Computación Científica

Ejercicios 1

Leroy Deniz
Grado en Ingeniería en Informática
Universidad del País Vasco

EJERCICIO 1

Resolver el sistema mediante el método de Gauss-Seidel, con una tolerancia (tol) de 0,01, utilizando la norma del infinito y tomando los valores iniciales $x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}$, con i=1,2,3,4.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Sistema de ecuaciones asociado

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x_1 - x_2 - x_3 & = & -4 \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 & = & 0 \\ -x_1 + 4x_3 - x_4 & = & 4 \\ -x_2 - x_3 + 4x_4 & = & -4 \end{array}\right\}$$

Proceso iterativo

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \frac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{4}\left[x_1^{(k+1)} + x_4^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} & = & \frac{1}{4}\left[4 + x_1^{(k+1)} + x_4^{(k)}\right] \\ x_4^{(k+1)} & = & \frac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)}\right] \end{array}$$

Para k=0 - Valores iniciales

$x_1^{(0)} = \frac{-4}{4} = \mathbf{-1}$;
$x_2^{(0)} = \mathbf{0}$;
$x_3^{(0)} = \frac{4}{4} = \mathbf{1}$;
$x_4^{(0)} = \frac{-4}{4} = \mathbf{-1}$;

Para k=1 - Primera iteración

$$\begin{array}{rcl} x_1^{(1)} & = & \frac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right] = \frac{1}{4}\left[-4 + 0 + 1\right] = \mathbf{-0{,}75} \\ x_2^{(1)} & = & \frac{1}{4}\left[x_1^{(1)} + x_4^{(0)}\right] = \frac{1}{4}\left[-0,75 - 1\right] = \mathbf{-0{,}4375} \\ x_3^{(1)} & = & \frac{1}{4}\left[4 + x_1^{(1)} + x_4^{(0)}\right] = \frac{1}{4}\left[4 - 0,75 - 1\right] = \mathbf{0{,}5625} \\ x_4^{(1)} & = & \frac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right] = \frac{1}{4}\left[-4 - 0,4375 + 0,5625\right] = \mathbf{-0{,}96875} \end{array}$$

Error de aproximación:
$||x_i^{(1)} - x_i^{(0)}||_\infty = \text{máx}\{0,25;\ 0,4375;\ 0,4375;\ 0,03125\} = \ \mathbf{0{,}4375} > 0,01$

Para k=2

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \tfrac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[-4 - 0,4375 + 0,5625\right] = \textbf{-0,96875}\\
x_2^{(2)} &= \tfrac{1}{4}\left[x_1^{(2)} + x_4^{(1)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[-0,96875 - 0,96875\right] = \textbf{-0,484375}\\
x_3^{(2)} &= \tfrac{1}{4}\left[4 + x_1^{(2)} + x_4^{(1)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[4 - 0,96875 - 0,96875\right] = \textbf{0,515625}\\
x_4^{(2)} &= \tfrac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[-4 - 0,484375 + 0,515625\right] = \textbf{-0,9921875}
\end{aligned}$$

Error de aproximación:

$||x_i^{(2)} - x_i^{(1)}||_\infty = \text{máx}\{0,21875;\ 0,046875;\ 0,046875;\ 0,0234375\} =$ **0,21875** $> 0,01$

Para k=3

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= \tfrac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[-4 - 0,484375 + 0,515625\right] = \textbf{-0,9921875}\\
x_2^{(3)} &= \tfrac{1}{4}\left[x_1^{(3)} + x_4^{(2)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[-0,9921875 - 0,9921875\right] = \textbf{-0,49609375}\\
x_3^{(3)} &= \tfrac{1}{4}\left[4 + x_1^{(3)} + x_4^{(2)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[4 - 0,9921875 - 0,9921875\right] = \textbf{0,50390625}\\
x_4^{(3)} &= \tfrac{1}{4}\left[-4 + x_2^{(3)} + x_3^{(3)}\right] = \tfrac{1}{4}\left[-4 - 0,49609375 + 0,50390625\right] = \textbf{-0,998046875}
\end{aligned}$$

Error de aproximación:

$$\begin{aligned}
||x_i^{(3)} - x_i^{(2)}||_\infty &= \text{máx}\{0,0234375;\ 0,01171875;\ 0,01171875;\ 0,005859375\}\\
&= \ \textbf{0,0234375} < 0,01
\end{aligned}$$

Aplicando el método de Gauss-Seidel e iterando un total de tres veces, los valores aprocimados a tres cifras significaticas son los siguientes:

$x_1 = -0,992$
$x_2 = -0,496$
$x_3 = \ \ 0,504$
$x_4 = -0,998$

EJERCICIO 2

Resolver el siguiente límite usando el polinomio de MacLaurin

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{4x^3}$$

Solución.

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots - x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots}{4x^3}$$

Sacando factor común x^3 tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \dfrac{1}{3!} + \dfrac{x^2}{5!} + \cdots}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{3!} + \overbrace{\dfrac{x^2}{5!} + \cdots}^{\text{todos los términos tienen } x\to 0}}{4} = \frac{\dfrac{1}{3!}}{4} = \frac{1}{24}$$

EJERCICIO 3

$$\text{Dada } \phi(x) = \begin{cases} y'' - xy + y^2 &= 0 \\ y(0) &= -1 \\ y'(0) &= 2 \end{cases}$$

Aproximar $y(0,2)$ utilizando siete cifras significativas, para ello $y \sim P_2(x)$ y referenciamos el error

$$y(x) \approx p(x) \approx \underbrace{\underbrace{y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2}_{p_2(x)} + \frac{y'''(0)}{3!}x^3}_{p_3(x)}$$

Datos:

$y'' - xy' + y^2 = 0$
$y''' = y' + xy - 2yy'$

Como el punto en evaluación es 0, en vez de Taylor, usamos el Polinomio de MacLaurin:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$P(x) = \underbrace{y(0)}_{-1} + \underbrace{y'(0)}_{2}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3$$

$$y'' = xy - y^2 \Rightarrow y''(0) = 0 \cdot 2 - 1 \Rightarrow y''(0) = -1$$

$$y''' = y' + xy - 2yy' \Rightarrow y'''(0) = 2 + 2 \cdot 2 \Rightarrow y'''(0) = 6$$

$$P_2(0,2) = -1 + 2(0,2) - \frac{1}{2}(0,2)^2 = -0,58$$

$$P_3(0,2) = P_2(0,2) + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = -0,58 - (0,2)^3 = -0,572$$

Como tol$=0,01$, $P_3(0,2) - P_2(0,2) = -0,58 + 0,572 = 8 \cdot 10^{-3}$ <tol.

EJERCICIO 4

Hallar los intervalos de underflow y overflow, epsilon, intervalo de la representación equivalente decimal para el tipo de dato Half.

Identificar la representación del 2 en este tipo de dato y de su siguiente.

La cantidad de posiciones para el tipo de datos es de 16 bits, cuya distribución es de 1 ‖ 5 ‖ 10, el primer bit de signo, los siguientes 5 bits para el exponente y 10 para la parte fraccionaria de la mantisa.

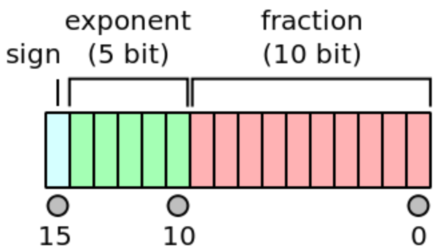

Figura 1: Distribución de bits. (Fuente: Wikipedia)

Se disponen de 5 bits para el exponente, por lo que el sesgo es $2^{k-1} - 1 = 2^4 - 1 = 15$, es decir, 01111.

$\mathrm{E_{MIN}} = \underbrace{00001_2}_{\text{MINIMO}}$ - $\underbrace{01111_2}_{\text{SESGO}} = 11110_{(2} =$ -14

$\mathrm{E_{MAX}} = \underbrace{11110_2}_{\text{MAXIMO}}$ - $\underbrace{01111_2}_{\text{SESGO}} = 01111_{(2} = 15$

Intervalo de representación de números negativos:

$$-1,1111111111 \cdot 2^{15} \quad \rightarrow \quad -1,0000000000 \cdot 2^{-14}$$

$$-65504_{(10} \rightarrow -0,000061035_{(10}$$

Intervalo de representación de números positivos:

$$1,0000000000 \cdot 2^{-14} \quad \rightarrow \quad 1,1111111111 \cdot 2^{15}$$

$$0,000061035_{(10} \rightarrow 65504_{(10}$$

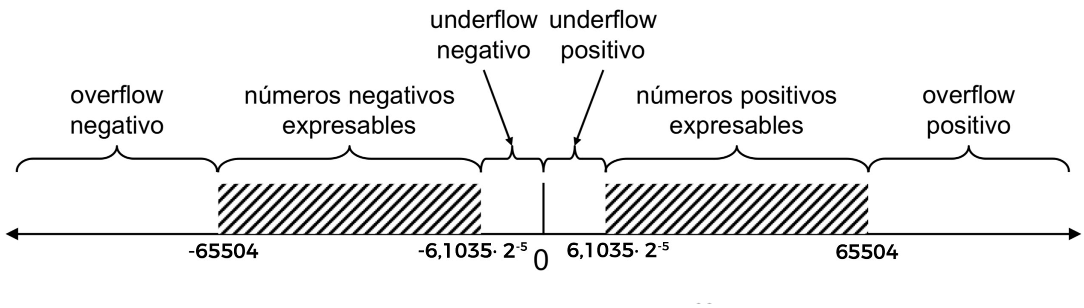

Figura 2: Rango de representación.

Representación del 1: $1{,}0000000000_2$ x $2^0 = 1,000$.
Representación del siguiente al 1 (1+eps): $1{,}0000000001_2$ x 2^0

eps: (salto del '1' al siguiente número máquina):
1,0000000001 x 2^0 - 1,0000000000 x 2^0

Representación del 2: $1{,}0000000000_2$ x $2^1 = 2,000$.
Representación del siguiente al 2 (2+eps): $1{,}0000000001_2$ x 2^1

EJERCICIO 5

Aproximar el valor de $f''(0,5)$ a partir de la tabla, comparar el resultado con $f'(0,5)$ e identificar el valor del error.

x_i	$f(x_i)$
0	0
0,25	0,242228
0,50	0,438791
0,75	0,548767
1,00	0,540302

$$f''(x) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} + \underbrace{k_1h^2 + k_2h^4 + k_3h^6 + \cdots}_{\text{error de tratamiento}} = N_0(h)$$

$$N_0(h) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

$$N_0(0,25) = \frac{f(0,75) - 2f(0,50) + f(0,25)}{(0,25)^2} = \frac{0,548767 - 2(0,438791) + 0,242228}{(0,25)^2} =$$

$N_0(0,25) = -1,385392$ **(1)**

$$N_0(0,50) = \frac{f(1,00) - 2f(0,50) - f(0)}{(0,50)^2} = \frac{0,540302 - 2(0,438791) + 0}{(0,50)^2} =$$

$N_0(0,50) = -1,349120$ **(2)**

Con (1) y (2) se calcula $N_1(0,50)$

$$\underbrace{N_1(0,50)}_{\text{Valor nuevo}} = \underbrace{N_0(0,25)}_{\text{Valor antiguo}} + \underbrace{\frac{N_0(0,25) - N_0(0,50)}{4-1}}_{\text{Término adicional}} = -1,385392 + \frac{-1,385392 + 1,349120}{4-1}$$

$N_1(0,50) = -1,397483$
Comparando $N_0(0,25)$ y $N_1(0,50)$ se obtiene el error:

$$|N_1(0,50) - N_0(0,25)| = |-1,397483 + 1,385392| = \underbrace{0,012091}_{\text{error de diferencia}} \quad \text{con p=7}$$

EJERCICIO 6

Expresa en hexadecimal la palabra de precisión simple que representa este número real:

$$x = -4,3578_{(10} \cdot 10^{-16}$$

Procedimiento:

$$\begin{aligned} 4,3578 \cdot 10^{-16} &= 2^e \\ (-16) \cdot \underbrace{\log(10)}_{=1} + \log(4,3578) &= e \cdot \log(2) \\ \frac{(-16) + \log(4,3578)}{\log(2)} &= e \\ -51,0272495 &= e \end{aligned}$$

$2^{-51,0272495} = 2^{-51} \cdot \underbrace{2^{-0,0272495}}_{m} \rightarrow$ hay que normalizar: $2^0 \leq m < 2^1$

Normalizando el exponente: $-51,0272495 = -51-1+1-0,0272495 = -52+0,9727505$

$2^{-52} \cdot 2^{0,9727505} \Rightarrow m = 1,96257869$

$\underbrace{1}_{PE},\underbrace{96257869}_{Pf} = 1,11110110011010111000111 0$

$s = 1$

$e = -52 + \underbrace{127}_{sesgo} = 75 = 01001011$

$m = 1111\ 0110\ 0110\ 1011\ 1000\ 111\ (010)$

$\underbrace{1010}_{A}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{0011}_{3}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{1100}_{C}\underbrace{0111}_{7}$

La palabra en hexadecimal es A5FB35C7 correspondiente a la palabra en precisión simple $x = -4,3578_{(10} \cdot 10^{-16}$

EJERCICIO 7

Calcular el cardinal de elementos para HP Calculator

B 10
P 12
L -499
U 499

Solución.

El cardinal es el número de elementos de un conjunto, por lo que tenemos que ver la cantidad de permutaciones posibles entre las opciones que puede tomar la parte entera junto a las diferentes mantisas con los diferentes valores que puede tomar el exponente.

Cardinal = [posibles partes enteras]·([posibles mantisa] - [casos particulares])·[posibles exponente]

$$\text{Cardinal} = P_1^{10} \cdot (P_{12}^{10} - 2) \cdot 999 = 10 \cdot (1000000000000 - 2) \cdot 999 = \mathbf{9,99 \cdot 10^{15}}$$

EJERCICIO 8

Calcular el valor de la integral usando el Polinomio de Taylor:

$$f(x) = \int_{1,1}^{1,3} \arctan(x)\ dx \tag{2}$$

Polinomio de Taylor de 2º grado:

$$P_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$\mathrm{VA}_1 = \arctan(1,3) - \arctan(1,1) \approx P_2(1,3) - P_2(1,1) = 0,957898 - 0,837898 =$$

$$\mathrm{VA}_1 = \mathbf{0{,}120000}$$

Polinomio de Taylor de 3º grado:

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{1}{12}(x-1)^3$$

$$\mathrm{VA}_2 = P_3(1,3) - P_3(1,1) = \left(P_2(1,3) + \frac{1}{12}(1,3-1)^3) - (P_2(1,1) + \frac{1}{12}(1,1-1)^3)\right) =$$

$$\mathrm{VA}_2 = \mathbf{0{,}122167}$$

$$|E_{aprox}| \approx |\mathrm{VA}_2 - \mathrm{VA}_1| = 0,122167 - 0,120000 = \mathbf{0{,}002167} = 2,167 \cdot 10^{-3} < \text{tol } (0{,}02)$$