

Milieus granulaires

Chaîne logistique de la construction en ville

Léry Monnerat - 11143

TIPE

2022-2023

1. Introduction
2. Tas vs silo
 - Angle de repos
 - Surface au sol occupée
3. Dimensionnement d'un silo
 - Modèle de Janssen
 - Vérifications expérimentales
4. Étude de l'écoulement dans un silo
5. Conclusion

Introduction

La construction, et les mutations, en milieu urbain dense nécessitent l'entreposage de matériaux, notamment de sable, avec des contraintes de temps et d'espaces¹. Les nombreux silos que j'ai pu observés en ville semblent apporter une solution à ce problème. Je me suis posé alors les questions suivantes :

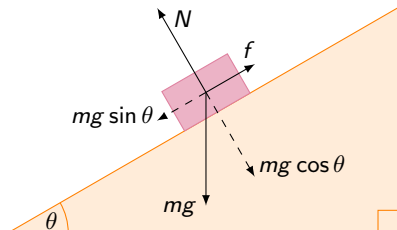


- 1 Pourquoi ce mode d'entreposage, plutôt que des tas ?
- 2 Quelles sont les contraintes mécaniques que subissent ces structures ?
- 3 Quel est l'impact sur la rapidité de mise à disposition des matériaux ?

1. Qui n'a jamais pesté de subir des bouchons à cause de travaux et de la place qu'ils nécessitent ?

Angle de repos

Hypothèse : Un grain de sable sur le talus se comporte comme un mobile sur une plaque homogène (de même coefficient de frottement que le sable)



À la limite de l'équilibre, en projetant le PFD, on obtient la relation entre le coefficient de frottement μ et l'angle de repos θ :

$$\mu = \tan \theta$$

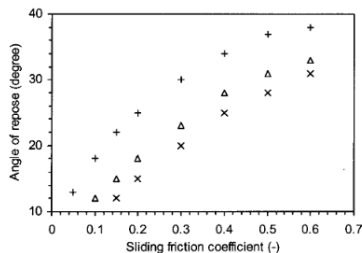
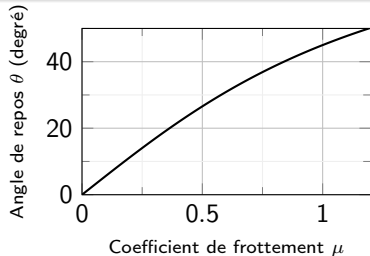


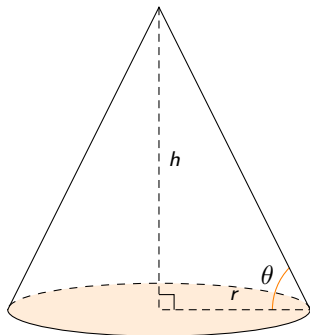
FIG. 6. Angle of repose as a function of sliding friction coefficient with different rolling friction coefficients: X, $\mu_{r,pp}$ = 0.025 mm; Δ , $\mu_{r,pp}$ = 0.05 mm; +, $\mu_{r,pp}$ = 0.1 mm.

Expérience : on fait couler du sable,
on mesure l'angle de repos.

1	33°
2	34°
3	38°
4	35°
5	30°
6	29°
7	35°
8	30°
9	34°
10	35°

$$\theta = (33.3 \pm 0.9)^{\circ}$$

Comparaison de la surface au sol occupée



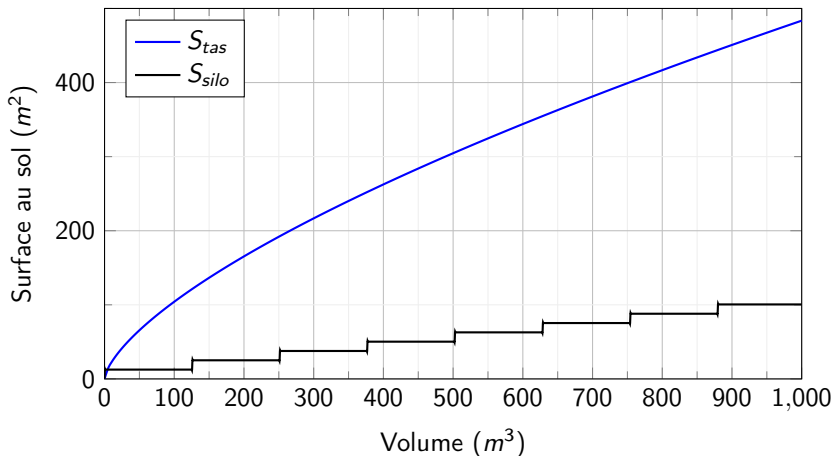
Le coefficient de frottement vérifie $\mu = \tan \theta$.
 Pour un tas (cône de révolution), la surface au sol S_{tas} pour un volume v donné est

$$S_{tas}(v) = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{\mu} v \right)^{\frac{2}{3}}$$

Pour un même volume v , avec des silos de hauteur h et de rayon r , la surface au sol nécessaire S_{silo}

$$S_{silo}(v) = \left\lceil \frac{v}{\pi r^2 h} \right\rceil \pi r^2$$

,

sable : $\mu = 0.5$, silo : $h = 10$, $r = 2$ 

Remarque : la "stratégie des petits tas" n'améliore pas, car $x \rightarrow x^{\frac{2}{3}}$ est sous-additive.

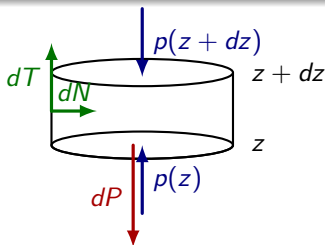
Les silos permettent bien de diminuer la surface nécessaire à l'entreposage des matériaux de construction.

Par exemple, pour la construction d'un hôpital, 3000 tonnes (1875 m^3) de sable sont nécessaires :

$$S_{tas}(1875) \approx 736 \text{ m}^2, S_{silo}(1875) \approx 188 \text{ m}^2$$

Dès lors, ce gain de surface n'engendre-t-il pas de nouvelles contraintes d'ordre mécanique sur leur structure ?

Équation de Janssen



Hypothèses

- milieu continu de masse volumique ρ .
- $p_r = K \cdot p$ (p_r pression radiale, K coefficient de Janssen).
- μ coefficient de frottement sur la paroi.
- limite de l'équilibre paroi-milieu granulaire.

Bilan des forces :

Poids	$\vec{dP} = -\rho S dz g \cdot \vec{u}_z$
Pression verticale	$\vec{F}_v = (p(z) - p(z + dz)) S \vec{u}_z$
Tangentielle	$\vec{dT} = \mu dN \cdot \vec{u}_z$
Pression radiale	$\vec{F}_r = p_r(z) 2\pi R dz \cdot \vec{u}_r$
Force Normale	$\vec{dN} = -dN \cdot \vec{u}_r$

PFD sur \vec{u}_z :

$$-\rho g S dz + [p(z) - p(z + dz)]S + \mu dN = 0 \quad (1)$$

PFD sur \vec{u}_r :

$$dN = p_r(z) 2\pi R dz = K p(z) 2\pi R dz \quad (\text{hypothèse } p_r = K \cdot p) \quad (2)$$

On injecte (2) dans (1), on obtient :

$$-\rho g S dz - \frac{dp}{dz} dz S + \mu K p 2\pi R dz = 0 \quad (3)$$

À la limite (division par $S dz = \pi R^2 dz$), en posant $\lambda = \frac{R}{2\mu K}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} - \frac{p}{\lambda} = -\rho g}$$

qui s'intègre avec la condition limite $p(H) = 0$ (H hauteur du silo)

$$\boxed{p(z) = \lambda \rho g [1 - e^{-\frac{H-z}{\lambda}}] \Rightarrow p(0) = \lambda \rho g [1 - e^{-\frac{H}{\lambda}}]}$$

PFD sur \vec{u}_z :

$$-\rho g S dz + [p(z) - p(z + dz)]S + \mu dN = 0 \quad (1)$$

PFD sur \vec{u}_r :

$$dN = p_r(z) 2\pi R dz = K p(z) 2\pi R dz \quad (\text{hypothèse } p_r = K \cdot p) \quad (2)$$

On injecte (2) dans (1), on obtient :

$$-\rho g S dz - \frac{dp}{dz} dz S + \mu K p 2\pi R dz = 0 \quad (3)$$

À la limite (division par $S dz = \pi R^2 dz$), en posant $\lambda = \frac{R}{2\mu K}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} - \cancel{\frac{p}{\lambda}} = -\rho g} \quad \text{cas d'un liquide}$$

qui s'intègre avec la condition limite $p(H) = 0$ (H hauteur du silo)

$$\boxed{p(z) = \lambda \rho g [1 - e^{-\frac{H-z}{\lambda}}]} \Rightarrow p(0) = \lambda \rho g [1 - e^{-\frac{H}{\lambda}}] \quad p(z) = \rho g (H - z)$$

PFD sur \vec{u}_z :

$$-\rho g S dz + [p(z) - p(z + dz)]S + \mu dN = 0 \quad (1)$$

PFD sur \vec{u}_r :

$$dN = p_r(z) 2\pi R dz = K p(z) 2\pi R dz \quad (\text{hypothèse } p_r = K \cdot p) \quad (2)$$

On injecte (2) dans (1), on obtient :

$$-\rho g S dz - \frac{dp}{dz} dz S + \mu K p 2\pi R dz = 0 \quad (3)$$

À la limite (division par $S dz = \pi R^2 dz$), en posant $\lambda = \frac{R}{2\mu K}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} - \frac{p}{\lambda} = -\rho g}$$

qui s'intègre avec la condition limite $p(H) = 0$ (H hauteur du silo)

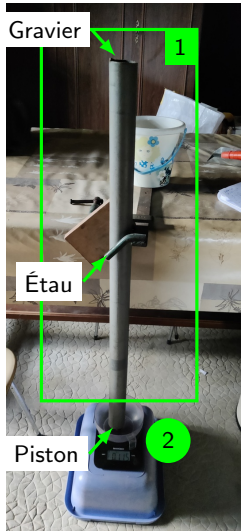
$$\boxed{p(z) = \lambda \rho g [1 - e^{-\frac{H-z}{\lambda}}] \Rightarrow p(0) = \lambda \rho g [1 - e^{-\frac{H}{\lambda}}]}$$

Vérifications expérimentales

On se propose d'effectuer deux expériences indépendantes :

- 1 Vérification du comportement attendu de la masse apparente, et estimation du coefficient caractéristique $\lambda = \frac{R}{2\mu K}$ à l'aide d'une régression exponentielle.
- 2 Détermination du coefficient de frottement du gravier, qui nous permettra une autre estimation de ce même coefficient caractéristique.

Dispositif expérimental 1



- 1 Tube en pvc (je n'avais pas de gros tubes transparents).
 - 2 Balance de cuisine au gramme près, que j'avais tarée préalablement.
- On utilise du gravier comme milieu granulaire.
 - On verse le gravier et on relève la valeur de la masse et la hauteur du gravier.

Mesures de la hauteur avec un mètre :

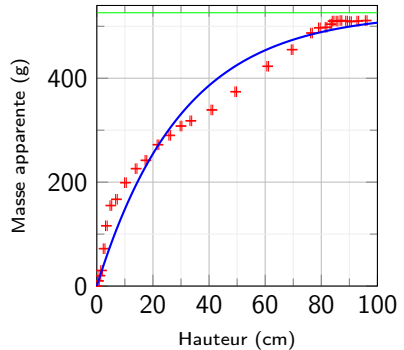
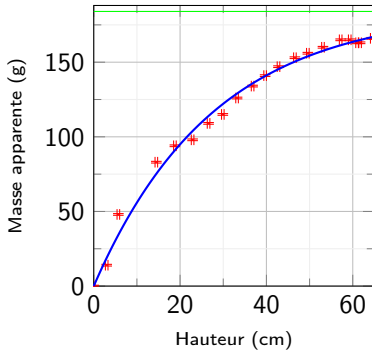
h	65	62	59.3	50.5	46.2	42.1	38.4	35.1
m	103	117	151	186	197	201	212	218

h	31.8	28.2	25.3	22.2	18.4	15.4	11.9	7.8
m	229	237	244	250	256	259	263	268

h	5.7	4	3.3	0.6	0
m	268	266	266	269	269

Résultats

Même gravier, deux diamètres différents

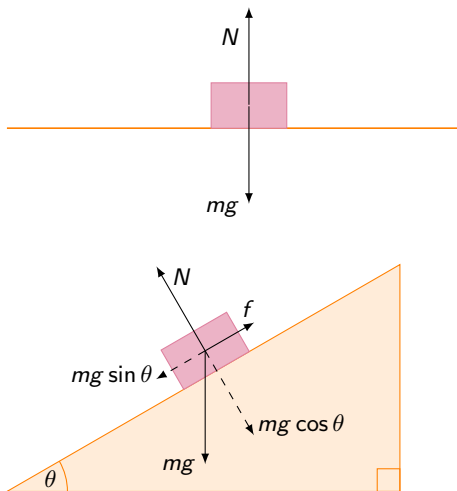


$$m = 184.87 \times (1 - e^{-0.036 \cdot h})$$

$$m = 526.16 \times (1 - e^{-0.033 \cdot h})$$

On observe bien l'effet de saturation $\lim_{H \rightarrow +\infty} p(0) = \lambda \rho g (1 - e^{-\frac{H}{\lambda}}) = \lambda \rho g$.

Dispositif expérimental 2



- On place un gravier sur du pvc.
- On incline le pvc jusqu'au glissement du gravier.
- On mesure l'angle θ .

Résultats

Expérience	Coefficient μ
1	0.39018
2	0.38479
3	0.39294
4	0.39856
5	0.38390
6	0.40144
7	0.44297
8	0.36703
9	0.43717
10	0.40144

$$\mu = 0.400 \pm 0.007$$

Exploitation des résultats

valeur de λ	r_a	r_b
Expérience 1	4.14	5.6
Expérience 2	4.16 ± 0.33	5.33 ± 0.4
$z - \text{score}$	0.06	0.6

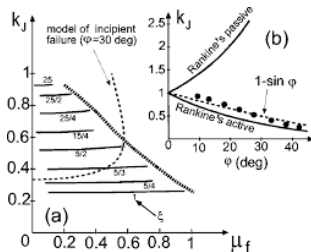


Figure – K en fonction de μ

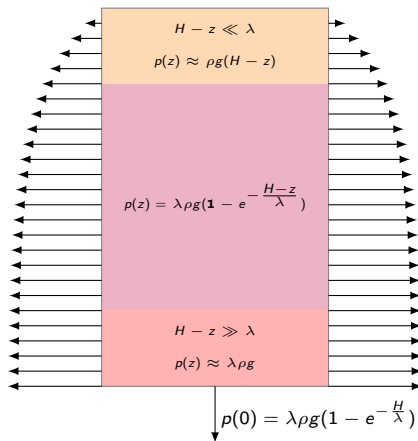


Figure – Pression sur le silo

Le modèle de Janssen permet de prévoir les efforts du matériau sur la paroi d'un silo, ainsi que la masse apparente au fond du silo.

De manière contre-intuitive, ce modèle est différent de celui d'un fluide (effet de voûtes).

En revanche, ce mode d'entreposage ne pose-t-il pas un problème pour la mise à disposition des matériaux ?

Loi de Beverloo

Le débit massique est défini par

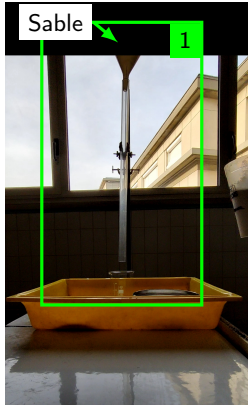
$$D = \frac{dm}{dt}$$

La loi de Beverloo stipule

$$D = c.R^{\frac{5}{2}}$$

(c constante, R rayon du trou d'écoulement du silo)

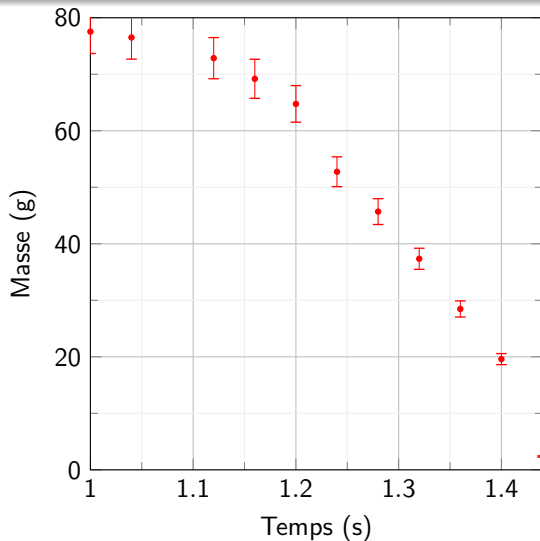
Dispositif expérimental 1



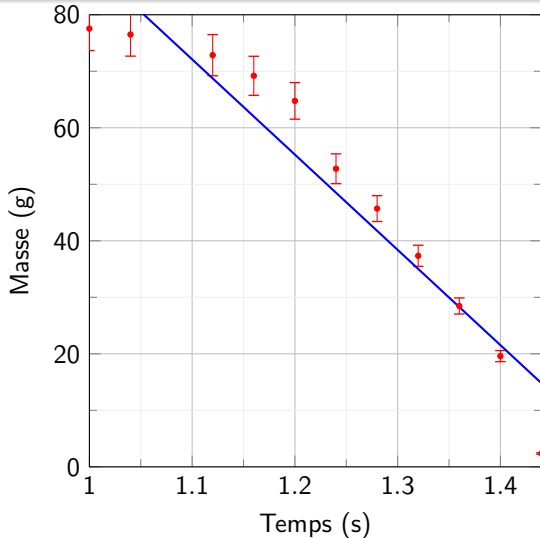
- 1 On remplit le tube en bouchant l'extrémité inférieure.
- 2 On filme l'écoulement à travers le tube.
- 3 On réalise un pointage vidéo à l'aide du site mécachrono¹ pour mesurer le débit.

1. <https://www.eleves.online/MecaChrono/index.php>

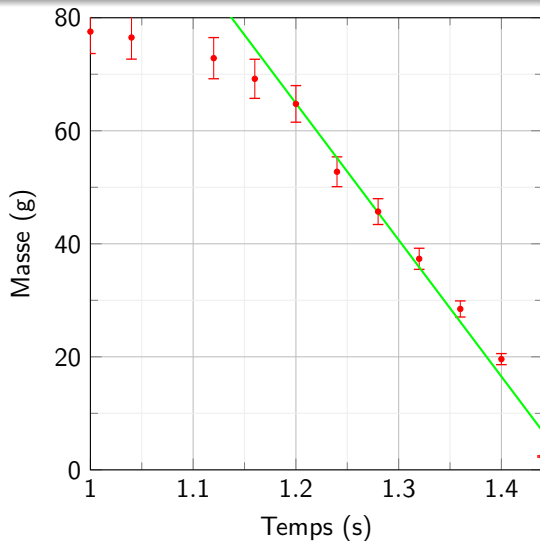
$t_{\text{temps}}(s)$	$y(m)$
1	0.0265545
1.04	0.0341416
1.12	0.0606961
1.16	0.0872506
1.2	0.119495
1.24	0.206746
1.28	0.257958
1.32	0.318655
1.36	0.383144
1.4	0.447634
1.44	0.572819



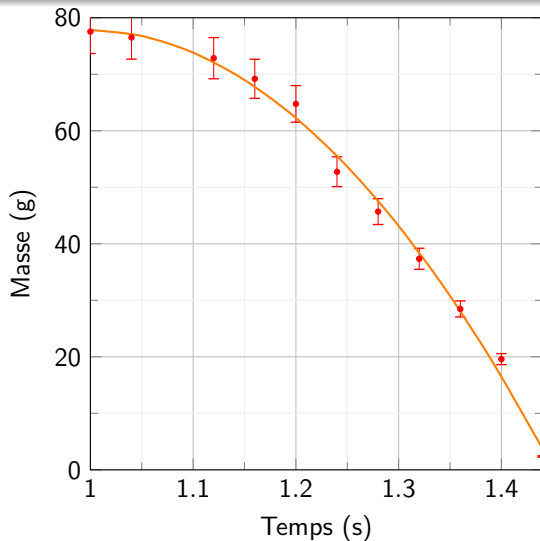
$t_{\text{temps}}(s)$	$y(m)$
1	0.0265545
1.04	0.0341416
1.12	0.0606961
1.16	0.0872506
1.2	0.119495
1.24	0.206746
1.28	0.257958
1.32	0.318655
1.36	0.383144
1.4	0.447634
1.44	0.572819



$t_{\text{temps}}(s)$	$y(m)$
1	0.0265545
1.04	0.0341416
1.12	0.0606961
1.16	0.0872506
1.2	0.119495
1.24	0.206746
1.28	0.257958
1.32	0.318655
1.36	0.383144
1.4	0.447634
1.44	0.572819



$t_{\text{temps}}(s)$	$y(m)$
1	0.0265545
1.04	0.0341416
1.12	0.0606961
1.16	0.0872506
1.2	0.119495
1.24	0.206746
1.28	0.257958
1.32	0.318655
1.36	0.383144
1.4	0.447634
1.44	0.572819



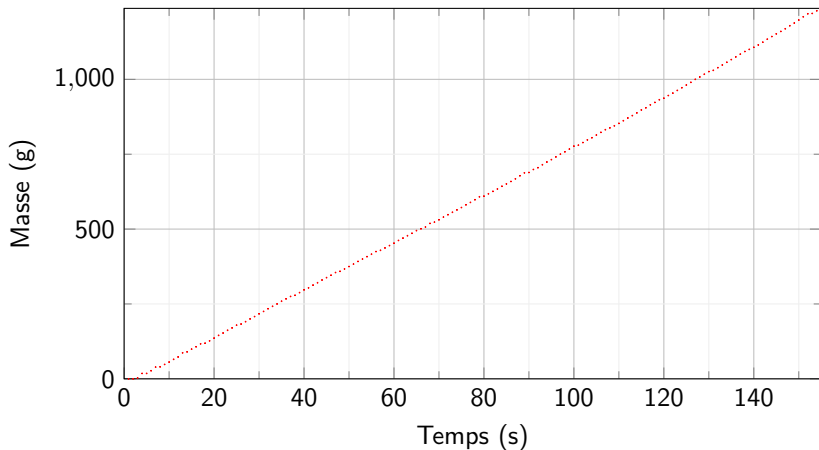
Parabole (accélération)

Dispositif expérimental 2



- 1 On remplit un tube, muni d'un entonnoir au bout.
- 2 On filme la balance pendant l'écoulement.
- 3 On réalise un pointage vidéo en générant des images de la balance périodiquement à l'aide de FFmpeg¹.

1. <https://ffmpeg.org/>



On observe un **débit constant**, comme le prévoit Berverloo, contrairement à un liquide.

Conclusion

Ce travail m'a permis :

- de percevoir l'intérêt du stockage en silo en terme de place,
- de comprendre le comportement du milieu granulaire lors de son stockage à travers le modèle de Janssen,
- d'appréhender la spécificité de l'écoulement granulaire.

Mais aussi d'entrevoir d'autres enjeux de la construction en ville :

- thermiques,
- de pollution/propagation électromagnétique,
- d'optimisation de flux de transports et d'empreinte écologique.

Outils et crédits

- Présentation et graphiques
 - Latex/Beamer
 - TikZ
- Calcul numérique
 - python
 - `scipy.optimize.curve_fit` pour les moindres carrées
- Manipulation vidéos/images
 - Mecachrono
 - ffmpeg
- Figures externes
 - Angle de repos en fonction de μ : Physical Review E **64** 021301 (2001)
 - Coefficient de Janssen K en fonction de μ : Physical Review E **74**, 061311 (2006)