1.1^{383} \cong 171 \text{ cuatrillones de dólares (\$171 seguido de 15 ceros)}$$

¡Un dineral! De hecho, 171 cuatrillones son más de lo que valen todos los bienes raíces del mundo en la actualidad. Observe que nadie en la historia del mundo ha encontrado jamás una inversión que haya redituado 10% anual durante 383 años.

## *Valor presente y descuento*

Sabemos que una tasa de interés anual de 9% permite al inversionista transformar 1 dólar de hoy en 1.1881 dólares después de dos años. Además, nos gustaría saber lo siguiente:

> ¿Qué cantidad necesitaría prestar hoy un inversionista para recibir 1 dólar dentro de dos años?

Algebraicamente, podemos escribir:

$$\text{VP} \times (1.09)^2 = \$1$$

En la ecuación anterior, VP representa el valor presente, el monto de dinero que debe prestar hoy para recibir 1 dólar en un plazo de dos años.

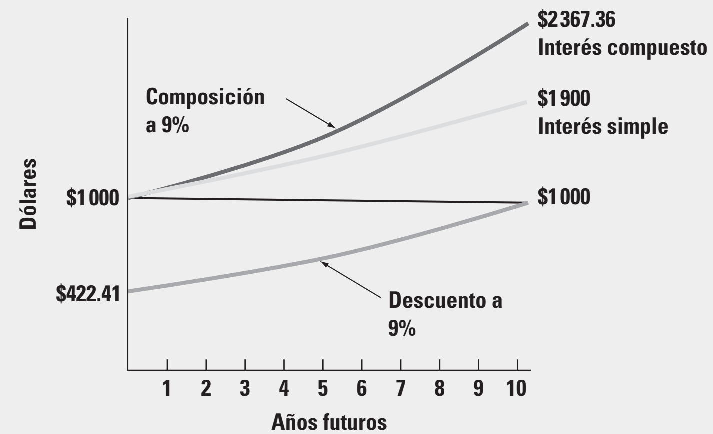
Despejando VP en esta ecuación se obtiene:

$$\text{VP} = \frac{\$1}{1.1881} = \$.84$$

Este proceso de calcular el valor presente de un flujo de efectivo futuro recibe el nombre de **descuento**. Es el opuesto de la capitalización. La diferencia entre capitalización y descuento se ilustra en la figura 4.8.

Para tener la certeza de que 0.84 dólares es en realidad el valor presente de 1 dólar que se recibirá dentro de dos años, se debe verificar si (o no) prestamos hoy 0.84 dólares a plazo de dos años obtendremos exactamente 1 dólar en el momento del reembolso. Si éste fuera

**Figura 4.8**
**Composición y descuento**




**La línea de la parte superior muestra el crecimiento de 1 000 dólares a un interés compuesto con fondos invertidos a 9%: $1 000 × (1.09)10 = $2 367.36. El interés simple se muestra en la siguiente línea. Es de $1 000 + [10 × ($1 000 × .09)] × $1 900. La línea de la parte inferior muestra el valor descontado de 1 000 dólares cuando la tasa de interés es de 9 por ciento.**

el caso, en los mercados de capitales se diría que 1 dólar recibido en un plazo de dos años es equivalente a tener 0.84 dólares ahora. Si se verifican las cifras exactas, se obtiene:

$$\$0.84168 \times 1.09 \times 1.09 = \$1$$

En otras palabras, cuando los mercados de capitales operan con una tasa de interés segura de 9%, a los inversionistas les es indiferente recibir hoy 0.84 dólar o 1 dólar dentro de dos años. No existe razón para tratar estas dos alternativas de una manera diferente porque si hoy se prestan 0.84 dólares por dos años, redituarían 1 dólar al final de ese tiempo. El valor 0.84 [$= 1/(1.09)^2$] recibe el nombre de **factor de valor presente**. Es el factor que se usa para calcular el valor presente de un flujo de efectivo futuro.

En el caso de periodos múltiples, la fórmula del VP se puede escribir como sigue:

**Valor presente de la inversión:**

$$\text{VP} = \frac{C_T}{(1 + r)^T} \qquad \textbf{(4.4)}$$

Aquí, $C_T$ es el flujo de efectivo en la fecha $T$ y $r$ es la tasa de descuento apropiada.

**EJEMPLO 4.7**

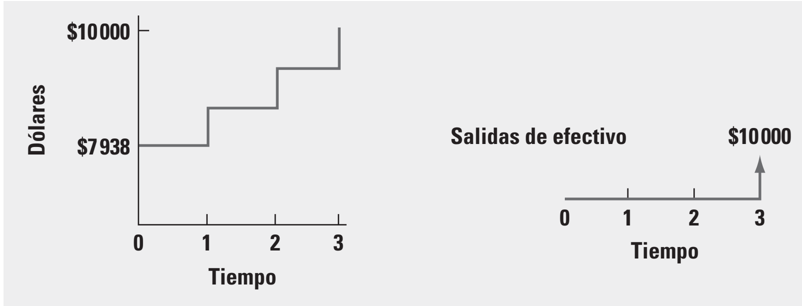
**Descuentos en periodos múltiples** Bernard Dumas recibirá 10 000 dólares dentro de tres años. Bernard puede ganar 8% sobre sus inversiones y, por lo tanto, la tasa de descuento apropiada es de 8%. ¿Cuál es el valor presente de su flujo de efectivo futuro? La respuesta es:

$$\begin{aligned} \text{VP} &= \$10\,000 \times \left(\tfrac{1}{1.08}\right)^3 \\ &= \$10\,000 \times .7938 \\ &= \$7\,938 \end{aligned}$$

La figura 4.9 ilustra la aplicación de factor de valor presente a la inversión de Bernard.

Cuando sus inversiones crecen a una tasa de interés de 8%, Bernard se inclina igualmente a recibir hoy 7 938 dólares o 10 000 dólares en un plazo de tres años. Después de todo, podría convertir los 7 938 dólares que reciba hoy en 10 000 dólares dentro de tres años prestándolos a una tasa de interés de 8 por ciento.

**Figura 4.9** **Descuento de la oportunidad de Bernard Dumas**




Bernard Dumas pudo haber realizado el cálculo de su valor presente en una de varias formas. Pudo haberlo hecho a mano, con una calculadora, con una hoja de cálculo o con la ayuda del cuadro A.1, que aparece al final del texto. Este cuadro presenta el *valor presente de 1 dólar que se recibirá después de T periodos*. Usamos el cuadro para localizar la tasa de interés apropiada en la horizontal y el número apropiado de periodos sobre la vertical. Por ejemplo, Bernard debería mirar la siguiente parte del cuadro A.I:

| | Tasa de interés | | |
|---|---|---|---|
| **Periodo** | **7%** | **8%** | **9%** |
| 1 | .9346 | .9259 | .9174 |
| 2 | .8734 | .8573 | .8417 |
| 3 | .8163 | .7938 | .7722 |
| 4 | .7629 | .7350 | .7084 |

El factor del valor presente apropiado es de .7938.

En el ejemplo anterior proporcionamos tanto la tasa de interés como el flujo de efectivo futuro. En otro caso podría desconocerse la tasa de interés.

## EJEMPLO 4.8

**Determinación de la tasa de interés** Un cliente de Chaffkin Corp. desea comprar hoy un remolcador. En lugar de pagar de inmediato, pagará 50 000 dólares dentro de tres años. A Chaffkin Corp. le costará 38 610 dólares construir el remolcador de inmediato. Los flujos de efectivo relevantes para Chaffkin Corp. se muestran en la figura 4.10. ¿Qué tasa de interés debe cobrar Chaffkin Corp. para no ganar ni perder sobre la venta?

**Figura 4.10** **Flujos de efectivo del remolcador**


*(continúa)*

La razón del costo de construcción (valor presente) a precio de venta (valor futuro) es:

$$\frac{\$38\,610}{\$50\,000} = 0.7722$$

Debemos precisar la tasa de interés que permite que 1 dólar que se recibirá dentro de tres años tenga un valor presente de 0.7722 dólares. El cuadro A.1 indica que esa tasa de interés es de 9 por ciento.

### Determinación del número de periodos

Suponga que nos interesa comprar un activo que cuesta 50 000 dólares. En la actualidad tenemos 25 000 dólares. Si podemos ganar 12% sobre estos 25 000, ¿cuánto tiempo deberemos esperar para tener los 50 000? Para calcular la respuesta se requiere calcular la última variable de la ecuación básica del valor presente, es decir, el número de periodos. Usted ya sabe cómo obtener una respuesta aproximada a este problema específico. Tenga en cuenta que necesita duplicar el dinero. Por la regla de 72 (vea el problema 75 al final del capítulo), esto tardará alrededor de 72/12 = 6 años a 12 por ciento.

Para calcular la respuesta exacta, podemos manipular de nuevo la ecuación básica del valor presente. El valor presente es de 25 000 dólares, y el valor futuro es de 50 000 dólares. Con una tasa de descuento de 12%, la ecuación básica asume una de las siguientes formas:

$$\$25\,000 = \$50\,000/1.12^t$$
$$\$50\,000/25\,000 = 1.12^t = 2$$

Así tenemos un factor de valor futuro de 2 para una tasa de 12%. Ahora necesitamos calcular $t$. Examine la columna del cuadro A.1 que corresponde a 12% y verá que un factor de valor futuro de 1.9738 se presenta a los seis periodos. Por consiguiente, se necesitarán casi seis años, como calculamos antes. Para obtener la respuesta exacta, es preciso que despejemos explícitamente $t$ (con una calculadora financiera o la hoja de cálculo de la siguiente página). Si lo hace, verá que la respuesta es 6.1163 años, así que nuestra aproximación anterior fue bastante acertada en este caso.

**EJEMPLO 4.9**

**Esperando a Godot** Usted ha estado ahorrando para comprar Godot Company. El costo total será de 10 millones de dólares. En la actualidad tiene casi 2.3 millones de dólares. Si puede ganar 5% sobre el dinero, ¿cuánto tiempo tendrá que esperar? A la tasa de 16%, ¿cuánto tiempo esperará?

A 5% tendrá que esperar mucho tiempo. Usando la ecuación básica del valor presente:

$$\$2.3 \text{ millones} = \$10 \text{ millones}/1.05^t$$
$$1.05^t = 4.35$$
$$t = 30 \text{ años}$$

A 16%, la situación es un poco mejor. Verifique por su cuenta que necesitará esperar 10 años.

Aprenda más sobre el uso de Excel para realizar cálculos de valor en el tiempo y de otro tipo en **www.studyfinance.com**

Con frecuencia, un inversionista o empresa recibe más de un flujo de efectivo. El valor presente del conjunto de flujos de efectivo es simplemente la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo individuales, lo cual se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

## APLICACIONES DE HOJA DE CÁLCULO

### Uso de una hoja de cálculo electrónica para obtener el valor del dinero en el tiempo

Cada vez más, los empleados de muchas áreas (no sólo de finanzas y contabilidad) usan hojas de cálculo electrónicas para realizar todos los tipos de cálculos que se necesitan en situaciones reales. Como resultado, en esta sección le explicaremos cómo usar una hoja de cálculo para resolver los diversos problemas de valor del dinero en el tiempo que se presentan en este capítulo. Usaremos Microsoft Excel™, aunque los comandos son parecidos en otros tipos de software. Suponemos que usted está familiarizado con las operaciones básicas de las hojas de cálculo.

Como lo hemos visto, se puede resolver cualquiera de las siguientes cuatro posibles incógnitas: valor futuro, valor presente, tasa de descuento o número de periodos. Con una hoja de cálculo hay una fórmula específica para cada una de estas incógnitas. En Excel se muestran en el siguiente cuadro.

| Para obtener | Escriba esta fórmula |
|---|---|
| Valor futuro | = VF (tasa,nper,pago,vp) |
| Valor presente | = VA (tasa,nper,pago,vf) |
| Tasa de descuento | = TASA (nper,pago,vp,vf) |
| Número de periodos | = NPER (tasa,pago,vp,vf) |

En estas fórmulas, vp y vf son valor presente y valor futuro; nper es el número de periodos y tasa es la tasa de descuento o interés.

Hay dos detalles con los que se debe tener cuidado aquí. Primero, a diferencia de una calculadora financiera, la hoja de cálculo requiere que la tasa se escriba como decimal. Segundo, como ocurre con la mayoría de las calculadoras financieras, se debe escribir un signo negativo ya sea en el valor presente o en el valor futuro para obtener la tasa o el número de periodos. Por la misma razón, si el cálculo es para obtener el valor presente, el resultado tendrá signo negativo, a menos que se escriba un valor futuro negativo. Lo mismo tiene aplicación cuando se calcula el valor futuro.

Para ilustrar cómo debe usar estas fórmulas, de nuevo resolveremos un ejemplo del capítulo. Si usted invierte 25 000 dólares, al 12% anual, ¿cuánto tiempo necesita para obtener 50 000 dólares? Deberá preparar una hoja de cálculo así:

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | **Uso de una hoja de cálculo electrónica para obtener el valor del dinero en el tiempo** | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | Si invertimos 25000 dólares a 12% anual, ¿cuánto tiempo se necesita para tener 50000 dólares? Necesitamos | | | | | | | |
| 5 | obtener el número desconocido de periodos, por lo que se usa la fórmula NPER (tasa,pago,vp,vf). | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | Valor presente (vp): | $25000 | | | | | | |
| 8 | Valor futuro (vf): | $50000 | | | | | | |
| 9 | Tasa (tasa): | .12 | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | Periodos: | **6.1162554** | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | La fórmula que se insertó en la celda B11 es =NPER(B9,0,-B7,B8); tenga en cuenta que el pago es cero y que el valor | | | | | | | |
| 14 | presente tiene signo negativo. Observe también que la tasa insertada es un decimal y no un porcentaje. | | | | | | | |

## EJEMPLO 4.10

**Valuación del flujo de efectivo** Kyle Mayer acaba de ganar la lotería del estado de Kentucky y recibirá la siguiente serie de flujos de efectivo a lo largo de los próximos dos años:

| Año | Flujo de efectivo |
|---|---|
| 1 | $20 000 |
| 2 | 50 000 |

(*continúa*)

El señor Mayer puede ganar actualmente 6% en su cuenta del mercado de dinero y, por lo tanto, la tasa de descuento apropiada es de 6%. El valor presente de los flujos de efectivo es:

| Año | Flujo de efectivo × Factor de valor presente = Valor presente |
|---|---|
| 1 | $\$20\,000 \times \frac{1}{1.06} = \$20\,000 \times \frac{1}{1.06} = \$18\,867.9$ |
| 2 | $\$50\,000 \times \left(\frac{1}{1.06}\right)^2 = \$50\,000 \times \frac{1}{(1.06)^2} = \underline{\$44\,499.8}$ |
| | Total $63 367.7 |

En otras palabras, el señor Mayer se sentirá del mismo modo inclinado a recibir hoy 63 367.7 dólares o recibir 20 000 y 50 000 a lo largo de los próximos dos años.

## EJEMPLO 4.11

**VPN** Finance.com tiene la oportunidad de invertir en una nueva computadora de alta velocidad que tiene un costo de 50 000 dólares. Esta computadora generará flujos de efectivo (provenientes de los ahorros en costos) de 25 000 dólares dentro de un año, 20 000 al cabo de dos años y 15 000 en un plazo de tres años. La computadora no valdrá nada después de tres años y no habrá ningún flujo de efectivo adicional. Finance.com ha determinado que la tasa de descuento apropiada de esta inversión es de 7%. ¿Debe Finance.com hacer esta inversión en una nueva computadora de alta velocidad? ¿Cuál es el valor presente neto de la inversión?

Los flujos de efectivo y los factores de valor presente de la computadora propuesta son como se describen a continuación:

| | Flujos de efectivo | Factor de valor presente |
|---|---|---|
| Año 0 | −$50 000 | $1 = 1$ |
| 1 | $25 000 | $\frac{1}{1.07} = .9346$ |
| 2 | $20 000 | $\left(\frac{1}{1.07}\right)^2 = .8734$ |
| 3 | $15 000 | $\left(\frac{1}{1.07}\right)^2 = .8163$ |

El valor presente del flujo de efectivo es:

Flujos de efectivo × Factor de valor presente = Valor presente

| | | | |
|---|---|---|---|
| Año 0 | −$50 000 × 1 | = | −$50 000 |
| 1 | $25 000 × .9346 | = | $23 365 |
| 2 | $20 000 × .8734 | = | $17 468 |
| 3 | $15 000 × .8163 | = | $12 244.5 |
| | | Total: | $ 3 077.5 |

Finance.com debe invertir en la nueva computadora de alta velocidad porque el valor presente de sus flujos de efectivo futuros es mayor que su costo. El VPN es de 3 077.5 dólares.

### *La fórmula algebraica*

Para derivar una fórmula algebraica del valor presente neto de un flujo de efectivo, recuerde que el valor presente de recibir un flujo de efectivo dentro de un año es:

$$\text{VP} = C_1/(1+r)$$

y el valor presente de recibir un flujo de efectivo dentro de dos años es:

$$\text{VP} = C_2/(1+r)^2$$

Podemos escribir el VPN de un proyecto de $\mathcal{T}$ periodos de este modo:

$$\text{VPN} = -C_0 + \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_{\mathcal{T}}}{(1+r)^{\mathcal{T}}} = -C_0 + \sum_{i=1}^{\mathcal{T}} \frac{C_i}{(1+r)^i} \qquad \textbf{(4.5)}$$

El flujo inicial, $-C_0$, se supone negativo porque representa una inversión. $\Sigma$ es el símbolo de suma de la serie.

Para concluir esta sección responderemos la pregunta que planteamos al inicio del capítulo sobre el contrato del jugador de beisbol Mark Teixeira. Recuerde que el contrato estipulaba un bono de 5 millones de dólares pagaderos de inmediato, más un salario de 175 millones de dólares distribuidos como anualidades de 20 millones en 2009 y 2010, y 22.5 millones anuales de 2011 a 2016. Si la tasa de descuento apropiada es de 12%, ¿qué trato le propuso el equipo de los Yankees de Nueva York al jugador de primera base?

Para responder esta pregunta podemos calcular el valor presente descontando el salario de cada año hasta el presente como se describe a continuación (observe que se ha supuesto que los salarios futuros se pagarán al final del año):

$$\begin{aligned}
&\text{Año 0: } \$\ 5\,000\,000 && = \$\ 5\,000\,000\\
&\text{Año 1: } \$20\,000\,000 \times 1/1.12 && = \$17\,857\,142.86\\
&\text{Año 2: } \$20\,000\,000 \times 1/1.12^2 && = \$15\,943\,877.55\\
&\text{Año 3: } \$22\,500\,000 \times 1/1.12^3 && = \$16\,015\,055.58\\
&\quad\vdots \qquad \vdots\\
&\text{Año 8: } \$22\,500\,000 \times 1/1.12^8 && = \$9\,087\,372.63
\end{aligned}$$

Si usted llena las hileras que faltan y luego efectúa la suma (hágalo para practicar), verá que el contrato de Teixeira tenía un valor presente de casi 112.55 millones de dólares, o sólo aproximadamente 63% del valor anunciado de 180 millones de dólares, pero aun así es muy buen dinero.

## 4.3 Periodos de composición

Hasta este momento hemos supuesto que las capitalizaciones y los descuentos ocurren en forma anual. Algunas veces las capitalizaciones se dan con mayor frecuencia que sólo una vez al año. Por ejemplo, imagine que un banco paga una tasa de interés de 10% "capitalizable semestralmente". Esto significa que un depósito de 1 000 dólares en el banco tendría un valor de $1 000 × 1.05 = 1 050 dólares después de seis meses, y de $1 050 × 1.05 = 1 102.50 dólares al final del año.

La riqueza al final del año se puede escribir como:

$$\$1\,000\left(1 + \frac{.10}{2}\right)^2 = \$1\,000 \times (1.05)^2 = \$1102.50$$

Desde luego, un depósito de 1 000 valdría $1 100 (= $1 000 × 1.10) con capitalización anual. Observe que el valor futuro al final de un año es mayor con capitalizaciones semestrales que con capitalizaciones anuales. Con una capitalización anual, los 1 000 dólares originales siguen siendo la base de la inversión de todo el año. Con capitalización semestral, los 1 000 dólares originales son la base de inversión de los seis primeros meses. A lo largo de los siguientes seis meses la base es de 1 050 dólares. Por lo tanto, con una capitalización semestral se obtienen *intereses sobre intereses*.

Debido a que $1 000 $\times$ 1.1025 = 1 102.50 dólares, 10% capitalizable semestralmente es lo mismo que 10.25% capitalizado al año. En otras palabras, un inversionista racional sería indiferente si se le cotiza una tasa de 10% compuesta semestralmente o una tasa de 10.25% compuesta en forma anual.

Una capitalización trimestral de 10% reditúa al final de un año una riqueza de:

$$\$1\,000\left(1+\frac{.10}{4}\right)^4 = \$1103.81$$

En términos más generales, al capitalizar una inversión $m$ veces al año se obtiene una riqueza al final de año de:

$$C_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^m \tag{4.6}$$

donde $C_0$ es la inversión inicial y $r$ es la **tasa de interés anual estipulada**. La tasa de interés anual estipulada es la tasa de interés anual sin considerar las capitalizaciones. Los bancos y otras instituciones financieras pueden usar otros nombres para la tasa de interés anual estipulada. Es posible que el sinónimo más común sea el de **tasa porcentual anual (TPA)**.

## EJEMPLO 4.12

**TAE** ¿Cuál será la riqueza al final del año si Jane Christine recibe una tasa de interés anual estipulada de 24% compuesta mensualmente sobre una inversión de 1 dólar?

Usando la ecuación 4.6, su riqueza será de:

$$\$1\left(1+\frac{.24}{12}\right)^{12} = \$1\times(1.02)^{12}$$
$$= \$1.2682$$

La tasa de rendimiento anual es de 26.82%. Esta tasa anual de rendimiento recibe el nombre de **tasa anual efectiva (TAE)** o **rendimiento anual efectivo (RAE)**. Debido a las capitalizaciones, la tasa de interés anual efectiva es mayor que la tasa de interés anual estipulada de 24%. Algebraicamente, podemos volver a escribir la tasa de interés anual efectiva como sigue:

**Tasa anual efectiva:**

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 \tag{4.7}$$

Con frecuencia, a los estudiantes les incomoda la sustracción de 1 en la ecuación 4.7. Observe que la riqueza al final del año está compuesta tanto por el interés ganado a lo largo del año como por el principal original. El principal original se elimina sustrayendo 1 en la ecuación 4.7.

## EJEMPLO 4.13

**Frecuencias de capitalización** Si la tasa de interés anual estipulada de 8% se capitaliza trimestralmente, ¿cuál será la tasa anual efectiva?

Usando la ecuación 4.7 se tiene:

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{.08}{4}\right)^4 - 1 = .0824 = 8.24\%$$

De vuelta al ejemplo original donde $C_0$ = 1 000 dólares y $r$ = 10%, se puede generar el siguiente cuadro:

| $C_0$ | Frecuencia de capitalización ($m$) | $C_1$ | Tasa anual efectiva = $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$ |
|---|---|---|---|
| $1 000 | Anual ($m$ = 1) | $1 100.00 | .10 |
| 1 000 | Semestral ($m$ = 2) | 1 102.50 | .1025 |
| 1 000 | Trimestral ($m$ = 4) | 1 103.81 | .10381 |
| 1 000 | Diaria ($m$ = 365) | 1 105.16 | .10516 |

## Distinción entre tasa de interés anual estipulada y tasa anual efectiva

Con frecuencia, la distinción entre la tasa de interés anual estipulada (TIAE), o TPA, y la tasa anual efectiva (TAE) es problemática para los estudiantes. Podemos reducir la confusión al poner de relieve que la TIAE es significativa sólo si se proporciona el intervalo de capitalización. Por ejemplo, para una TIAE de 10%, el valor futuro al final de un año con capitalizaciones semestrales es de $[1 + (.10/2)]^2 = 1.1025$. El valor futuro con capitalizaciones trimestrales es de $[1 + (.10/4)]^4 = 1.1038$. Si la TIAE es de 10%, pero no se da un intervalo de capitalización, no podemos calcular el valor futuro. En otras palabras, no sabemos si se debería capitalizar semestralmente, trimestralmente o tomando como base algún otro intervalo.

En contraste, la TAE es significativa *sin* un intervalo de capitalización. Por ejemplo, una TAE de 10.25% significa que una inversión de 1 dólar tendrá un valor de 1.1025 dólares dentro de un año. Podemos pensar en esto como una TIAE de 10% con capitalizaciones semestrales o como una TIAE de 10.25% con capitalizaciones anuales, o alguna otra posibilidad.

Puede haber una gran diferencia entre una TIAE y una TAE cuando las tasas de interés son grandes. Por ejemplo, considere los "préstamos del día de pago". Éstos son préstamos a corto plazo que se otorgan a los consumidores, frecuentemente a un plazo menor que dos semanas y los ofrecen compañías como AmeriCash Advance y National Payday. Los préstamos funcionan de la siguiente manera: usted gira hoy un cheque posdatado. Cuando llega la fecha del cheque, usted va a la tienda y paga en efectivo el importe de éste o la empresa lo cambia. Por ejemplo, AmeriCash Advance le permite girar un cheque posdatado de 125 dólares a cobrar 15 días después. En este caso, hoy le darían 100 dólares al librador. Por lo tanto, ¿cuál es la TPA y la TAE de este acuerdo? Primero, necesitamos encontrar la tasa de interés, lo cual podemos hacer mediante la ecuación de VF como sigue:

$$\begin{aligned} \text{VF} &= \text{VP}(1 + r)^T \\ \$125 &= \$100 \times (1 + r)^1 \\ 1.25 &= (1 + r) \\ r &= .25 \text{ o } 25\% \end{aligned}$$

Esto no se ve mal sino hasta que usted recuerda que ésta es la tasa de interés ¡a *15 días*! En consecuencia, la TPA del préstamo es:

$$\begin{aligned} \text{TPA} &= .25 \times 365/15 \\ \text{TPA} &= 6.0833 \text{ o } 608.33\% \end{aligned}$$

Por su parte, la TAE de este préstamo es:

$$\text{TAE} = (1 + r/m)^m - 1$$
$$\text{TAE} = (1 + .25)^{365/15} - 1$$
$$\text{TAE} = 227.1096 \text{ o } 22\,710.96\%$$

¡Vaya tasa de interés! Sólo para entender la diferencia que implica un día (o tres), examinemos los términos de National Payday. Esta compañía le permite girar un cheque posdatado por la misma cantidad, pero le concederá 18 días para pagarlo. Compruebe que la TPA de este acuerdo es de 506.94% y que la TAE es de 9 128.26%. Esta tasa es más baja, pero no es un préstamo que acostumbramos recomendar.

### *Capitalización a varios años*

La ecuación 4.6 se aplica para una inversión de un año. En el caso de una inversión a plazo de uno o más años ($T$), la fórmula se convierte en:

**Valor futuro con capitalización:**

$$\text{VF} = C_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mT} \tag{4.8}$$

**EJEMPLO 4.14**

**Capitalización a varios años** Harry DeAngelo invierte 5 000 dólares a una tasa de interés anual estipulada de 12% anual, compuesta trimestralmente, durante cinco años. ¿Cuál será su riqueza al final de cinco años?

Con base en la ecuación 4.8, su riqueza será de:

$$\$5\,000 \times \left(1 + \frac{.12}{4}\right)^{4\times5} = \$5\,000 \times (1.03)^{20} = \$5\,000 \times 1.8061 = \$9\,030.50$$

### *Capitalización continua*

La exposición anterior muestra que podemos capitalizar de manera mucho más frecuente que una sola vez al año. Se podría capitalizar semestralmente, trimestralmente, mensualmente, diariamente, por hora, cada minuto o incluso con mayor frecuencia. El caso límite sería capitalizar cada instante infinitesimal, lo que de ordinario se conoce como **capitalización continua**. De manera sorprendente, los bancos y otras instituciones financieras algunas veces cotizan tasas compuestas continuamente, y por esto las estudiamos.

Aunque la idea de capitalizar con esa rapidez aturde a cualquiera, sólo se requiere una fórmula sencilla. Con una capitalización continua, el valor al final de $T$ años se expresa como:

$$C_0 \times e^{rT} \tag{4.9}$$

donde $C_0$ es la inversión inicial, $r$ es la tasa de interés anual estipulada y $T$ es el número de años que abarca la inversión. El número $e$ es una constante y es aproximadamente igual a 2.718. No es una incógnita como $C_0$, $r$ y $T$.

**EJEMPLO 4.15**

**Capitalización continua** Linda DeFond invirtió 1 000 dólares a una tasa compuesta continuamente de 10% durante un año. ¿Cuál será el valor de su riqueza al final de un año?

Con base en la ecuación 4.9 tenemos:

$$\$1\,000 \times e^{0.10} = \$1\,000 \times 1.1052 = \$1\,105.20$$

Esta cifra se puede leer fácilmente en el cuadro A.5. Tan sólo se establece *r*, el valor sobre la dimensión horizontal, en 10%, y *T*, el valor sobre la dimensión vertical, en 1. Para este problema, la porción relevante del cuadro se muestra aquí:

| Periodo ($T$) | Tasa compuesta continuamente ($r$) | | |
|---|---|---|---|
| | 9% | 10% | 11% |
| 1 | 1.0942 | $\boxed{1.1052}$ | 1.1163 |
| 2 | 1.1972 | 1.2214 | 1.2461 |
| 3 | 1.3100 | 1.3499 | 1.3910 |

Observe que una tasa compuesta continuamente de 10% es equivalente a una tasa compuesta anualmente de 10.52%. En otras palabras, a Linda DeFond le da lo mismo que el banco le cotice una tasa compuesta continuamente a 10% que una tasa compuesta anualmente a 10.52 por ciento.

## EJEMPLO 4.16

**Capitalización continua** El hermano de Linda DeFond, Mark, invirtió 1 000 dólares a una tasa compuesta continuamente de 10% a plazo de dos años.

Aquí, la fórmula apropiada es:

$$\$1\,000 \times e^{.10\times 2} \times \$1\,000 \times e^{.20} = \$1\,221.40$$

Con base en la parte de la tabla de tasas compuestas continuamente que se muestra en el ejemplo anterior se determina que el valor es de 1.2214.

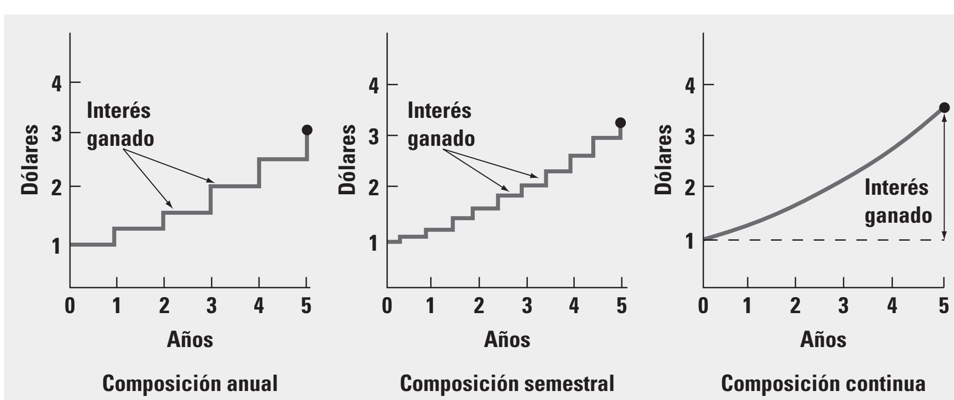
La figura 4.11 ilustra la relación entre las capitalizaciones anuales, semestrales y continuas. Las capitalizaciones semestrales dan lugar a una curva más suave, así como a un valor final más alto que una capitalización anual. Las capitalizaciones continuas tienen tanto la curva más suave como el valor final más alto de todos.

## EJEMPLO 4.17

**Valor presente con capitalización continua** La lotería del estado de Michigan va a pagarle 100 000 dólares al final de cuatro años. Si la tasa de interés anual compuesta continuamente es de 8%, ¿cuál será el valor presente de este pago?

$$\$100\,000 \times \frac{1}{e^{.80\times 4}} = \$100\,000 \times \frac{1}{1.3771} = \$72\,616.37$$

**Figura 4.11**
**Composición anual, semestral y continua**



# 4.4 Simplificaciones

En la primera parte de este capítulo se examinaron los conceptos de valor futuro y valor presente. Aunque estos conceptos nos permiten responder una gran cantidad de problemas relacionados con el valor del dinero en el tiempo, el esfuerzo humano que requieren puede ser excesivo. Por ejemplo, considere el caso de un banco que calcula el valor presente de una hipoteca mensual a 20 años. Esta hipoteca tiene 240 (= 20 × 12) pagos, por lo que se necesita mucho tiempo para realizar una tarea conceptualmente sencilla.

Debido a que en potencia muchos problemas financieros requieren mucho tiempo, es necesario hacer algunas simplificaciones en esta sección. Por ello proporcionamos fórmulas de simplificación de cuatro clases de series de flujos de efectivo:

- Perpetuidad.
- Perpetuidad creciente.
- Anualidad.
- Anualidad creciente.

## *Perpetuidad*

Una **perpetuidad** es una serie constante de flujos de efectivo sin fin. Si usted cree que las perpetuidades no tienen relevancia en la realidad, le sorprenderá saber que hay un caso muy conocido de una serie de flujo de efectivo sin fin: los bonos británicos denominados *consols*. Un inversionista que compre un consol tiene derecho a recibir interés anual del gobierno británico para siempre.

¿Cómo se puede determinar el precio de un consol? Considere un consol que paga un cupón de $C$ dólares cada año y seguirá haciéndolo por siempre. Simplemente, al aplicar la fórmula del valor presente nos da:

$$\text{VP} = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots$$

donde los puntos que aparecen al final de la fórmula representan la serie infinita de términos que continúan la fórmula. Series como la anterior reciben el nombre de *series geométricas*. Es bien sabido que aun cuando tienen un número infinito de términos, la totalidad de la serie tiene una suma finita porque cada término es sólo una fracción del término precedente. Sin embargo, antes de recurrir a nuestros libros de cálculo, vale la pena volver a nuestros principios originales para ver si un poco de intuición financiera nos puede ayudar a encontrar el valor presente.

El valor presente del consol es el valor presente de la totalidad de sus cupones futuros. En otras palabras, es una cantidad de dinero que, si un inversionista la tuviera hoy, le permitiría lograr el mismo patrón de gastos que le proporcionarían el consol y sus cupones. Suponga que un inversionista deseara gastar exactamente $C$ dólares cada año. Si tuviera el consol, podría hacerlo. ¿Qué cantidad de dinero debe tener hoy para gastar la misma cantidad? Es evidente que necesitaría una cantidad exactamente suficiente de tal modo que el interés sobre el dinero fuera de $C$ dólares por año. Si tuviera algo más, podría gastar más de $C$ dólares cada año. Si tuviera menos, al final se quedaría sin dinero si gastara $C$ dólares por año.

El monto que le dará al inversionista $C$ dólares cada año, y por lo tanto el valor presente del consol, es simplemente:

$$\text{VP} = \frac{C}{r} \tag{4.10}$$

Para confirmar que ésta es la respuesta correcta, observe que si se presta el monto $C/r$, el interés que gana cada año será de:

$$\text{Intereses} = \frac{C}{r} \times r = C$$

que es exactamente el pago del consol. Hemos llegado a la fórmula para determinar el valor de un consol:

**Fórmula del valor presente de una perpetuidad:**

$$\text{VP} = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots \qquad \textbf{(4.11)}$$

$$= \frac{C}{r}$$

Es reconfortante saber lo fácil que es usar un poco de intuición financiera para resolver este problema matemático.

**EJEMPLO 4.18**

**Perpetuidades** Considere una perpetuidad que paga 100 dólares al año. Si la tasa de interés relevante es de 8%, ¿cuál será el valor del consol?

Mediante la ecuación 4.10 se tiene:

$$\text{VP} = \frac{\$100}{.08} = \$1\,250$$

Ahora suponga que la tasa de interés disminuye a 6%. Al aplicar la ecuación 4.10 el valor presente de la perpetuidad es:

$$\text{VP} = \frac{\$100}{.06} = \$1\,666.67$$

Observe que el valor de la perpetuidad aumenta cuando disminuye la tasa de interés. A la inversa, el valor de la perpetuidad baja cuando la tasa de interés se incrementa.

### *Perpetuidad creciente*

Imagine un edificio de apartamentos donde los flujos de efectivo para el arrendador después de gastos serán de 100 000 dólares el año siguiente. Se espera que estos flujos de efectivo aumenten a una tasa de 5% anual. Si se supone que este aumento continuará de manera indefinida, la serie de flujos de efectivo se denomina **perpetuidad creciente**. La tasa de interés relevante es de 11%. Por lo tanto, la tasa de descuento apropiada es de 11% y el valor presente de los flujos de efectivo se puede representar como:

$$\text{VP} = \frac{\$100\,000}{1.11} + \frac{\$100\,000(1.05)}{(1.11)^2} + \frac{\$100\,000(1.05)^2}{(1.11)^3} + \cdots + \frac{\$100\,000(1.05)^{N-1}}{(1.11)^N} + \cdots$$

Algebraicamente, podemos escribir la fórmula de este modo:

$$\text{VP} = \frac{C}{1+r} + \frac{C \times (1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C \times (1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C \times (1+g)^{N-1}}{(1+r)^N} + \cdots$$

donde $C$ es el flujo de efectivo que se recibirá después de un periodo, $g$ es la tasa de crecimiento por periodo, expresada como porcentaje, y $r$ es la tasa de descuento apropiada.

Por fortuna, esta fórmula se simplifica de la siguiente manera:

**Fórmula del valor presente de una perpetuidad creciente:**

$$\text{VP} = \frac{C}{r-g} \qquad \textbf{(4.12)}$$

Con base en la ecuación 4.12, el valor presente de los flujos de efectivo del edificio de apartamentos es:

$$\frac{\$100\,000}{.11 - .05} = \$1\,666\,667$$

Existen tres puntos de importancia relacionados con la fórmula de la perpetuidad creciente:

1. *El numerador*. El numerador de la ecuación 4.12 es el flujo de efectivo después de un periodo, no en la fecha 0. Considere el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4.19**

**Pago de dividendos** Popovich Corporation está *a punto* de pagar un dividendo de 3.00 dólares por acción. Los inversionistas prevén que el dividendo anual aumentará 6% para siempre. La tasa de descuento aplicable es de 11%. ¿Cuál es el precio actual de las acciones?

El numerador de la ecuación 4.12 es el flujo de efectivo que se recibirá en el siguiente periodo. Debido a que la tasa de crecimiento es de 6%, el dividendo del próximo año será de \$3.18 (= \$3.00 × 1.06). Hoy, el precio de las acciones es:

$$\$66.60 = \underbrace{\$3.00}_{\text{Dividendo inminente}} + \underbrace{\frac{\$3.18}{.11 - .06}}_{\text{Valor presente de todos los dividendos, empezando dentro de un año}}$$

El precio de 66.60 dólares incluye tanto el dividendo que se va a recibir de inmediato como el valor presente de todos los dividendos que empezarán a recibirse dentro de un año, contado a partir de hoy. La ecuación 4.12 permite calcular sólo el valor presente de todos los dividendos que empezarán a percibirse dentro de un año a partir de hoy. Asegúrese de comprender este ejemplo; las preguntas de examen sobre este tema siempre parecen crear confusión en algunos estudiantes.

2. *Tasas de descuento y de crecimiento.* La tasa de descuento $r$ debe ser mayor que la tasa de crecimiento $g$ para que la fórmula de la perpetuidad creciente sea válida. Considere el caso en el que la magnitud de la tasa de crecimiento se aproxima a la de la tasa de interés. Entonces, el denominador de la fórmula de la perpetuidad creciente se vuelve infinitesimalmente pequeño y el valor presente crece hasta llegar a ser infinitamente grande. En realidad, el valor presente es indefinido cuando $r$ es inferior a $g$.
3. *El supuesto de la periodicidad.* Por lo general, el efectivo fluye hacia adentro y hacia afuera de las empresas del mundo real tanto en forma aleatoria como casi continua. Sin embargo, la ecuación 4.12 supone que los flujos de efectivo se reciben y se pagan con base en puntos regulares y discretos en el tiempo. En el ejemplo del apartamento se supuso que los flujos de efectivo netos de 100 000 dólares ocurrían sólo una vez al año. En realidad, los cheques de las rentas se reciben de ordinario cada mes. Los pagos de mantenimiento y otros gastos pueden efectuarse en cualquier momento del año.

   Podemos aplicar la fórmula de la perpetuidad creciente de la ecuación 4.12 sólo cuando se supone un patrón regular y discreto de flujos de efectivo. Aunque este supuesto es razonable porque la fórmula ahorra mucho tiempo, el usuario nunca debe olvidar que es un *supuesto*. Este punto se mencionará de nuevo en los capítulos que se presentan más adelante.

Es importante decir algunas palabras acerca de la terminología. Por lo general, los autores de los libros de texto de finanzas usan uno de dos convencionalismos para referirse al tiempo. Una minoría de ellos trata los flujos de efectivo como si se recibieran en *fechas* exactas; por ejemplo, en la fecha 0, en la fecha 1, y así sucesivamente. De acuerdo con este convencionalismo, la fecha 0 representa el tiempo presente. Sin embargo, debido a que un año es un intervalo y no un momento específico en el tiempo, la gran mayoría de los autores se refiere a flujos de efectivo que ocurren al final de un año (o en otro caso, al final de un *periodo*). Según este convencionalismo del *fin de año*, el final del año 0 es el presente, el final del año 1 ocurre un periodo después y así en lo sucesivo. (El inicio del año cero ya ha pasado y en general no se hace referencia a él.)[2]

[2] Algunas veces, los expertos en finanzas hablan meramente de un flujo de efectivo en el año $x$. Aunque esta terminología es ambigua, se refieren por lo general *al final del año x*.

La permutabilidad de los dos convencionalismos se puede ver en la siguiente gráfica:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fecha 0 = Ahora | Fecha 1 | Fecha 2 | Fecha 3 | ... |
| Fin del año 0 = Ahora | Fin del año 1 | Fin del año 2 | Fin del año 3 | ... |

Creemos en forma consistente que el *convencionalismo de las fechas* reduce la ambigüedad. Sin embargo, utilizamos ambos convencionalismos porque es probable que usted vea el *convencionalismo del fin de año* en capítulos posteriores. De hecho, ambos convencionalismos pueden aparecer en el mismo ejemplo con propósitos de práctica.

## Anualidad

Una **anualidad** es una serie uniforme de pagos regulares que dura un número fijo de periodos. Como es de esperarse, las anualidades se cuentan entre los tipos más comunes de instrumentos financieros. Con frecuencia, las pensiones que reciben los jubilados se pagan en la forma de una anualidad. Los arrendamientos y las hipotecas también suelen ser anualidades.

Para determinar el valor presente de una anualidad es necesario evaluar la siguiente ecuación:

$$\frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^T}$$

El valor presente de recibir los cupones de únicamente $T$ periodos debe ser inferior al valor presente de un consol, pero, ¿cuánto menos? Para responder esto debemos examinar los consol con mayor detalle.

Considere la siguiente gráfica:

| | Ahora | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fecha (o fin del año) | 0 | 1 | 2 | 3 | $T$ | $(T+1)$ | $(T+2)$ |
| Consol 1 | | $C$ | $C$ | $C$ ... | $C$ | $C$ | $C$ ... |
| Consol 2 | | | | | | $C$ | $C$ ... |
| Anualidad | | $C$ | $C$ | $C$ ... | $C$ | | |

El consol 1 es normal y su primer pago ocurre en la fecha 1. El primer pago del consol 2 ocurre en la fecha $T + 1$.

El valor presente de tener un flujo de efectivo $C$ en cada una de las fechas $T$ es igual al valor presente del consol 1 menos el valor presente del consol 2. El valor presente del consol 1 está dado por:

$$\text{VP} = \frac{C}{r} \tag{4.13}$$

El consol 2 es aquel donde el primer pago ocurre en la fecha $T + 1$. Como indica la fórmula de la perpetuidad, este consol tendrá un valor de $C/r$ en la fecha $T$.[3] Sin embargo, no deseamos determinar el valor en la fecha $T$, sino el valor de hoy día; en otras palabras, el valor presente

[3] Los estudiantes frecuentemente creen que $C/r$ es el valor presente en la fecha $T + 1$ porque el primer pago del consol ocurre en la fecha $T + 1$. Sin embargo, la fórmula valúa el consol con fecha de un periodo antes del primer pago.

en la fecha 0. Debemos descontar otra vez $C/r$ en $T$ periodos. Por lo tanto, el valor presente del consol 2 es:

$$\text{VP} = \frac{C}{r}\left[\frac{1}{(1+r)^T}\right] \tag{4.14}$$

El valor presente de tener flujos de efectivo durante $T$ años es el valor presente de un consol con su primer pago en la fecha 1 menos el valor presente de un consol con su primer pago en la fecha $T + 1$. De este modo, el valor presente de una anualidad es la ecuación 4.13 menos la ecuación 4.14. Este resultado se puede expresar como:

$$\frac{C}{r} - \frac{C}{r}\left[\frac{1}{(1+r)^T}\right]$$

Esto se simplifica a la siguiente expresión:

**Fórmula del valor presente de una anualidad:**

$$\text{VP} = C\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^T}\right]$$

que también se puede escribir como:

$$\text{VP} = C\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^T}}{r}\right] \tag{4.15}$$

**EJEMPLO 4.20**

**Valuación de la lotería** Mark Young acaba de ganar la lotería del estado, la cual paga 50 000 dólares anuales durante 20 años. Mark recibirá su primer pago dentro de un año. El estado la anuncia como la Lotería del Millón de Dólares porque $1 000 000 = $50 000 × 20. Si la tasa de interés es de 8%, ¿cuál es el valor presente de la lotería?

La ecuación 4.15 produce:

$$\text{Valor presente de la Lotería del Millón de Dólares} = \$50\,000 \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1.08)^{20}}}{.08}\right]$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Pago periódico} & & \text{Factor de anualidad} \\ = \$50\,000 & \times & 9.8181 \\ = \$490\,905 & & \end{array}$$

En lugar de sentirse feliz por haber ganado, el señor Young demanda al estado por falsa declaración y fraude. Su argumento legal es que le prometieron 1 millón de dólares, pero recibirá sólo 490 905 dólares.

El término que se usa para calcular el valor presente de la serie de pagos uniformes, $C$, durante $T$ años, recibe el nombre de **factor de anualidad**. El factor de anualidad de este ejemplo es de 9.8181. Debido a que se le utiliza con tanta frecuencia en los cálculos del valor presente, lo incluimos en el cuadro A.2 en la parte final de este libro. El cuadro proporciona los valores de estos factores para un intervalo de tasas de interés, $r$, y fechas de vencimiento, $T$.

El factor de anualidad, como se expresa en los corchetes de la ecuación 4.15, es una fórmula compleja. Con propósitos de simplificación, de cuando en cuando es posible referirse al factor de la anualidad como:

$$A_r^T$$

Esta expresión representa el valor presente de 1 dólar al año durante $T$ años a una tasa de interés de $r$.

También podemos proporcionar la fórmula del valor futuro de una anualidad:

$$\text{VF} = C\left[\frac{(1+r)^T}{r} - \frac{1}{r}\right] = C\left[\frac{(1+r)^T - 1}{r}\right] \tag{4.16}$$

Al igual que con los factores de valor presente de las anualidades, se han compilado los factores de valor futuro en el cuadro A.3 que aparece en la parte final de este libro.

**EJEMPLO 4.21**

**Retiro de inversión** Suponga que deposita 3 000 dólares por año en una cuenta individual de retiro exenta de impuestos. La cuenta paga 6% de interés anual. ¿Cuánto dinero tendrá cuando se jubile dentro de 30 años?

Esta pregunta se refiere al valor futuro de una anualidad de 3 000 dólares durante 30 años a 6%, que se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \text{VF} &= C\left[\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right] = \$3\,000 \times \left[\frac{1.06^{30} - 1}{.06}\right] \\ &= \$3\,000 \times 79.0582 \\ &= \$237\,174.56 \end{aligned}$$

Por lo tanto, usted tendrá cerca de un cuarto de millón de dólares en la cuenta.

En nuestra experiencia las fórmulas de anualidades no son difíciles, sino enredosas, para el principiante. A continuación presentamos cuatro trucos para facilitar su aplicación.

## APLICACIONES DE HOJA DE CÁLCULO

### Valores presentes de anualidades

El uso de una hoja de cálculo electrónica para obtener los valores presentes de anualidades es como sigue:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | **Uso de una hoja de cálculo electrónica para obtener valores presentes de anualidades** | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | ¿Cuál es el valor presente de $500 al año durante 3 años si la tasa de descuento es de 10%? | | | | | | |
| 5 | Necesitamos obtener el valor presente desconocido, por lo que usaremos la fórmula VA(tasa, nper, pago, vf). | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | Monto del pago por periodo: | $500 | | | | | |
| 8 | Número de pagos: | 3 | | | | | |
| 9 | Tasa de descuento: | 0.1 | | | | | |
| 10 | | | | | | | |
| 11 | Valor presente de la anualidad: | **$1 243.43** | | | | | |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | La fórmula que se escribe en la celda B11 es =VA(B9,B8,-B7,0); tenga en cuenta que vf es cero y que | | | | | | |
| 14 | pago tiene signo negativo. Observe también que la tasa se escribe como decimal, no como porcentaje. | | | | | | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | |

**Truco 1: Anualidad diferida** Uno de los trucos cuando se trabaja con anualidades o perpetuidades es obtener la periodicidad correcta. Esto es particularmente cierto cuando una anualidad o una perpetuidad empieza en una fecha que se proyecta a varios periodos hacia el futuro. Hemos comprobado que incluso los principiantes más brillantes pueden cometer errores aquí. Considere el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 4.22

**Anualidades diferidas** Danielle Caravello recibirá una anualidad a cuatro años de 500 dólares anuales, empezando en la fecha 6. Si la tasa de interés es de 10%, ¿cuál es el valor presente de la anualidad? Esta situación se puede graficar como sigue:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $500 | $500 | $500 | $500 | |

El análisis requiere dos pasos:

1. Calcular el valor presente de la anualidad usando la ecuación 4.15:

**Valor presente de la anualidad en la fecha 5:**

$$\$500\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1.10)^4}}{.10}\right] = \$500 \times A^{4}_{.10}$$
$$= \$500 \times 3.1699$$
$$= \$1\,584.95$$

Observe que los 1 584.95 dólares representan el valor presente en la *fecha 5*.

Con frecuencia, los estudiantes piensan que los 1 584.95 dólares son el valor presente en la fecha 6 porque la anualidad empieza en ella. Sin embargo, nuestra fórmula valora la anualidad con fecha de un periodo anterior al primer pago. Esto se puede ver en el caso más típico donde el primer pago ocurre en la fecha 1. En este caso, la fórmula valora la anualidad en la fecha 0.

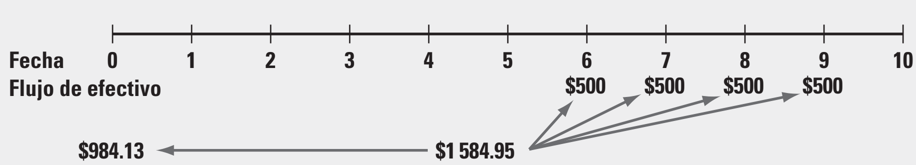
2. Descontar el valor presente de la anualidad a la fecha 0:

**Valor presente en la fecha 0:**

$$\frac{\$1\,584.95}{(1.10)^5} = \$984.13$$

Una vez más, vale la pena mencionar que ya que la fórmula de la anualidad lleva la anualidad de Danielle a la fecha 5, el segundo cálculo debe descontar los cinco periodos restantes. El procedimiento de dos pasos se presenta gráficamente en la figura 4.12.

**Figura 4.12** **Descuento de la anualidad de Danielle Caravello**




**Paso uno:** Descuente los cuatro pagos a la fecha cinco usando la fórmula de anualidad.
**Paso dos:** Descuente el valor presente en la fecha cinco ($1 584.95) al valor presente en la fecha 0.

**Truco 2: Anualidad anticipada** La fórmula de la anualidad de la ecuación 4.15 supone que el primer pago de la anualidad empieza después de un periodo completo. Este tipo de anualidad se denomina algunas veces *anualidad en atrasos* o *anualidad ordinaria*. ¿Qué sucede si la anualidad empieza hoy, en otras palabras, en la fecha 0?

## EJEMPLO 4.23

**Anualidad anticipada** En un ejemplo anterior, Mark Young recibía 50 000 dólares anuales durante 20 años de la lotería del estado. En ese ejemplo, iba a recibir el primer pago un año después de la fecha en la que ganó. Supongamos ahora que el primer pago ocurre de inmediato. El número total de pagos es el mismo, esto es, 20.

Bajo este nuevo supuesto existe una anualidad de 19 fechas donde el primer pago ocurre en la fecha 1, más un pago extra en la fecha 0. El valor presente es:

$$\underset{\text{Pago en la fecha 0}}{\$50\,000} \quad + \quad \underset{\text{Anualidad de 19 años}}{\$50\,000 \times A_{.08}^{19}}$$
$$= \$50\,000 + (\$50\,000 \times 9.6036)$$
$$= \$530\,180$$

En este caso, 530 180 dólares, el valor presente de este ejemplo, es mayor que 490 905, el valor presente del ejemplo precedente. Esto era de esperarse porque la anualidad del ejemplo anterior empieza en una fecha más temprana. Una anualidad con un pago inicial inmediato se denomina *anualidad anticipada* o, más comúnmente, *anualidad devengada*. Recuerde siempre que la ecuación 4.15 y el cuadro A.2 de este libro se refieren a una *anualidad ordinaria*.

**Truco 3: Anualidad infrecuente** El siguiente ejemplo trata de una anualidad con pagos que ocurren con una frecuencia menor que una vez al año.

## EJEMPLO 4.24

**Anualidades infrecuentes** Ann Chen recibe una anualidad de 450 dólares que es pagadera una vez cada dos años. La anualidad se extiende a lo largo de 20 años. El primer pago ocurre en la fecha dos, es decir, dentro de dos años. La tasa anual de interés es de 6 por ciento.

El truco consiste en determinar la tasa de interés a lo largo de un periodo de dos años. La tasa de interés a lo largo de dos años es:

$$(1.06 \times 1.06) - 1 = 12.36\%$$

Es decir, 100 dólares invertidos a lo largo de dos años se transforman en 112.36 dólares.

Lo que deseamos determinar es el valor presente de una anualidad de 450 dólares a lo largo de 10 periodos, con una tasa de interés de 12.36% por periodo:

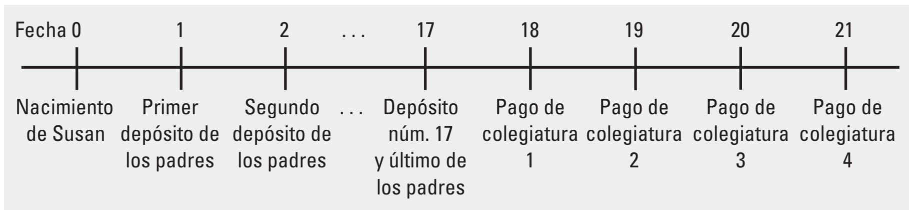
$$\$450\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+.1236)^{10}}}{.1236}\right] = \$450 \times A_{.1236}^{4} = \$2\,505.57$$

**Truco 4: Igualación del valor presente de dos anualidades** El siguiente ejemplo iguala el valor presente de los flujos de entrada con el valor presente de los flujos de salida.

## EJEMPLO 4.25

**Trabajo con anualidades** Harold y Helen Nash están ahorrando para la educación universitaria de su hija recién nacida, Susan. Los Nash estiman que los gastos universitarios serán de 30 000 dólares anuales cuando su hija llegue a la universidad dentro de 18 años. La tasa de interés anual a lo largo de las siguientes décadas será de 14%. ¿Qué cantidad de dinero deberán depositar en el banco cada año de tal modo que su hija pueda cursar con seguridad los cuatro años de la universidad?

Para simplificar los cálculos, suponga que Susan nace hoy. Sus padres harán el primero de los cuatro pagos anuales de sus estudios en su cumpleaños número 18. Harán depósitos bancarios iguales en cada uno de sus primeros 17 aniversarios, pero no depositarán en la fecha 0, tal como se ilustra a continuación:




El señor y la señora Nash harán depósitos en el banco a lo largo de los 17 años siguientes. Luego harán retiros de 30 000 dólares por año en el transcurso de los cuatro años siguientes. Podemos estar seguros de que podrán retirar totalmente 30 000 por año si el valor presente de los depósitos es igual al valor presente de los cuatro retiros de esa suma.

Este cálculo requiere tres pasos. Los dos primeros determinan el valor presente de los retiros. El paso final establece los depósitos anuales que tendrán un valor presente igual al de los retiros.

1. Calculamos el valor presente de los cuatro años en la universidad usando la fórmula de anualidades:

$$\$30\,000 \times \left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1.14)^4}}{.14}\right] = \$30\,000 \times A^4_{.14}$$
$$= \$30\,000 \times 2.9137 = \$87\,411$$

   Supongamos que Susan ingresa a la universidad en su cumpleaños número 18. Dada la exposición del truco 1, 87 411 dólares representan el valor presente en la fecha 17.

2. Calculamos el valor presente de la educación universitaria en la fecha 0 como:

$$\frac{\$87\,411}{(1.14)^{17}} = \$9\,422.91$$

3. Suponiendo que Harold y Helen Nash hacen depósitos en el banco al final de cada uno de los 17 años, calculamos el depósito anual que producirá un valor presente de todos los depósitos de 9 422.91 dólares, lo cual se calcula como:

$$C \times A^{17}_{.14} = \$9\,422.91$$

   Toda vez que $A^{17}_{.14} = 6.3729$,

$$C = \frac{\$9\,422.91}{6.3729} = \$1\,478.59$$

De este modo, la serie de depósitos de 1 478.59 dólares hechos al final de cada uno de los primeros 17 años e invertidos a una tasa de 14% proporcionarán suficiente dinero para hacer pagos de colegiaturas de 30 000 dólares durante los cuatro años siguientes.

Un método alterno en el ejemplo 4.25 sería 1) calcular el valor presente de los pagos de colegiatura de Susan en su cumpleaños número 18, y 2) calcular los depósitos anuales de tal modo que el valor futuro de los depósitos en su cumpleaños número 18 sea igual al valor presente de los pagos de colegiatura en esa fecha. Aunque esta técnica también puede proporcionar la respuesta correcta, hemos comprobado que es más probable que conduzca a errores. Por lo tanto, en esta presentación sólo igualamos los valores presentes.

### *Anualidad creciente*

Los flujos de efectivo de las empresas tienen probabilidades de crecer a lo largo del tiempo, debido ya sea al crecimiento real o a la inflación. Una perpetuidad creciente que supone un número infinito de flujos de efectivo proporciona una fórmula para manejar este crecimiento. A continuación consideramos una **anualidad creciente**, que es un número *finito* de flujos de efectivo crecientes. Debido a que las perpetuidades de cualquier tipo son raras, la fórmula de una anualidad creciente es realmente útil. Hela aquí:

**Fórmula del valor presente de una anualidad creciente:**

$$\text{VP} = C\left[\frac{1}{r-g} - \frac{1}{r-g} \times \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{T}\right] = C\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{T}}{r-g}\right] \qquad \textbf{(4.17)}$$

Como antes, $C$ es el pago que ocurre al final del primer periodo, $r$ es la tasa de interés, $g$ es la tasa de crecimiento por periodo, expresada como porcentaje, y $T$ es el número de periodos de la anualidad.

**EJEMPLO 4.26**

**Anualidades crecientes** Stuart Gabriel, estudiante de segundo año de la maestría en administración, acaba de recibir una oferta de trabajo con un salario de 80 000 dólares al año. Él anticipa que su salario crecerá a una tasa anual de 9% hasta su jubilación dentro de 40 años. Dada una tasa de interés de 20%, ¿cuál es el valor presente de su salario total durante su vida laboral?

Para simplificar, supondremos que se le pagará el salario de 80 000 dólares exactamente dentro de un año, y que continuará recibiéndolo en pagos anuales. La tasa de descuento apropiada es de 20%. Con base en la ecuación 4.17, el cálculo es:

$$\text{Valor presente del salario de toda la vida laboral de Stuart} = \$80\,000 \times \left[\frac{1-\left(\frac{1.09}{1.20}\right)^{40}}{.20-.09}\right] = \$711\,730.71$$

Pese a que la anualidad creciente es muy útil, es más tediosa que las otras fórmulas simplificadoras. Aunque la mayoría de las calculadoras actuales tienen programas especiales para determinar las perpetuidades, perpetuidades crecientes y anualidades, no existe un programa especial para calcular una anualidad creciente. Por lo tanto, se deben calcular de manera directa todos los términos de la ecuación 4.17.

**EJEMPLO 4.27**

**Más anualidades crecientes** En el ejemplo anterior, Helen y Harold Nash habían planeado realizar 17 pagos idénticos para financiar la educación universitaria de su hija Susan. En otro caso, imagine que ellos hubieran planeado incrementar sus pagos 4% por año. ¿Cuál sería su primer pago?

Los dos primeros pasos del ejemplo anterior acerca de la familia Nash mostraron que el valor presente de los costos universitarios era de 9 422.91 dólares. Estos dos pasos serían los mismos en este caso. Sin embargo, el tercer paso es diferente. Ahora, es necesario preguntar: ¿de cuánto debería ser el primer pago de tal modo que, si los pagos aumentan 4% anual, el valor presente de todos los pagos sea de 9 422.91 dólares?

(*continúa*)

Establecemos la fórmula de anualidades crecientes igual a $9 422.91 y despejamos el valor de $C$:

$$C\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T}{r-g}\right] = C\left[\frac{1-\left(\frac{1.04}{1.14}\right)^{17}}{.14-.04}\right] = \$9\,422.91$$

Aquí, $C$ = $1 192.78. De este modo, el depósito en el primer cumpleaños de su hija es de 1 192.78 dólares, el depósito del segundo año es de 1 240.49 dólares (= 1.04 × $1 192.78) y así sucesivamente.

## 4.5 Amortización de préstamos

Siempre que un prestamista otorga un préstamo establece alguna disposición sobre el pago del principal (el monto original del empréstito). Un préstamo se puede pagar en abonos iguales, por ejemplo, o en una sola exhibición total. Debido a que la forma en que se pagan el principal y los intereses depende de las partes interesadas, existe en realidad una cantidad ilimitada de posibilidades.

En esta sección describimos los préstamos amortizados. El trabajo con estos préstamos es una aplicación muy sencilla de los principios del valor presente que ya hemos examinado.

Un *préstamo amortizado* puede requerir que el prestatario pague partes del monto del préstamo a través del tiempo. El proceso de otorgar un préstamo que se liquidará mediante reducciones regulares del principal se conoce como *amortizar* el préstamo.

Una forma sencilla de amortizar un préstamo es aquella en que el prestatario paga el interés cada periodo más cierta cantidad fija. Este método es común con préstamos empresariales a mediano plazo. Por ejemplo, suponga que una empresa adquiere un préstamo de 5 000 dólares a cinco años, a 9%. El contrato de préstamo estipula que el prestatario deberá pagar intereses sobre el saldo del préstamo cada año y reducir dicho saldo cada año en 1 000 dólares. Debido a que el monto del préstamo disminuye 1 000 dólares cada año, se paga por completo en cinco años.

En el caso que estamos considerando observe que el pago total disminuirá cada año. La razón es que el saldo del préstamo se va reduciendo, lo que da por resultado un cargo de interés menor cada año, mientras que la reducción de 1 000 dólares del principal es constante. Por ejemplo, el interés del primer año será de $5 000 × .09 = $450. El pago total será de $1 000 + 450 = $1 450 dólares. En el segundo año, el saldo del préstamos es de 4 000 dólares, por lo que el interés es de $4 000 × .09 = $360, y el pago total asciende a 1 360 dólares. Para calcular el pago total de cada uno de los años restantes, podemos preparar una *tabla de amortización* como sigue:

| Año | Saldo inicial | Pago total | Intereses pagados | Principal pagado | Saldo final |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $5 000 | $1 450 | $ 450 | $1 000 | $4 000 |
| 2 | 4 000 | 1 360 | 360 | 1 000 | 3 000 |
| 3 | 3 000 | 1 270 | 270 | 1 000 | 2 000 |
| 4 | 2 000 | 1 180 | 180 | 1 000 | 1 000 |
| 5 | 1 000 | 1 090 | 90 | 1 000 | 0 |
| Totales | | $6 350 | $1 350 | $5 000 | |

Tenga en cuenta que en cada año el interés pagado se determina multiplicando el saldo inicial por la tasa de interés. Además, observe que el saldo inicial está dado por el saldo final del año anterior.

Quizá la forma más común de amortizar un préstamo es cuando el prestatario realiza un solo pago fijo cada periodo. Casi todos los préstamos para la adquisición de bienes de consumo (como los préstamos para automóvil) y las hipotecas funcionan así. Por ejemplo, suponga que el préstamo de 5 000 dólares a cinco años y a una tasa de interés de 9% se amortizó así. ¿Cómo sería la tabla de amortización?

En primer lugar, debemos determinar el pago. Por las explicaciones anteriores del capítulo sabemos que los flujos de efectivo constituyen una anualidad ordinaria. En este caso, podemos calcular el pago como sigue:

$$\begin{aligned} \$5\,000 &= C \times \{[1 - (1/1.09^5]/.09\} \\ &= C \times [1 - .6499/1.09] \end{aligned}$$

Esto nos da:

$$\begin{aligned} C &= \$5\,000/3.8897 \\ &= \$1\,285.46 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el prestatario realizará cinco pagos iguales de 1 285.46 dólares. ¿Con esto liquidará el préstamo? Para comprobarlo, elaboraremos una tabla de amortización.

En el ejemplo anterior conocíamos la reducción anual del principal. Luego calculamos el interés adeudado para obtener el pago total. En este ejemplo conocemos el pago total. En consecuencia, calcularemos el interés y luego lo restaremos del pago total para obtener la parte que corresponde al principal de cada pago.

En el primer año, el interés es de 450 dólares, como calculamos antes. Debido a que el pago total es de 1 285.46 dólares, el principal pagado en el primer año debe ser:

$$\text{Principal pagado} = \$1\,285.46 - 450 = \$835.46$$

El saldo final del préstamo es entonces:

$$\text{Saldo final} = \$5\,000 - 835.46 = \$4\,164.54$$

El interés en el segundo año es de $\$4\,164.54 \times 0.09 = \$374.81$, y el saldo del préstamo se reduce a $\$1\,285.46 - 374.81 = \$910.65$. Resumimos todos los cálculos pertinentes en la siguiente tabla:

| Año | Saldo inicial | Pago total | Intereses pagados | Principal pagado | Saldo final |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $5 000.00 | $1 285.46 | $ 450.00 | $ 835.46 | $4 164.54 |
| 2 | 4 164.54 | 1 285.46 | 374.81 | 910.65 | 3 253.88 |
| 3 | 3 253.88 | 1 285.46 | 292.85 | 992.61 | 2 261.27 |
| 4 | 2 261.27 | 1 285.46 | 203.51 | 1 081.95 | 1 179.32 |
| 5 | 1 179.32 | 1 285.46 | 106.14 | 1 179.32 | 0.00 |
| Totales | | $6 427.30 | $1 427.31 | $5 000.00 | |

Debido a que el saldo del préstamo se reduce a cero, los cinco pagos iguales liquidan el préstamo. Observe que los intereses pagados disminuyen cada periodo. Esto no es una sorpresa, ya que el saldo del préstamo se está reduciendo. Dado que el pago total es fijo, el principal pagado debe aumentar en cada periodo.

Si usted compara las dos amortizaciones del préstamo en esta sección, notará que el total de intereses es mayor en el caso de los pagos iguales totales: 1 427.31 frente a 1 350 dólares. La razón de esto es que el préstamo se paga más despacio al principio, por lo que el interés es un poco más alto. Esto no significa que un préstamo sea mejor que otro; tan sólo quiere decir que uno se liquida efectivamente más rápido que el otro. Por ejemplo, la reducción del principal en el primer año es de 835.46 dólares en el caso de pagos iguales totales en comparación con los 1 000 dólares del primer caso.

## EJEMPLO 4.28

**Amortización parcial, o "hacer de tripas corazón"** Un acuerdo común en los créditos hipotecarios podría suponer un préstamo a cinco años con amortización, por decir, a 15 años. Lo que esto significa es que el prestatario debe efectuar un pago cada mes por una cantidad fija con base en una amortización a 15 años. Sin embargo, al cabo de 60 meses el prestatario efectúa un solo pago, mucho más cuantioso, conocido como "pago global" para liquidar el préstamo. Debido a que los pagos mensuales no cubren por completo el préstamo, se dice que éste se amortiza en forma parcial.

Suponga que tenemos una hipoteca comercial de 100 000 dólares con una TPA de 12% y amortización a 20 años (240 meses). Asimismo, suponga que la hipoteca requiere un pago global a cinco años. ¿Cuál será el pago mensual? ¿A cuánto ascenderá el pago global?

El pago mensual se calcula con base en una anualidad ordinaria con valor presente de 100 000 dólares. Hay 240 pagos y la tasa de interés es de 1% mensual. El pago es:

$$\begin{aligned} \$100\,000 &= C \times [1 - (1/1.01^{240})/.01 \\ &= C \times 90.8194 \\ C &= \$1\,101.09 \end{aligned}$$

Ahora bien, existe una manera fácil y otra difícil de determinar el pago global. La difícil consiste en amortizar el préstamo durante 60 meses para obtener el saldo en ese momento. La forma fácil es reconocer que después de 60 meses tenemos un préstamo a 240 − 60 = 180 meses. El pago sigue siendo de 1 101.09 dólares mensuales y la tasa de interés sigue siendo de 1% al mes. En consecuencia, el saldo del préstamo es el valor presente de los pagos remanentes:

$$\begin{aligned} \text{Saldo del préstamo} &= \$1\,101.09 \times [1 - (1/1.01^{180})/.01 \\ &= \$1\,101.09 \times 83.3217 \\ &= \$91\,744.69 \end{aligned}$$

El pago global es la considerable suma de 91 744 dólares. ¿Por qué es tan grande? Para darse una idea, considere el primer pago de la hipoteca. El interés en el primer mes es de $\$100\,000 \times .01 = \$1\,000$. El pago es de 1 101.09 dólares, por lo que el saldo del préstamo se reduce sólo 101.09 dólares. Debido a que el saldo del préstamo disminuye tan despacio, los pagos acumulados a lo largo de cinco años no ascienden a mucho.

Cerraremos esta sección con un ejemplo de algo que puede tener especial relevancia. En Estados Unidos, los préstamos federales Stafford son una importante fuente de financiamiento para muchos estudiantes universitarios, ya que les ayudan a cubrir el costo de sus estudios, libros, automóviles nuevos, condominios y muchas otras cosas. En ocasiones, los estudiantes no comprenden del todo que los préstamos Stafford tienen una grave desventaja: deben pagarse en abonos mensuales que por lo general comienzan seis meses después de que el estudiante sale de la escuela.

Algunos préstamos Stafford están subsidiados, lo cual significa que el interés no empieza a devengarse sino hasta que comienzan los pagos (esto es bueno). Si usted fuera un estudiante de licenciatura que dependiera de esta opción específica, su deuda total ascendería cuando mucho a 23 000 dólares. La tasa máxima de interés es de 8.25%, u 8.25/12 = 0.6875% mensual. De acuerdo con el "plan de pagos habitual", estos préstamos se amortizan en 10 años (sujeto a un pago mínimo de 50 dólares).

Suponga que obtiene un préstamo por la máxima cantidad que permite este programa y, por lo tanto, le endilgan la tasa máxima de interés. Comenzando a los seis meses después de graduarse (o abandonar la torre de marfil por cualquier otro motivo), ¿a cuánto ascenderá su pago mensual? ¿Cuánto adeudará después de efectuar pagos durante cuatro años?

Dadas nuestras explicaciones anteriores, vea si no está de acuerdo en que su pago mensual, suponiendo un préstamo total de 23 000 dólares, sería de 282.10 dólares mensuales. Asimismo, como se explicó en el ejemplo 4.28, después de efectuar pagos durante cuatro años, seguiría debiendo el valor presente de los pagos restantes. Hay 120 pagos en total. Luego de realizar 48 (los primeros cuatro años), le faltan 72. A estas alturas, debe resultarle fácil comprobar que el valor presente de 282.10 dólares mensuales durante 72 meses a 0.6875% mensual es de poco menos de 16 000 dólares, de modo que todavía le falta una buena cantidad.

## APLICACIONES DE HOJA DE CÁLCULO

### Uso de una hoja de cálculo electrónica para elaborar una tabla de amortización de préstamos

La amortización de préstamos es una aplicación común de las hojas de cálculo electrónicas. Para ilustrar, plantearemos el problema que examinamos antes: un préstamo de 5 000 dólares a cinco años y a tasa de interés de 9% con pagos constantes. Nuestra hoja de cálculo es la siguiente:

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | **Uso de una hoja de cálculo electrónica para amortizar un préstamo** | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | Monto del préstamo: | | $5 000 | | | | |
| 5 | | Tasa de interés: | | 0.09 | | | | |
| 6 | | Plazo del préstamo: | | 5 | | | | |
| 7 | | Pago del préstamo: | | **$1 285.46** | | | | |
| 8 | | | | Nota: el pago se calcula utilizando PAGO(tasa, nper, -vp, vf). | | | | |
| 9 | | *Tabla de amortización:* | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | |
| 11 | | Año | Saldo | Pago | Intereses | Principal | Saldo | |
| 12 | | | inicial | total | pagados | pagado | final | |
| 13 | | 1 | $5 000.00 | $1 285.46 | $450.00 | $835.46 | $4 164.54 | |
| 14 | | 2 | 4 164.54 | 1 285.46 | 374.81 | 910.65 | 3 253.88 | |
| 15 | | 3 | 3 253.88 | 1 285.46 | 292.85 | 992.61 | 2 261.27 | |
| 16 | | 4 | 2 261.27 | 1 285.46 | 203.51 | 1 081.95 | 1 179.32 | |
| 17 | | 5 | 1 179.32 | 1 285.46 | 106.14 | 1 179.32 | 0.00 | |
| 18 | | Totales | | 6 427.31 | 1 427.31 | 5 000.00 | | |
| 19 | | | | | | | | |
| 20 | | *Fórmulas de la tabla de amortización:* | | | | | | |
| 21 | | | | | | | | |
| 22 | | Año | Saldo | Pago | Intereses | Principal | Saldo | |
| 23 | | | inicial | total | pagados | pagado | final | |
| 24 | | 1 | =+D4 | =$D$7 | =+$D$5*C13 | =+D13-E13 | =+C13-F13 | |
| 25 | | 2 | =+G13 | =$D$7 | =+$D$5*C14 | =+D14-E14 | =+C14-F14 | |
| 26 | | 3 | =+G14 | =$D$7 | =+$D$5*C15 | =+D15-E15 | =+C15-F15 | |
| 27 | | 4 | =+G15 | =$D$7 | =+$D$5*C16 | =+D16-E16 | =+C16-F16 | |
| 28 | | 5 | =+G16 | =$D$7 | =+$D$5*C17 | =+D17-E17 | =+C17-F17 | |
| 29 | | | | | | | | |
| 30 | | Nota: Los totales de la tabla de amortización se calculan con la fórmula SUMA. | | | | | | |
| 31 | | | | | | | | |

Por supuesto, es posible acumular deudas mucho mayores. Según la Association of American Medical Colleges, los estudiantes de medicina que solicitaron un préstamo para estudiar la carrera y se graduaron en 2005 tuvieron en promedio un saldo del préstamo estudiantil de 120 280 dólares. ¡Ay! ¿Cuánto tiempo necesita el estudiante típico para pagar el préstamo de la escuela de medicina?

## 4.6 ¿Cuánto vale una empresa?

Suponga que usted es perito en valuación de empresas y que trata de determinar el valor de compañías pequeñas. ¿Cómo puede determinar el valor de una empresa? Una forma de contestar consiste en calcular el valor presente de los flujos de efectivo futuros.

Consideremos el ejemplo de una empresa que se espera que genere flujos de efectivo netos (entradas de efectivo menos salidas de efectivo) de 5 000 dólares en el primer año y 2 000 durante cada uno de los siguientes cinco años. La empresa se puede vender en 10 000 dólares dentro de siete años. A los propietarios de la empresa les gustaría recibir 10% sobre su inversión en el negocio.

El valor de la empresa se obtiene multiplicando los flujos de efectivo netos por el factor de valor presente apropiado. Esto es, el valor de la empresa es simplemente la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo netos individuales.

El valor presente de los flujos de efectivo netos se presenta a continuación:

**Valor presente de la empresa**

| Fin de año | Flujo de efectivo neto de la empresa | Factor de valor presente (10%) | Valor presente de los flujos de efectivo netos |
|---|---|---|---|
| 1 | $ 5 000 | .90909 | $ 4 545.45 |
| 2 | 2 000 | .82645 | 1 652.90 |
| 3 | 2 000 | .75131 | 1 502.62 |
| 4 | 2 000 | .68301 | 1 366.02 |
| 5 | 2 000 | .62092 | 1 241.84 |
| 6 | 2 000 | .56447 | 1 128.94 |
| 7 | 10 000 | .51316 | 5 131.58 |
| | | Valor presente de la empresa | $16 569.35 |

También podemos usar la fórmula simplificadora de una anualidad:

$$\frac{\$5000}{1.1} + \frac{\left(2000 \times A^{5}_{.10}\right)}{1.1} + \frac{10000}{(1.1)^{7}} = \$16569.35$$

Suponga que tiene la oportunidad de adquirir la empresa en 12 000 dólares. ¿Debe adquirirla? La respuesta es sí porque el valor presente neto es positivo:

$$\text{VPN} = \text{VP} - \text{Costo}$$
$$\$4\,569.35 = \$16\,569.35 - \$12\,000$$

El valor incremental (VPN) de adquirir la empresa es de 4 569.35 dólares.

**EJEMPLO 4.29**

**Valuación de la empresa** The Trojan Pizza Company analiza una inversión de 1 millón de dólares en cuatro nuevos puntos de venta en Los Ángeles. Andrew Lo, director financiero de la empresa (CFO), ha estimado que las inversiones generarán flujos de efectivo de 200 000 dólares anuales durante nueve años y que no generarán nada después de esa fecha. (Los flujos de efectivo ocurrirán al final de cada año y no habrá flujos de efectivo después del año 9.) El señor Lo ha determinado que la tasa de descuento relevante para esta inversión es de 15%. Ésta es la tasa de rendimiento que la empresa puede ganar en proyectos comparables. ¿Debe The Trojan Pizza Company hacer la inversión en los nuevos puntos de venta?

La decisión se puede evaluar como sigue:

$$\begin{aligned}\text{VPN} &= -\$1\,000\,000 + \frac{\$200\,000}{1.15} + \frac{\$200\,000}{(1.15)^2} + \cdots + \frac{\$200\,000}{(1.15)^9}\\ &= -\$1\,000\,000 + \$2\,000\,000 \times A^{9}_{.15}\\ &= -\$1\,000\,000 + \$95\,4316.78\\ &= -\$45\,683.22\end{aligned}$$

El valor presente de los cuatro nuevos puntos de venta es de sólo 954 316.78 dólares. Los puntos de venta valen menos de lo que cuestan. The Trojan Pizza Company no debe hacer la inversión porque el valor presente neto es de −45 683.22 dólares. Si The Trojan Pizza Company requiere una tasa de rendimiento de 15%, los nuevos puntos de venta no son una buena inversión.

## APLICACIONES DE HOJA DE CÁLCULO

### Cómo calcular valores presentes con varios flujos de efectivo usando una hoja de cálculo electrónica

Podemos preparar una hoja de cálculo básica para calcular los valores presentes de los flujos de efectivo individuales como sigue. Tenga en cuenta que simplemente calculamos los valores presentes uno por uno y luego los sumamos:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | **Uso de una hoja de cálculo electrónica para valuar varios flujos de efectivo futuros** | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | ¿Cuál es el valor presente de 200 dólares en un año, 400 el año siguiente, 600 el año siguiente y 800 | | | | |
| 5 | el último año, si la tasa de descuento es de 12%? | | | | |
| 6 | | | | | |
| 7 | Tasa: | 0.12 | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | Año | Flujos de efectivo | Valores presentes | Fórmula utilizada | |
| 10 | 1 | $200 | $178.57 | = VP($B$7,A10,0,−B10) | |
| 11 | 2 | $400 | $318.88 | = VP($B$7,A11,0,−B11) | |
| 12 | 3 | $600 | $427.07 | = VP($B$7,A12,0,−B12) | |
| 13 | 4 | $800 | $508.41 | = VP($B$7,A13,0,−B13) | |
| 14 | | | | | |
| 15 | | VP total | **$1 432.93** | = SUM(C10:C13) | |
| 16 | | | | | |
| 17 | Observe los signos negativos insertados en las fórmulas de valor presente, que sólo sirven para que los | | | | |
| 18 | valores presentes tengan signos positivos. Además, la tasa de descuento de la celda B7 se escribe $B$7 | | | | |
| 19 | (una referencia “absoluta”) porque se usa una y otra vez. Pudimos haber escrito simplemente “.12” en su | | | | |
| 20 | lugar, pero nuestro método es más flexible. | | | | |
| 21 | | | | | |
| 22 | | | | | |

## Resumen y conclusiones

1. Dos conceptos básicos, *valor futuro* y *valor presente*, se introdujeron al principio de este capítulo. Con una tasa de interés de 10%, un inversionista con 1 dólar de hoy puede generar un valor futuro de 1.10 dólares dentro de un año, 1.21 dólares [= $1 × $(1.10)^2$] dentro de dos años, y así sucesivamente. A la inversa, el análisis del valor presente atribuye un valor actual a un flujo de efectivo futuro. Con la misma tasa de interés de 10%, un dólar que se recibirá dentro de un año tiene un valor presente de $.909 (= $1/1.10) en el año 0. Un dólar que se recibirá dentro de dos años tiene un valor presente de $.826[= $1/$(1.10)^2$].
2. De ordinario expresamos la tasa de interés como 12% anual, por ejemplo. Sin embargo, podemos hablar de una tasa de interés de 3% trimestral. Aunque la tasa de interés anual estipulada sigue siendo de 12% (= 3% × 4), la tasa anual efectiva de interés es de 12.55% [= $(1.03)^4 - 1$]. En otras palabras, el proceso de capitalización incrementa el valor futuro de una inversión. El caso límite es la capitalización continua, donde se supone que los fondos se reinvierten cada instante infinitesimal.
3. Una técnica cuantitativa básica para la toma de decisiones financieras es el análisis del valor presente neto. La fórmula del valor presente neto de una inversión que genera flujos de efectivo ($C_i$) en periodos futuros es:

$$\text{VPN} = -C_0 + \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r)^T} = -C_0 + \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

   La fórmula supone que el flujo de efectivo en la fecha cero es la inversión inicial (una salida de efectivo).
4. Con frecuencia, el cálculo real del valor presente es largo y tedioso. El cálculo del valor presente de una hipoteca a largo plazo con pagos mensuales es un buen ejemplo de esta dificultad. Hemos presentado cuatro fórmulas simplificadoras:

$$\text{Perpetuidad: VP} = \frac{C}{r}$$

$$\text{Perpetuidad creciente: VP} = \frac{C}{r-g}$$

$$\text{Anualidad: VP} = C\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^T}}{r}\right]$$

$$\text{Anualidad creciente: VP} = C\left[\frac{1 - \frac{1+g}{(1+r)}^{T}}{r-g}\right]$$

5. Pusimos de relieve algunas consideraciones prácticas en la aplicación de estas fórmulas:
   ***a)*** El numerador de cada una de las fórmulas, $C$, es el flujo de efectivo que *se recibirá dentro de un periodo completo*.
   ***b)*** En la práctica, los flujos de efectivo son generalmente irregulares. Para evitar problemas inmanejables se hacen supuestos para crear flujos de efectivo más regulares tanto en este libro de texto como en el mundo real.
   ***c)*** Varios problemas de valor presente se relacionan con anualidades (o perpetuidades) que empiezan después de algunos periodos. Los estudiantes deben practicar la combinación de la fórmula de anualidades (o perpetuidades) con la fórmula de descuento para resolver estos problemas.
   ***d)*** Las anualidades y perpetuidades pueden tener periodos de cada dos años o cada $n$ años, en lugar de una vez al año. Las fórmulas de las anualidades y perpetuidades pueden manejar con facilidad tales circunstancias.
   ***e)*** Con frecuencia encontramos problemas en los que el valor presente de una anualidad debe igualarse al valor presente de otra anualidad.

## Preguntas conceptuales

1. **Capitalización y periodos** A medida que aumenta el tiempo requerido, ¿qué le sucede a los valores futuros? ¿Qué le ocurre a los valores presentes?
2. **Tasas de interés** ¿Qué le sucede al valor futuro de una anualidad si usted incrementa la tasa, *r*? ¿Qué le pasa al valor presente?
3. **Valor presente** Suponga que dos atletas firman contratos a 10 años por 80 millones de dólares. En un caso se nos dice que los 80 millones se pagarán en 10 anualidades iguales. En el otro, que los 80 millones se pagarán en 10 anualidades, pero que las anualidades aumentarán 5% por año. ¿Quién habrá obtenido la mejor negociación?
4. **TPA y TAE** ¿Deben modificarse las leyes de crédito para exigir que los prestamistas informen las TAE en lugar de las TPA? Explique su respuesta.
5. **Valor del dinero a través del tiempo** En los préstamos subsidiados Stafford, fuente común de ayuda financiera para los estudiantes universitarios, los intereses no empiezan a devengarse sino hasta que empieza el pago del préstamo. ¿Quién recibe un subsidio más grande: una persona joven o una persona mayor? Explique su respuesta.

Use la siguiente información para responder las cinco preguntas posteriores:

El 28 de marzo de 2008, Toyota Motor Credit Corporation (TMCC), subsidiaria de Toyota Motor Corporation, ofreció algunos valores para venta al público. Según los términos de la transacción, TMCC prometió reembolsar al propietario de uno de estos valores 100 000 dólares el 28 de marzo de 2038, pero los inversionistas no recibirán nada hasta entonces. Los inversionistas pagaron a TMCC 24 099 dólares por cada uno de estos valores; por consiguiente, renunciaron a 24 099 dólares el 28 de marzo de 2008 a cambio de la promesa de un pago de 100 000 dólares al cabo de 30 años.

6. **Valor del dinero a través del tiempo** ¿Por qué TMCC aceptaría hoy una cantidad tan pequeña (24 099 dólares) a cambio de una promesa de reembolsar poco más de cuatro veces esa cantidad (100 000 dólares) en el futuro?
7. **Cláusulas de opción de recompra** TMCC tiene derecho a volver a comprar los valores en la fecha de aniversario a un precio establecido en el momento en que se emitieron los títulos (esta característica es uno de los términos de esta transacción específica). ¿Qué efecto tiene esta característica sobre la deseabilidad de este valor como inversión?
8. **Valor del dinero a través del tiempo** ¿Estaría usted dispuesto a pagar hoy 24 099 dólares a cambio de 100 000 dentro de 30 años? ¿Cuáles serían las consideraciones fundamentales para responder sí o no? ¿Dependería su respuesta del hecho de quién haga la promesa de pago?
9. **Comparación de inversiones** Suponga que cuando TMCC ofreció el valor en 24 099 dólares, la Tesorería de Estados Unidos hubiera ofrecido un valor esencialmente idéntico. ¿Considera usted que éste habría tenido un precio más alto o más bajo? Explique su respuesta.
10. **Horizonte de la inversión** El valor de TMCC se compra y se vende en la Bolsa de Valores de Nueva York. Si usted examinara hoy el precio, ¿cree que el precio sería superior al precio original de 24 099 dólares? ¿Por qué? Si usted examinara el precio en el año 2019, ¿considera que el precio sería más alto o más bajo que el precio de hoy? Explique su respuesta.

## Preguntas y problemas

connect

**NIVEL BÁSICO**
**(Preguntas 1-20)**

1. **Interés simple frente a interés compuesto** First City Bank paga 9% de interés simple sobre los saldos de sus cuentas de ahorro, mientras que Second City Bank paga 9% de interés compuesto anualmente. Si usted hiciera un depósito de 5 000 dólares en cada banco, ¿cuánto ganaría en la cuenta del Second City Bank al final de 10 años?
2. **Cálculo de valores futuros** Calcule el valor futuro de 1 000 dólares compuesto anualmente para
   ***a)*** 10 años a 6%.
   ***b)*** 10 años a 9%.
   ***c)*** 20 años a 6%.
   ***d)*** ¿Por qué la tasa de interés que se gana en el inciso *c*) no es el doble de la que se gana en el inciso *a*)?

3. **Cálculo de valores presentes** Para cada una de las siguientes situaciones, calcule el valor presente:

| Valor presente | Años | Tasa de interés | Valor futuro |
|---|---|---|---|
| | 6 | 7% | $ 15 451 |
| | 9 | 15 | 51 557 |
| | 18 | 11 | 886 073 |
| | 23 | 18 | 550 164 |

4. **Cálculo de tasas de interés** Resuelva la incógnita de la tasa de interés en cada una de las siguientes situaciones:

| Valor presente | Años | Tasa de interés | Valor futuro |
|---|---|---|---|
| $ 242 | 2 | | $ 307 |
| 410 | 9 | | 896 |
| 51 700 | 15 | | 162 181 |
| 18 750 | 30 | | 483 500 |

5. **Cálculo del número de periodos** Resuelva el número desconocido de años en cada una de las siguientes situaciones:

| Valor presente | Años | Tasa de interés | Valor futuro |
|---|---|---|---|
| $ 625 | | 6% | $ 1 284 |
| 810 | | 13 | 4 341 |
| 18 400 | | 32 | 402 662 |
| 21 500 | | 16 | 173 439 |



6. **Cálculo del número de periodos** A una tasa de interés de 9%, ¿cuánto tiempo necesita para duplicar su dinero? ¿Y para cuadruplicarlo?
7. **Cálculo de valores presentes** Imprudential, Inc., tiene un pasivo de pensiones no financiado de 750 millones de dólares que deben pagarse en 20 años. Para calcular el valor de las acciones de la empresa, los analistas financieros desean descontar este pasivo al presente. Si la tasa de descuento relevante es de 8.2%, ¿cuál es el valor presente de este pasivo?
8. **Cálculo de tasas de rendimiento** Aunque son atractivas para los gustos más refinados, las obras de arte, como objetos de colección, no siempre han mostrado desempeño rentable. Durante 2003, Sotheby's vendió la escultura de bronce de Edgar Degas *Petite Danseuse de Quartorze Ans* en una subasta a un precio de 10 311 500 dólares. Desafortunadamente, el propietario anterior la había comprado en 1999 a un precio de 12 377 500 dólares. ¿Cuál habrá sido su tasa anual de rendimiento sobre esta escultura?
9. **Perpetuidades** Un inversionista que compra un consol británico tiene derecho a recibir pagos anuales del gobierno para siempre. ¿Cuál es el precio de un consol que paga 120 dólares anuales si el siguiente pago ocurre después de un año? La tasa de interés del mercado es de 5.7 por ciento.
10. **Capitalización continua** Calcule el valor futuro de 1 900 dólares compuestos continuamente para:
    ***a)*** Cinco años a una tasa anual de interés estipulada de 12%.
    ***b)*** Tres años a una tasa anual de interés estipulada de 10%.
    ***c)*** Diez años a una tasa anual de interés estipulada de 5%.
    ***d)*** Ocho años a una tasa anual de interés estipulada de 7%.

11. **Valor presente y flujos de efectivo múltiples** Conoly Co. estudia un proyecto de inversión con los siguientes flujos de efectivo. Si la tasa de descuento es de 10%, ¿cuál es el valor presente de estos flujos de efectivo? ¿Cuál es el valor presente a 18%? ¿Y a 24%?

| Año | Flujo de efectivo |
|---|---|
| 1 | $1 200 |
| 2 | 730 |
| 3 | 965 |
| 4 | 1 590 |

12. **Valor presente y flujos de efectivo múltiples** La inversión X ofrece pagarle 5 500 dólares al año durante nueve años, mientras que la inversión Y ofrece pagarle 8 000 dólares por año durante cinco años. ¿Cuál de estas series de flujos de efectivo tiene el valor presente más alto si la tasa de descuento es de 5%? ¿Y si es de 22%?

13. **Cálculo del valor presente de una anualidad** Una inversión ofrece 4 300 dólares anuales durante 15 años; el primer pago ocurre dentro de un año contado a partir de hoy. Si el rendimiento requerido es de 9%, ¿cuál es el valor de la inversión? ¿Cuál sería el valor si los pagos ocurrieran durante 40 años? ¿Y durante 75 años? ¿Y para siempre?

14. **Cálculo de los valores de las perpetuidades** The Perpetual Life Insurance Co. trata de venderle una póliza de inversión que le pagará a usted y a sus herederos 20 000 dólares anuales para siempre. Si el rendimiento requerido sobre esta inversión es de 6.5%, ¿cuánto pagará usted por la póliza? Suponga que Perpetual Life Insurance Co. le informa que la póliza tiene un costo de 340 000 dólares. ¿A qué tasa de interés sería ésta una transacción justa?

15. **Cálculo de la TAE** Encuentre la TAE en cada uno de los siguientes casos:

| Tasa estipulada (TPA) | Número de veces de composición | Tasa efectiva (TAE) |
|---|---|---|
| 8% | Trimestral | |
| 18 | Mensual | |
| 12 | Diario | |
| 14 | Infinito | |

16. **Cálculo de la TPA** Encuentre la TPA, o tasa estipulada, en cada uno de los siguientes casos:

| Tasa estipulada (TPA) | Número de veces de composición | Tasa efectiva (TAE) |
|---|---|---|
| | Semestral | 10.3% |
| | Mensual | 9.4 |
| | Semanal | 7.2 |
| | Infinito | 15.9 |

17. **Cálculo de la TAE** First National Bank cobra 10.1% capitalizable mensualmente sobre sus préstamos comerciales. First United Bank cobra 10.4% capitalizable semestralmente. Como posible prestatario, ¿a qué banco acudiría usted para solicitar un préstamo nuevo?

18. **Tasas de interés** El conocido articulista financiero Andrew Tobias afirma que puede ganar 177% anual comprando vino en caja. De manera específica, supone que consumirá una botella de 10 dólares de vino tinto fino por semana durante las 12 semanas siguientes. Él puede pagar 10 dólares por semana o comprar hoy una caja de 12 botellas. Si compra la caja, recibe un descuento de

10% y al hacerlo así gana 177%. Suponga que Andrew compra el vino y consume hoy la primera botella. ¿Está de acuerdo con su análisis? ¿Ve algún problema con sus cifras?

19. **Cálculo del número de periodos** Uno de sus clientes está atrasado en el pago de sus cuentas. Por lo tanto, han establecido de común acuerdo un plan de pagos de 600 dólares por mes. Usted cobrará .9% mensual de intereses sobre el saldo vencido. Si el saldo actual es de 18 400 dólares, ¿cuánto tiempo se necesitará para que la cuenta se liquide?

20. **Cálculo de la TAE** Friendly's Quick Loans, Inc., le ofrece "3 × 4 o toco a tu puerta". Esto significa que hoy usted obtiene 3 dólares y paga 4 cuando le entregan su cheque de sueldo dentro de una semana (o ya verá). ¿Cuál es el rendimiento anual efectivo que gana Friendly's en este negocio de concesión de préstamos? Si usted tuviera el valor de preguntar ¿qué TPA diría Friendly's que usted está pagando?

**NIVEL INTERMEDIO (Preguntas 21-50)**

21. **Valor futuro** Indique cuál será el valor futuro de 1 000 dólares dentro de siete años si se invierten en una cuenta con una tasa de interés anual estipulada de 8 por ciento,
    ***a*)** Anualmente capitalizable.
    ***b*)** Semestralmente capitalizable.
    ***c*)** Mensualmente capitalizable.
    ***d*)** Continuamente capitalizable.
    ***e*)** ¿Por qué aumenta el valor futuro a medida que se acorta el periodo de capitalización?

22. **Interés simple frente a interés compuesto** First Simple Bank paga 6% de interés simple sobre sus cuentas de inversión. Si First Complex Bank paga intereses capitalizables anualmente sobre sus cuentas, ¿qué tasa debe fijar el banco si desea igualar al First Simple Bank en un horizonte de inversión de 10 años?

23. **Cálculo de anualidades** Usted planea ahorrar para su jubilación durante los próximos 30 años. Con este propósito invertirá 700 dólares por mes en una cuenta de acciones y 300 mensuales en una cuenta de bonos. Se espera que el rendimiento sobre la cuenta de acciones sea de 10%, mientras que la cuenta de bonos pagará 6%. Cuando se jubile, combinará su dinero en una cuenta con un rendimiento de 8%. ¿Qué cantidad podrá retirar cada mes de su cuenta suponiendo un periodo de retiro de 25 años?



24. **Cálculo de tasas de rendimiento** Suponga que una inversión le ofrece cuadruplicar su dinero en 12 meses (no lo crea). ¿A cuánto asciende la tasa de rendimiento trimestral que se le ofrece?

25. **Cálculo de tasas de rendimiento** Usted debe elegir entre dos inversiones diferentes, las cuales tienen costos iniciales de 75 000 dólares. La inversión G reditúa 135 000 dólares en seis años. La inversión H reditúa 195 000 en 10 años. ¿Cuál de estas inversiones tiene el rendimiento más alto?

26. **Perpetuidades crecientes** Mark Weinstein trabaja en una tecnología muy avanzada para cirugía ocular con rayos láser que estará disponible en un plazo cercano. Prevé que su primer flujo de efectivo anual proveniente de la tecnología será de 215 000 dólares, que recibirá dos años después de hoy. Los flujos de efectivo anuales subsiguientes crecerán a una tasa de 4% a perpetuidad. ¿Cuál es el valor presente de la tecnología si la tasa de descuento es de 10%?

27. **Perpetuidades** Un prestigiado banco de inversión emitió un nuevo valor que paga un dividendo trimestral de 5 dólares a perpetuidad. El primer dividendo se pagará dentro de un trimestre. ¿Cuál será el precio del valor si la tasa de interés anual estipulada es de 7%, trimestralmente capitalizable?

28. **Valor presente de anualidades** ¿Cuál es el valor presente de una anualidad de 5 000 dólares por año en la que el primer flujo de efectivo se recibe tres años después de hoy y el último dentro de 25 años? Use una tasa de descuento de 8%.

29. **Valor presente de anualidades** ¿Cuál es el valor actual de una anualidad a 15 años que paga 750 dólares por año? El primer pago de la anualidad ocurre dentro de seis años. La tasa de interés anual es de 12% en los años 1 a 5, y de 15% después de esa fecha.

30. **Pagos globales** Audrey Sanborn acaba de cerrar la compra de una casa de vacaciones con valor de 450 000 dólares en las Bahamas con un pago inicial de 20%. La hipoteca tiene una tasa de interés anual estipulada de 7.5% mensualmente capitalizable y requiere de pagos mensuales iguales a lo largo de los 30 años siguientes. Su primer pago será dentro de un mes a partir de hoy. Sin embargo, la hipoteca tiene un pago global de ocho años, lo cual significa que el saldo del préstamo deberá liquidarse al final del año ocho. No hubo otros costos de transacción ni cargos financieros. ¿A cuánto ascenderá el pago global de Audrey dentro de ocho años?

31. **Cálculo de intereses pagados** Usted recibe una solicitud de tarjeta de crédito de Shady Banks Savings and Loan en la que le ofrecen una tasa introductoria de 2.40% anual, mensualmente capitalizable en los seis primeros meses, y que aumentará después de esa fecha a 18% mensualmente capitalizable. Suponiendo que usted transfiere el saldo de 6 000 de su tarjeta de crédito existente y que no hace pagos subsiguientes, ¿qué cantidad de intereses deberá al final del primer año?

32. **Perpetuidades** Barrett Pharmaceuticals estudia el proyecto de un medicamento que hoy tiene un costo de 150 000 dólares y que se espera que genere flujos de efectivo anuales a fin de año de 13 000 dólares para siempre. ¿A qué tasa de descuento le daría lo mismo a Barrett aceptar o rechazar el proyecto?

33. **Anualidad creciente** Southern California Publishing Company trata de decidir si debe revisar su popular libro *Psicoanálisis financiero simplificado*. La casa editorial ha estimado que la revisión tendrá un costo de 65 000 dólares. El primer año, los flujos de efectivo provenientes de las ventas adicionales serán de 18 000 dólares. Estos flujos de efectivo aumentarán 4% por año. El libro se agotará dentro de cinco años. Suponga que el costo inicial se paga ahora y que los ingresos se reciben al final de cada año. Si la empresa requiere un rendimiento de 11% por tal inversión, ¿debe emprender la revisión?

34. **Anualidad creciente** Su empleador le paga sólo una vez al año por todo el trabajo que haya realizado a lo largo de los 12 meses anteriores. Hoy, 31 de diciembre, acaba de recibir su salario de 60 000 dólares, suma que planea gastar en su totalidad. Sin embargo, desea empezar a ahorrar para su jubilación a partir del próximo año. Ha decidido que dentro de un año empezará a depositar 5% de su salario anual en una cuenta que ganará 9% anual. Su salario aumentará 4% por año durante toda su carrera. ¿Qué cantidad de dinero tendrá en la fecha de su jubilación dentro de 40 años?

35. **Valor presente y tasas de interés** ¿Cuál es la relación entre el valor de una anualidad y el nivel de las tasas de interés? Suponga que acaba de comprar una anualidad a 12 años de 7 500 dólares por año a la tasa de interés actual de 10% anual. ¿Qué le sucederá al valor de su inversión si las tasas de interés disminuyen repentinamente a 5%? ¿Y si las tasas de interés aumentan repentinamente a 15%?

36. **Cálculo del número de pagos** Usted se dispone a hacer pagos mensuales de 250 dólares, empezando al final de este mes, en una cuenta que paga 10% de interés mensualmente capitalizable. ¿Cuántos pagos habrá realizado cuando el saldo de su cuenta llegue a 30 000 dólares?

37. **Cálculo del valor presente de una anualidad** Usted desea solicitar en préstamo 80 000 dólares a su banco local para comprar un nuevo velero. Está en condiciones de hacer pagos mensuales de 1 650 dólares, pero no más de esa cantidad. Suponiendo una capitalización mensual, ¿cuál es la TPA más alta que puede pagar sobre un préstamo a 60 meses?

38. **Cálculo de los pagos de un préstamo** Usted necesita una hipoteca a 30 años, a tasa fija, para comprar una nueva casa en 250 000 dólares. Su banco hipotecario le prestará el dinero a una TPA de 6.8% para este préstamo a 360 meses. Sin embargo, usted sólo puede hacer pagos mensuales de 1 200 dólares, por lo que ofrece liquidar el saldo restante del préstamo al final del crédito bajo la forma de un solo pago global. ¿A cuánto tendrá que ascender este pago global para que usted mantenga sus pagos mensuales en 1 200 dólares?

39. **Valores presentes y valores futuros** El valor presente de la siguiente serie de flujos de efectivo es de 6 453 dólares cuando se descuenta a 10% anual. ¿Cuál es el valor del flujo de efectivo que falta?

| Año | Flujo de efectivo |
|---|---|
| 1 | $1 200 |
| 2 | ? |
| 3 | 2 400 |
| 4 | 2 600 |

40. **Cálculo de valores presentes** Usted acaba de ganar la Lotería TVM. Hoy recibirá 1 millón de dólares más otros 10 pagos anuales que se incrementan en 350 000 dólares por año. Por lo tanto, dentro de un año recibirá 1.35 millones de dólares. Dentro de dos años recibirá 1.7 millones, y así sucesivamente. Si la tasa de interés apropiada es de 9%, ¿cuál es el valor presente de sus ganancias?
41. **TAE frente a TPA** Usted acaba de comprar un nuevo almacén. Para financiar la compra ha contratado una hipoteca a 30 años por 80% del precio de compra de 2 600 000 dólares. El pago mensual de este préstamo será de 14 000 dólares. ¿Cuál es la TPA sobre este préstamo? ¿Y la TAE?
42. **Valor presente y punto de equilibrio de los intereses** Considere una empresa con un contrato para vender un activo en 135 000 dólares dentro de tres años. Hoy, la producción del activo tiene un costo de 96 000 dólares. Dada una tasa de descuento relevante sobre este activo de 13% por año, ¿obtendrá alguna utilidad la empresa sobre este activo? ¿A qué tasa alcanza la empresa su punto de equilibrio?
43. **Valor presente y flujos de efectivo múltiples** ¿Cuál es el valor presente de 4 000 dólares anuales, a una tasa de descuento de 7%, si el primer pago se recibirá dentro de nueve años y el último dentro de 25 años?
44. **Tasas de interés variables** Una anualidad a 15 años paga 1 500 dólares por mes, y los pagos se hacen al final de cada mes. Si la tasa de interés es de 13% mensualmente capitalizable durante los primeros siete años, y de 9% mensualmente capitalizable después de esa fecha, ¿cuál es el valor presente de la anualidad?
45. **Comparación de series de flujos de efectivo** Usted puede elegir entre dos cuentas de inversión. La inversión A es una anualidad a 15 años que genera pagos de 1 200 dólares al final del mes y tiene una tasa de interés de 9.8% mensualmente capitalizable. La inversión B que capitaliza continuamente a una tasa de 9% otorga una suma acumulada dentro de 15 años. ¿Cuánto necesitaría invertir hoy en B para que valiera tanto como la inversión A dentro de 15 años?
46. **Cálculo del valor presente de una perpetuidad** Dada una tasa de interés de 7.3% anual, ¿cuál es el valor en la fecha $t = 7$ de una serie perpetua de pagos anuales de 2 100 dólares que empiezan en la fecha $t = 15$?
47. **Cálculo de la TAE** Una empresa financiera local cotiza una tasa de interés de 15% sobre préstamos a un año. Por lo tanto, si usted solicita un préstamo de 26 000, el interés del año será de 3 900 dólares. Debido a que usted debe pagar un total de 29 900 dólares dentro de un año, la compañía financiera requiere que usted pague $29 900/12, o 2 491.67 dólares mensuales a lo largo de los 12 meses siguientes. ¿Es éste un préstamo a tasa de 15%? ¿Qué tasa tendría que cotizarse en forma legal? ¿Cuál es la tasa anual efectiva?
48. **Cálculo de valores presentes** Una anualidad a cinco años de 10 pagos semestrales de 4 500 dólares empezará dentro de nueve años, y el primer pago se hará dentro de 9.5 años. Si la tasa de descuento es de 12% mensualmente capitalizable, ¿cuál es el valor de esta anualidad dentro de cinco años? ¿Cuál es el valor dentro de tres años? ¿Cuál es el valor actual de la anualidad?
49. **Cálculo de anualidades anticipada** Suponga que recibirá 10 000 dólares anuales durante cinco años. La tasa de interés apropiada es de 11 por ciento.

***a***) ¿Cuál es el valor presente de los pagos si se hacen en la forma de una anualidad ordinaria? ¿Cuál es el valor presente si los pagos son una anualidad anticipada?

***b***) Suponga que planea invertir los pagos a cinco años. ¿Cuál es el valor futuro si los pagos son una anualidad ordinaria? ¿Y si los pagos son una anualidad vencida?

***c***) ¿Cuál tiene el valor presente más elevado, la anualidad ordinaria o la anualidad anticipada? ¿Cuál de las dos tiene el valor futuro superior? ¿Siempre es válido lo anterior?

**50.** **Cálculo de anualidades anticipadas** Usted desea comprar un automóvil deportivo nuevo a Muscle Motors en 65 000 dólares. El contrato es bajo la forma de una anualidad anticipada a 48 meses a una TPA de 6.45%. ¿Cuál será su pago mensual?

**DESAFÍO**
**(Preguntas 51-76)**

**51.** **Cálculo de anualidades anticipadas** Usted desea rentar un juego de palos de golf a Pings Ltd. El contrato de arrendamiento establece 24 pagos mensuales iguales a una tasa de interés anual estipulada de 10.4% mensualmente capitalizable. Debido a que los palos cuestan 3 500 dólares al menudeo, Pings desea que el valor presente de los pagos de arrendamiento sea igual a 3 500 dólares. Suponga que su primer pago vence de inmediato. ¿A cuánto ascenderán sus pagos mensuales de arrendamiento?

**52.** **Anualidades** Usted está ahorrando para la educación universitaria de sus dos hijos. En cuanto a sus edades, se encuentran separados por dos años: uno empezará la universidad dentro de 15 años y el otro dentro de 17. Usted estima que los gastos universitarios de sus hijos serán de 35 000 dólares anuales por cada uno, pagaderos al inicio de cada año escolar. La tasa de interés anual es de 8.5%. ¿Qué cantidad de dinero debe depositar en una cuenta cada año para financiar la educación de sus hijos? Sus depósitos empiezan dentro de un año. Su último depósito lo hará cuando su hijo mayor ingrese a la universidad. Suponga cuatro años de universidad.

**53.** **Anualidades crecientes** Tom Adams ha recibido una oferta de un importante banco de inversión que le propone que trabaje como empleado de un banco asociado. Su salario base será de 45 000 dólares. Tom recibirá su primer pago anual de salario después de un año contado a partir del día en que empiece a trabajar. Además, obtendrá un bono inmediato de 10 000 dólares por integrarse a la compañía. Su salario crecerá a una tasa anual de 3.5%. Cada año recibirá un bono igual a 10% de su salario. Se espera que Adams trabaje durante 25 años. ¿Cuál es el valor presente de la oferta si la tasa de descuento es de 12%?

**54.** **Cálculo de anualidades** Usted acaba de ganar el premio mayor de la lotería del estado de Washington. Al leer la letra menuda descubre que tiene las dos siguientes opciones:

***a***) Recibirá 31 pagos anuales de 175 000 dólares y el primer pago se entregará hoy. El ingreso se gravará a una tasa de 28%. Los impuestos se retendrán cuando se emitan los cheques.

***b***) Recibirá 530 000 dólares ahora y no tendrá que pagar impuestos sobre este monto. Además, empezando un año después de hoy recibirá 125 000 dólares cada año durante 30 años. Los flujos de efectivo de esta anualidad se gravarán a una tasa de 28 por ciento.

Usando una tasa de descuento de 10%, ¿qué opción debe seleccionar?

**55.** **Cálculo de anualidades crecientes** Le faltan 30 años para jubilarse y desea retirarse con 1.5 millones de dólares. Su salario se paga anualmente y recibirá 70 000 dólares al final del año en curso. Su salario aumentará a una tasa de 3% anual y puede ganar un rendimiento de 10% sobre el dinero que invierte. Si ahorra un porcentaje constante de su salario, ¿qué porcentaje de su salario debe ahorrar cada año?

**56.** **Pagos globales** El 1 de septiembre de 2007, Susan Chao compró una motocicleta en 25 000 dólares. Dio un anticipo de 1 000 dólares y financió el saldo mediante un préstamo a cinco años a una tasa de interés anual estipulada de 8.4% mensualmente capitalizable. Ella empezó a realizar los pagos mensuales exactamente un mes después de la compra (es decir, el 1 de octubre de 2007). Dos años más tarde, a finales de octubre de 2009, Susan encontró un nuevo trabajo y decidió liquidar el préstamo. Si el banco cobra una multa por pago anticipado de 1% con base en el saldo del préstamo, ¿cuánto deberá pagar al banco el 1 de noviembre de 2009?

57. **Cálculo de los valores de las anualidades** Bilbo Baggins desea ahorrar para cumplir tres objetivos. Primero, le gustaría jubilarse dentro de 30 años con una pensión de 20 000 dólares mensuales durante 20 años y recibir el primer pago dentro de 30 años y un mes. Segundo, quiere comprar un búngalo en Rivendell dentro de 10 años a un costo estimado de 320 000 dólares. Tercero, después de su muerte al final de 20 años de jubilación le gustaría legar 1 000 000 dólares a su sobrino Frodo. Está en condiciones de ahorrar 1 900 dólares mensuales durante los próximos 10 años. Si puede ganar una TAE de 11% antes de jubilarse y una TAE de 8% después del retiro, ¿cuánto tendrá que ahorrar cada mes del año 11 al 30?

58. **Cálculo de los valores de las anualidades** Después de decidir la compra de un automóvil nuevo, usted puede optar por arrendarlo o comprarlo con un préstamo a tres años. El automóvil que desea comprar tiene un costo de 38 000 dólares. El distribuidor tiene un contrato especial de arrendamiento según el cual usted paga hoy 1 dólar y 520 mensuales durante los tres años siguientes. Si usted compra el automóvil, lo liquidará en pagos mensuales a lo largo de los tres años siguientes a una TPA de 8%. Usted considera que podrá vender el automóvil en 26 000 dólares dentro de tres años. ¿Debe comprar o arrendar el vehículo? ¿Qué precio de reventa representaría para usted el punto de equilibrio dentro de tres años para que le fuera indiferente comprar o arrendar?

59. **Cálculo de los valores de las anualidades** Uno de los mejores defensivos frontales del futbol americano está negociando su contrato. Los dueños del equipo han ofrecido la siguiente estructura de salarios:

| Tiempo | Salario |
|---|---|
| 0 | $7 500 000 |
| 1 | 4 200 000 |
| 2 | 5 100 000 |
| 3 | 5 900 000 |
| 4 | 6 800 000 |
| 5 | 7 400 000 |
| 6 | 8 100 000 |

Todos los salarios deberán pagarse en una sola exhibición. El jugador le ha solicitado a usted, su agente, que renegocie los términos. Él desea un bono a la firma del contrato de 9 millones de dólares pagadero hoy y un incremento en el valor del contrato de 750 000 dólares. También desea un salario igual pagadero cada tres meses y recibir el primer cheque de pago dentro de tres meses. Si la tasa de interés es de 5% diariamente capitalizable, ¿cuál es el monto de su cheque trimestral? Suponga años de 365 días.

60. **Préstamos de intereses descontados** Esta pregunta ilustra lo que se conoce como *intereses descontados*. Imagine que está discutiendo un préstamo con un prestamista poco escrupuloso. Usted desea solicitar un préstamo de 20 000 dólares por un año. La tasa de interés es de 14%. Usted y el prestamista están de acuerdo en que el interés sobre el préstamo sea de $.14 \times \$20\,000 = 2\,800$ dólares. Por lo tanto, el prestamista deduce por adelantado este monto de intereses del préstamo y le entrega 17 200 dólares. En este caso, decimos que el descuento es de 2 800 dólares. ¿Qué hay de incorrecto en este descuento?

61. **Cálculo de los valores de las anualidades** Usted es miembro de un jurado. Un vecino demanda a la ciudad por daños causados por un espantoso accidente callejero con un cepillo mecánico. Durante el juicio los médicos atestiguaron que el demandante sólo podrá volver a trabajar dentro de cinco años. El jurado ha decidido a favor del demandante. Usted es el presidente del jurado y propone otorgar al demandante una indemnización para cubrir lo siguiente: 1) el valor presente de los dos últimos años de sueldo. El salario anual del demandante en los dos últimos años hubiera sido de 42 000 y 45 000 dólares, respectivamente. 2) El valor presente de un salario futuro de cinco años. Usted supone que el salario será de 49 000 dólares al año. 3) 150 000 dólares por

dolencias y trastornos. 4) 25 000 dólares por costos del juicio. Suponga que los pagos de los salarios son montos iguales que se pagan al final de cada mes. Si la tasa de interés que elige es una TAE de 9%, ¿a cuánto ascenderá la indemnización? Si usted fuera el demandante, ¿preferiría una tasa de interés más alta o más baja?

**62.** **Cálculo de la TAE con puntos** Usted necesita un préstamo a un año de 10 000 dólares. La tasa de interés que le han cotizado es de 9% más tres puntos. Un *punto* sobre un préstamo es simplemente 1% (un punto porcentual) del monto del préstamo. Cotizaciones como ésta son muy comunes en las hipotecas para la adquisición de casas habitación. En este ejemplo, la cotización de la tasa de interés requiere que el prestatario pague por adelantado tres puntos al prestamista y que reembolse el préstamo en una fecha posterior con un interés de 9%. ¿Qué tasa real se pagaría en este caso? ¿Cuál es la TAE de un préstamo a un año con una tasa de interés cotizada de 12% más dos puntos? ¿El monto del préstamo afecta su respuesta?

**63.** **TAE frente a TPA** Dos bancos del área ofrecen hipotecas de 200 000 dólares a 30 años y a una tasa de 6.8%; asimismo, cobran una comisión por solicitud de préstamo de 2 100 dólares. Sin embargo, la comisión que cobra el Insecurity Bank and Trust es reembolsable si la solicitud de préstamo se rechaza, mientras que la que cobra I. M. Greedy and Sons Mortgage Bank no. Las leyes actuales sobre transparencia de la información requieren que las comisiones que se reembolsen si se rechaza la solicitud se incluyan en el cálculo de la TPA, lo cual no sucede en el caso de las comisiones no reembolsables (presumiblemente porque las cantidades reembolsables son parte del préstamo más que una comisión). ¿Cuáles son las TAE de estos dos préstamos? ¿Cuáles son las TPA?

**64.** **Cálculo de la TAE con intereses complementarios** Este problema ilustra una forma engañosa de cotizar las tasas de interés denominada *intereses complementarios*. Imagine que ve un anuncio de Crazy Judy's Stereo City que dice lo siguiente: "¡1 000 dólares de crédito al instante! ¡16% de interés simple! ¡Tres años para pagar! ¡Pagos mensuales muy, muy bajos!". Usted no está seguro de lo que esto significa exactamente y alguien derramó tinta donde aparece la TPA en el contrato de préstamo, por lo que le pide a la administradora la aclaración correspondiente.

Judy explica que si usted solicita en préstamo 1 000 dólares a tres años, a una tasa de interés de 16%, dentro de tres años deberá:

$$\$1\,000 \times 1.16^3 = \$1\,000 \times 1.56090 = \$1\,560.90$$

Judy reconoce que solicitar 1 560.90 dólares en una sola exhibición podría crear una gran tensión, por lo que le permite hacer "pagos muy, muy bajos" de \$1 560.90/36 = 43.36 dólares mensuales, aun cuando esta suma le represente un trabajo adicional de contabilidad.

¿Se trata en realidad de un préstamo a una tasa de 16%? Explique su respuesta. ¿Cuál es la TPA sobre este préstamo? ¿Cuál es la TAE? ¿Por qué cree que esto se denomina intereses complementarios?

**65.** **Cálculo del pago de anualidades** Una amiga suya celebra hoy su cumpleaños número 35 y desea empezar a ahorrar para su jubilación anticipada a los 65 años. Ella desea retirar 110 000 dólares de su cuenta de ahorro en cada aniversario durante 25 años después de su jubilación; el primer retiro será cuando cumpla 66 años. Su amiga quiere invertir su dinero en la unión de crédito local, que ofrece 9% de interés anual. Además, en cada cumpleaños desea hacer pagos anuales iguales a la cuenta establecida en la unión de crédito para su fondo de jubilación.

***a*)** Si ella empieza a hacer estos depósitos cuando cumpla 36 años y continúa haciendo depósitos hasta que cumpla 65 (su último depósito será en su aniversario número 65), ¿qué cantidad deberá depositar cada año para poder hacer los retiros de fondos deseados durante su jubilación?

***b*)** Suponga que su amiga acaba de heredar una fuerte suma de dinero. En lugar de hacer pagos anuales análogos, ha decidido hacer un solo pago de una suma global en su cumpleaños número 35 para cubrir sus necesidades de jubilación. ¿Qué monto tiene que depositar?

***c*)** Suponga que el empleador de su amiga aportará 1 500 dólares a la cuenta cada año como parte del plan de participación en las utilidades de la empresa. Además, su amiga espera una distribución de 50 000 dólares de un fideicomiso familiar en su cumpleaños número 55, que también depositará en la cuenta de jubilación. ¿Qué cantidad deberá depositar anualmente su amiga para estar en condiciones de hacer los retiros deseados durante su jubilación?

66. **Cálculo del número de periodos** Sus vacaciones navideñas en un centro de esquí fueron grandiosas, pero desafortunadamente se salieron un poco de su presupuesto. No se ha perdido todo: acaba de recibir una oferta por correo para transferir su saldo de 9 000 dólares de su tarjeta de crédito actual, la cual cobra una tasa anual de 18.6%, a una nueva tarjeta de crédito que cobra una tasa de 8.2%. ¿Cuándo liquidará el préstamo si efectúa pagos mensuales planeados de 200 dólares con la nueva tarjeta? ¿Qué sucedería si el banco cobrara una comisión de 2% sobre los saldos transferidos?

67. **Valor futuro y flujos de efectivo múltiples** Una compañía de seguros está ofreciendo una nueva póliza a sus clientes. De ordinario, éstos son padres de familia o abuelos que compran esta póliza cuando nace el niño. Los detalles de la póliza son como sigue: el comprador (digamos el padre) hace los seis pagos siguientes a la compañía de seguros:

| | |
|---|---|
| Primer cumpleaños: | $ 800 |
| Segundo cumpleaños: | $ 800 |
| Tercer cumpleaños: | $ 900 |
| Cuarto cumpleaños: | $ 900 |
| Quinto cumpleaños: | $1 000 |
| Sexto cumpleaños: | $1 000 |

Después del sexto cumpleaños del hijo no se hacen más pagos. Cuando el hijo llegue a los 65 años recibirá 350 000 dólares. Si la tasa de interés relevante es de 11% durante los seis primeros años y de 7% todos los años subsiguientes, ¿vale la pena comprar la póliza?

68. **Valores presentes de las anualidades y tasas efectivas** Usted acaba de ganar la lotería. Por lo tanto, hoy recibirá 2 millones de dólares y luego recibirá 40 pagos de 750 000 dólares cada uno. Estos pagos empezarán dentro de un año a partir de hoy y se pagarán cada seis meses. Un representante de Greenleaf Investments le ofrece comprar todos los pagos en 15 millones de dólares. Si la tasa de interés apropiada es una TPA de 9% diariamente capitalizable, ¿debe aceptar la oferta? Suponga que existen 12 meses en un año, cada uno con 30 días.

69. **Cálculo de tasas de interés** Una agencia de planeación financiera ofrece un programa de ahorro para pagar una carrera universitaria. El plan requiere que usted haga seis pagos anuales de 8 000 dólares cada uno, hoy el primero de ellos, cuando su hijo cumple 12 años. Cuando cumpla 18 el plan proporcionará 20 000 dólares por año durante cuatro años. ¿Qué rendimiento ofrece esta inversión?

70. **Punto de equilibrio de los rendimientos sobre inversiones** Su asesor en planeación financiera le ofrece dos distintos planes de inversión. El plan X es una perpetuidad anual de 20 000 dólares. El plan Y es una anualidad a 10 años de 35 000 dólares. Ambos planes harán su primer pago dentro de un año. ¿A qué tasa de descuento sería usted indiferente entre estos dos planes?

71. **Flujos de efectivo perpetuos** ¿Cuál es el valor de una inversión que paga 8 500 cada *dos* años para siempre, si el primer pago ocurre dentro de un año a partir de hoy y la tasa de descuento es de 13% diariamente capitalizable? ¿Cuál es el valor de hoy si el primer pago se realiza dentro de cuatro años? Suponga que no hay años bisiestos.

72. **Anualidades ordinarias y anualidades anticipadas** Como se expuso en el texto, una anualidad anticipada es idéntica a una anualidad ordinaria excepto porque los pagos periódicos ocurren al inicio de cada periodo y no al final. Muestre que la relación entre el valor de una anualidad ordinaria y el valor de una anualidad anticipada, que por lo demás es equivalente, es de:

$$\text{Valor de la anualidad anticipada} = \text{Valor de la anualidad ordinaria} \times (1 + r)$$

Demuestre esto tanto para el valor presente como para el valor futuro.

73. **Cálculo de la TAE** Un establecimiento que cambia cheques se dedica también a hacer préstamos personales a los clientes ordinarios. La tienda hace únicamente préstamos de una semana a una tasa de interés de 9% semanal.
    ***a*)** ¿Qué TPA deberá informar la tienda a sus clientes? ¿Cuál es la TAE que en realidad pagan los clientes?
    ***b*)** Suponga ahora que la tienda hace préstamos de una semana a una tasa de interés descontado de 9% semanal (vea la pregunta 60). ¿Cuál será la TPA ahora? ¿Y la TAE?
    ***c*)** Este establecimiento de cambio de cheques también hace préstamos con intereses complementarios a un mes con una tasa de interés descontado de 9% semanal. Por lo tanto, si usted solicita un préstamo de 100 dólares por un mes (cuatro semanas), el interés será de ($\$100 \times 1.09^4) - 100 = \$41.16$. Debido a que se trata de interés descontado, hoy los fondos netos del préstamo serán de 58.84 dólares. Entonces usted deberá reembolsarle a la tienda 100 dólares al final del mes. Sin embargo, para ayudarle, la tienda le permite liquidar esta suma en abonos de 25 dólares por semana. ¿Cuál será la TPA de este préstamo? ¿Cuál será la TAE?
74. **Valor presente de una perpetuidad creciente** ¿Cuál es la ecuación del valor presente de una perpetuidad creciente con un pago de $C$ después de un periodo a partir de hoy si los pagos crecen $C$ en cada periodo?
75. **Regla del 72** Una útil herramienta empírica para calcular el tiempo que requiere una inversión para duplicarse con capitalizaciones discretas es la "regla del 72". Para usarla, usted simplemente divide 72 entre la tasa de interés para determinar el número de periodos que se requieren para que un valor de hoy se duplique. Por ejemplo, si la tasa de interés es de 6%, la regla del 72 establece que se requerirán $72/6 = 12$ años para duplicarse. Esto es aproximadamente igual a la respuesta real de 11.90 años. La regla del 72 también se puede aplicar para determinar la tasa de interés que se necesita para duplicar el dinero en un periodo específico. Esta aproximación es útil para muchas tasas de interés y periodos. ¿A qué tasa es exacta la regla del 72?
76. **Regla del 69.3** Un corolario de la regla del 72 es la regla del 69.3. La regla del 69.3 es correcta en forma exacta excepto para redondeos cuando las tasas de interés se capitalizan en forma continua. Demuestre la regla del 69.3 en el caso de intereses continuamente capitalizables.

www.mhhe.com/rwj

## Problemas S&P

**www.mhhe.com/edumarketinsight**

1. Bajo el vínculo "Excel Analytics" encuentre el "Mthly. Adj. Price" de las acciones de Elizabeth Arden (RDEN). ¿Cuál fue su rendimiento anual en los cuatro últimos años suponiendo que usted compró las acciones al precio de cierre hace cuatro años? (Suponga que no se pagaron dividendos.) Con base en este mismo rendimiento, ¿a qué precio se venderán las acciones de Elizabeth Arden dentro de cinco años? ¿Y dentro de 10 años? ¿Qué podría decirse si el precio de las acciones aumenta 11% anual?
2. **Cálculo del número de periodos** Calcule los precios mensuales ajustados de las acciones de Southwest Airlines (LUV). Un analista ha proyectado que el precio de las acciones aumentará 12% anual en el futuro previsible. Con base en el precio mensual más reciente de las acciones, si la proyección resulta ser acertada, ¿cuándo alcanzará el precio de las acciones el nivel de 150 dólares? ¿Cuándo alcanzará el nivel de 200 dólares?

## Apéndice 4A Valor presente neto: Principios financieros fundamentales

Para tener acceso al apéndice de este capítulo, vaya a www.mhhe.com/rwj

## Apéndice 4B Uso de calculadoras financieras

Para tener acceso al apéndice de este capítulo, vaya a www.mhhe.com/rwj

Minicaso

## LA DECISIÓN SOBRE LA MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN

Ben Bates se graduó de la universidad hace seis años con una licenciatura en finanzas. Aunque está satisfecho con su trabajo actual, su meta es especializarse en banca de inversión. Piensa que un título de maestría en administración de empresas (MBA, por sus siglas en inglés) le permitirá lograr esta meta. Después de examinar las escuelas, redujo su elección ya sea a Walton University o Mount Perry College. Aunque en ambas escuelas se fomentan los programas de servicio social, para obtener créditos académicos por este servicio no se pueden pagar salarios. Aparte del servicio social, ninguna de las dos escuelas permite que sus estudiantes trabajen mientras están inscritos en sus programas de MBA.

Ben trabaja en la empresa de administración de dinero Dewey and Louis. Su salario anual es de 60 000 dólares por año y se espera que su salario aumente 3% anual hasta la jubilación. Actualmente Ben tiene 28 años de edad y espera trabajar 40 años más. Su trabajo actual incluye un plan de seguro de gastos médicos totalmente pagado y el promedio de su tasa tributaria actual es de 26%. Ben tiene una cuenta de ahorro con suficiente dinero para cubrir la totalidad del costo de su programa de MBA.

El Ritter College of Business, de la Walton University, tiene uno de los mejores programas de MBA en el país. El programa de maestría requiere una inscripción de tiempo completo durante dos años en la universidad. La colegiatura anual es de 65 000 dólares, pagadera al inicio de cada año escolar. Se estima que los libros y otros útiles escolares cuesten 3 000 dólares por año. Ben espera que después de la graduación de Walton recibirá una oferta de trabajo de aproximadamente 110 000 dólares anuales, con un bono a la firma del contrato de 20 000 dólares. En este trabajo su salario aumentará 4% por año. Debido a este salario más alto, el promedio de la tasa tributaria del impuesto sobre la renta aumentará a 31 por ciento.

La Bradley School of Business, del Mount Perry College, puso en marcha su programa de MBA hace 16 años. Bradley School es más pequeña y menos conocida que el Ritter College. Bradley ofrece un programa acelerado de un año, con un costo de colegiatura de 80 000 dólares pagaderos en el momento de matricularse. Se espera que los libros y otros útiles escolares para el programa tengan un costo de 4 500 dólares. Ben considera que recibirá una oferta de 92 000 dólares anuales después de graduarse, con un bono a la firma del contrato de 18 000 dólares. El salario de este trabajo aumentará 3.5% anual. El promedio de la tasa del impuesto sobre la renta será de 29 por ciento.

Ambas escuelas ofrecen un plan de seguro de gastos médicos que costará 3 000 dólares anuales, pagadero al principio del año. Ben también ha estimado que los gastos de alojamiento y pensión tendrán un costo de 2 000 dólares más por año en cualquiera de las dos escuelas. La tasa de descuento apropiada es de 6.5 por ciento.

1. ¿Cómo afecta la edad de Ben su decisión de obtener un título de MBA?
2. ¿Qué otros factores, tal vez no cuantificables, afectan la decisión de Ben de obtener el título de MBA?
3. Suponiendo que todos los salarios se pagan al final de cada año, ¿cuál es la mejor opción para Ben desde un punto de vista estrictamente financiero?
4. Ben considera que el análisis apropiado consiste en calcular el valor futuro de cada opción. ¿Cómo evaluaría usted esta afirmación?
5. ¿Qué salario inicial necesitaría recibir Ben para que se mostrara indiferente entre asistir a la Walton University o permanecer en su posición actual?
6. Suponga que en lugar de pagar en efectivo su MBA, Ben debe solicitar un préstamo para estudiar. La tasa actual sobre préstamos es de 5.4%. ¿Cómo afectaría esto su decisión?