Coloration de colliers

Léry Monnerat

2022

MPSI 2

1. Introduction
   - Position du problème
   - Tentative informatique
2. Le secours de Burnside
3. Coloriage avec contraintes
4. Utilisation du théorème de Polya
5. Action de groupe
   - Définition
   - Orbites et stabilisateurs
   - Formule de Burnside
6. Preuve du théorème de Polya

Introduction

1. Introduction
   - Position du problème
   - Tentative informatique
2. Le secours de Burnside
3. Coloriage avec contraintes
4. Utilisation du théorème de Polya
5. Action de groupe
   - Définition
   - Orbites et stabilisateurs
   - Formule de Burnside
6. Preuve du théorème de Polya

Problème

Déterminer le nombre de coloriage d'un collier de n perles avec p couleurs.

En notant $C = \{1, 2, \ldots, p\}$ l'ensemble des couleurs, un coloriage peut être vu comme un élément de C^n, ou comme les sommets coloriés du polygone réguliers à n cotés. Problème ...

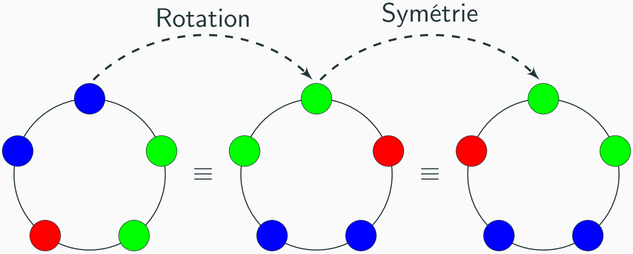


Figure 1: $n = 5, p = 3$

Diffèrentes "configurations" représentent le même collier (graphes induits isomorphes).

1. Introduction
   - Position du problème
   - Tentative informatique

2. Le secours de Burnside

3. Coloriage avec contraintes

4. Utilisation du théorème de Polya

5. Action de groupe
   - Définition
   - Orbites et stabilisateurs
   - Formule de Burnside

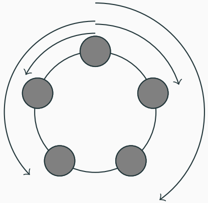
6. Preuve du théorème de Polya

Un programme pour les générer (et les compter)

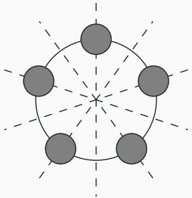
Idée : analogie avec le crible d'Eratosthène

Pour chaque collier $c \in E = C^n$, on calcule les colliers ($\neq c$) équivalents par transformation et on les retire.

Quelles sont ces transformations pour n perles ?



n rotations $i = r^0, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ où r est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.



n symétries $s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}$ où s est une des symétries.

L'ensemble des ces transformations est le groupe diédral d'ordre n noté D_n (pour la composition).

Remarques sur l'implantation :

- Utilisation du logiciel `https://www.sagemath.org/fr/` en python.
- On a représenté les transformations géométriques de D_n comme un sous-groupe de permutations de $\mathfrak{S}_n$.
  Par exemple, pour $n = 6$, D_n est engendré par
  `[(1,2,3,4,5,6), (1,6)(2,5)(3,4)]`
- La transformation d'un collier par un élément de D_n définit une action du groupe D_n sur l'ensemble des colliers.
- Les colliers équivalents (classe d'équivalence) s'appellent une orbite sous cette action.

Résultats

```
sage: collier(4,3)
{(0, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 0), (1, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (2, 0, 2, 0), (2, 1, 0, 0),
(0, 0, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (0, 2, 0, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 0),
(0, 2, 1, 2), (0, 0, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 2), (2, 2, 2, 1),
(1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2)}
```

$n \backslash p$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	3	6	10
3	1	4	10	20
4	1	6	21	55
5	1	8	39	136
6	1	13	92	430
7	1	18	198	1300
8	1	30	498	4435

- Complexité en $O(n.p^{2n})$
- Possibilité de gagner du temps en utilisant une représentation arborescente des colliers.
- Comment faire le compte "à la main" ?

Le secours de Burnside

Intuitivement, plus les transformations ont de points fixes, plus les orbites sont petites, et donc plus grand sera leur nombre.

Plus précisémment, si n est le nombre d'orbites (classes de colliers), G le groupe diédral, et $Fix(g)$ le nombre de colliers fixes par la transformation $g \in G$, la formule de Burnside s'écrit :

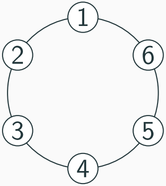
$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Il "suffit" donc de compter pour chaque transformation son nombre de points fixes (colliers invariants par la transformation associée).

L'idée centrale est qu'un coloriage est fixe par une transformation t si et seulement si chaque orbite de l'action de t (action du groupe engendré par t) sur les perles est monochrome.

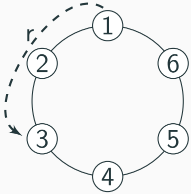
Colliers fixés pour une rotation

Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :



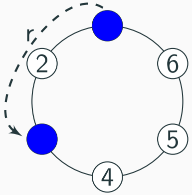
Colliers fixés pour une rotation

Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :



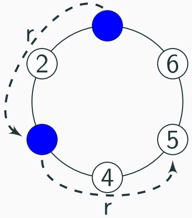
Colliers fixés pour une rotation

Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :



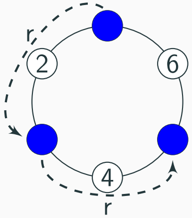
Colliers fixés pour une rotation

Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :



Colliers fixés pour une rotation

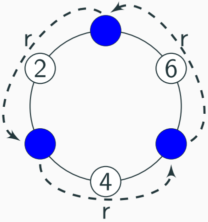
Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :



1. On peut le retrouver avec Burnside : $G = < i, r, \ldots, r^{d-1} >$. Seule i a n points fixe. Le nombre d'orbites est bien n/d

Colliers fixés pour une rotation

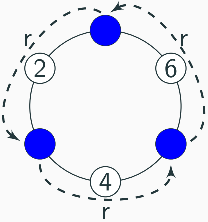
Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :



1. On peut le retrouver avec Burnside : $G =< i, r, \ldots, r^{d-1} >$. Seule i a n points fixe. Le nombre d'orbites est bien n/d

Colliers fixés pour une rotation

Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :

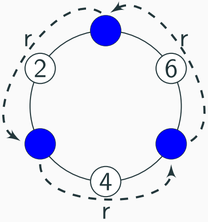


- Le nombre d'éléments (de perles) dans une orbite est égale à l'ordre d de r, diviseur de n.
- Le nombre d'orbites [1] est donc $\frac{n}{d}$.
- La couleur d'une orbite est libre.

1. On peut le retrouver avec Burnside : $G =< i, r, \ldots, r^{d-1} >$. Seule i a n points fixe. Le nombre d'orbites est bien n/d

Colliers fixés pour une rotation

Soit r une rotation. Un coloriage est globlement fixe par r ssi chacune des perles d'une orbite de r a la même couleur :



- Le nombre d'éléments (de perles) dans une orbite est égale à l'ordre d de r, diviseur de n.
- Le nombre d'orbites [1] est donc $\frac{n}{d}$.
- La couleur d'une orbite est libre.

Le nombre de colliers fixés par une rotation r d'ordre d : $p^{\frac{n}{d}}$.

Le nombre de rotation d'ordre d est $\varphi(d)$ (indicatrice d'Euler).

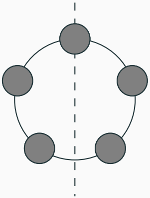
La contribution des rotations dans Burnside

$$\sum_{d|n} \varphi(d) p^{n/d}$$

1. On peut le retrouver avec Burnside : $G =< i, r, \ldots, r^{d-1} >$. Seule i a n points fixe. Le nombre d'orbites est bien n/d

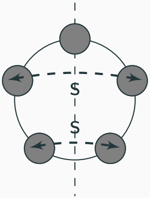
Colliers fixés par une symétrie

Soit s une symétrie. Comme pour les rotations, Il faut et il suffit que les perles de chaque orbite (ici longueur 1 ou 2) aient la même couleur.



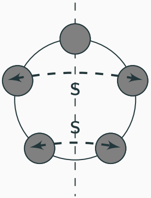
Colliers fixés par une symétrie

Soit s une symétrie. Comme pour les rotations, Il faut et il suffit que les perles de chaque orbite (ici longueur 1 ou 2) aient la même couleur.



Colliers fixés par une symétrie

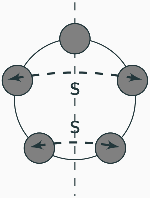
Soit s une symétrie. Comme pour les rotations, Il faut et il suffit que les perles de chaque orbite (ici longueur 1 ou 2) aient la même couleur.



- si n est impair, 1 perle est libre (appartient à l'axe), et $\frac{n-1}{2}$ paires de perles sont liées (même couleurs). Ce qui donne $p.p^{\frac{n-1}{2}} = p^{\frac{n+1}{2}}$.
- si n est pair, il y a $\frac{n}{2}$ symetries dont l'axe passe par 2 perles, et $\frac{n}{2}$ symétries dont l'axe ne passe par aucune des perles. Pour les symétries du premier type : $p^2.p^{\frac{n-2}{2}} = p^{\frac{n+2}{2}}$ Pour les autres symétries : $p^{\frac{n}{2}}$.

Colliers fixés par une symétrie

Soit s une symétrie. Comme pour les rotations, Il faut et il suffit que les perles de chaque orbite (ici longueur 1 ou 2) aient la même couleur.



- si n est impair, 1 perle est libre (appartient à l'axe), et $\frac{n-1}{2}$ paires de perles sont liées (même couleurs). Ce qui donne $p.p^{\frac{n-1}{2}} = p^{\frac{n+1}{2}}$.
- si n est pair, il y a $\frac{n}{2}$ symetries dont l'axe passe par 2 perles, et $\frac{n}{2}$ symétries dont l'axe ne passe par aucune des perles. Pour les symétries du premier type : $p^2.p^{\frac{n-2}{2}} = p^{\frac{n+2}{2}}$ Pour les autres symétries : $p^{\frac{n}{2}}$.

La contribution des symétries dans Burnside

$$\begin{cases} n \text{ impair} & np^{\frac{n+1}{2}} \\ n \text{ pair} & \frac{n}{2}(p^{\frac{n+2}{2}} + p^{\frac{n}{2}}) \end{cases}$$

Formule finale

Le nombre de colliers de n perles avec p couleurs :

n impair

$$\frac{1}{2n}(\sum_{d|n}\varphi(d)p^{\frac{n}{d}} + np^{\frac{n+1}{2}})$$

n pair

$$\frac{1}{2n}(\sum_{d|n}\varphi(d)p^{\frac{n}{d}} + \frac{n}{2}(p^{\frac{n+2}{2}} + p^{\frac{n}{2}})))$$

Coloriage avec contraintes

Définition

On reprend le problème du coloriage d'un collier de n perles avec p couleurs.

On dira qu'un coloriage est de type

$$(n_1, n_2, \ldots, n_p)$$

ssi il y a n_1 perles de couleur 1, n_2 perle de couleur 2, etc

Le groupe D_n agit sur tous les coloriages d'un type donné. On peut donc utiliser la formule de Burnside.

Exemple classique dans la littérature

Nombre de colliers à 67 perles dont deux noires, sept bleues, deux jaunes et cinquante blanches ?

Il faut donc compter tous les coloriages de type $(2, 7, 2, 50)$.

Les rotations

- L'identité fixe tous les colliers : $\binom{67}{2}.\binom{65}{7}.\binom{58}{2}$
- Les autres rotations sont toutes d'ordre 67, et ne possède qu'une orbite. Tout collier fixe est monochrome.

Les symétries

L'axe d'une symètrie passe par une seule perle, forcèment bleue (à cause de la parité). Les autres perles sont symétriques par rapport à l'axe, ce qui donne : $\binom{33}{1}.\binom{32}{1}.\binom{31}{3}$

La formule de Burnside nous donne le nombre de coloriage

$$\frac{1}{134}\left(\binom{67}{2}.\binom{65}{7}.\binom{58}{2} + 67.\binom{33}{1}.\binom{32}{1}.\binom{31}{3}\right)$$

Utilisation du théorème de Polya

À un coloriage c, on associe son poids dans $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$

$$w(c) = X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$$

Tous les coloriages équivalents sous l'action d'un groupe G ont le même poids.

En notant $O(c_1), \ldots O(c_n)$ les classes de coloriage sous G, on définit l'inventaire des coloriages sous l'action de groupe G en posant

$$W = \sum_{i=1}^{n} w(c_i)$$

Par construction, le nombre de coloriage de type $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ (à action près) est le coefficient de $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_p^{n_p}$ dans le polynôme w.

Notre problème peut donc se ramener à la détermination du polynôme W.

Théorème de Polya

$$W = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^{n} (X_1^i + X_2^i + \ldots + X_p^i)^{e_i(g)}$$

où $e_i(g)$ est le nombre de cycles de longueur i de g (vue comme une permutation).

Rappel : toute permutation s'écrit comme un produit (unique) de cycle disjoints.

Implantation avec Sagemath

J'ai écrit une fonction qui calcule le polynôme W. Par exemple, pour $n = 12$, et $p = 3$ (trois couleurs)

```
sage: W=polynome()
sage: W
W=x^12 + x^11*y + 6*x^10*y^2 + 12*x^9*y^3 + 29*x^8*y^4 + 38*x^7*y^5
+ 50*x^6*y^6 + 38*x^5*y^7 + 29*x^4*y^8 + 12*x^3*y^9 + 6*x^2*y^10
+ x*y^11 + y^12 + x^11*z + 6*x^10*y*z + 30*x^9*y^2*z + 85*x^8*y^3*z
+ 170*x^7*y^4*z + 236*x^6*y^5*z + 236*x^5*y^6*z + 170*x^4*y^7*z
+ 85*x^3*y^8*z + 30*x^2*y^9*z + 6*x*y^10*z + y^11*z + 6*x^10*z^2
+ 30*x^9*y*z^2 + 140*x^8*y^2*z^2 + 340*x^7*y^3*z^2 + 610*x^6*y^4*z^2
+ 708*x^5*y^5*z^2 + 610*x^4*y^6*z^2 + 340*x^3*y^7*z^2 + 140*x^2*y^8*z^2
+ 30*x*y^9*z^2 + 6*y^10*z^2 + 12*x^9*z^3 + 85*x^8*y*z^3 + 340*x^7*y^2*z^3
+ 781*x^6*y^3*z^3 + 1170*x^5*y^4*z^3 + 1170*x^4*y^5*z^3 + 781*x^3*y^6*z^3
+ 340*x^2*y^7*z^3 + 85*x*y^8*z^3 + 12*y^9*z^3 + 29*x^8*z^4 + 170*x^7*y*z^4
+ 610*x^6*y^2*z^4 + 1170*x^5*y^3*z^4 + 1493*x^4*y^4*z^4 + 1170*x^3*y^5*z^4
+ 610*x^2*y^6*z^4 + 170*x*y^7*z^4 + 29*y^8*z^4 + 38*x^7*z^5 + 236*x^6*y*z^5
+ 708*x^5*y^2*z^5 + 1170*x^4*y^3*z^5 + 1170*x^3*y^4*z^5 + 708*x^2*y^5*z^5
+ 236*x*y^6*z^5 + 38*y^7*z^5 + 50*x^6*z^6 + 236*x^5*y*z^6 + 610*x^4*y^2*z^6
+ 781*x^3*y^3*z^6 + 610*x^2*y^4*z^6 + 236*x*y^5*z^6 + 50*y^6*z^6 + 38*x^5*z^7
+ 170*x^4*y*z^7 + 340*x^3*y^2*z^7 + 340*x^2*y^3*z^7 + 170*x*y^4*z^7 + 38*y^5*z^7
+ 29*x^4*z^8 + 85*x^3*y*z^8 + 140*x^2*y^2*z^8 + 85*x*y^3*z^8 + 29*y^4*z^8
+ 12*x^3*z^9 + 30*x^2*y*z^9 + 30*x*y^2*z^9 + 12*y^3*z^9 + 6*x^2*z^10
+ 6*x*y*z^10 + 6*y^2*z^10 + x*z^11 + y*z^11 + z^12
```

Nombre de coloriages de type (5,3,4) :

```
sage:  W.coefficient([5,3,4])
1170
```

Nombre de coloriages totals :

```
sage: W(1,1,1)
22913
```

pour $n = 20$, et $p = 4$

Nombre de coloriages de type (10,3,3,4) :

```
sage:  W.coefficient([10,3,3,4])
27489127708
```

Nombre de coloriages totals :

```
sage: W(1,1,1,1)
177150973416848
```

Action de groupe

1. Introduction
Position du problème
Tentative informatique
2. Le secours de Burnside
3. Coloriage avec contraintes
4. Utilisation du théorème de Polya
5. Action de groupe
Définition
Orbites et stabilisateurs
Formule de Burnside
6. Preuve du théorème de Polya

Action de groupe

back

Soient $(G, *, e)$ un groupe et $E \neq \emptyset$ un ensemble (non vide).

Une action (à gauche) de G sur E est une application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & G \times E & \rightarrow & E \\ & & (g, x) & \rightarrow & g.x \end{array}$$

qui vérifie

1. $\forall x \in E, \quad e.x = x$
2. $\forall (g, g') \in G^2, \ \forall x \in E, \quad g.(g'.x) = (g * g').x$

Remarques :

1. L'application $\varphi_g = \begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ x & \rightarrow & g.x \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(E)$
2. L'application $g \rightarrow \varphi_g$ est un morphisme de groupe (de $(G, *)$ dans $(\mathfrak{S}(E), \circ)$
3. Définir une action de G sur E revient à définir un tel morphisme.

1. Introduction
Position du problème
Tentative informatique
2. Le secours de Burnside
3. Coloriage avec contraintes
4. Utilisation du théorème de Polya
5. Action de groupe
Définition
Orbites et stabilisateurs
Formule de Burnside
6. Preuve du théorème de Polya

Soit $(G, *)$ qui agit (à gauche) sur E.

Relation d'équivalence $\equiv_G$

On définit sur E la relation d'équivalence $\equiv_G$:

$$x' \equiv_G x \underset{def}{\Leftrightarrow} \exists g \in G, \quad x' = g.x$$

L'ensemble des classes d'équivalence de cette relation s'appelle les orbites de E sous l'action de G.

On notera $O(x) = \{g.x, \quad g \in G\}$ la classe de x, appelée orbite de x.

Stabilisateur

Stabilisateur de x

$$S(x) \underset{def}{=} \{g \in G : \;\; g.x = x\}$$

On vérifie que $S(x)$ est un sous-groupe de G.

On a évidemment un lien entre $O(x)$ et $S(x)$. Plus il y a "de monde" dans $S(x)$, moins il y en a dans $O(x)$.

Plus précisément :

$\varphi_x : \begin{array}{ccc} G & \to & O(x) \\ g & \to & g.x \end{array}$ est surjective. Pour l'injectivivité :

$g'.x = g.x \Leftrightarrow (g^{-1} * g').x = x \Leftrightarrow g^{-1} * g' \in S(x) \Leftrightarrow g' \in g * S(x)$

On peut factoriser φ_x en une bijection $\tilde{\varphi_x}$

$$\tilde{\varphi_x} : \begin{array}{ccc} G/S(x) & \to & O(x) \\ \bar{g} & \to & g.x \end{array}$$

En particulier, si G et E sont finis, on a l'égalité (Lagrange)

$$\frac{|G|}{|S(x)|} = |O(x)|$$

Et si on a n orbites $O(x_1), \ldots, O(x_n)$ la formule des classes

$$|E| = \sum_i |O(x_i)| = |G| \sum_i \frac{1}{|S(x_i)|}$$

1. Introduction
   Position du problème
   Tentative informatique
2. Le secours de Burnside
3. Coloriage avec contraintes
4. Utilisation du théorème de Polya
5. Action de groupe
   Définition
   Orbites et stabilisateurs
   Formule de Burnside
6. Preuve du théorème de Polya

Formule de Burnside

back

Soit $(G, *)$ un groupe agissant sur un ensemble E.

Points fixes

Pour $g \in G$, on pose

$$Fix(g) = \{x \in E \mid g.x = x\}$$

Si G et E sont finis, le nombre n d'orbites de E sous l'action de G est

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

On considère $F = \{(g,x) \in G \times E \mid g.x = x\}$

On dénombre F en :

E

		x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
	e	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
	g_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_1
G	g_2	x_1	x_5	x_3	$\dots$	x_n
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	g_p	x_4	x_2	x_3	$\dots$	x_n

- en colonne :

$$|F| = \sum_{x \in E} |S(x)|$$

- en ligne :

$$|F| = \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Or $|S(x)|.|O(x)| = |G|$. Soit $O(x_1), \dots, O(x_n)$ les n orbites.

$$\sum_{x \in E} |S(x)| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in O(x_i)} \underbrace{|S(x)|}_{= \frac{|G|}{|O(x_i)|}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|O(x_i)|} |O(x_i)| = n|G|$$

Preuve du théorème de Polya

Comme dans la preuve du théorème de Burnside, on considère le produit cartésien $F = \{(g,x) \in G \times E \mid g.x = x\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{(g,x)\in F} w(x) &= \sum_{g\in G} \sum_{x\in Fix(g)} w(x) && (\text{ sommation sur } g) \\
&= \sum_{x\in E} \sum_{g\in S(x)} w(x) && (\text{ sommation sur } x) \\
&= \sum_{x\in E} |S(x)| w(x)
\end{aligned}$$

On partionne la dernière somme avec les orbites de E sous G

$$\sum_{x\in E} |S(x)|w(x) = \sum_{x\in O(x_{\mathbf{1}})} |S(x)|w(x) + \ldots + \sum_{x\in O(x_n)} |S(x)|w(x)$$

Or dans dans chaque orbite, w est le même.

$$\sum_{x\in E} |S(x)|w(x) = w(x1) \sum_{x\in O(x_{\mathbf{1}})} |S(x)| + \ldots + w(x_n) \sum_{x\in O(x_n)} |S(x)|$$

Or

$$|S(x)|.|O(x)| = |G|$$

D'où

$$\sum_{x \in E} |S(x)| w(x) = w(x_1)|G| + \ldots + w(x_n)|G| = |G|.W$$

Et donc

$$W = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in Fix(g)} w(x)$$

Fixons $g \in G$. Les coloriages x fixés par g sont les coloriages constants (même couleur) sur chaque cycle de g (argument déjà rencontré !).

Soient $g_1, g_2, \ldots g_k$ les cycles de g. d'où

$$\begin{aligned}\sum_{x \in Fix(g)} w(x) &= \sum_{c_1, c_2, \ldots, c_k \in C} X_{c_1}^{|g_1|} \ldots X_{c_k}^{|g_k|} \\ &= \left(\sum_{c \in C} X_c^{|g_1|}\right) \ldots \left(\sum_{c \in C} X_c^{|g_k|}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (X_1^i + X_2^i + \ldots + X_p^i)^{e_i(g)}\end{aligned}$$

en considérant p couleurs.

Ressources

Bibliographie

- Basic Algebra, N.Jacobson
- `https://fr.wikipedia.org/` pour le théorème de Pólya.

Outils numériques

- Beamer (thème metropolis : `https://github.com/matze/mtheme`)
- SageMath : `https://www.sagemath.org/fr/`

Mathématiciens cités

- Ératosthène (276 avjc-194 avjc)
- Lagrange (1736-1813)
- Euler (1707-1783)
- Burnside (1852-1927)
- Pólya (1885-1985)