Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

Brückenkurs Mathematik 2023

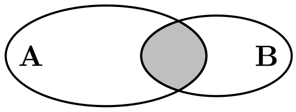
Merkblatt zur 1. Übung am 21. September 2023
Thema: Logik, Mengenlehre

Logik

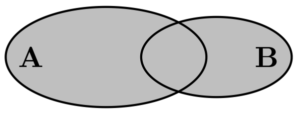
- **Aussagen.** Eine Aussage ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, dem eindeutig ein Wahrheitswert (wahr oder falsch) zugeordnet werden kann. Wir werden Aussagen meist mit $p, q, \ldots$ bezeichnen.
- **Aussageformen.** Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, das eine oder mehrere Variablen enthält, und zur Aussage wird, sobald diese Variablen mit konkreten Werten belegt werden.
- **Aussageverbindungen.** Angenommen, p und q sind Aussagen. Dann sind die folgenden Verknüpfungen wiederum Aussagen:
  - $\overline{p}$: Negation, gesprochen „nicht p“, manchmal auch als $\neg p$ notiert. Die Negation einer Aussage p besagt, dass p nicht gilt.
  - $p \wedge q$: Konjunktion, gesprochen „p und q“. Die Konjunktion zweier Aussagen p und q besagt, dass sowohl p als auch q gilt.
  - $p \vee q$: Disjunktion, gesprochen „p oder q“. Die Disjunktion zweier Aussagen p und q besagt, dass p oder q (oder beide) gelten (wichtig: kein ausschließendes „oder“!)
- **Quantoren.** Angenommen, $p(x)$ ist eine Aussageform, die von einer Variablen x abhängt. Dann sind die folgenden Gebilde Aussagen:
  - $\exists x : p(x)$ (gesprochen: „es existiert (mindestens) ein x, für das die Aussage $p(x)$ gilt“; $\exists$ wird Existenzquantor genannt),
  - $\forall x : p(x)$ (gesprochen: „für jedes x gilt die Aussage $p(x)$“; $\forall$ wird Allquantor genannt).

Mengenlehre

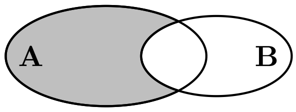
- **Verknüpfungen zweier Mengen.** Angenommen, A und B sind Mengen. Dann sind die folgenden Verknüpfungen wiederum Mengen:
  - $A \cap B$: Durchschnitt, gesprochen „A geschnitten mit B“. $A \cap B$ besteht aus allen Elementen, die sowohl zu A als auch zu B gehören.



  - $A \cup B$: Vereinigung, gesprochen „A vereinigt mit B“. $A \cup B$ besteht aus allen Elementen, die zu A oder zu B gehören (oder zu beiden – kein ausschließendes „oder“!).



  - $A \setminus B$: Mengendifferenz, gesprochen „A ohne B“. $A \setminus B$ besteht aus allen Elementen, die zu A gehören, aber nicht zu B.



- **Spezielle Mengen.**
  - **Leere Menge.** Menge, die kein Element hat; bezeichnet mit $\emptyset$ oder $\{\,\}$
  - **Zahlenbereiche.**

    $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: Menge der natürlichen Zahlen; in mancher Literatur ist 0 nicht enthalten und somit 1 die kleinste natürliche Zahl

    $\mathbb{Z} = \{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: Menge der ganzen Zahlen

    $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen

    $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen
  - **Beschränkte Intervalle.** Für zwei reelle Zahlen a, b mit $a < b$ werden definiert:
    * $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
    * $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenes Intervall, manchmal auch als $]a, b[$ notiert)
    * $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (links-halboffenes Intervall)
    * $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (rechts-halboffenes Intervall)
  - **Unbeschränkte Intervalle.** Für eine reelle Zahl a werden definiert:
    * $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
    * $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
    * $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
    * $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- **Teilmengenbeziehungen.** Eine Menge A ist Teilmenge einer Menge B, kurz $A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch zur Menge B gehört. B wird dann als Obermenge von A bezeichnet.
- **disjunkt.** Zwei Mengen A und B sind disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt, das heißt, wenn sie kein Element gemeinsam haben.
- **Kartesisches Produkt.** Angenommen, A und B sind Mengen. Dann ist das kartesische Produkt dieser beiden Mengen definiert durch

  $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

  Die Elemente des kartesischen Produkts sind also geordnete Paare. Speziell für $A \times A$ schreibt man auch A^2.