

COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

Ejercicios 4

Leroy Deniz

Grado en Ingeniería en Informática

Universidad del País Vasco

EJERCICIO 1

Dada la función $f(x) = x(1 - \cos x)$:

- a) Demostrar que 0 es raíz de $f(x)$ y determinar su multiplicidad ($f(0) = 0$).

Evalúo en $x = 0$ la función $f(x)$ y sus derivadas hasta la primera de ellas cuyo resultado sea distinto a cero.

$$\begin{aligned} f(x) = x(1 - \cos x) &\rightarrow f(0) = 0 \cdot (1 - \cos 0) = 0 \cdot (1 - 1) = 0 \\ f'(x) = (1 - \cos x) + x \cdot \sin x &\rightarrow f'(0) = (1 - \cos 0) + 0 \cdot \sin 0 = 0 + 0 = 0 \\ f''(x) = 2 \cdot \sin x + x \cdot \cos x &\rightarrow f''(0) = 2 \cdot \sin 0 + 0 \cdot \cos 0 = 0 + 0 = 0 \\ f'''(x) = 3 \cdot \cos x - x \cdot \sin x &\rightarrow f'''(0) = 3 \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 = 3 \neq 0 \end{aligned}$$

Como el valor funcional de la derivada tercera es distinto de 0, la multiplicidad de la raíz es 3, ya que la raíz $x = 0$ anula a la función y a sus siguientes dos derivadas.

- b) Aplicar el Algoritmo de Newton con 10 iteraciones, en $p = 9$ y $x_0 = 1$. Calcular $\frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_5}$ y $\frac{\varepsilon_7}{\varepsilon_6}$, determinar si el error se estabiliza en una constante.

Aplicando el Algoritmo de Newton, obtenemos la siguiente tabla:

k	x_k	$\varepsilon_k \simeq x_{k+1} - x_k$	$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$
0	1,0000000000		
1	0,6467039965	-0,3532960035	
2	0,4259712709	-0,2207327856	0,6247814394
3	0,2825304410	-0,1434407699	0,6498389875
4	0,1879335654	-0,0945968756	0,6598388080
5	0,1251658102	-0,0627677552	0,6635288407
6	0,0834075192	-0,0417585910	0,6652825303
7	0,0555942620	-0,0278132572	0,6660535317
8	0,0370596587	-0,0185346033	0,6663945602
9	0,0247054965	-0,0123541622	0,6665458116
10	0,0164700517	-0,0082354448	0,6666129736

Conforme avanza el proceso iterativo, el error entre una etapa y la siguiente se estabiliza en una constante de valor $0,66666\dots$, tendiendo a $2/3$. Esto implica que la sucesión converge de forma lineal, es decir, que ha perdido las prestaciones de convergencia cuadrática que ofrece el Algoritmo de Newton.

- c) Calcular el m y volver a aplicar el Algoritmo de Newton recuperando su convergencia cuadrática.

$$\frac{m-1}{m} = \frac{2}{3} \Rightarrow (m-1) \cdot 3 = 2m \Rightarrow 3m - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Por lo tanto, el orden de convergencia es 3. Ahora bien, con este dato aplico nuevamente el Algoritmo de Newton recuperando la convergencia cuadrática inicial.

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - 3 \frac{x_k(1 - \cos x_k)}{1 - \cos x_k + x_k \cdot \sin x_k}$$

k	x_k	$\varepsilon_k \simeq x_{k+1} - x_k$	$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}$
0	1,0000000000		
1	$-5,98880104 \cdot 10^{-2}$	1,05988801	
2	$1,19360233 \cdot 10^{-5}$	$5,98999464 \cdot 10^{-2}$	$5,65153543 \cdot 10^{-2}$
3	$3,71554139 \cdot 10^{-10}$	$-1,19356517 \cdot 10^{-5}$	$1,99259806 \cdot 10^{-4}$

En tan solo tres iteraciones conseguimos una aproximación a la raíz $\alpha = 0$ que coinciden en 9 cifras en la parte fraccionaria de la mantisa.

EJERCICIO 2

Aplicación de las técnicas de interpolación para funciones definidas de forma discreta. La siguiente tabla muestra la velocidad de un cohete en función del tiempo transcurrido.

t (seg)	v ($m s^{-1}$)
0	0
10	227, 04
15	362, 78
20	517, 35
22, 5	602, 97
30	901, 67

Aplicando la técnica de interpolación de grado creciente para hallar un función polinomio que represente la variación de la velocidad, se obtienen estas funciones:

$$v_1(t) = -100, 93 + 30, 914t \text{ (aproximación lineal)}$$

$$v_2(t) = 12, 05 + 17, 733t + 0, 3766t^2 \text{ (aproximación cuadrática)}$$

$$v_3(t) = -4, 3810 + 21, 289t + 0, 13065t^2 + 0, 0054606t^3 \text{ (aproximación cúbica)}$$

a) ¿Cuál es el espacio recorrido por el cohete entre los instantes $t = 11$ y $t = 16$?

Sabemos que $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s(16) - s(11) = \int_{11}^{16} v_i(t) dt$

Aproximación lineal:

$$\int_{11}^{16} v_1(t) dt = -100, 93t + 15, 557t^2 \Big|_{11}^{16} = 1595, 545$$

Aproximación cuadrática:

$$\int_{11}^{16} v_2(t) dt = 12, 05t + 8, 8665t^2 + 0, 125533t^3 \Big|_{11}^{16} = 1604, 326$$

Aproximación cúbica:

$$\int_{11}^{16} v_3(t) = -4,3810t + 10,6445t^2 + 0,04355t^3 + 0,00136515t^4 \Big|_{11}^{16} = 1604,998$$

En función de las aproximaciones anteriores, podemos asegurar que el cohete ha recorrido 1604 metros entre los instantes $t = 11$ y $t = 16$.

b) ¿Cuál es la aceleración del cohete en el instante $t = 16$?

Para obtener el valor de la aceleración, derivamos la función velocidad ya que:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Para esto, basándonos en las funciones de la velocidad obtenidas ut supra mediante técnicas de interpolación de grado creciente, aproximamos la aceleración de la misma forma para obtener datos con los que comparar los resultados.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -100,93 + 30,914t \rightarrow \\ a_1(t) &= v'_1(t) = 30,914 \text{ (cte)} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} v_2(t) &= 12,05 + 17,733t + 0,3766t^2 \rightarrow \\ a_2(t) &= v'_2(t) = 17,733 + 0,7532t \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} v_3(t) &= -4,3810 + 12,289t + 0,13065t^2 + 0,0054606t^3 \rightarrow \\ a_3(t) &= v'_3(t) = 21,289 + 0,2613t + 0,0163818t^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Particularizamos la función en $t = 16$:

$$a_1(16) = 30,914$$

$$a_2(16) = 29,784$$

$$a_3(16) = 29,664$$

La aceleración en el instante $t = 16$ podemos aproximarla a $29ms^{-2}$.

EJERCICIO 3

Demostrar el grado del polinomio, construir la tabla de diferencias divididas y generar el esquema recursivo.

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \varphi(n) = P_\alpha(n)$$

Para demostrar el grado del polinomio vamos a desarrollar la tabla de diferencias divididas, donde la derivada se estabilice en un valor, el orden de su derivada será el grado del polinomio.

n	$\varphi(n)$	DsDs orden 1	DsDs orden 2	DsDs orden 3
1	1			
2	8	$\varphi[1, 2] = 7$		
3	27	$\varphi[2, 3] = 19$	$\varphi[1, 2, 3] = 6$	
4	64	$\varphi[3, 4] = 37$	$\varphi[2, 3, 4] = 9$	$\varphi[1, 2, 3, 4] = 1$
5	125	$\varphi[4, 5] = 61$	$\varphi[3, 4, 5] = 12$	$\varphi[2, 3, 4, 5] = 1$
6	216	$\varphi[5, 6] = 91$	$\varphi[4, 5, 6] = 15$	$\varphi[3, 4, 5, 6] = 1$

Luego el polinomio que interpola a la función $f(x)$ es de grado 3 cuyas cabeceras de las columnas son sus coeficientes, y tiene la siguiente estructura usando la Base Newton:

$$P_3(x) = 1 + 7(n - 1) + 6(n - 1)(n - 2) + (n - 1)(n - 2)(n - 3)$$

Expresado en forma anidada:

$$P_3(x) = (((n - 3) + 6)(n - 2) + 7)(n - 1) + 1$$

Su esquema recursivo se puede definir de la siguiente forma:

$$\varphi(n) = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3}_{\varphi(n-1)} + n^3$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(1) & = & 1 \\ \varphi(n) & = & \varphi(n-1) + n^3 \end{array} \right.$$

EJERCICIO 4

Aproximar el valor de la integral por medio de la Regla de Simpson con 1, 2 y 4 subintervalos de integración. Extrapolar los resultados.

$$I(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + 2t^2} dt$$

Se discretiza la función en intervalos y sus valores funcionales:

1 intervalo ($h = 0, 5$)		2 intervalos ($h = 0, 25$)		3 intervalos ($h = 0, 125$)	
t	$f(t)$	t	$f(t)$	t	$f(t)$
0	1, 0000000	0	1, 0000000	0	1, 0000000
0, 5	1, 2247449	0, 25	1, 0606602	0, 125	1, 0155048
1	1, 7320509	0, 50	1, 2247449	0, 25	1, 0606602
		0, 75	1, 4577380	0, 375	1, 1319231
		1	1, 7320509	0, 50	1, 2247449
				0, 625	1, 3346348
				0, 75	1, 4577380
				0, 875	1, 5909903
				1	1, 7320509

$$R_1 = \frac{0,5}{3} [f(0) + f(1) + 4 \cdot f(0,5)] = 1 + 1, 7320509 + 4 \cdot 1, 5547449 = 1, 2718384$$

$$R_2 = \frac{0,25}{3} [f(0) + f(1) + 4 \cdot [f(0,25) + f(0,75)] + 2 \cdot f(0,5)] = 1, 2712611$$

$$R_3 = \frac{0,125}{3} [f(0) + f(1) + 4 \cdot [f(0,125) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875)] + 2 \cdot [f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)]] = 1, 2712729$$

Aplicando el Algoritmo de Extrapolación de Romberg sobre los resultados obtenidos anteriormente, tenemos:

S/Ext	$Ext\ 1$	$Ext\ 2$
$R_{11} = 1,2718384$		
$R_{21} = 1,2712611$	$R_{22} = \frac{R_{21}-R_{11}}{4^2-1} = 1,2712227$	
$R_{31} = 1,2712729$	$R_{32} = \frac{R_{31}-R_{21}}{4^2-1} = 1,2712736$	$R_{33} = \frac{R_{32}-R_{22}}{4^3-1} = 1,2712745$

La mejor aproximación al valor de la integral definida I mediante la Regla de Simpson y extrapolando los resultados a través del Algoritmo de Romberg, es **1,2712745**.

EJERCICIO 5

A efectos de comparar resultados, tenemos que:

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x} dx \simeq 8,038733067 \text{ con las diez cifras significativas}$$

Aplicar el algoritmo de extrapolación de Romberg a los resultados obtenidos mediante Simpson, dónde:

- S_1 es la aproximación con un subintervalo de integración ($h=1$)
- S_2 es la aproximación con dos subintervalos de integración ($h=0,5$)
- $S_{new} = S_2 + \frac{S_2 - S_1}{4^2 - 1}$

¿Cuántas cifras significativas tiene S_{new} ?

Defino los intervalos de integración y calculo sus valores funcionales:

x	$f(x)$
1	2,718281828
1,5	2,987792714
2	3,694528049
2,5	4,872997584
3	6,695178974

$$S_1 = \frac{1}{3} \cdot [f(1) + f(3) + 4 \cdot f(2)] = 8,063857667$$

$$S_2 = \frac{1}{3} \cdot [f(1) + f(3) + 4 \cdot [f(1,5) + f(2,5)] + 2 \cdot f(2)] = 8,040946349$$

$$S_{new} = S_2 + \frac{S_2 - S_1}{4^2 - 1} = 8,039418928$$

La diferencia entre S_{new} y la anterior más refinada es:

$$E = S_{new} - S_2 = 8,039418928 - 8,040946349 = -1,52742 \cdot 10^{-3}.$$

Luego S_{new} tendrá cuatro cifras significativas correctas.