Michael Schröder
Zentrum für Lehrerbildung, Schul- und Berufsbildungsforschung

Reelle Funktionen

Brückenkurs 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

Inhaltsverzeichnis

ZLSB

1 Reelle Funktionen

Wiederholung des Funktionsbegriffs

Wiederholung des Funktionsbegriffs

Ist dies eine Funktion?

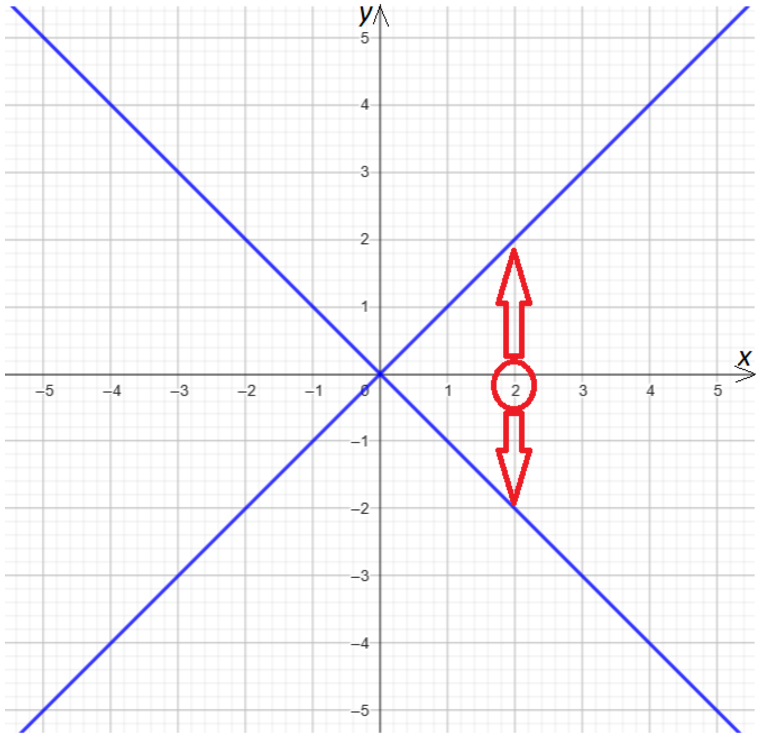
$$f(x) = \pm x$$

Denken Sie kurz nach!

1 Reelle Funktionen

Wiederholung des Funktionsbegriffs

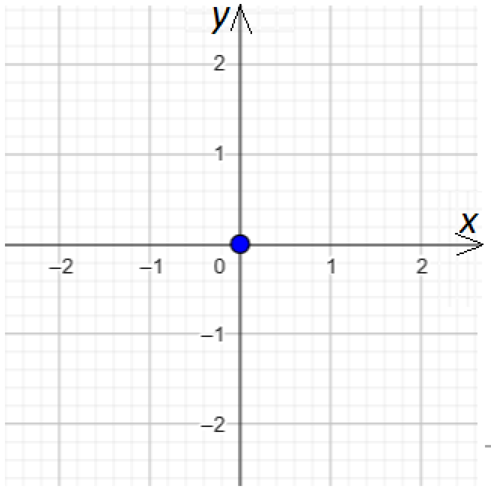
Ist dies eine Funktion? $\boldsymbol{f(x) = \pm x}$



Der Stelle $x = 2$ werden die Werte $y = 2$ UND $y = -2$ zugeordnet. Damit kann f keine Funktion sein, da die Zuordnung nicht eindeutig ist.

Woher wissen wir denn, dass $x = 2$ gewählt werden kann?! Was ist, wenn nur $x = 0$ zulässig ist?

In diesem Fall ist die Zuordnung eindeutig und f ist eine Funktion.



1 Reelle Funktionen

Definition

Eine Funktion $f : D_f \to M$ ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element x aus D_f genau ein Element $y = f(x)$ aus M zuordnet.

Gilt $M = \mathbb{R}$, so nennt man die Funktion f **reellwertige** Funktion.

Gelten $M = \mathbb{R}$ und $D_f \subseteq \mathbb{R}$, so nennt man die Funktion f **reelle Funktion**.

- Die Menge D_f heißt **Definitionsbereich** der Funktion f.
- Die Menge M heißt **Zielmenge/Wertebereich** der Funktion f.
- $f(x)$ heißt **Funktionswert** von f an der Stelle x.
- Die Menge $B_f = \{y \in \mathbb{R} : \text{es existiert ein } x \in D_f \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt **Bildmenge/Bildbereich** der Funktion f.

1 Reelle Funktionen

Bemerkungen

- Anders formuliert:

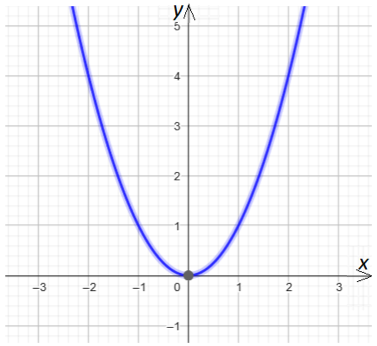
  Eine reelle Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ordnet jeder reellen Zahl x aus dem Definitionsbereich D_f eine reelle Zahl $y = f(x)$ aus der Zielmenge zu.

- Die Zielmenge einer Funktion f muss nicht mit dem Bildbereich dieser Funktion übereinstimmen. Es gilt jedoch immer, dass der Bildbereich eine Teilmenge der Zielmenge ist.

  Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$

  Zielmenge: $\mathbb{R}$

  Bildbereich: $\mathbb{R}_0^+$ (Menge der nichtnegativen reellen Zahlen)



2 Darstellungsmöglichkeiten

2 Darstellungsmöglichkeiten

- **Wortlaut**

  Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

- **Wertetabelle**

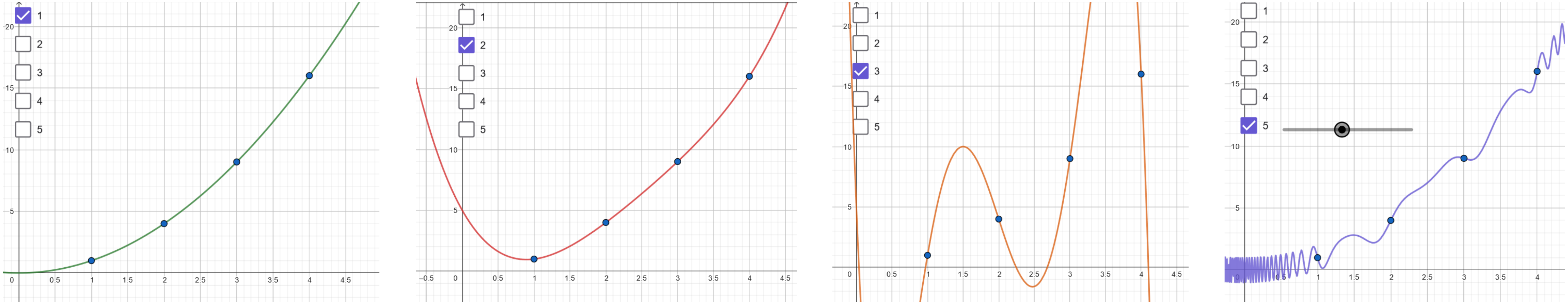
x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	4	9	16

- **Analytisch**
- **Graph**

2 Darstellungsmöglichkeiten

Wertetabelle

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	4	9	16



https://www.geogebra.org/m/qxajbuue

2 Darstellungsmöglichkeiten

- **Wortlaut**

  Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

- **Wertetabelle**

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	4	9	16

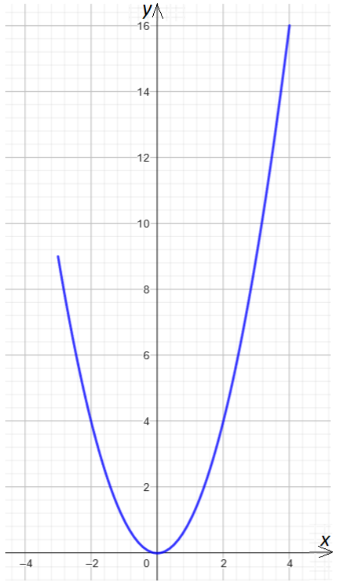
- **Analytisch**

2 Darstellungsmöglichkeiten

Analytisch

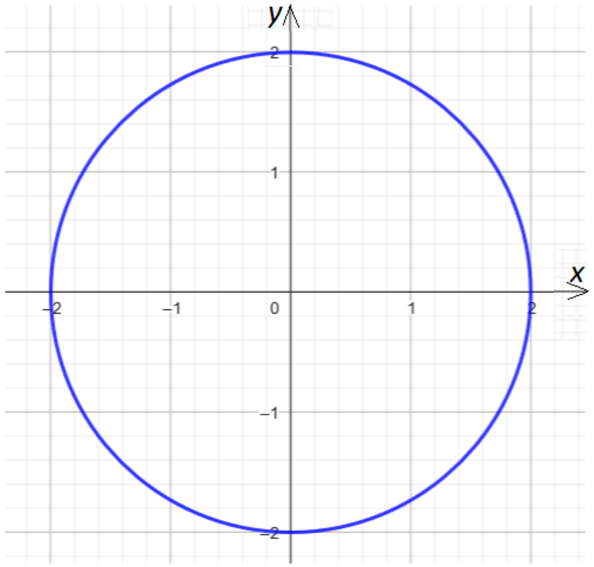
Explizite Darstellung

$$f : [-3; 4] \to \mathbb{R}$$
$$y = f(x) = x^2$$



Implizite Darstellung

$$x^2 + y^2 = 4$$



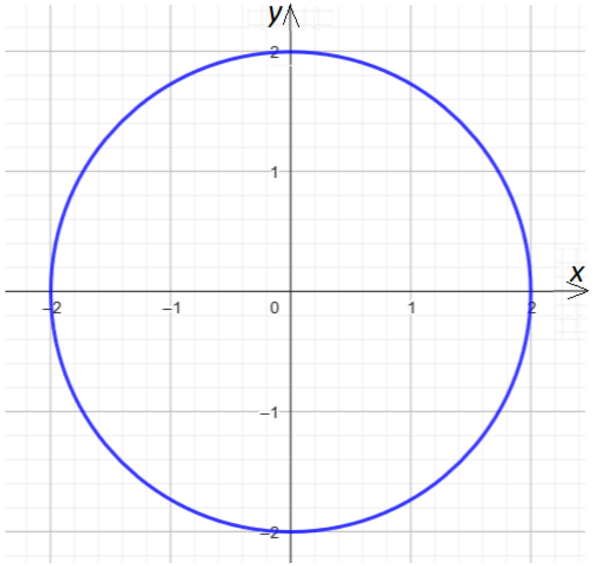
Parameterdarstellung

Diese wird hier nicht näher ausgeführt

2 Darstellungsmöglichkeiten

Implizite Darstellung

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Longrightarrow$$



Die Zuordnung $x \mapsto y$ ist nicht eindeutig, d.h. es wird keine Funktion beschrieben.

ABER

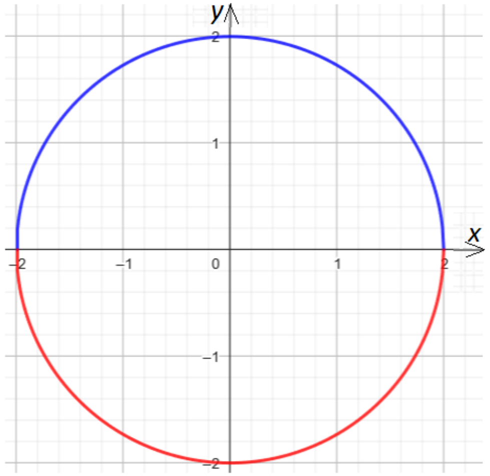
$$x^2 + y^2 = 4 \qquad |-x^2$$

$$y^2 = 4 - x^2 \qquad |\sqrt{}$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

$$y_1 = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$$



2 Darstellungsmöglichkeiten

- **Wortlaut**

  Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

- **Wertetabelle**

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	4	9	16

- **Analytisch**
- **Graph**

2 Darstellungsmöglichkeiten

Graph

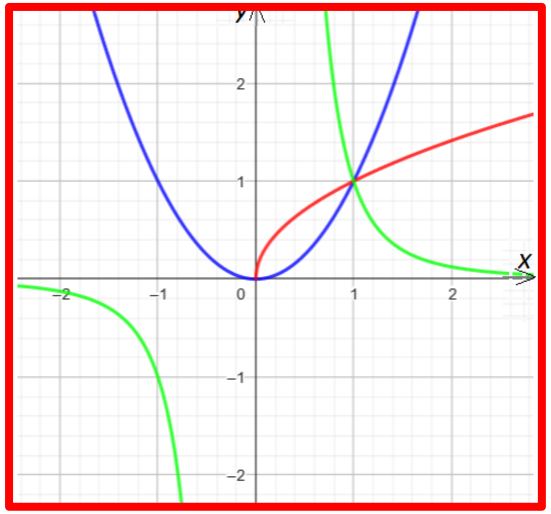
Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Zahl $x \in D_f$ genau eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zu. Das Paar $\left(x, f(x)\right)$ kann als Punkt in der xy – Ebene gedeutet werden.

Die Menge aller dieser Punkte, also die Menge $\left\{\left(x, f(x)\right) : x \in D_f\right\}$ heißt **Graph** der Funktion f.

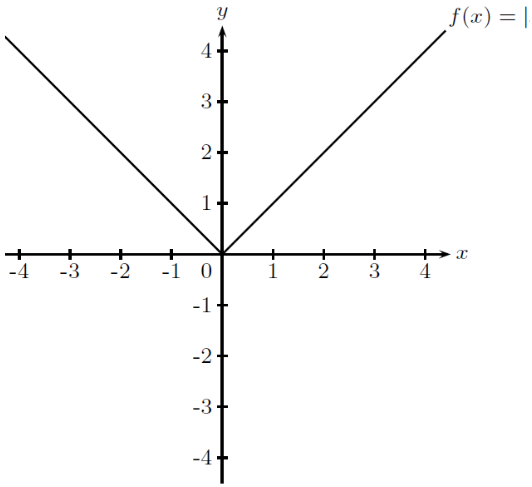
3 Wichtige elementare Funktionen

3 Wichtige elementare Funktionen

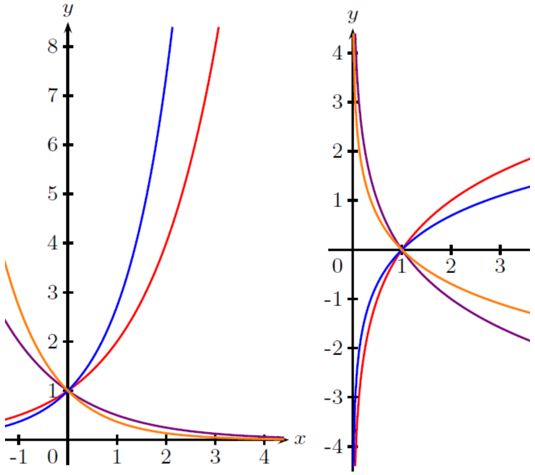
Potenzfunktion



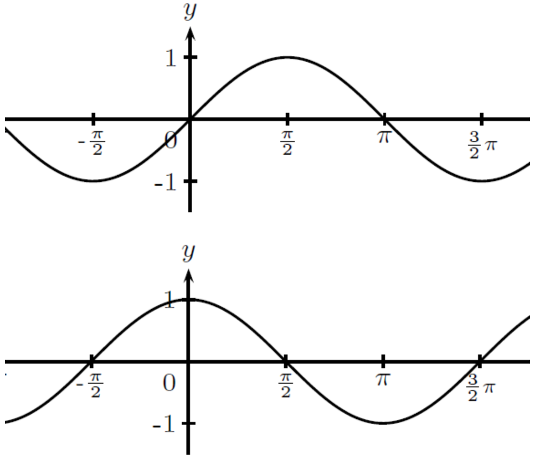
Betragsfunktion



Exponential- und Logarithmusfunktion



Trigonometrische Funktionen



Potenzfunktion

Funktionsvorschrift: $f(x) = x^p$ mit festem p

$\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$:

$\boldsymbol{p = 0:}$ $f(x) = x^0 = 1$ **konstante Funktion** (Vorsicht: 0^0 wird hier zu 1)

$\boldsymbol{p = 1:}$ $f(x) = x^1 = x$ **lineare Funktion**

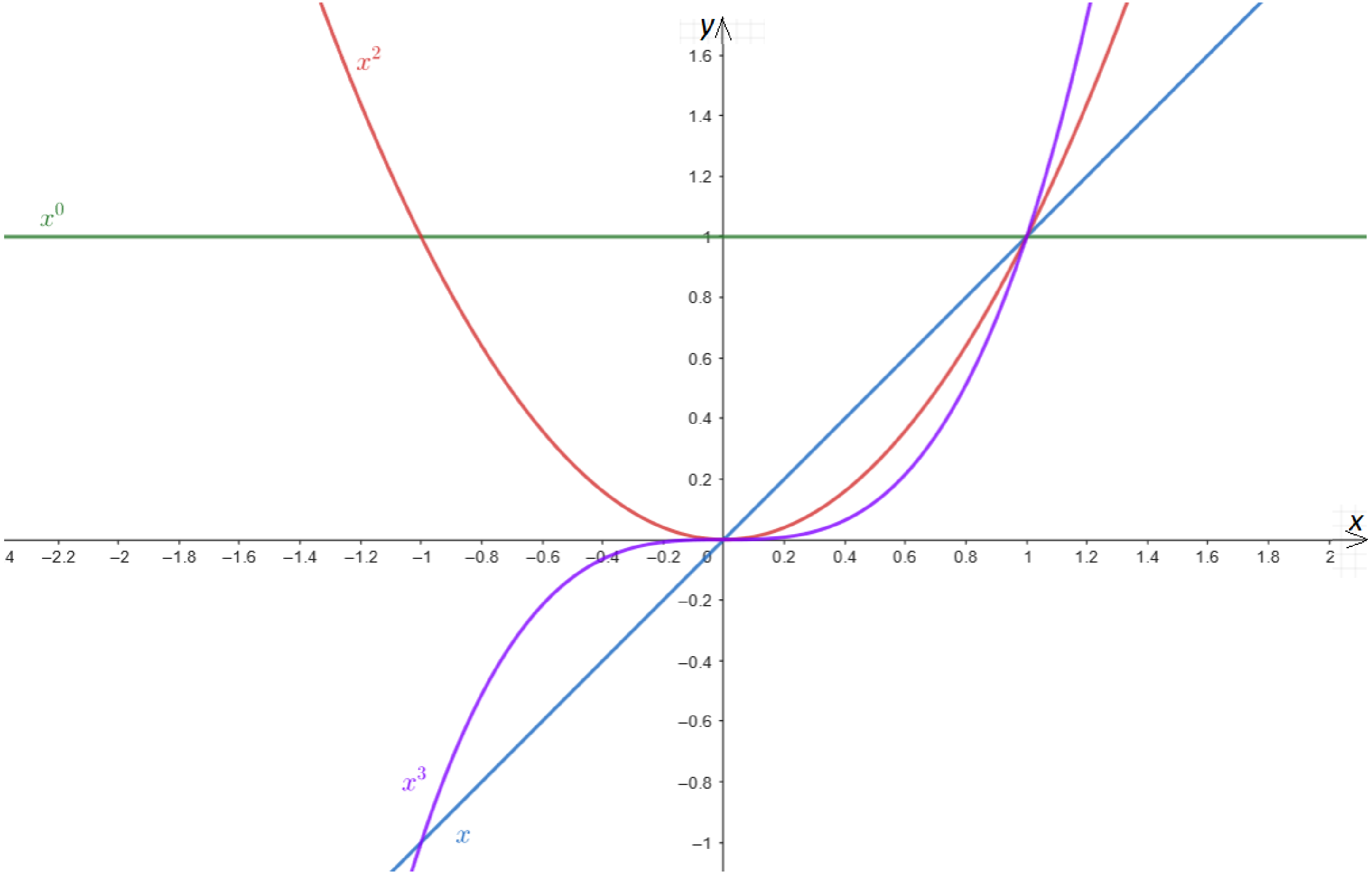
$\boldsymbol{p = 2:}$ $f(x) = x^2$ **quadratische Funktion**

$\boldsymbol{p = 3:}$ $f(x) = x^3$ **kubische Funktion**

Ist $p > 2$ gerade, so ähnelt der Graphenverlauf dem der quadratischen Funktion.

Ist $p > 3$ ungerade, so ähnelt der Graphenverlauf dem der kubischen Funktion.

3 Wichtige elementare Funktionen



Potenzfunktion

Funktionsvorschrift: $f(x) = x^p$ mit festem p

$\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$: $\boldsymbol{0 \notin D_f}$

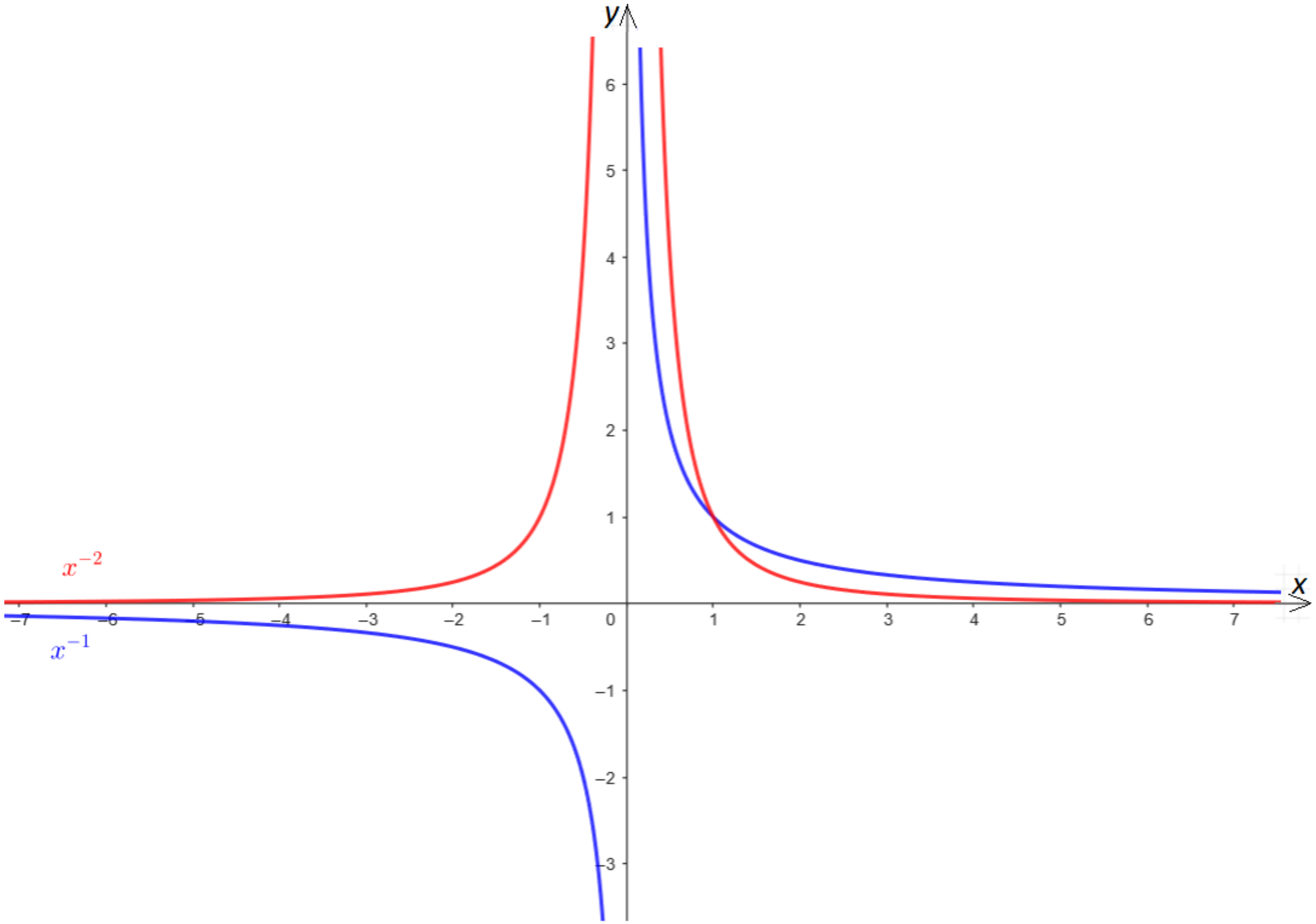
$\boldsymbol{p = -1}: f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

$\boldsymbol{p = -2}: f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Ist $p < -1$ ungerade, so ähnelt der Graphenverlauf dem der Potenzfunktion mit $p = -1$.

Ist $p < -2$ gerade, so ähnelt der Graphenverlauf dem der Potenzfunktion mit $p = -2$.

3 Wichtige elementare Funktionen



Potenzfunktion

Funktionsvorschrift: $f(x) = x^p$ mit festem p

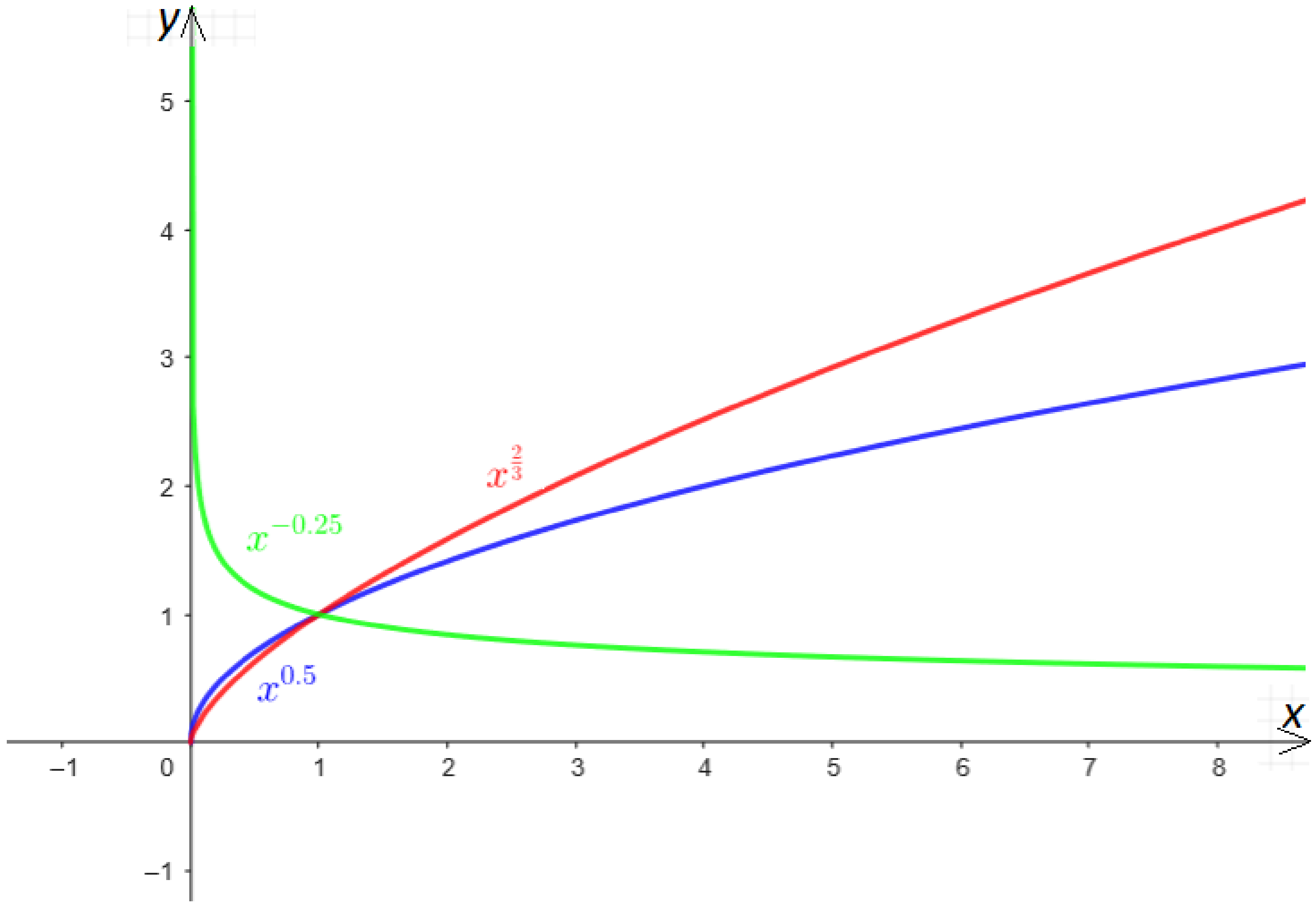
$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$: **$x > 0$ für beliebiges p ($x = 0$ *für* $p > 0$ *möglich*)**

$\boldsymbol{p = 0{,}5}$: $f(x) = x^{0,5} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

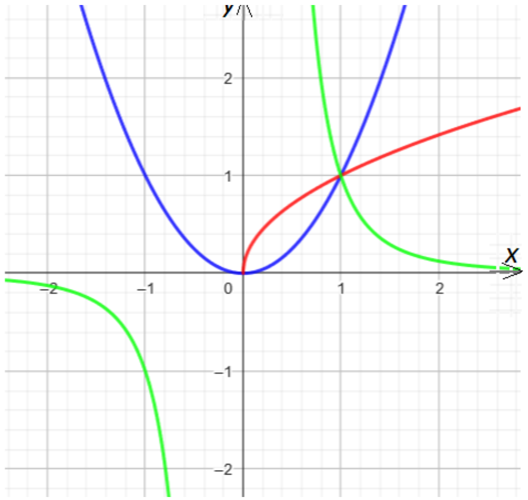
$\boldsymbol{p = \frac{2}{3}}$: $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

$\boldsymbol{p = -0{,}25}$: $f(x) = x^{-0,25} = \frac{1}{x^{0,25}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

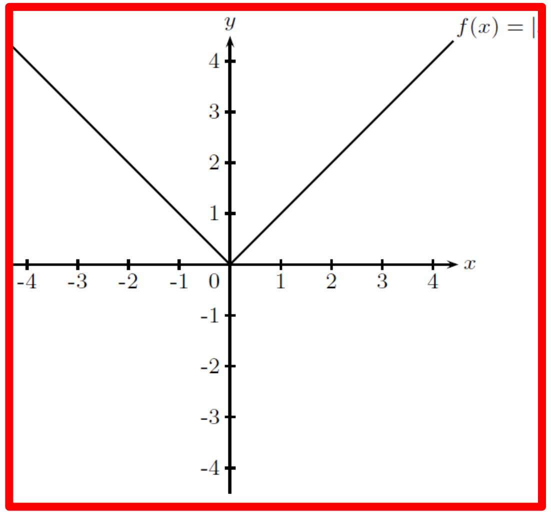
3 Wichtige elementare Funktionen



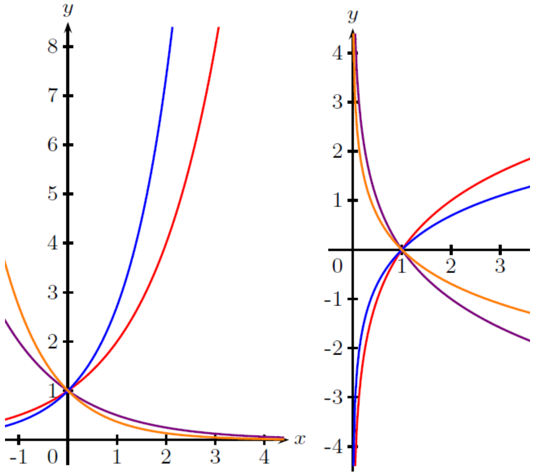
Potenzfunktion



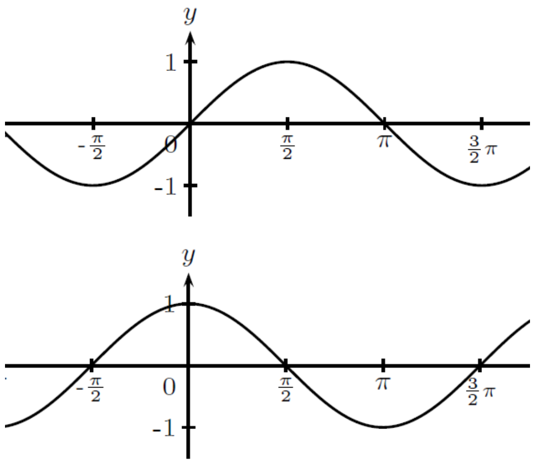
Betragsfunktion



Exponential- und Logarithmusfunktion



Trigonometrische Funktionen



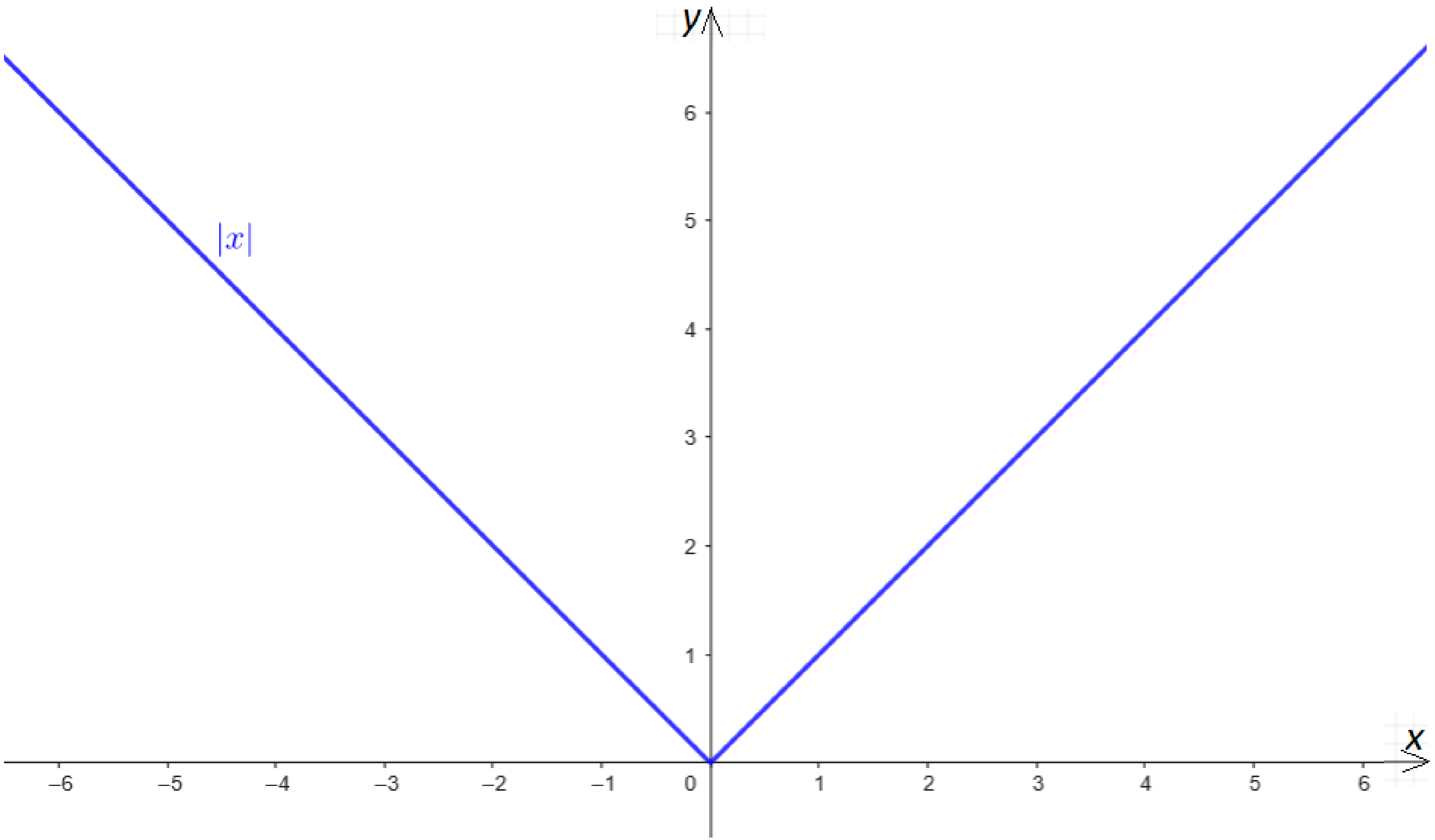
3 Wichtige elementare Funktionen

Betragsfunktion

Funktionsvorschrift: $$f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

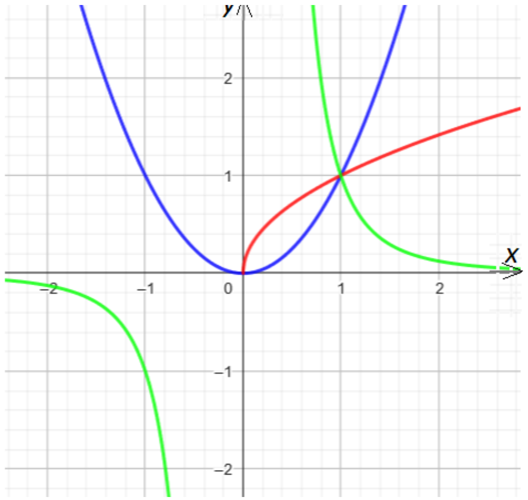
Abschnittsweise definierte Funktion

3 Wichtige elementare Funktionen

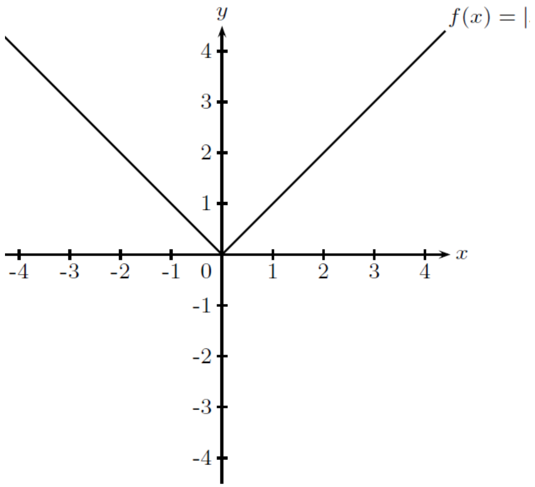


3 Wichtige elementare Funktionen

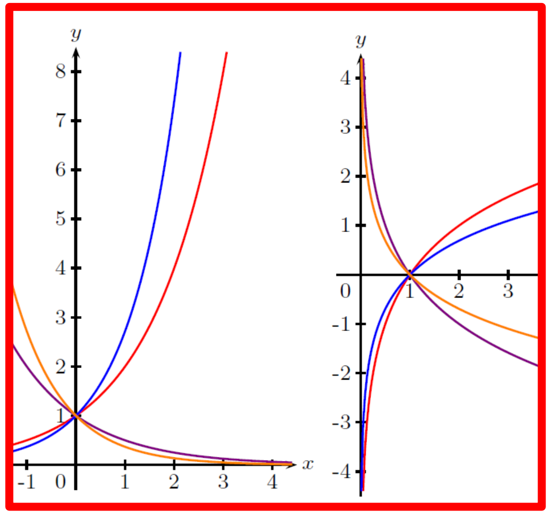
Potenzfunktion



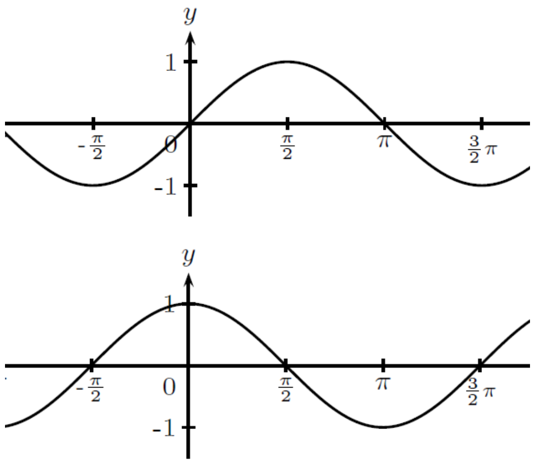
Betragsfunktion



Exponential- und Logarithmusfunktion



Trigonometrische Funktionen



Exponentialfunktion

Funktionsvorschrift:

Exponent

$$f(x) = a^x \text{ mit } a > 0, a \neq 1, a \text{ fest}$$

Basis

Logarithmusfunktion

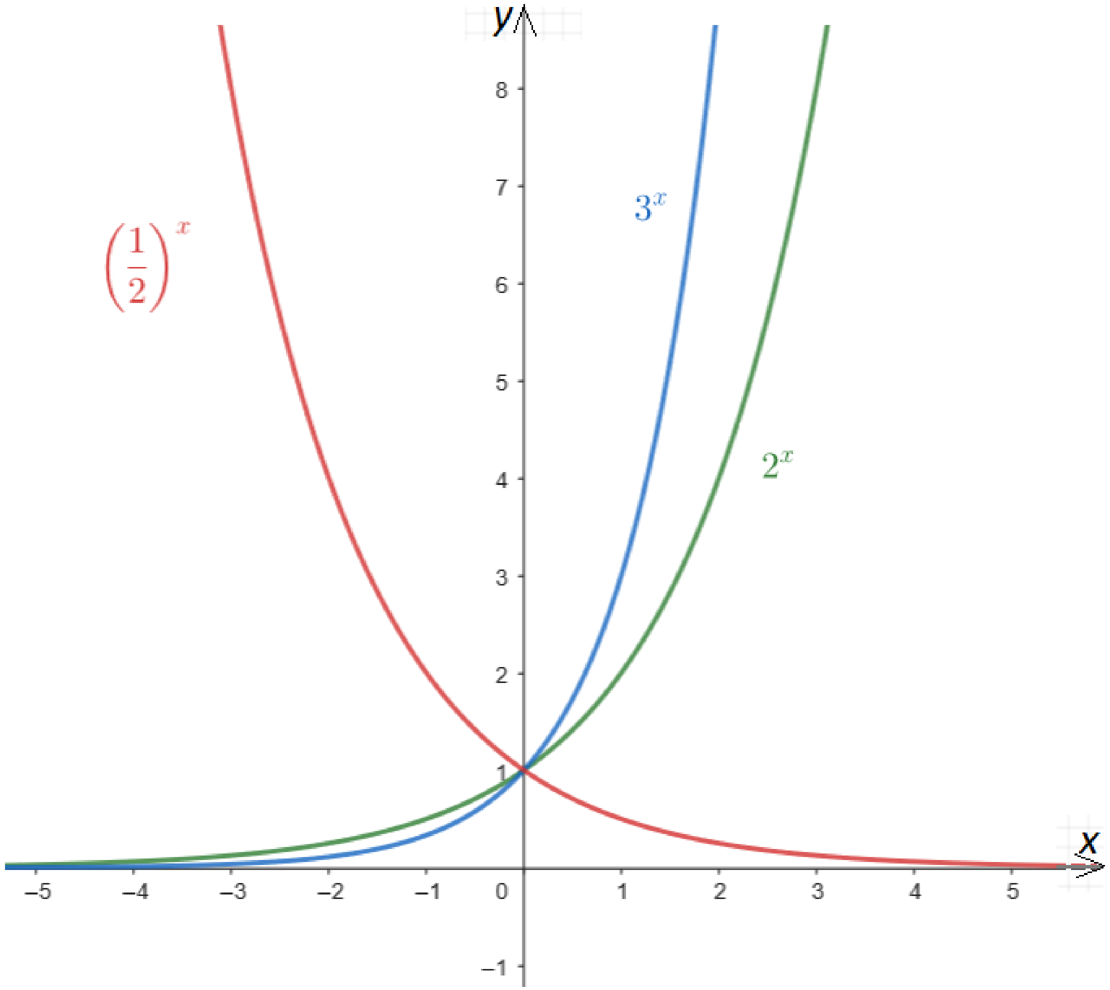
Funktionsvorschrift:

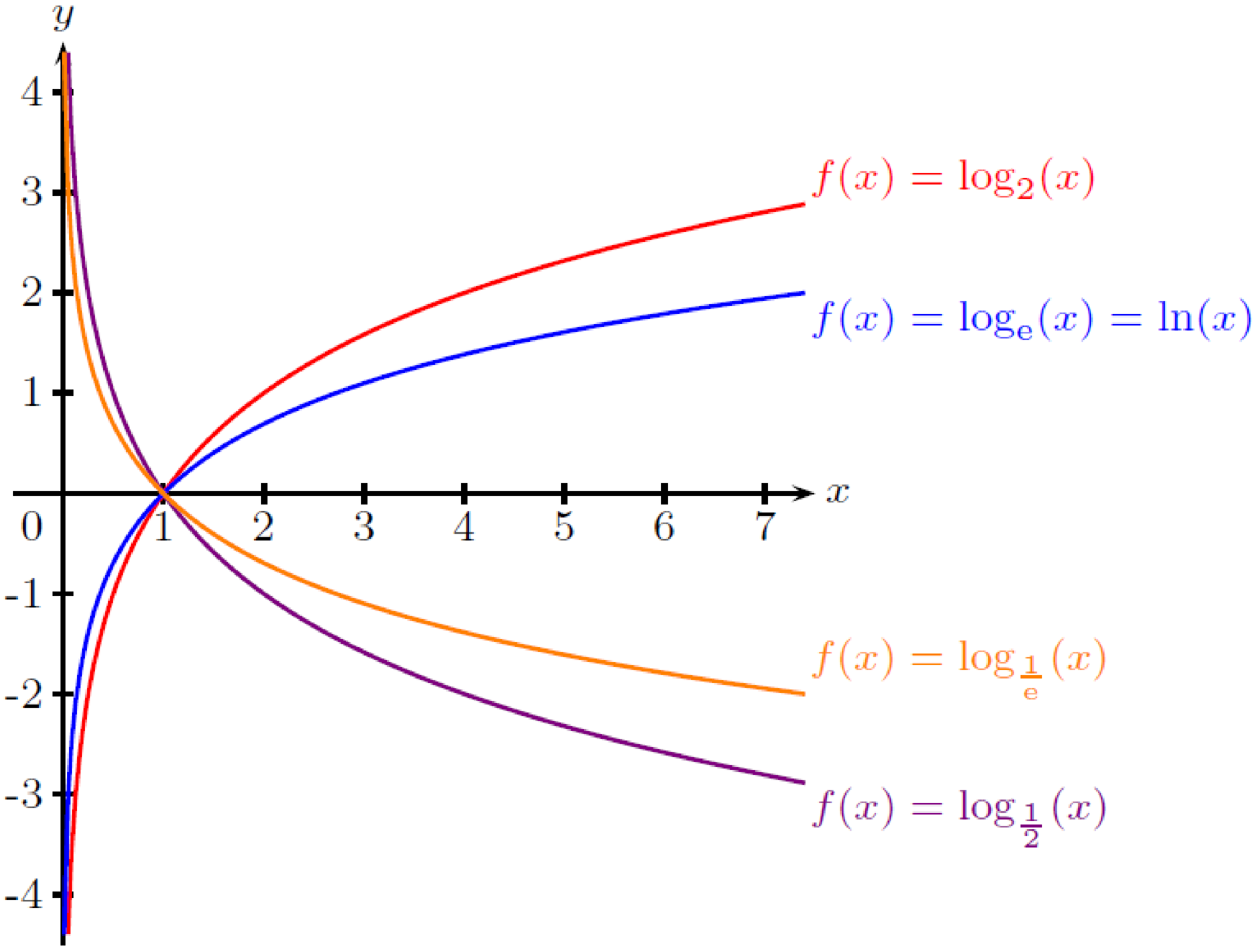
$$f(x) = \log_a(x) \text{ mit } a > 0, a \text{ fest}$$

Basis

Numerus

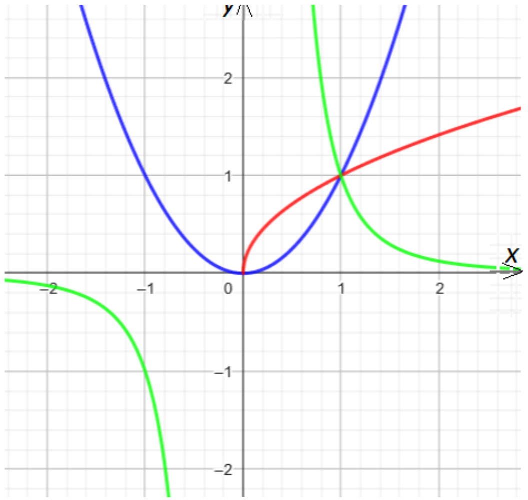
3 Wichtige elementare Funktionen



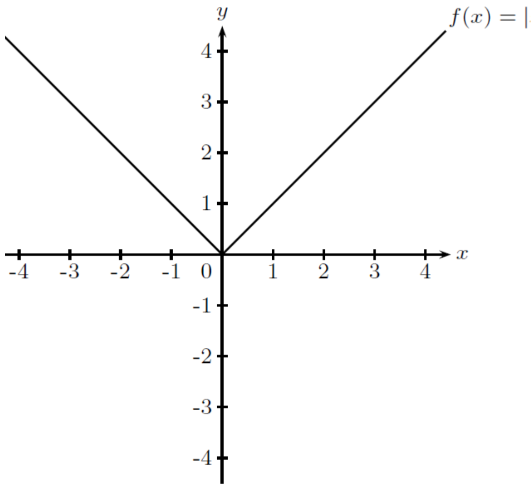


3 Wichtige elementare Funktionen

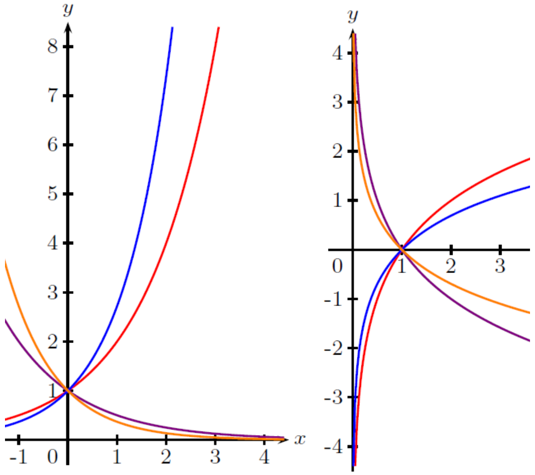
Potenzfunktion



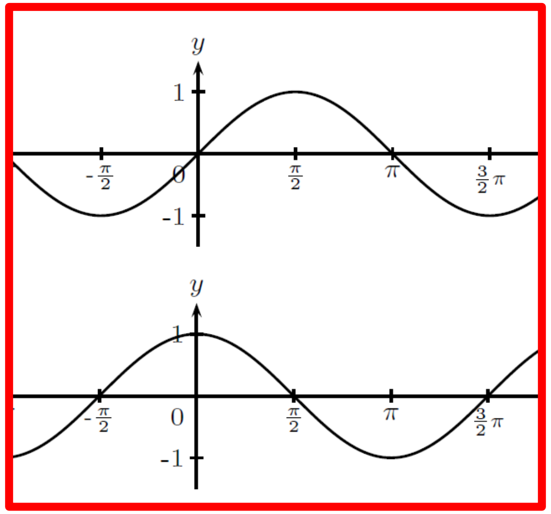
Betragsfunktion



Exponential- und Logarithmusfunktion

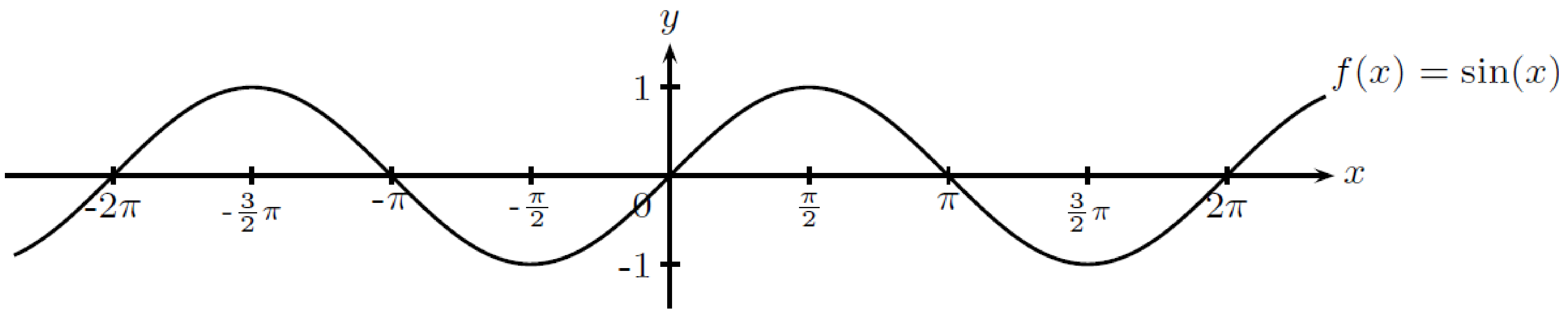


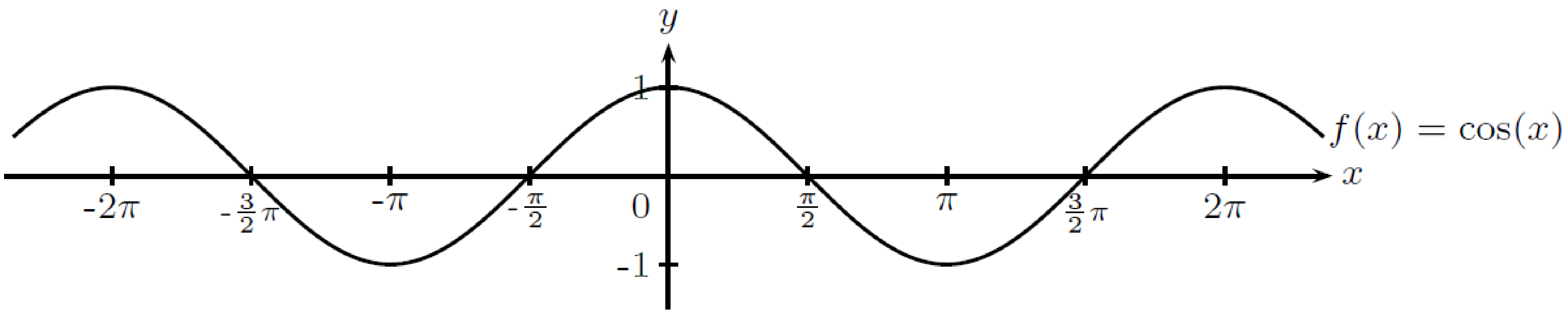
Trigonometrische Funktionen



3 Wichtige elementare Funktionen

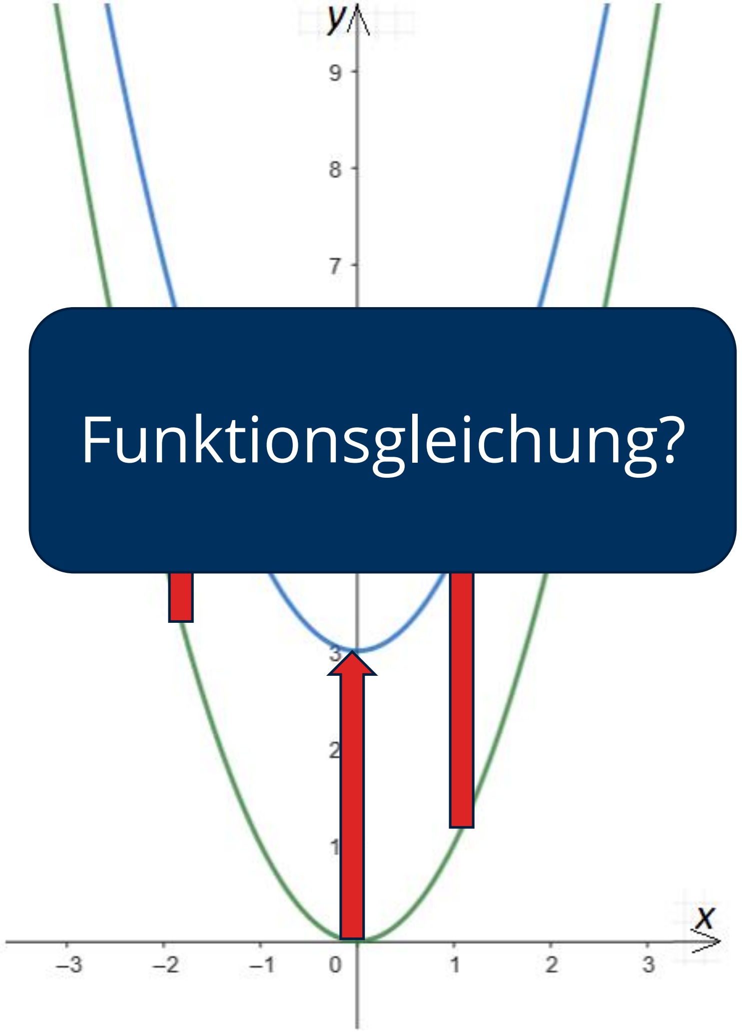
Funktionsvorschriften: $f(x) = \sin(x)$ bzw. $f(x) = \cos(x)$





4 Rechnen mit Funktionen

4 Rechnen mit Funktionen



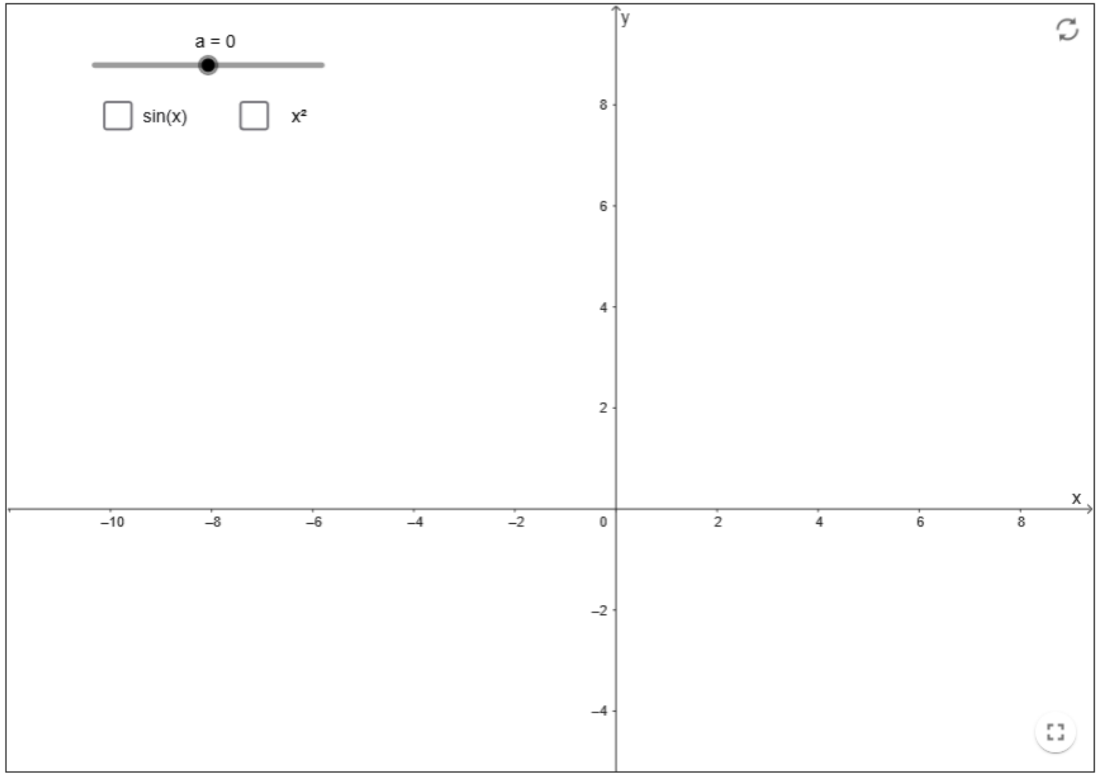
$$f(x) = |x - 3|$$

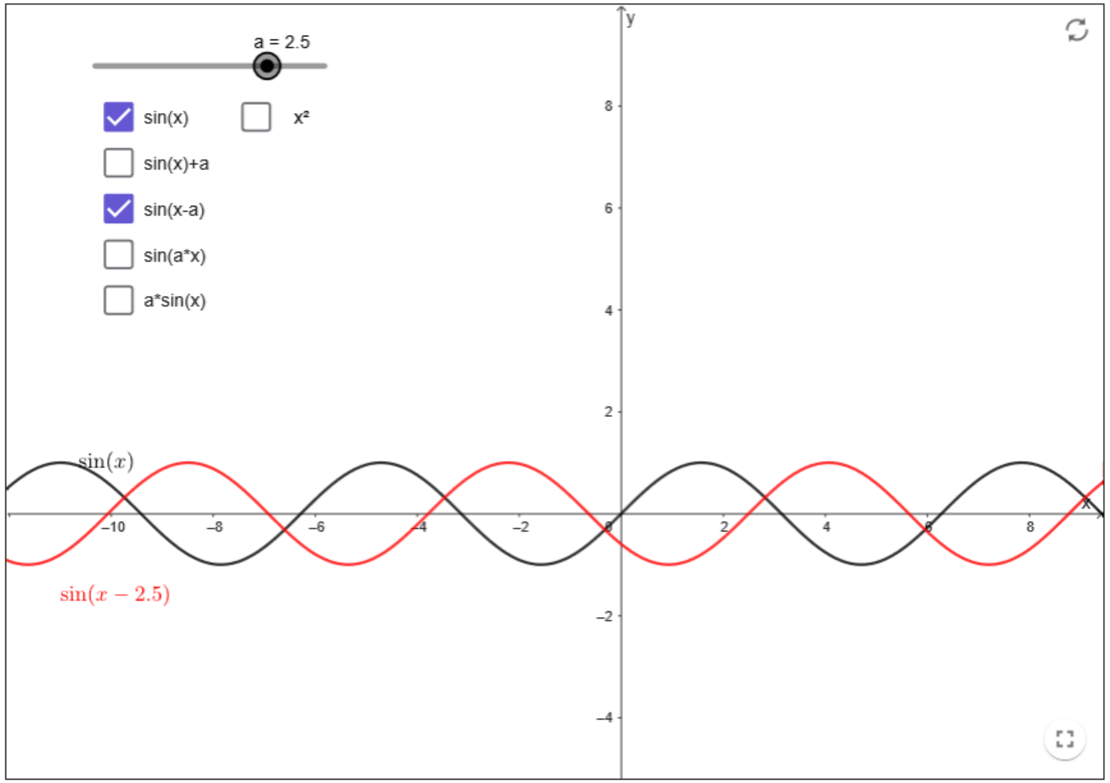
Wie sieht der zugehörige Graph aus?

4 Rechnen mit Funktionen

https://www.geogebra.org/m/sfeg8had

4 Rechnen mit Funktionen





Verschiebung einer Funktion

Es seien g eine reelle Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann geht der Graph der Funktion f mit

- $y = f(x) = g(x) + a$ aus dem Graphen von g durch **Verschiebung in $\boldsymbol{y}$ – Richtung** um den Wert a hervor,

- $y = f(x) = g(x - b)$ aus dem Graphen von g durch **Verschiebung in $\boldsymbol{x}$ – Richtung** um den Wert b hervor.

Beispiele:

(1) Sei $g(x) = x^2$. Möchte man den Graphen dieser Funktion um 3 nach oben (in y – Richtung) verschieben, so lautet die Funktionsgleichung zu diesem neuen Graphen

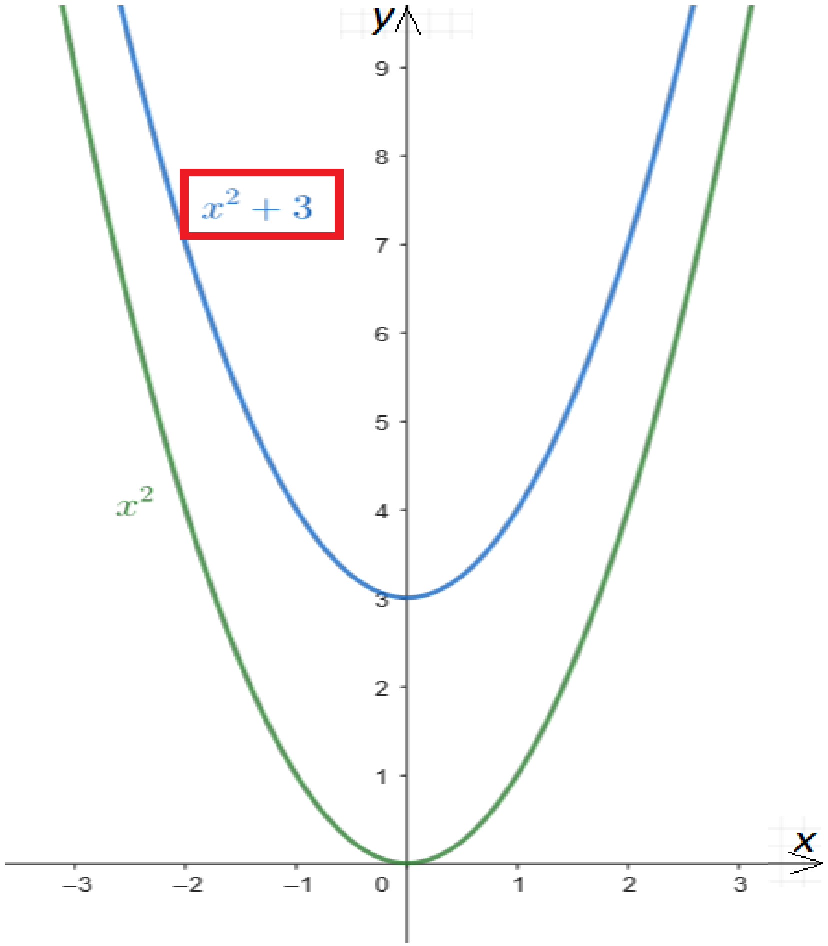
$$\boldsymbol{f(x) = g(x) + 3 = x^2 + 3}$$

4 Rechnen mit Funktionen

Verschiebung einer Funktion

Es seien g eine reelle Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann ge

- $y = f(x) = g(x) + a$ aus dem Graphen von g durch **Verschie**
  Wert a hervor,
- $y = f(x) = g(x - b)$ aus dem Graphen von g durch **Verschie**
  Wert b hervor.



Beispiele:

(1) Sei $g(x) = x^2$. Möchte man den Graphen dieser Funktion um 3 nach oben (in $y-$Richtung) verschieben, so lautet die Funktionsgleichung zu diesem neuen Graphen

$$\boldsymbol{f(x) = g(x) + 3 = x^2 + 3}$$

4 Rechnen mit Funktionen

Verschiebung einer Funktion

Es seien g eine reelle Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann geht der Graph der Funktion f mit

- $y = f(x) = g(x) + a$ aus dem Graphen von g durch **Verschiebung in y – Richtung** um den Wert a hervor,

- $y = f(x) = g(x - b)$ aus dem Graphen von g durch **Verschiebung in x – Richtung** um den Wert b hervor.

Beispiele:

(2) Seien $g(x) = |x|$ und $f(x) = |x - 3|$. Offensichtlich gilt $f(x) = g(x - 3)$. Demnach müsste der Graph der Funktion f durch eine Verschiebung des Graphen von g um 3 in x – Richtung (nach rechts) hervorgehen.

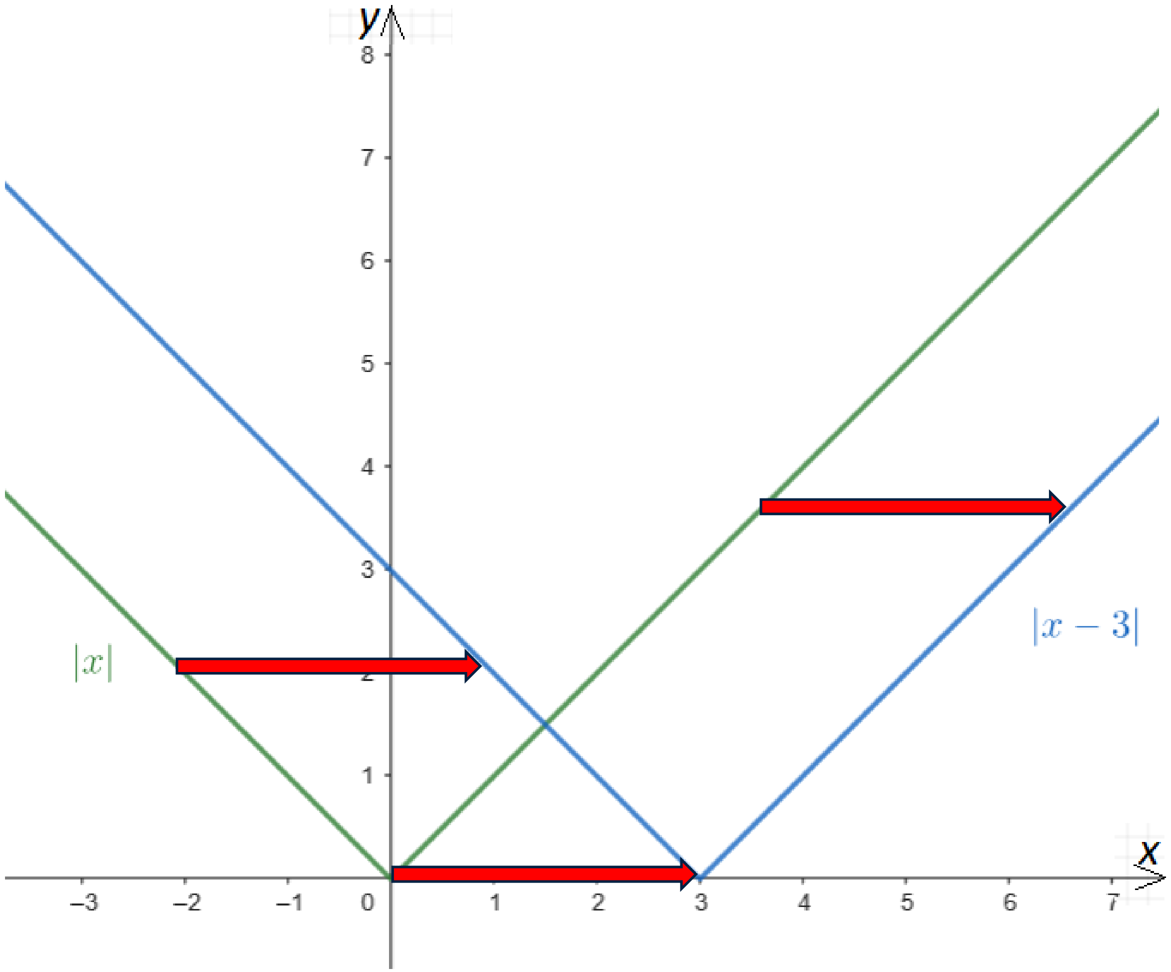
4 Rechnen mit Funktionen

Verschiebung einer Funktion

Es seien g eine reelle Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ Ko

- $y = f(x) = g(x) + a$ aus dem Graphen von
  Wert a hervor,

- $y = f(x) = g(x - b)$ aus dem Graphen von
  Wert b hervor.



Beispiele:

(2) Seien $g(x) = |x|$ und $f(x) = |x - 3|$. Offensichtlich gilt $f(x) = g(x - 3)$. Demnach müsste der Graph der Funktion f durch eine Verschiebung des Graphen von g um 3 in x – Richtung (nach rechts) hervorgehen.

Streckung/Stauchung einer Funktion

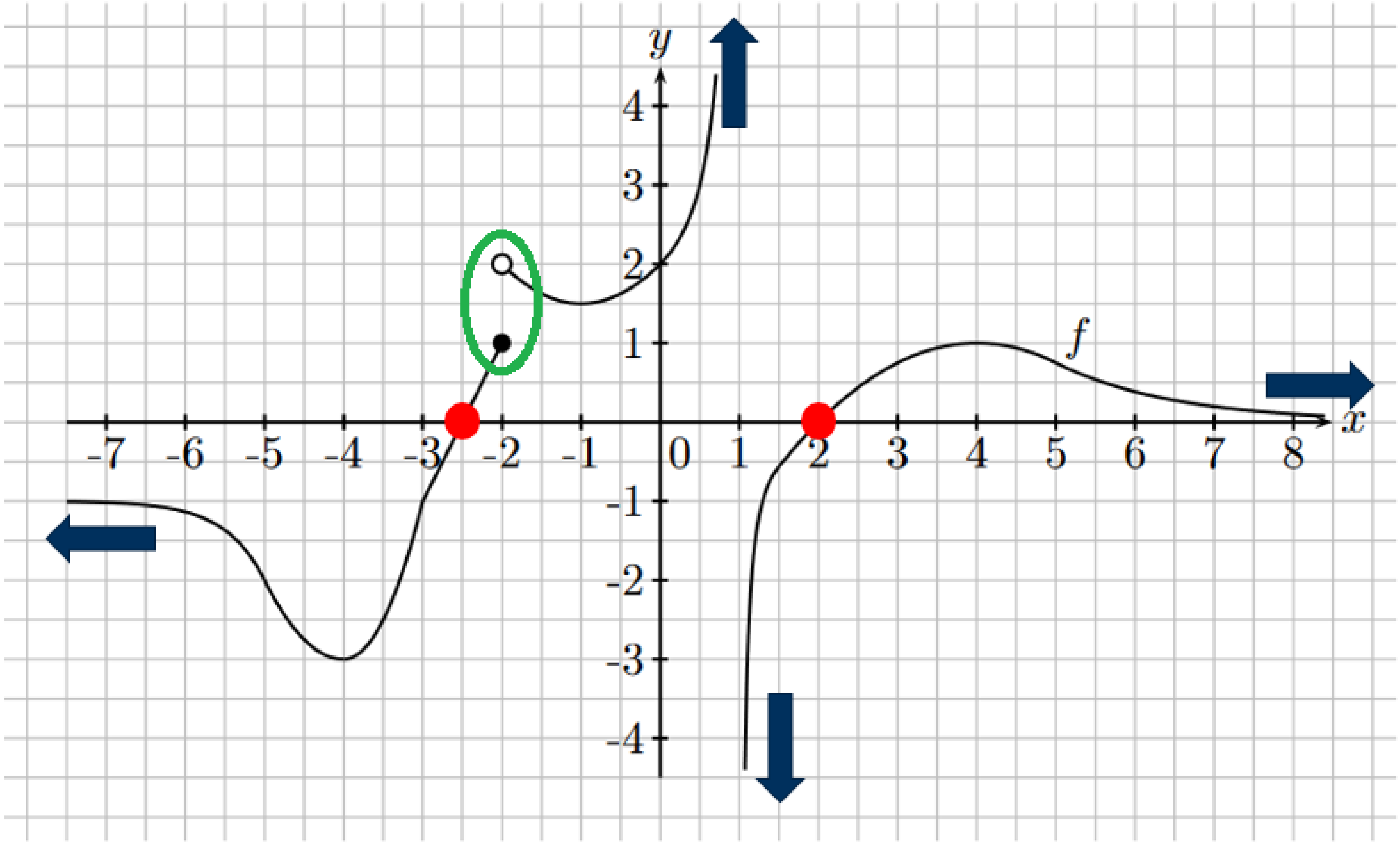
Es seien g eine reelle Funktion und $a, b \in \mathbb{R}^+ (a, b > 0)$ Konstanten. Dann geht der Graph der Funktion f mit

- $y = f(x) = a \cdot g(x)$ aus dem Graphen von g durch **Streckung in y – Richtung** um den Faktor a hervor,

- $y = f(x) = g(b \cdot x)$ aus dem Graphen von g durch **Streckung in x – Richtung** um den Wert $\frac{1}{b}$ hervor.

5 Eigenschaften von Funktionen

5 Eigenschaften von Funktionen



Nullstellen

Verhalten im Unendlichen

Unstetigkeits-stellen (allg. Stetigkeit)

und weitere

5 Eigenschaften von Funktionen

Nullstellen

Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt **Nullstelle** einer Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Beispiele:

(1) $y = f(x) = m \cdot x + n$ Nullstellenansatz: $0 = m \cdot x_0 + n$ Nullstelle: $x_0 = -\frac{n}{m}$

(2) $y = f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1}$ Nullstellenansatz: $0 = \frac{x_0^2-2x_0+1}{x_0-1}$

Zähler und Nenner getrennt betrachten:

Zähler: $0 = x_0^2 - 2x_0 + 1$ liefert $x_0 = 1 \notin D_f$, da $x = 1$ Nullstelle des Nenners ist.

Die Funktion f besitzt demnach keine Nullstelle.

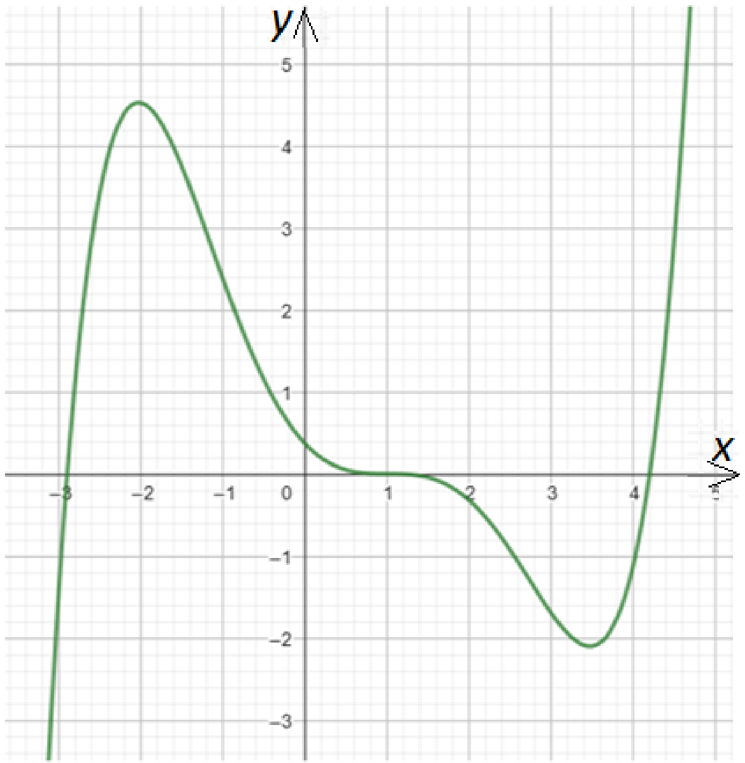
Monotonie

Seien eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $I \subseteq D_f$ gegeben.

Falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, so heißt f **monoton wachsend** auf dem Intervall I
- $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f **streng monoton wachsend** auf dem Intervall I
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, so heißt f **monoton fallend** auf dem Intervall I
- $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f **streng monoton fallend** auf dem Intervall I

Monotonie - Beispiel



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Streng monoton wachsend:

$I_1 = (-\infty; -2]$ bzw. $-\infty < x \leq -2$

$I_3 = [3{,}5; \infty)$ bzw. $3{,}5 \leq x < \infty$

Monoton fallend (um $x = 1$ keine genauere Angabe)

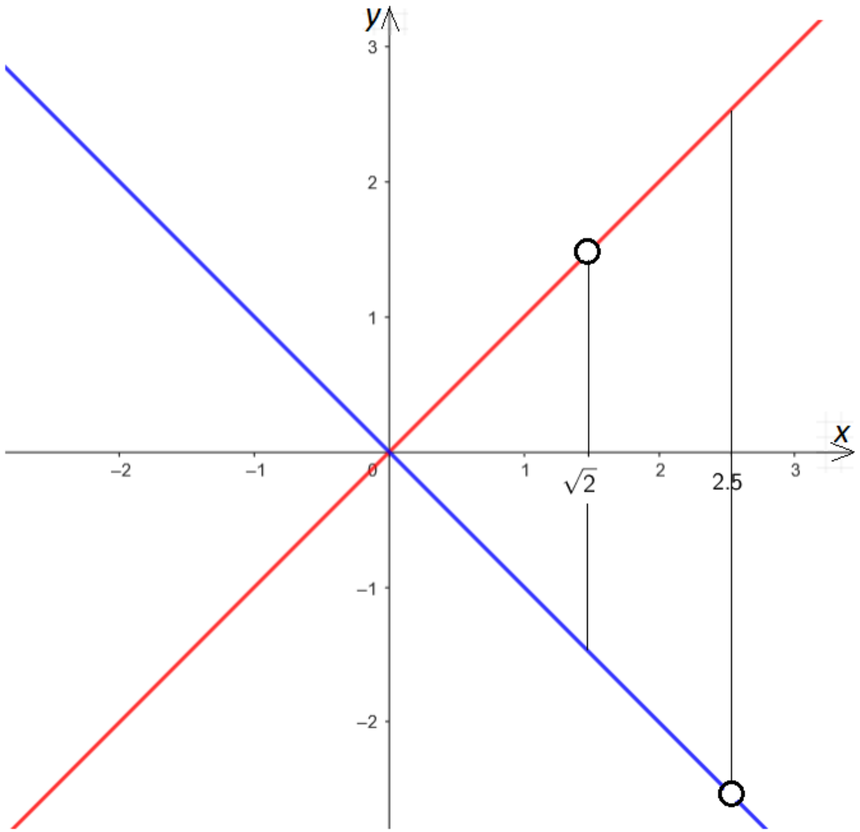
$I_2 = [-2; 3{,}5]$ bzw. $-2 \leq x \leq 3{,}5$

Monotonie – Ausblicke (pathologisches Monster)

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \\ -x & , x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Es existiert jedoch kein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, wo f monoton wachsend oder fallend ist.



5 Eigenschaften von Funktionen

Symmetrie

- Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, falls für jedes $x \in D_f$ gilt: $f(x) = f(-x)$

  Der Graph einer geraden Funktion ist **achsensymmetrisch zur y – Achse.**

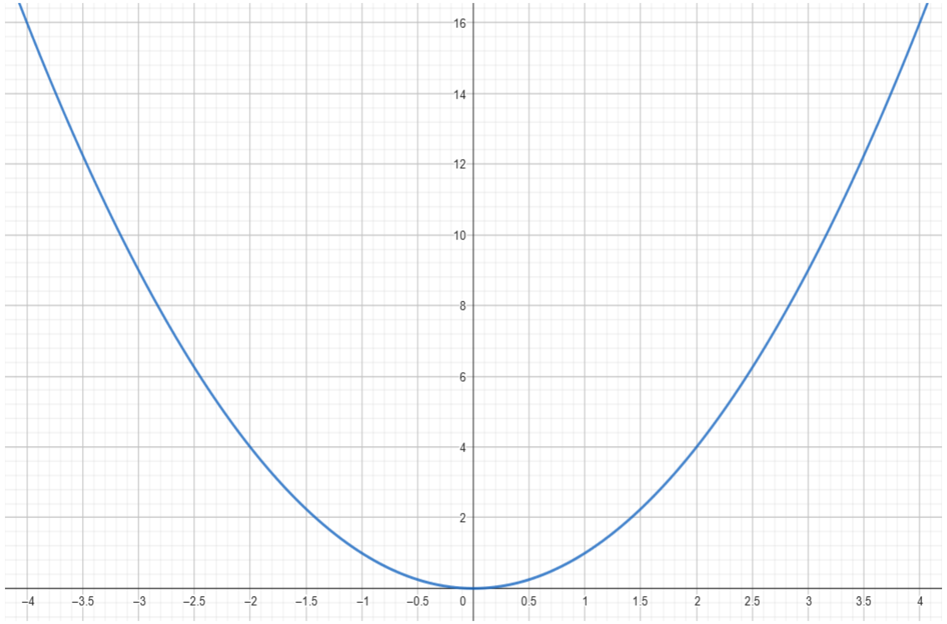
- Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt **ungerade**, falls für jedes $x \in D_f$ gilt: $f(x) = -f(-x)$

  Der Graph einer ungeraden Funktion ist **Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.**

Symmetrie – Beispiel

Sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) = x^2$.

Entscheiden Sie für sich, ob diese Funktion symmetrisch ist!



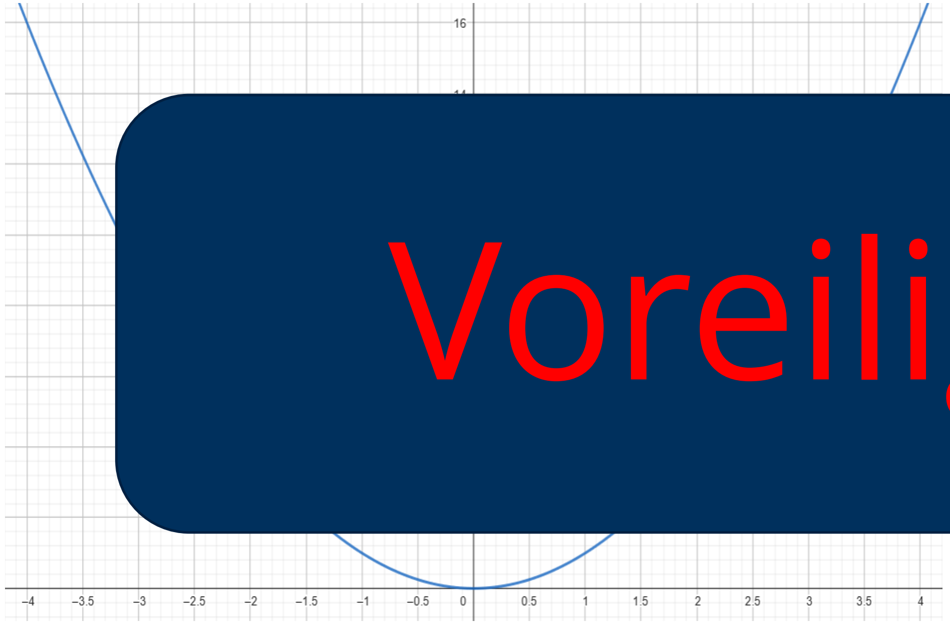
Da $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ gilt, muss f symmetrisch zur $y-$Achse und somit gerade sein.

5 Eigenschaften von Funktionen

Symmetrie – Beispiel

Sei eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) = x^2$.

Entscheiden Sie für sich, ob diese Funktion symmetrisch ist!



[redacted] $)^2 = x^2 = f(x)$ gilt,

[redacted]sch zur $y -$ Achse und

[redacted]n.

Voreilig!!!

Symmetrie – Beispiel

Sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) = x^2$.

Entscheiden Sie für sich, ob diese Funktion symmetrisch ist!

D_f muss beachtet werden! „…falls für jedes $x \in D_f$ gilt…“

5 Eigenschaften von Funktionen

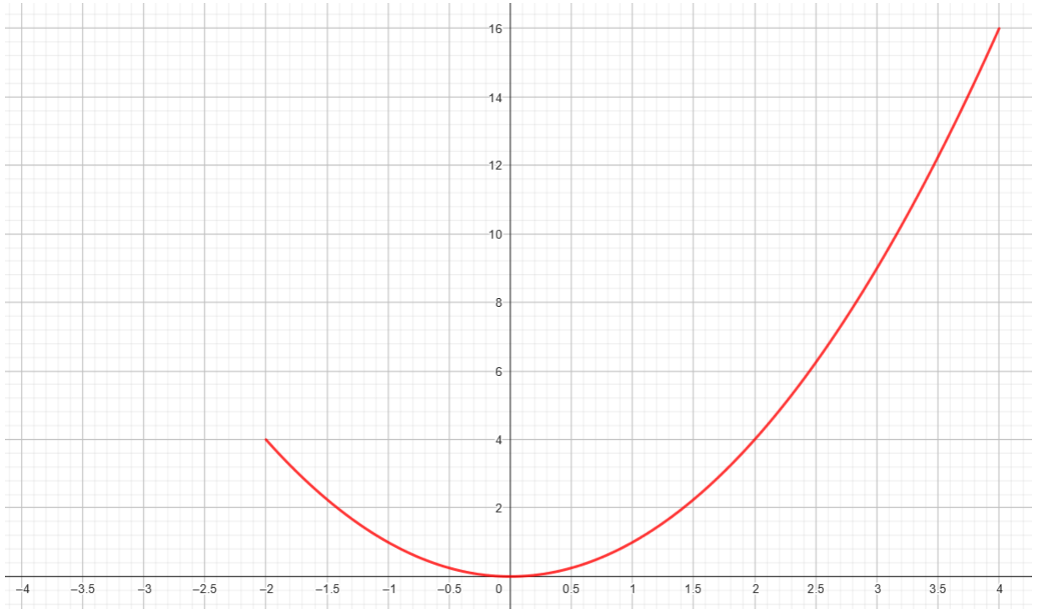
Symmetrie – Beispiel

Sei eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) = x^2$.

Entscheiden Sie für sich, ob diese Funktion symmetrisch ist!

D_f muss beachtet werden! „…falls für jedes $x \in D_f$ gilt…“

z.B.: $D_f = [-2; 4]$



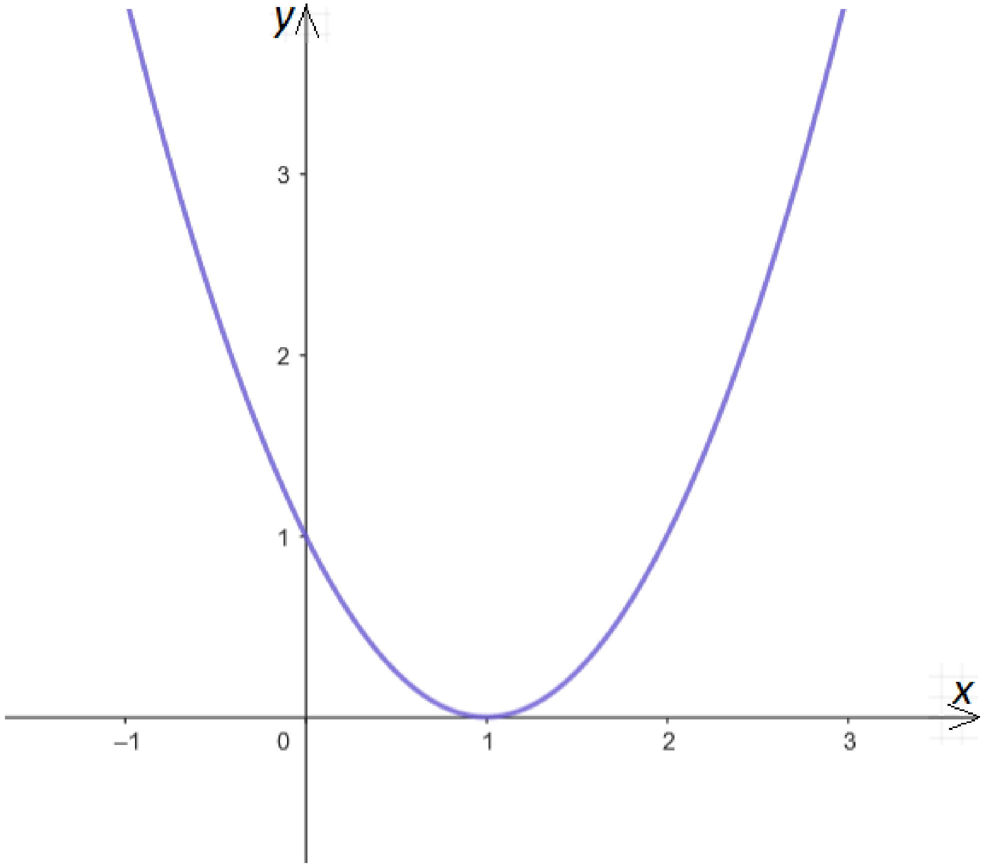
Offensichtlich ist f nicht achsensymmetrisch zur y – Achse.

5 Eigenschaften von Funktionen

Symmetrie - Allgemeiner

Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

gegeben mit $f(x) = (x-1)^2$.



Die Funktion f ist offensichtlich weder gerade noch ungerade.

Es existiert trotzdem eine Symmetrieachse ($x = 1$).

Man kann die Begriffe gerade und ungerade Funktion verallgemeinern.

Grenzwerte

Wir betrachten

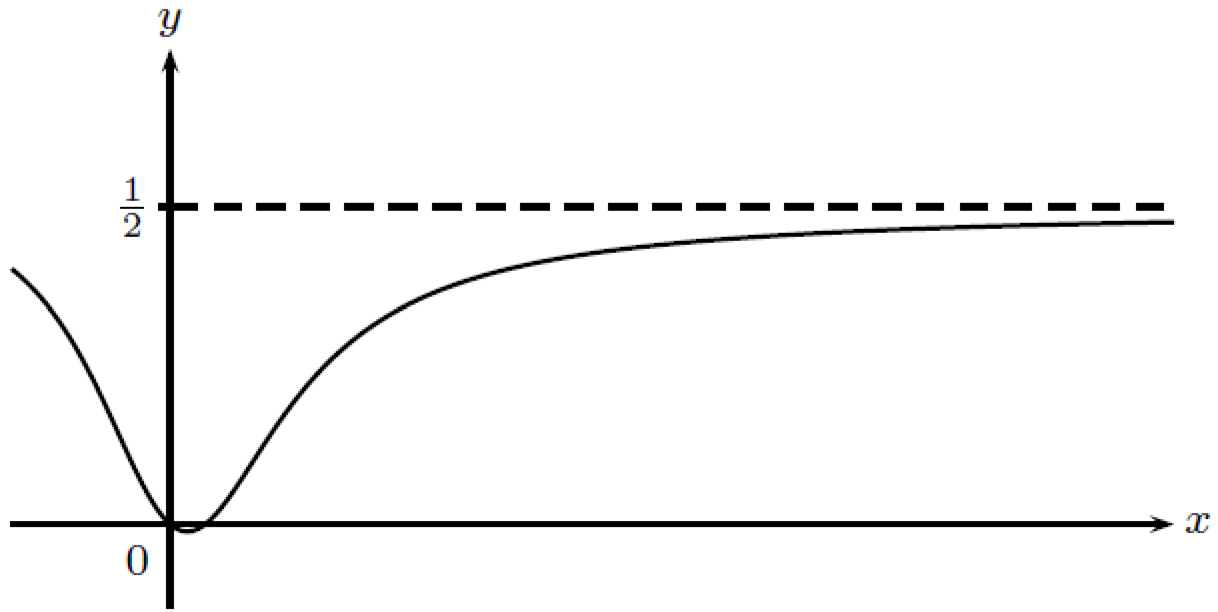
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ falls wir den Grenzwert **an einer Stelle** $\boldsymbol{x_0}$ oder

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ falls wir das **Verhalten im Unendlichen** (∞ oder $-\infty$) untersuchen wollen.

Verhalten im Unendlichen

Beispiele:

(1) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{3x^2-x}{6x^2+7}$ gilt für $x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$



Verhalten im Unendlichen

Beispiele:

(1) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{3x^2 - x}{6x^2+7}$ gilt für $x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

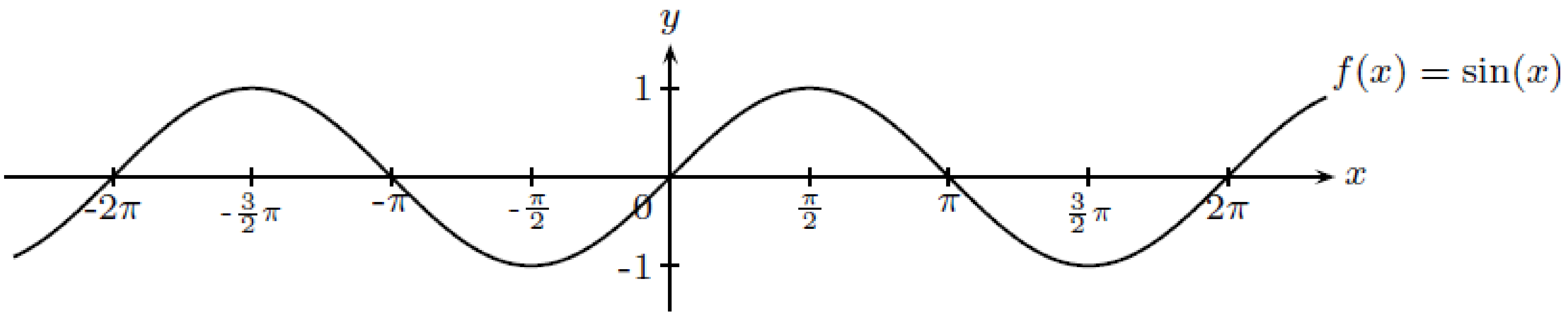
Rechnerischer Nachweis: Sei (x_n) eine beliebige Folge mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3x_n^2 - x_n}{6x_n^2 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2(3 - \frac{1}{x_n})}{x_n^2(6 + \frac{7}{x_n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x_n}}{6 + \frac{7}{x_n^2}} = \frac{3+0}{6+0} = \frac{1}{2}.$$

Verhalten im Unendlichen

Beispiele:

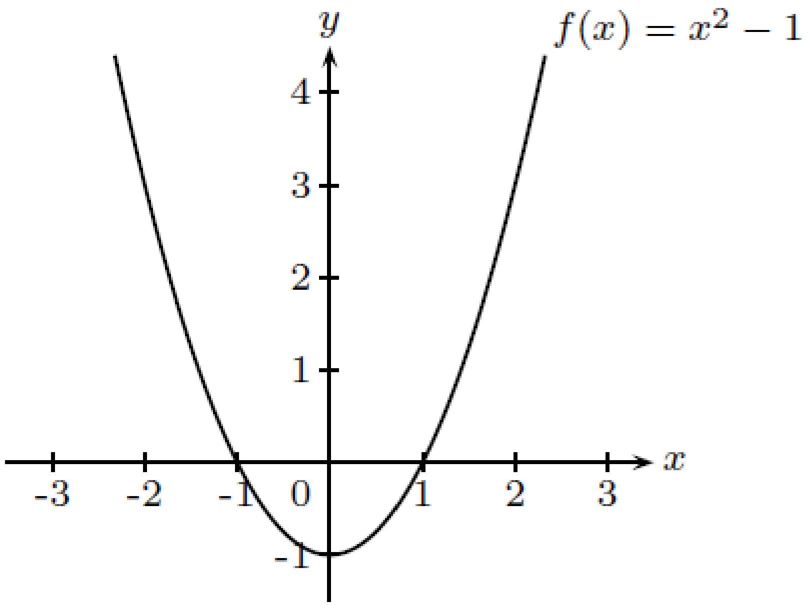
(2) Für die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ gilt für $x \to \infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht



Verhalten im Unendlichen

Beispiele:

(3) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 1$ gilt für $x \to \infty$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (existiert nicht)



Verhalten an einer Stelle - Stetigkeit

Definitionen

Seien f eine reelle Funktion und $x^* \in D_f$.

- Die Funktion f heißt **stetig an der Stelle x^***, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x^*} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x^*)$ übereinstimmt.

  Kurz: $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$

- Die Funktion f heißt **stetig** (auf ihrem Definitionsbereich), wenn sie stetig an jeder Stelle $x \in D_f$ ist.
- Die Funktion f heißt **unstetig an der Stelle x^***, wenn sie an der Stelle x^* nicht stetig ist.

5 Eigenschaften von Funktionen

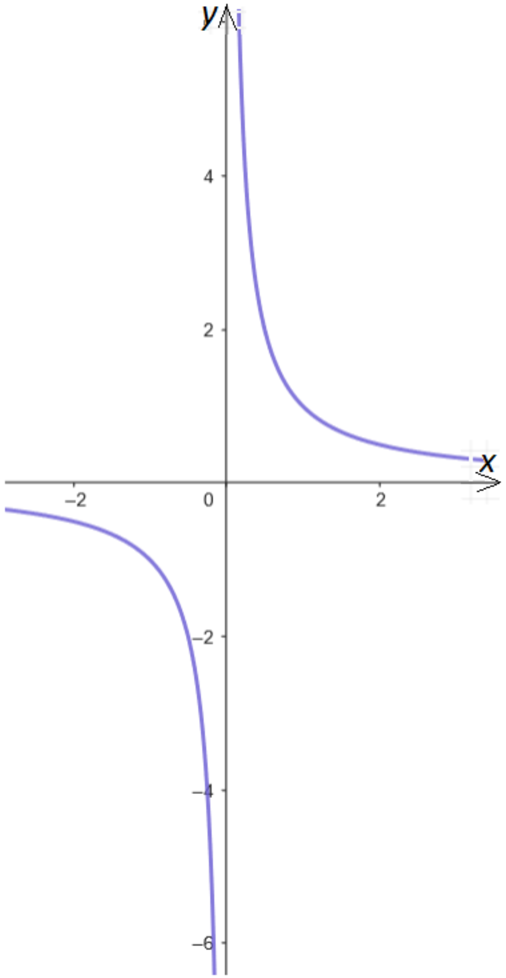
Stetigkeit – Vorstellungsprobleme?

Wahrscheinlich so in der Schule:

„Eine Funktion ist stetig, wenn man den Graphen ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann."

$f: D_f \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Stetig oder nicht?

Der Stetigkeitsbegriff kann auf die Stelle $x = 0$ nicht angewendet werden.



5 Eigenschaften von Funktionen

Unstetigkeiten

Gemäß der Definition ist eine Funktion genau dann an einer Stelle x^* unstetig, wenn einer der folgenden drei Fälle vorliegt:

(i) Die rechts- und linksseitigen Grenzwerte existieren und stimmen überein, stimmen aber nicht mit dem Funktionswert $f(x^*)$ überein.

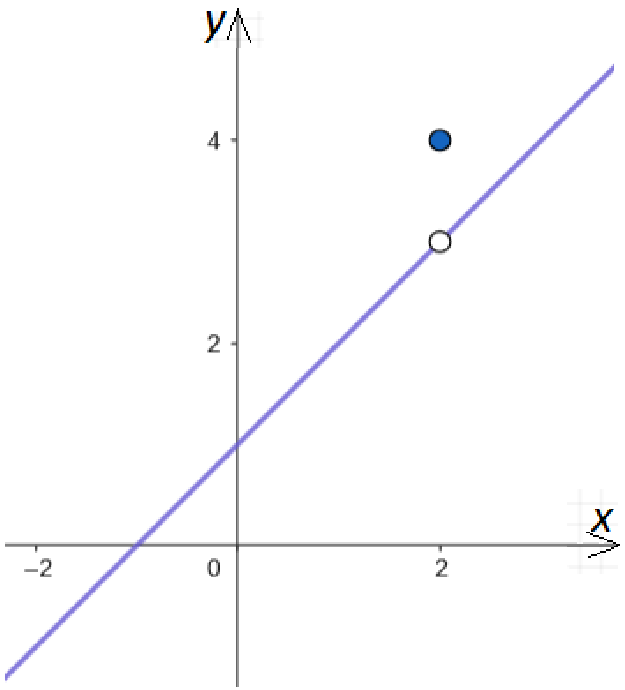
(ii) Die rechts- und linksseitigen Grenzwerte existieren und stimmen nicht überein.

(iii) Wenigstens einer der Grenzwert existiert nicht.

5 Eigenschaften von Funktionen

Unstetigkeiten

(i) Die rechts- und linksseitigen Grenzwerte existieren und stimmen überein, stimmen aber nicht mit dem Funktionswert $f(x^*)$ überein.



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

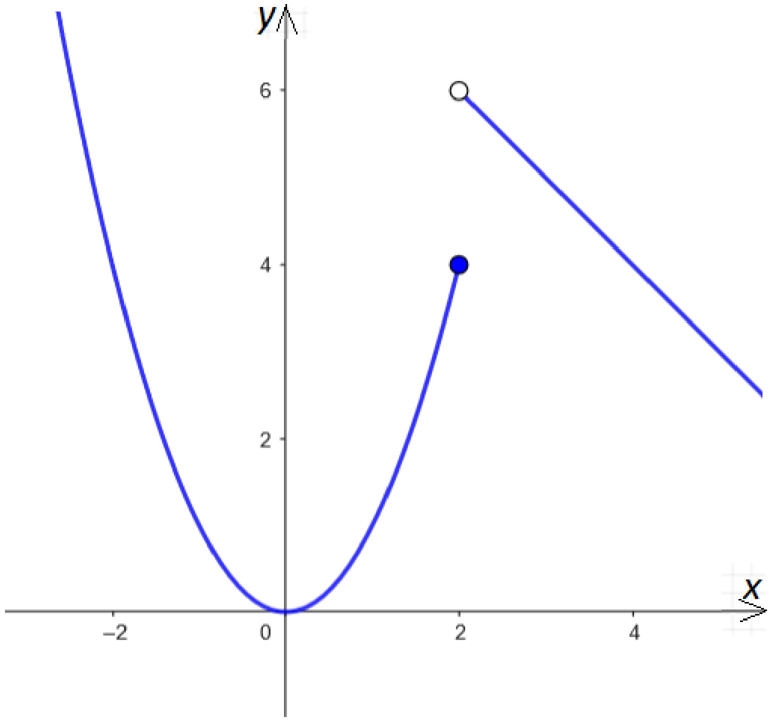
$$f(x) = \begin{cases} x+1 \,, x \neq 2 \\ 4 \quad\;\; , x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \neq 4 = f(2)$$

f ist unstetig an der Stelle $x = 2$

Unstetigkeiten

(ii) Die rechts- und linksseitigen Grenzwerte existieren und stimmen nicht überein.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ -x+8, & x > 2 \end{cases}$$

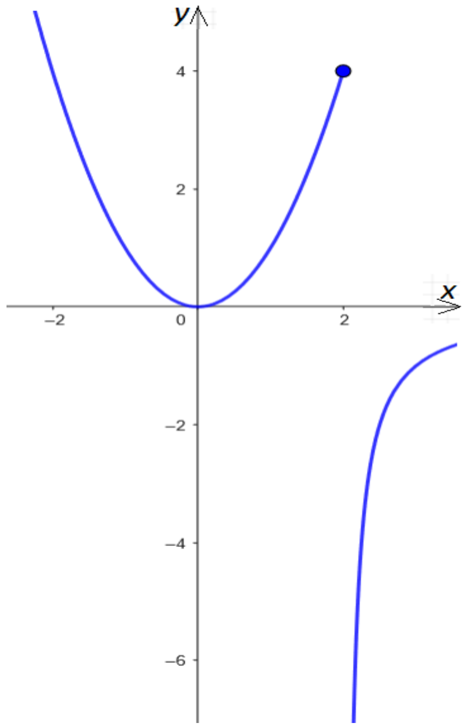
$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (-x+8) = 6$$

Da linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, ist f unstetig an der Stelle $x = 2$.

Unstetigkeiten

(iii) Wenigstens einer der Grenzwert existiert nicht.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 2 \\ -\frac{1}{x-2} & , x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} -\frac{1}{x-2} = -\infty$$

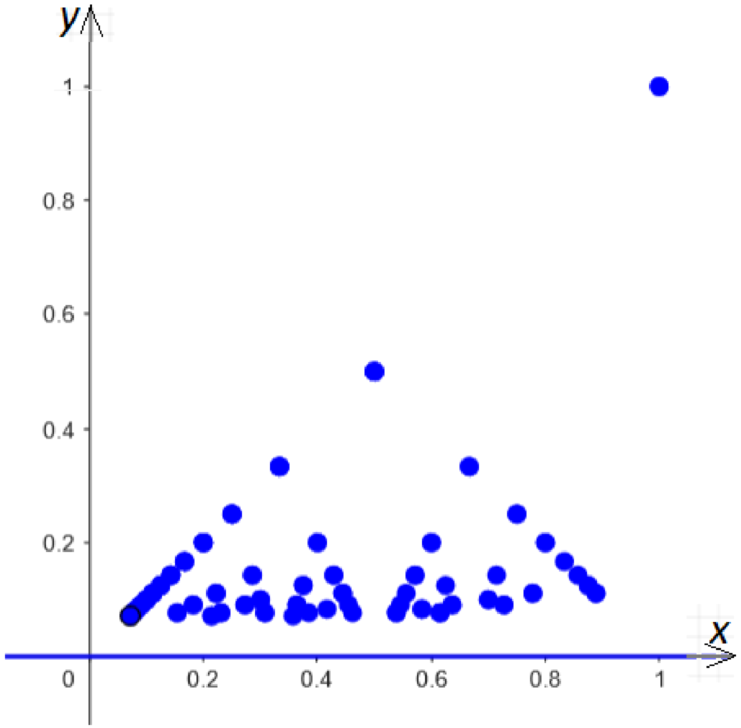
Da der rechtsseitige Grenzwert nicht existiert, ist f unstetig an der Stelle $x = 2$.

Stetigkeit – pathologisches Monster

Sei $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q} \text{ mit } ggT(p,q) = 1 \end{cases}$

Die Funktion f ist an allen rationalen Stellen unstetig,

an allen irrationalen Stellen stetig.



Graph „angedeutet“