Computación Científica

Ejercicios 3

Leroy Deniz
Grado en Ingeniería en Informática
Universidad del País Vasco

EJERCICIO 1

Aplicar el algoritmo de bisección a la función $f(x) = 2x - 1 + \sin(x)$ en el intervalo $[-2; 2]$ y tol$=0,5 \times 10^{-2}$

$a = -2$	$b = 2$	$f(a) < 0$	$f(b) > 0$	$x = a + \frac{b-a}{2}$	$f(x)$
-2	2	$-0,50349$	$3,0349$	0	$-1,0000$
0	2	$-1,0000$	$3,0249$	1	$1,0175$
0	1	$-1,0000$	$1,0175$	$0,5$	$0,0087$
0	$0,5$	$-1,0000$	$0,0087$	$0,25$	$-0,4956$
$0,25$	$0,5$	$-0,4956$	$0,0087$	$0,375$	$-0,2435$
$0,375$	$0,5$	$-0,2435$	$0,0087$	$0,4375$	$-0,1174$
$0,4375$	$0,5$	$-0,1174$	$0,0087$	$0,4688$	$-0,05422$
$0,4688$	$0,5$	$-0,05422$	$0,0087$	$0,4844$	$-0,02275$
$0,4844$	$0,5$	$-0,02275$	$0,0087$	$0,4922$	$-0,007010$
$0,4922$	$0,50$	$-0,007010$	$0,0087$	$0,4961$	$0,0008585$

Máximo error cometido: $\frac{1}{2}[b-a] = \frac{1}{2}[0,50 - 0,4922] = 0,00039 < 0,0005$ (tolerancia)

El valor aproximado de la raíz de la función $f(x)$ es $0,4961$ necesitando 10 iteraciones del algoritmo para acotar el error respecto de la tolerancia dada.

EJERCICIO 2

Resolver la ecuación $f(x) = x - (0,2) \cdot \sin x - (0,5) = 0$. Demuestre que tiene solución en $[0,1]$. Aproximar por el método de iteración de punto fijo con $p = 7$ y $tol = 0,5 \cdot 10^{-5}$. Utilizar el despeje $x = (0,2) \cdot \sin x + (0,5)$ y justificar si el mismo es bueno o no.

$$f(x) = x - (0,2) \cdot \sin x - (0,5) = 0 \Rightarrow x = (0,2) \cdot \sin x + (0,5)$$

Intervalo de búsqueda: $[0,1]$

$$\begin{cases} f(0) &= 0 - (0,2) \cdot \sin 0 - 0,5 = -0,5 \\ f(1) &= 1 - (0,2) \cdot \sin 1 - 0,5 = 0,4965095 \end{cases}$$

$x_0 = 0,5 \wedge k \geq 0$

x_k	pm	x_{k+1}
x_0	$0,5000000$	$0,5017453$
x_1	$0,5017453$	$0,5017514$
x_2	$0,5017514$	$0,5017514$

$x_3 - x_2 = 0,000000$ en $p = 7$ <tol

El valor aproximado de la raíz de $f(x)$ en el intervalo $[0,1] = 0,5017514$

El despeje es muy bueno ya que en tres iteracione se consigue una precisión exacta en 7 cifras.

EJERCICIO 3

Mediante el Algoritmo de Birge-Vieta, encontrar las raices del polinomio $P(x) = x^3 - 1,7x^2 - 1,6x + 1,2$ sabiendo que hay una en $[0,1]$, con $p = 7$ y tol$= 0,5 \cdot 10^{-4}$. Comprobar que tiene un cero en $[0,1]$.

Solución

Como el intervalo es [0,1], el punto medio será nuestro valor inicial: $x_0 = 0,5$.

Cálculo de x_1

$$\begin{array}{r|rrrr} 0{,}5 & 1 & -1{,}7 & -1{,}6 & 1{,}2 \\ & & 0{,}5 & -0{,}6 & -1{,}1 \\ \hline & 1 & -1{,}2 & -2{,}2 & 0{,}1 \end{array} \quad P(x_0) = 0,1$$

$$\begin{array}{r|rrr} 0{,}5 & 1 & -1{,}2 & -2{,}2 \\ & & 0{,}5 & -0{,}35 \\ \hline & 1 & -0{,}7 & -2{,}55 \end{array} \quad P'(x_0) = -2,55$$

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = 0,5 - \frac{0,1}{-2,55} = 0,53921569$$

Cálculo de x_2

$$\begin{array}{r|rrrr} 0{,}53921569 & 1 & -1{,}7 & -1{,}6 & 1{,}2 \\ & & 0{,}53921569 & -0{,}62591311 & -1{,}20011641 \\ \hline & 1 & -1{,}16078431 & -2{,}22591311 & -1{,}16411349^{-4} \end{array} \quad P(x_1) = -1{,}16411349^{-4}$$

$$\begin{array}{r|rrr} 0{,}53921569 & 1 & -1{,}16078431 & -2{,}22591311 \\ & & 0{,}53921569 & -0{,}33515955 \\ \hline & 1 & -0{,}62156862 & -2{,}56107266 \end{array} \quad P'(x_1) = -2{,}56107266$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = 0,53921569 - \frac{-1{,}16411349^{-4}}{-2{,}56107266} = 0{,}53917024$$

Cálculo de x_3

$$\begin{array}{r|rrrr} 0{,}53917024 & 1 & -1{,}7 & -1{,}6 & 1{,}2 \\ & & 0{,}53917024 & -0{,}62588486 & -1{,}20013087 \\ \hline & 1 & -1{,}16082976 & -2{,}22588486 & -1{,}30874339^{-4} \end{array} \quad P(x_2) = -1{,}30874339^{-4}$$

$$\begin{array}{r|rrr} 0{,}53917024 & 1 & -1{,}16082976 & -2{,}22588486 \\ & & 0{,}53917024 & -0{,}33518031 \\ \hline & 1 & -0{,}62165952 & -2{,}56106517 \end{array} \quad P'(x_2) = -2{,}56106517$$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = 0{,}53917024 - \frac{-1{,}30874339^{-4}}{-2{,}56106517} = 0{,}53911914$$

Cálculo de x_4

$$\begin{array}{r|rrrr} 0{,}53911914 & 1 & -1{,}7 & -1{,}6 & 1{,}2 \\ & & 0{,}53911914 & -0{,}62585309 & -1{,}20000000 \\ \hline & 1 & -1{,}16088086 & -2{,}22585310 & -4{,}12401^{-9} \end{array} \quad P(x_3) = -4{,}12401^{-9} \sim 0 \text{ en } p = 7$$

$$\begin{array}{r|rrr} 0{,}53911914 & 1 & -1{,}16088086 & -2{,}22585310 \\ & & 0{,}53911914 & -0{,}33520364 \\ \hline & 1 & -0{,}62176172 & -2{,}56105674 \end{array} \quad P'(x_3) = -2{,}56105674$$

$$x_4 = x_3 - \frac{P(x_3)}{P'(x_3)} = 0{,}53911914 - \frac{0}{-2{,}56105674} = 0{,}53911914$$

Como x_3 y x_4 son equivalentes en las primeras ocho cifras en la parte fraccionaria y a su vez, es menor que la tolerancia, se cumple el criterio de paro.

$$\alpha_1 = 0{,}53911914$$

Luego el polinomio deflactado sería:

$$P(x) = (x - 0{,}53911914)\underbrace{(x^2 - 1{,}16088086x - 2{,}22585310)}_{q(x)}$$

Para hallar las dos raíces restantes, hay que resolver $q(x) = 0$. Aplicando la fórmula de radicales para polinomios de segundo grado, tenemos:

$$\alpha_2, \alpha_3 = \frac{1,16088086 \pm \sqrt{(-1,16088086)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2,22585310)}}{2 \cdot 1}$$
$$\alpha_2, \alpha_3 = \frac{1,16088086 \pm \sqrt{1,34764437 + 8,90341240}}{2}$$
$$\alpha_2, \alpha_3 = 0,58044043 \pm 1,60086358$$

$$\alpha_2 = -1,02042315 \text{ y } \alpha_3 = 2,18130401$$

Luego, las raíces del polinomio $P(x)$ son:

$$\begin{cases} \alpha_1 &= 0,53911914 \\ \alpha_2 &= -1,02042315 \\ \alpha_3 &= 2,18130401 \end{cases}$$

EJERCICIO 4

Sea la función polinomial $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, una tolerancia de $0,5 \cdot 10^{-5}$ (cinco cifras en la parte fraccionaria) y una solución exacta $\alpha = 1,365232$.

1) Comprobar que existe una raiz en [1,2 ; 1,5].

Primero verificamos que el producto de la evaluacuón funcional en los exptremos es menor que cero, eso indicaría que son de signo opuesto:

$$f(1,2) \cdot f(1{,}5) = ((1,2)^3 + 4(1,2)^2 - 10) \cdot ((1,5)^3 + 4(1,5)^2 - 10) = -5,966 < 0$$

Existe un número impar de raíces en el intervalo, una o tres, ya que el polinomio es de grado 3.

Para identificar si en el intervalo existen una o tres raíces, derivamos la función $f(x)$, encontramos sus raíces y estudiamos su signo.

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = x(3x+8) = 0 \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{-8}{3} \sim -2,666667 \end{cases}$$

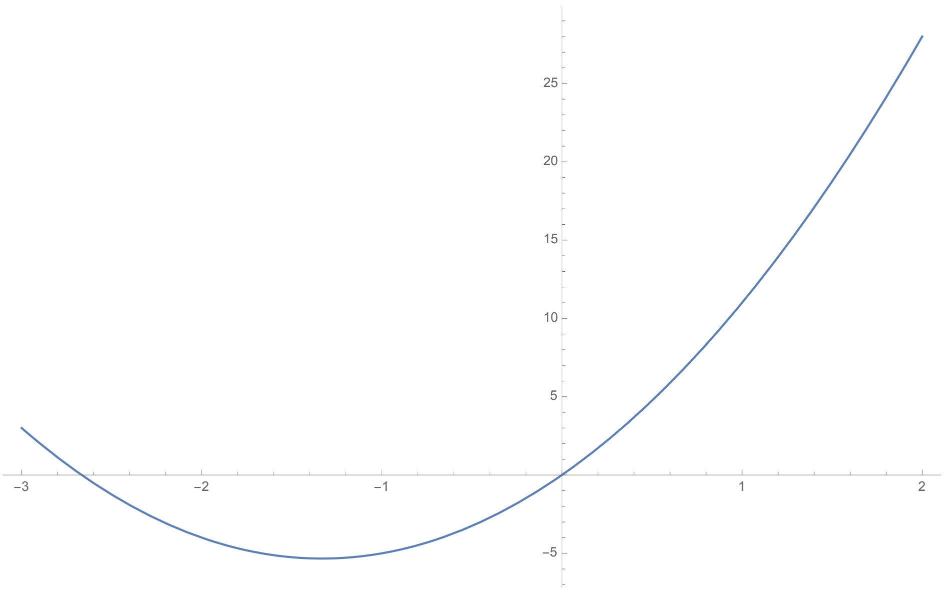

Figura 1: Representación de la derivada de la función f

La función es monótona creciente en todo el intervalo $[0, +\text{Inf}]$, y como el intervalo en cuestión está incluido, también lo es en él. Luego la función tiene una única raíz en el [1,2; 1,5].

2) Encontrar las raíces por medio del Algoritmo de la Secante.

$\#$	x_n	$f(x)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
x_0	$1,200000$	$-2,512$	
x_1	$1,500000$	$2,375$	$0,3$
x_2	$1,354205$	$-0,181078$	$0,145795$
x_3	$1,364533$	$-0,0115061$	$1,0028 \cdot 10^{-2}$
x_4	$1,365233$	$0,0000493188$	$7,0000 \cdot 10^{-4}$
x_5	$1,365230$	$-0,000000221512$	$3,0000 \cdot 10^{-6}$

La columna $f(x)$ tiende a 0, lo cual habla de que en ese punto aproxima a la raíz.

La columna x_n calcula, a través del Algoritmo de la Secante, el valor del siguiente x.

La columna $|x_i - x_{i-1}|$ refleja la diferencia entre los últimos dos valores que toma x y, es quien determina el criterio de paro, $3,0000 \cdot 10^{-6} < \text{tol}$.

La raíz del polinpomio $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ en el intervalo [1,2; 1,5] es $1,36523$ en $p = 6$ bajo una tolerancia de $0,5 \cdot 10^{-5}$.

Evaluamos del polinomio en la raíz aproximada a través del Algoritmo de Horner.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1{,}36523 & 1 & 4 & 0 & -10 \\
 & & 1{,}36523 & 7{,}32477 & 10{,}00000 \\
\hline
 & 1 & 5{,}36523 & 7{,}32477 & 0
\end{array}
$$

$$P(1,36523) = 0$$

$x =$ **1,36523 verifica que es raíz de la función en esa longitud**

EJERCICIO 5

Aproximar el valor de $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ cuando n aumenta ($n\uparrow$), utilizando el Algoritmo de la Aitken.

$P_n = \cos\left(\dfrac{1}{n}\right), n \geq 1 \quad \wedge \quad \text{lím}_{n\uparrow}\{P_n\} = 1$

Calculo la variación de cambio entre los dos resultados de P_i (ΔP_i) y lo mismo para estos últimos resultados ($\Delta^2 P_i$) .

n	P_n	ΔP_i	$\Delta^2 P_i$
1	$\cos\left(\frac{1}{1}\right) = 0,5403023$	$\Delta P_1 = P_2 - P_1 = 3,372803^{-1}$	$\Delta^2 P_1 = -2,699062^{-1}$
2	$\cos\left(\frac{1}{2}\right) = 0,5403023$	$\Delta P_2 = P_3 - P_2 = 6,737410^{-2}$	$\Delta^2 P_2 = -4,497856^{-2}$
3	$\cos\left(\frac{1}{3}\right) = 0,9449570$	$\Delta P_3 = P_4 - P_3 = 2,239554^{-2}$	$\Delta^2 P_3 = -1,124134^{-2}$
4	$\cos\left(\frac{1}{4}\right) = 0,9687124$	$\Delta P_4 = P_5 - P_4 = 1,115420^{-2}$	$\Delta^2 P_4 = -5,077700^{-3}$
5	$\cos\left(\frac{1}{5}\right) = 0,9800666$	$\Delta P_5 = P_6 - P_5 = 6,076600^{-3}$	
6	$\cos\left(\frac{1}{6}\right) = 0,9861432$		

Con estos datos, aplicamos el Algoritmo de Aitken que permite acelerar la convergencia al límite de la sucesión generada.

$$q_i = P_i - \frac{(\Delta P_i)^2}{\Delta^2 P_i}$$

$$q_1 = 0,5403023 - \frac{0,3372803^2}{-0,2699062} = 0,9617747$$

$$q_2 = 0,8775826 - \frac{0,0673741^2}{-0,04497856} = 0,97850334$$

$$q_3 = 0,9449570 - \frac{0,02239554^2}{-0,01124134} = 0,9895745$$

$$q_4 = 0,9689124 - \frac{0,0111542^2}{-0,0050777} = 0,9934154$$

EJERCICIO 6

Aproximar el valor de $\sqrt{2}$ mediante el Método de Iteración de Punto Fijo, acelerando el resultado usando el Algoritmo de Aitken y el de Steffensen.

Datos.

Valor exacto en $p = 7$: $\sqrt{2} = 1,4142136$

$\text{Tol} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ (cuatro cifras exactas en la parte fraccionaria)

Función recursiva: $\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left[a_n + \dfrac{2}{a_n}\right], n \geq 0 \end{cases}$

$\Delta P_i = P_{i+1} - Pi \quad \wedge \quad \Delta^2 P_i = \Delta P_{i+1} - \Delta Pi$

Algoritmo de Aitken: $q_i = P_i - \dfrac{(\Delta P_i)^2}{\Delta^2 P_i}$

Algoritmo de Steffensen: $a_0 \leftarrow Aitken(P_0)$

Solución.

n	P_n	ΔP_i	$\Delta^2 P_i$	Aitken	Steffensen
0	$1,000000$	$\Delta P_0 = 5,0000 \cdot 10^{-1}$	$\Delta^2 P_0 = -5,833 \cdot 10^{-1}$	$1,428596$	$1,428596$
1	$1,500000$	$\Delta P_1 = -8,333 \cdot 10^{-2}$	$\Delta^2 P_1 = 8,088 \cdot 10^{-2}$	$1,414146$	$1,414286$
2	$1,416667$	$\Delta P_2 = -2,451 \cdot 10^{-3}$	$\Delta^2 P_2 = 2,449 \cdot 10^{-3}$	$1,414214$	$1,414214$
3	$1,414216$	$\Delta P_3 = -2,000 \cdot 10^{-6}$			
4	$1,414214$				

Steffensen: $b_0 \leftarrow \text{Aitken}(P_0)$ y aplico la función recursiva con ese valor de inicio ya refinado.

$$P_{b_0} = 1,428596$$

$$P_{b_1} = \frac{1}{2}\left[b_0 + \frac{2}{b_0}\right] = \frac{1}{2}\left[1,428596 + \frac{2}{1,428596}\right] = 1,414286$$

$$P_{b_2} = \frac{1}{2}\left[b_1 + \frac{2}{b_1}\right] = \frac{1}{2}\left[1,414286 + \frac{2}{1,414286}\right] = 1,414214$$

Utilizando la función recursión, se necesitan tres iteraciones para alcanzar cuatro cifras exactas en la parte fraccionaria. Sin embargo, cuando aplicamos el algoritmo de Aitke para acelerar esa aproximación, necesitamos aplicar dos veces este para alcanzar la precisión requerida. Finalmente aplicando el Algoritmo de Steffensen sobre el primer resultado de Aitken, coincide la precisión en la primer aplicación.

EJERCICIO 7

Hallar la raíz de $P(x) = x^3 - 3x + 2$, cercano a $x_0 = 1,2$. Aplicar el Algoritmo de Birge-Vieta. Analizar los resultados.

Solución.

k	x_k	$\varepsilon_k \simeq x_{k+1} - x_k$	$\frac{\lvert\varepsilon_{k+1}\rvert}{\lvert\varepsilon_k\rvert}$
0	$1,200000000$		
1	$1,103030303$	$\varepsilon_0 = -0,969696970$	
2	$1,052356420$	$\varepsilon_1 = -0,050673883$	$\left\lvert\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right\rvert = 0,51515152$
3	$1,026400811$	$\varepsilon_2 = -0,025955609$	$\left\lvert\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right\rvert = 0,50816525$
4	$1,013257730$	$\varepsilon_3 = -0,013143081$	$\left\lvert\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right\rvert = 0,49675110$
5	$1,006642419$	$\varepsilon_4 = -0,006614311$	$\left\lvert\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}\right\rvert = 0,50975361$

La raíz del polinomio $P(x)$ tiende a 1, convergiendo de forma linea. El error disminuye a razón de aproximadamente $\frac{1}{2}$ de una etapa a la siguiente.

Verifico que la mejor aproximación a 1, sea una de las raíces de ese polinomio utilizando el Algoritmo de Horne para evaluar la función en ese punto.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1{,}006642419 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
 & & 1{,}006642419 & 1{,}01332896 & -1{,}99987342 \\
\hline
 & 1 & 1{,}006642419 & -1{,}98667104 & 0{,}00132658265
\end{array}
$$

Utilizando la quinta aproximación del Algoritmo de Birge-Vieta, el valor funcional en ese punto es 0,00132658265, y tenderá a 0 a medida que x_k avance.