Computación Científica

Ejercicios 2

Leroy Deniz
Grado en Ingeniería en Informática
Universidad del País Vasco

EJERCICIO 1

Cancelación catastrófica. A continuación se ve un ejemplo de pérdida de significado. Resolver el mismo problema aplicando $x - y = x \cdot \left[1 - \frac{y}{x}\right]$

$$\begin{array}{cll} x & 0,9453697 & \cdot 10^{e} \\ y & 0,9452489 & \cdot 10^{e} \\ \hline & 0,0001208 & \cdot 10^{e} \end{array}$$

$$1,208 *** \cdot 10^{e-4}$$

$$\begin{aligned} x - y &= x \cdot \left[1 - \frac{y}{x}\right] \\ &= 0,9453697 \cdot \left[1 - \frac{0,9452489}{0,9453697}\right] \\ &= 0,9453697 \cdot [1 - 0,9998722] \\ &= 0,9453697 \cdot [0,0001278] \\ x - y &= 1,2081825 \cdot 10^{e-4} \end{aligned}$$

EJERCICIO 2

En una aritmética de coma flotante con $\beta = 10$ y $p = 4$, resolver, con y sin pivotaje, el sistema lineal, cuya solución exacta es $x_1 = 10,00$ y $x_2 = 1,000$

$$\left.\begin{array}{rcl} 0,00300x_1 + 59,14x_2 & = & 59,17 \\ 5,291x_1 - 6,130x_2 & = & 46,78 \end{array}\right\}$$

Representación matricial del sistema

$$\begin{bmatrix} 0,003000 & 59,14 \\ 5,291 & -6,130 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59,17 \\ 46,78 \end{bmatrix}$$

Matriz extendida

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003000 & 59,14 & 59,17 \\ 5,291 & -6,130 & 46,78 \end{array}\right]$$

Procedimiento sin pivotaje

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003000 & 59,14 & 59,17 \\ 5,291 & -6,130 & 46,78 \end{array}\right]$$

El pivot en la etapa 1 es $a_{11} = 0,003000$ por lo que, para hacer 0 el elemento a_{21} la combinación lineal es $F_2 \leftarrow F_2 + m \cdot F_1$

Multiplicador: $m = \dfrac{-5,291}{0,003000} \simeq -1764$ (en p=4)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003000 & 59,14 & 59,17 \\ 0,001000 & -104329 & -104329 \end{array}\right] = U$$

Como trabajamos en $p = 4$, no hemos podido cancelar totalmente el elemento a_{21}, por lo que se aplica nuevamente el algoritmo haciendo una combinación lineal. El pivot en esta etapa 2 es $a_{11} = 0,003000$ por lo que, para hacer 0 el elemento a_{21} la combinación lineal es $F_2 \leftarrow F_2 + m \cdot F_1$

Multiplicador: $m = \dfrac{-0,001000}{0,003000} \simeq -0,3333$ (en p=4)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003000 & 59,14 & 59,17 \\ 0 & -104349 & -104349 \end{array}\right] = U$$

Aplicando el algoritmo de remonte tenemos:

$x_2 = 1$

$x_1 = \dfrac{59,17 - 59,14}{0,003000} = 10$

Procedimiento con pivotaje

Como el elemento $a_{21} > a_{11}$, intercambiamos ambas filas para que el pivot sea el más grande posible.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0,003000 & 59,14 & 59,17 \\ 5,291 & -6,130 & 46,78 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 0,003000 & 59,14 & 59,17 \end{array}\right]$$

Luego el pivot es $a_{11} = 5,291$ y la combinación lineal para hacer ceros por debajo es $F_2 \leftarrow F_2 + m \cdot F_1$

Multiplicador: $m = \dfrac{0,003000}{-5,291} \simeq -0,00005670$ (en p=4)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5,291 & -6,130 & 46,78 \\ 0 & -59,14 & -59,14 \end{array}\right] = U$$

Aplicando el algoritmo de remonte tenemos:

$x_2 = 1$

$x_1 = \dfrac{46,78 + 6,130 \cdot (1)}{5,291} = 10,14$

EJERCICIO 3

Utilizando el Polinomio de Wilkinson [PW], ¿cuál sería el número de condición si buscáramos la modificación de $\alpha = 5$? ¿Y si $\varepsilon = 2^{-23}$ afectará a x^6?

$$PW'(x) = \sum_{i=1}^{20} \left[\prod_{j=1}^{20} (x-j) \text{ con } j \neq i \right]$$

$$\begin{cases} \varepsilon = -2^{-23} \\ g(x) = x^{19} \end{cases} \qquad \kappa(5) = \frac{-g(5)}{5 \cdot f'(5)}$$

$PW(5) = \left[\prod_{i=1}^{20} (x-i) \text{ con } i \neq 5\right]_{x=5}$

$= \underbrace{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}_{4!} \cdot \underbrace{(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)(-12)(-13)(-14)(-15)}_{-(15!)}$

$PW'(5) = -(15! \cdot 4!)$

$\kappa(5) = \dfrac{-g(5)}{5 \cdot f'(5)} = \dfrac{-5^{19}}{5 \cdot (-15! \cdot 4!)} = \dfrac{5^{18}}{15! \cdot 4!} = 1,215484 \cdot 10^{-1}$

EJERCICIO 4

Dado el sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\textbf{OUTPUT}} = A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\textbf{INPUT}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4,25 \end{pmatrix} \text{ queriendo un output de } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el número de condición de la matriz A, si esta fuera

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4,25 \end{pmatrix} \text{ queriendo un output de } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 8,05 \end{pmatrix}$$

b) Si la matriz de transferencia fuera B, ¿cuál sería el número de condición de la misma?

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \text{ queriendo un output de } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 8,05 \end{pmatrix}$$

Inversa de la matriz A por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4,25 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \leftarrow \frac{1}{3}R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0,3333 & 0 \\ 2 & 4,25 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 0,25 & -0,6667 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \leftarrow 4R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 1 & -2,6667 & 4 \end{array}\right] \quad R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5,6667 & -8,0000 \\ 0 & 1 & -2,6667 & 4,0000 \end{array}\right] = A^{-1}$$

La vector solución exacto la calculamos a través de: $\overline{x_e} \leftarrow A^{-1} * \overline{y}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6667 & -8,0000 \\ -2,6667 & 4,0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41,3333 \\ 21,3333 \end{bmatrix}$$

Los valores exactos de entrada deberían ser: $(-41,3333 \;\; 21,3333)^t$

En referencia a la pregunta a), calculamos los valores de $x_{1,2}$ con los nuevos valores de la matriz de output perturbada.

$\overline{x_p} \leftarrow inv(A) * \overline{\overline{y}}$ (perturbada)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6667 & -8,0000 \\ -2,6667 & 4,0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,9 \\ 8,05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6333 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

Los valores perturbados de entrada deberían ser: $(0,6333 \;\; 1,0000)^t$

Número de condición: $\kappa = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$ y usando la p-norma del infinito, tenemos que:

$||A|| = \text{máx}[9 \;\; 4,25] = 9$

$||A^{-1}|| = \text{máx}[13,6667 \;\; 6,6667] = 13,6667$

$\kappa = 9 \cdot 13,6667 = 123$. **La salida amplifica 123 veces el error de entrada.**

En referencia a la pregunta b), calculamos la inversa de la matriz B, así como los valores de $x_{1,2}$ con ambos valores de salida.

Inversa de la matriz B por Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \leftarrow \frac{1}{3} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0,6667 & 0,3333 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \leftarrow R_2 - 6R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0,6667 & 0,3333 & 0 \\ 0 & -9 & -1,9998 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \leftarrow \frac{-1}{9} R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0,6667 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 1 & 0,2222 & -0,1111 \end{array}\right] \quad R_1 \leftarrow R_1 - 0,6667R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0,1852 & 0,0741 \\ 0 & 1 & 0,2222 & -0,1111 \end{array}\right] = B^{-1}$$

La vector solución exacto la calculamos a través de: $\overline{x_e} \leftarrow B^{-1} * \overline{y}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1852 & 0,0741 \\ 0,2222 & -0,1111 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los valores exactos de entrada deberían ser: $(1,3333 \;\; 0)^t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1852 & 0,0741 \\ 0,2222 & -0,1111 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,9 \\ 8,05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3185 \\ -0,0278 \end{bmatrix}$$

Los valores perturbados de entrada deberían ser: $(1,3185 \;\; -0,0278)^t$

Número de condición: $\kappa = ||B|| \cdot ||B^{-1}||$ y usando la p-norma del infinito, tenemos que:

$||B|| = \text{máx}[5 \;\; 11] = 11$

$||A^{-1}|| = \text{máx}[0,2593 \;\; 0,3333] = 0,3333$

$\kappa = 11 \cdot 0,3333 = 3,6667$. **La salida amplifica 3,6667 veces el error de entrada.**

EJERCICIO 5

Demostrar que la sucesión $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \frac{1}{216}, \dots \frac{1}{6^n}, \dots\right\}$ se puede generar mediante la recurrencia lineal de 2º orden:

$$x_n = \left(\frac{37}{6}\right) x_{n-1} - x_{n-2}, n \geq 2$$

Con las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = \dfrac{1}{6}$. Trabajando en una aritmética de coma flotante con $p = 7$, obtener una tabla $\left\{n; x_n(\text{recurrencia}), \frac{1}{6^n}\right\}$. Comentar los resultados.

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ x_1 &= \dfrac{1}{6} \\ x_n &= \left(\dfrac{37}{6}\right) x_{n-1} - x_{n-2} \end{cases}$$

recurrencia de orden 2: $(n-1, n-2) \to (n)$

$$x_n = \frac{1}{6^n} \Rightarrow \left(\frac{37}{6}\right) \cdot \frac{1}{6^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-2}} = \frac{37}{6^n} - \frac{1}{6^{n-2}} = \frac{37-36}{6^n} = \frac{1}{6^n} = x_n$$

valores de n	**término genetal $\frac{1}{6^n}$**	**recurrencia $\left(\frac{37}{6}\right) x_{n-1} - x_{n-2}$**
$n=0$	$1,0000000$	$x_0 = 1,0000000$
$n=1$	$0,16666667$	$x_1 = \frac{1}{6} = 0,16666667$
$n=2$	$0,027777778$	$x_2 = \left(\frac{37}{6}\right) 0,16666667 - 1,0000000 = 0,027777777$
$n=3$	$0,0046296296$	$x_3 = \left(\frac{37}{6}\right) \cdot 0,02777777 - 0,16666667 = 0,15462963$
$n=4$	$0,00077160494$	$x_4 = \left(\frac{37}{6}\right) \cdot 1,5462963 - 0,027777777 = 9,5077165$
$n=5$	$0,00012860082$	$x_5 = \left(\frac{37}{6}\right) \cdot 9,5077165 - 1,5462963 = 57,084622$
$n=6$	$0,0000035722451$	$x_6 = \left(\frac{37}{6}\right) \cdot 57,084622 - 9,5077165 = 342,51419$
$n=7$	$0,00000059537418$	