Brückenkurs Mathematik

TU Dresden

Differential- und Integralrechnung

Schwerpunkte: Differentiation
Integration
Eigenschaften und Anwendungen

Prof. Dr. F. Schuricht
TU Dresden, Fakultät Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialrechnung **3**

1.1 Differentiation . . . 3

1.2 Berechnung von Ableitungen . . . 9

1.3 Anwendungen . . . 12

2 Stammfunktionen **26**

2.1 Stammfunktionen für elementare Funktionen . . . 27

2.2 Rechenregeln für zusammengesetzte Funktionen . . . 28

3 Bestimmtes Integral **30**

1 Differentialrechnung

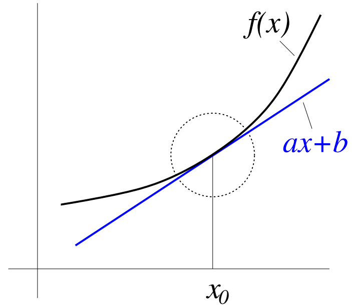
1.1 Differentiation

sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $I \subset \mathbb{R}$ (offenes) Intervall, $x_0 \in I$

Grundidee: **Differentiation = lokale Linearisierung**

d.h. Funktion f wird in der Nähe von $x = x_0$ durch lineare Funktion angenähert

$$\boxed{f(x) \approx ax + b} \qquad \text{für} \quad x \approx x_0$$



geometrische Interpretation:

Graph von f wird lokal durch Tangente (Graph einer linearen Funktion) angenähert

Frage: Berechnung von a ? (b kann dann leicht berechnet werden)

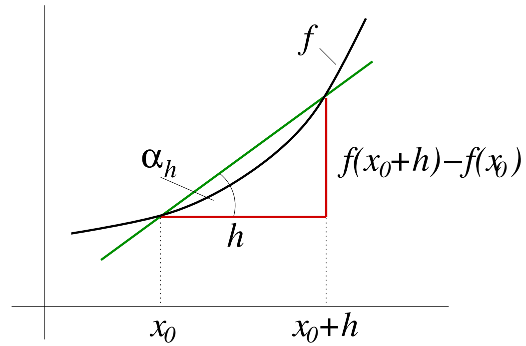
Berechnung von a für $\boxed{f(x) \approx ax + b}$

1. Schritt: **Anstieg der Sekante** an Graphen von f durch 2 Kurvenpunkte

$$(x_0, f(x_0)) \quad \text{und} \quad (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

ist gegeben durch $$\tan \alpha_h = \boxed{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

(Differenzenquotient)

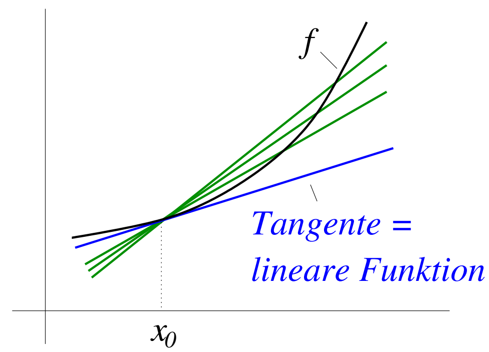


(Interpretation: mittlerer Anstieg von f im Intervall $[x_0, x_0 + h]$, z.B. Durchschnittsgeschwindigkeit)

2. Schritt: **Anstieg** von f im Punkt x_0 als **Grenzwert** (falls dieser existiert)

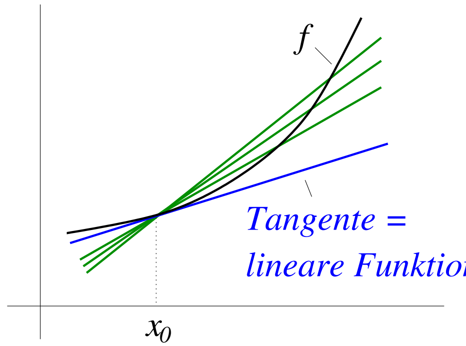
$$a = \tan \alpha = \lim_{h \to 0} \tan \alpha_h = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

(Differentialquotient)



(Interpretation: z.B. momentane Geschwindigkeit)

2. Schritt: **Anstieg** von f im Punkt x_0 als **Grenzwert** (falls dieser existiert)



$$a = \tan\alpha = \lim_{h\to 0} \tan\alpha_h = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

(Differentialquotient)

(Interpretation: z.B. momentane Geschwindigkeit)

falls dieser Grenzwert existiert:

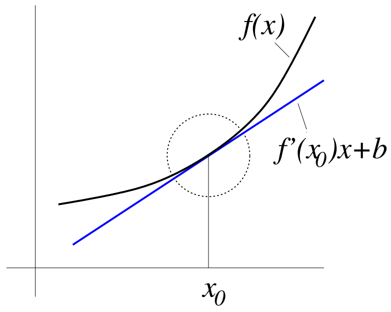
f heißt **differenzierbar im Punkt** x_0, Wert a heißt **1. Ableitung** von f an der Stelle x_0

man schreibt: $f'(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = a$

Ergebnis: **lokale Linearisierung** als lineare Approximation der Funktion f in der Nähe von $x = x_0$

$$f(x) \approx \underbrace{f'(x_0)\,x + b}_{\text{lineare Funktion}} = f'(x_0)\,x + \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)\,x_0}_{=b} \qquad \text{für} \quad x \approx x_0$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{lineare Funktion in } x}} \qquad \text{für} \quad x \approx x_0$$



man sagt:

f ist **differenzierbar auf der Menge** $\tilde{I} \subset I$ falls f in allen Punkten $x_0 \in \tilde{I}$ differenzierbar ist

f ist **differenzierbar**, falls f in allen Punkten x_0 des Definitionsbereiches I differenzierbar ist

Beispiel sei $f(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \big(2x_0 + h\big) = 2x_0 = f'(x_0)$$

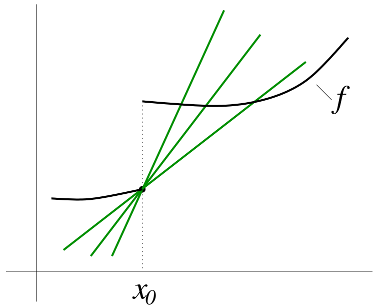
$\longrightarrow$ Funktion f ist in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 2x_0$

notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit von f in x_0: f muss in x_0 stetig sein

d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (genauer: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x_0$)

welche Funktionen f sind typischerweise **nicht differenzierbar**:

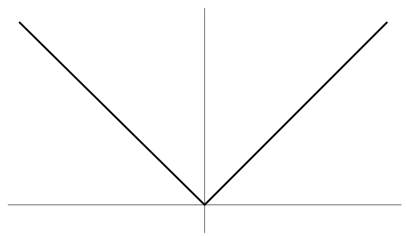
- Funktion f ist nicht stetig in x_0, hat z.B. einen Sprung an der Stelle $x = x_0$:



dann: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ "=" $\pm\infty$

d.h. Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht

- Funktion f hat einen "Knick" in x_0, wie z.B. $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$:



$$\lim_{h\to 0,\, h>0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \frac{h}{h} = 1\,, \qquad \lim_{h\to 0,\, h<0} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$\longrightarrow$ sogenannter rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert verschieden

$\longrightarrow$ Grenzwert existiert nicht

folglich: **Stetigkeit** in x_0 ist **nicht hinreichend** für Differenzierbarkeit

Höhere Ableitungen

Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar

1. Ableitung $f'(x_0)$ von f in x_0 ist eine **Zahl**

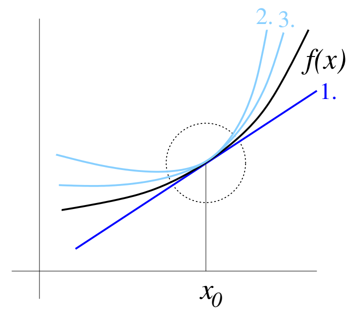
betrachte nun 1. Ableitung als **Funktion**: $f' : I \to \mathbb{R}$ mit $x \to f'(x)$

Ableitung der 1. Ableitung (als Funktion) in x_0 (falls existent) liefert **2. Ableitung** $f''(x_0)$ usw.

Bezeichnung: $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ..., $f^{(k)}(x_0)$ bzw. $\left.\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=x_0}$

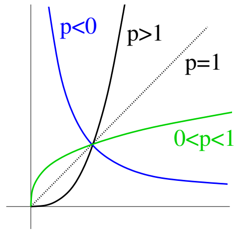
immer bessere **Approximation** von f mittels **höherer Ableitungen** (durch sogen. Taylor-Polynome)

$$
\begin{aligned}
f(x) &\overset{\text{1. Ordnung}}{\approx} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
f(x) &\overset{\text{2. Ordnung}}{\approx} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\
f(x) &\overset{\text{3. Ordnung}}{\approx} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$



1.2 Berechnung von Ableitungen

1.2.1 Ableitungen für elementare Funktionen



Potenzfunktionen: $f(x) = x^p$ für $x \in (0, \infty)$, $p \in \mathbb{R}$

$f'(x) = px^{p-1}$ für $x \in (0, \infty)$

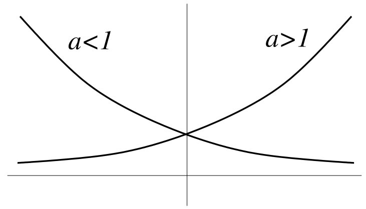
(falls $p \in \mathbb{N}$ dann für $x \in \mathbb{R}$ gültig, falls $-p \in \mathbb{N}$ dann für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gültig)

insbesondere $$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N},\ x \neq 0$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N},\ x > 0$$

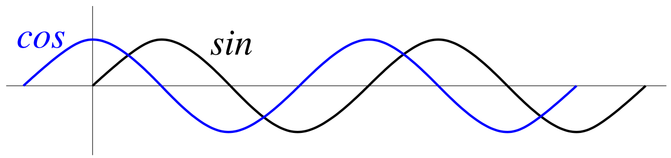
Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x$ für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = a^x \ln a$ für $x \in \mathbb{R}$ (insbesondere $\left(e^x\right)' = e^x$)



Winkelfunktionen: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x$ für $x \in \mathbb{R}$



<u>weitere Funktionen:</u> vgl. Formelsammlung

1.2.2 Rechenregeln für zusammengesetzte Funktionen

Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ sei Konstante

dann sind auch folgende **zusammengesetzte** Funktionen auf I differenzierbar:

$$f \pm g, \quad c \cdot f, \quad f \cdot g \quad \text{und} \quad (\text{falls } g(x) \neq 0) \ \ \frac{f}{g}$$

dabei gelten folgende **Rechenregeln**:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x) &= f'(x) \pm g'(x) \\
(c \cdot f)'(x) &= c \cdot f'(x) \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x) && \text{(Produktregel)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (\text{falls } g(x) \neq 0) && \text{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $cx + d \neq 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geg.) und

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

Kettenregel:

seien $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $h(J) \subset I$

dann ist auch die **verkettete Funktion** $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = g(h(x))$ differenzierbar

und es gilt: $$f'(x) = \boxed{\frac{d}{dx}\, g(h(x)) = g'(h(x)) \cdot h'(x)} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Beispiele:

(a) $f(x) = a^{\cos x}$ $(a > 0)$: $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert

wähle $g(y) = a^y$, $h(x) = \cos x$, man hat $g'(y) = a^y \ln a$, $h'(x) = -\sin x$

dann $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -a^{\cos x} \cdot \ln a \cdot \sin x$

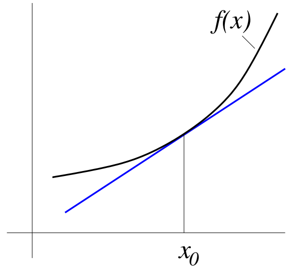
(b) $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$, g sei differenzierbar: $f(x)$ erklärt, falls $g(x) > 0$

für $h(y) = \ln y$ gilt: $f(x) = h(g(x))$ und $h'(y) = \frac{1}{y}$ (falls $y > 0$)

dann $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ (falls $g(x) > 0$)

1.3 Anwendungen

1.3.1 Tangente an Graphen



Bestimme Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$

wiederhole: $\quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \quad$ für $\quad x \approx x_0$

Tangentenfunktion: rechte Seite ist lineare Funktion t, deren Graph die gesuchte Tangente ist

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Tangentengleichung: als Geraden-Gleichung in der xy-Ebene hat die Tangente die Form

$$y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$$

(allg. Form: $ax + by = c \overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$)

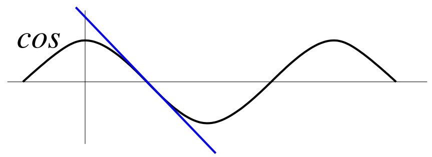
(d.h. die Tangente besteht aus allen Punkten (x, y), die obige Gleichung erfüllen)

Beispiel: Tangente an Graph von $f(x) = \cos x$ in $(\frac{\pi}{2}, 0)$

man hat: $\quad f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

Tangentenfunktion: $\quad t(x) = (-1)(x - \frac{\pi}{2}) = -x + \frac{\pi}{2}$

Tangentengleichung: $\quad y = -x + \frac{\pi}{2}$ bzw. $x + y = \frac{\pi}{2}$



1.3.2 Kurvendiskussion

sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine (evtl. mehrfach) differenzierbare Funktion

Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Polstellen, asymptotisches Verhalten:
vgl. Vorlesung "Reelle Funktionen"

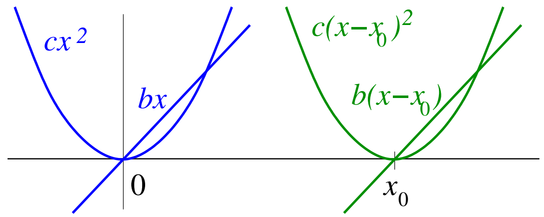
lokales Verhalten: verwende Approximation durch Taylor-Ploynome

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

lokales Verhalten: verwende Approximation durch Taylor-Ploynome

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

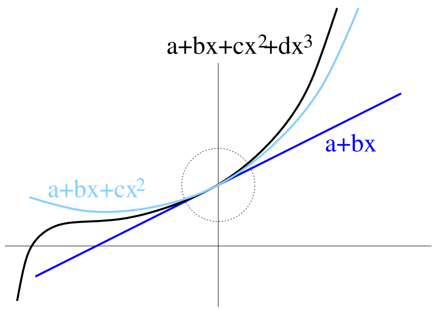
Vorbetrachtung: lokales Verhalten von Polynomen nahe $x_0 = 0$ für

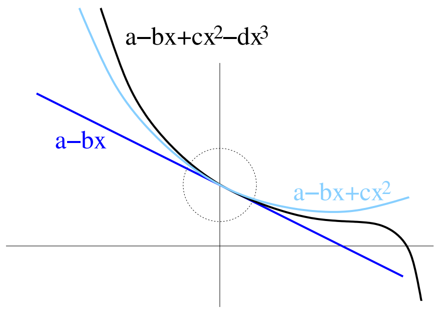


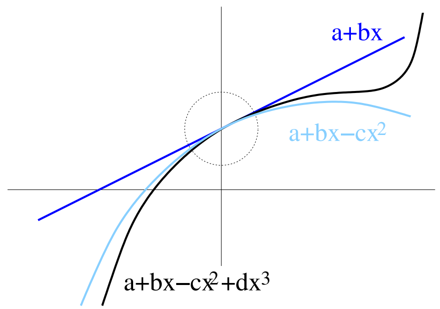
$$p(x) = a \pm bx \pm cx^2 \pm dx^3 \qquad b, c, d \geq 0$$

Faustregel: kleinste Potenzen bestimmen lokales Verhalten!

$\boxed{b \neq 0}$







$+b$	mon. wachsend	$-b$	mon. fallend	$+b$	mon. wachsend
$+c$	konvex	$+c$	konvex	$-c$	konkav

lokales Verhalten: verwende Approximation durch Taylor-Ploynome

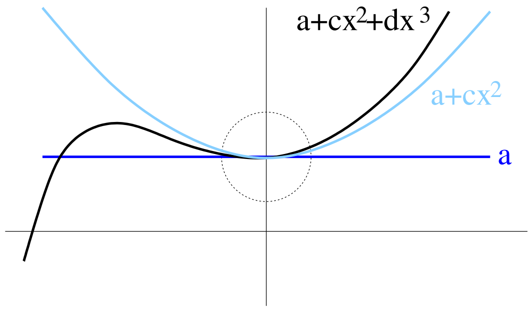
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

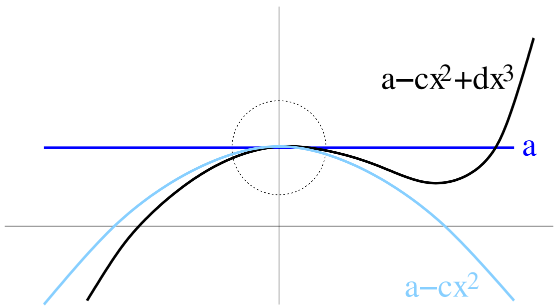
Vorbetrachtung: lokales Verhalten von Polynomen nahe $x_0 = 0$ für

$$p(x) = a \pm bx \pm cx^2 \pm dx^3 \qquad b, c, d \geq 0$$

Faustregel: kleinste Potenzen bestimmen lokales Verhalten!

$\boxed{b = 0}$





$+c$ lok. Minimum

$+c$ konvex

$-c$ lok. Maximum

$-c$ konkav

lokales Verhalten: verwende Approximation durch Taylor-Ploynome

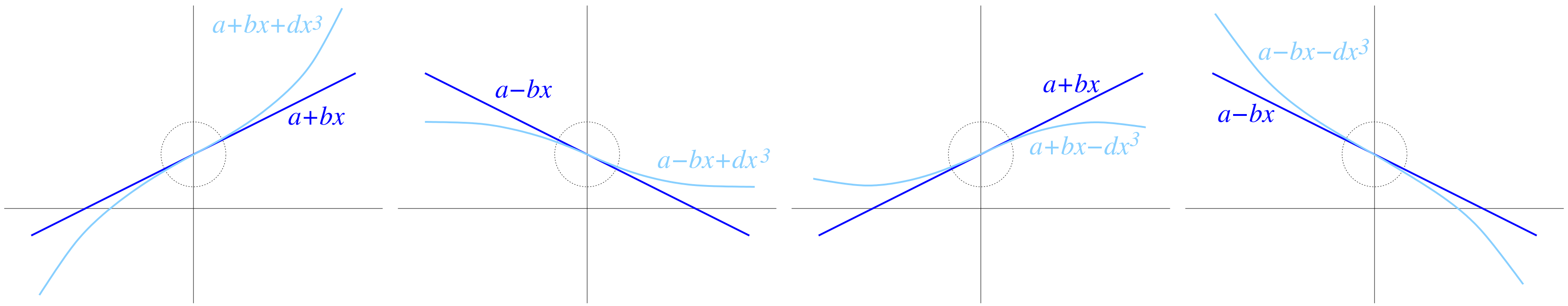
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

Vorbetrachtung: lokales Verhalten von Polynomen nahe $x_0 = 0$ für

$$p(x) = a \pm bx \pm cx^2 \pm dx^3 \qquad b, c, d \geq 0$$

Faustregel: kleinste Potenzen bestimmen lokales Verhalten!

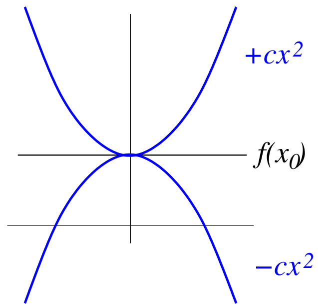
$\boxed{c = 0}$



$+d$ Wendepunkt konkav/konvex	$+d$ Wendepunkt konkav/konvex	$-d$ Wendepunkt konvex/konkav	$-d$ Wendepunkt konvex/konkav

Kurvendiskussion

(a) **lokale Extrema**: (wichtig für Extremwertaufgaben)



notwendige Bedingung:

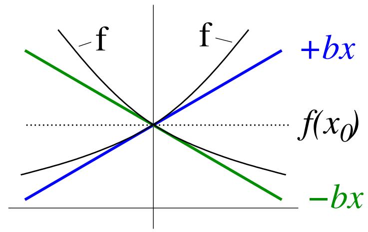
f hat in $x = x_0$ lokales **Minimum** bzw. **Maximum** $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$

hinreichende Bedingung:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales} \begin{Bmatrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{Bmatrix}$$

(b) **Monotonie** im Teilintervall $J \subset I$:

$$f \text{ monoton } \left\{ \begin{array}{c} \textbf{wachsend} \\ \textbf{fallend} \end{array} \right\} \text{ in } J \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{f'(x) \left\{ \begin{array}{c} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array} \right\}} \text{ in } J$$

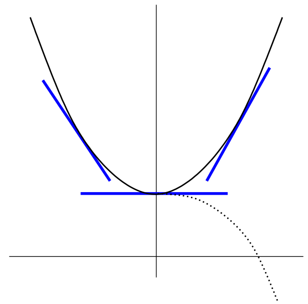


f **streng** monoton wachsend bzw. fallend: $\quad f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$

Beobachtung:

f ändert Monotonie in $x = x_0$ $\nearrow$ f hat in x_0 ein lokales Extremum

$\searrow$ $f'(x_0) = 0$

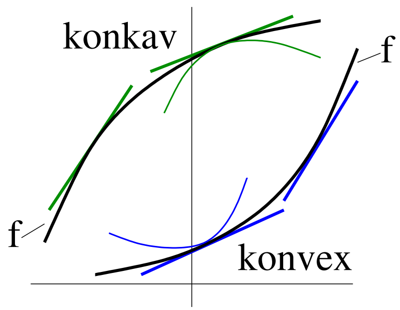


beachte: in beiden Fällen gilt Umkehrung nicht !

(c) **Krümmungseigenschaften** im Intervall $J \subset I$:

$$f \left\{ \begin{array}{c} \textbf{konvex} \\ \textbf{konkav} \end{array} \right\} \text{ in } J \quad \Leftrightarrow \quad f' \text{ monoton } \left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\} \text{ in } J \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f''(x) \left\{ \begin{array}{c} \geq 0 \\ \leq 0 \end{array} \right\}} \text{ in } J$$

f **streng** konvex bzw. konkav: jeweils strenge Monotonie und $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$

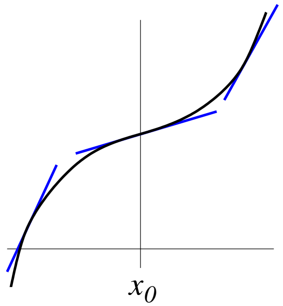


(d) **Wendepunkt** in x_0

(d.h. in x_0 ändert sich: Krümmungseigenschaft von f bzw. Monotonie von f')

notwendige Bedingung: f hat Wendepunkt in x_0 $\Rightarrow$ f' hat lokales Extremum in x_0

$\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$

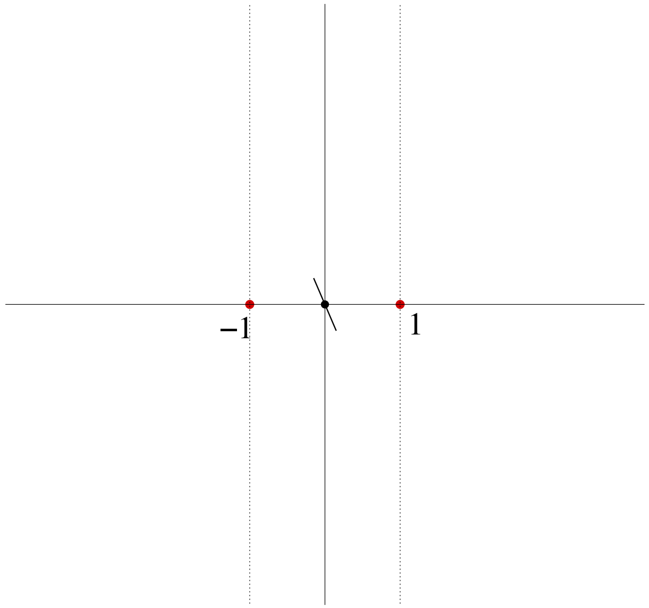


hinreichende Bedingung:

seien $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ $\Longrightarrow$ f hat in x_0 einen Wendepunkt

Beispiel für Kurvendiskussion: $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

- **Definitionsbereich:** $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
- **Nullstellen:** $x_N = 0$ (sogen. 3-fache Nullstelle, beachte $h(x_N) \neq 0$)
- **Polstellen:** $x_{P1} = -1, \;\; x_{P2} = 1$ (beachte $g(x_{P1}),\; g(x_{P2}) \neq 0$)



- **asymptotisches Verhalten:**

Pol $x_{P1} = -1$: $\quad \lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \infty$

Pol $x_{P2} = 1$: $\quad \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \infty$

$x \to \pm\infty$: $\quad \dfrac{x^3}{x^2-1} = x + \dfrac{x}{x^2-1} = x + r(x)$ (erhält man mittels Polynomdivision)

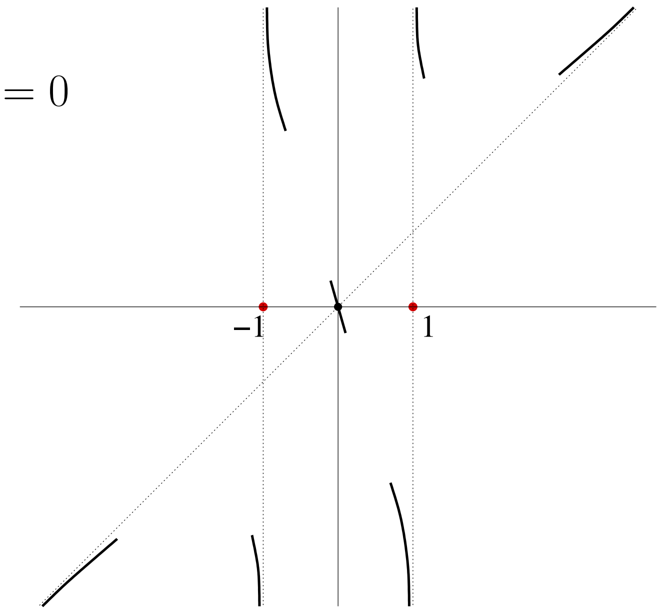
$\Rightarrow$ lineare Funktion $f_A(x) = x$ ist

Asymptote von f für $x \to \pm\infty$ da

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - f_A(x) = \lim_{x \to \pm\infty} r(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0$$

$f(x) > x$ für $x > 1$

$f(x) < x$ für $x < -1$



- **lokale Extrema:**

notwendige Bedingung: $f'(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x^2-3) = 0$

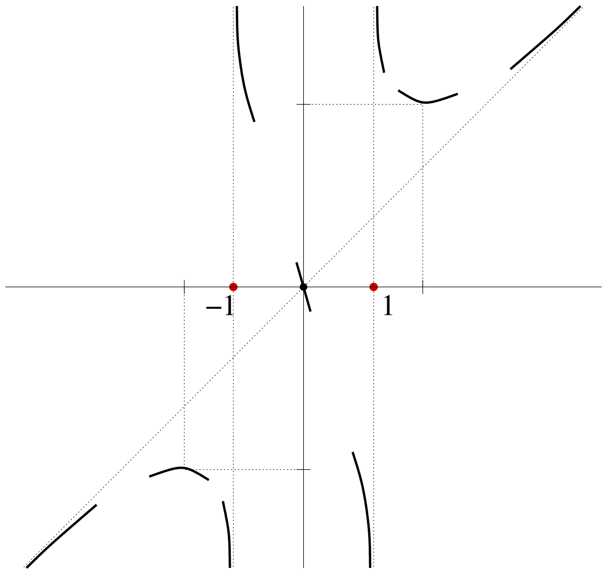
$\Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3}$ (Kandidaten)

hinreichende Bedingung: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

$x_1 = 0$: $\quad f''(0) = 0 \quad \Rightarrow$ keine Entscheidung möglich (evtl. Wendepunkt?)

$x_2 = \sqrt{3}$: $\quad f''(\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot 6}{(3-1)^3} > 0 \quad \Rightarrow$ lokales **Minimum** mit $f(\sqrt{3}) = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

$x_3 = -\sqrt{3}$: $\quad f''(-\sqrt{3}) = \dfrac{-2\sqrt{3}\cdot 6}{(3-1)^3} < 0 \quad \Rightarrow$ lokales **Maximum** mit $f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$



- **Monotonie:** Analyse des Vorzeichens von $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ liefert für $x \neq \pm 1$

  $(-\infty, -\sqrt{3})$ und $(\sqrt{3}, \infty)$: $f'(x) > 0$, also f streng monoton **wachsend**

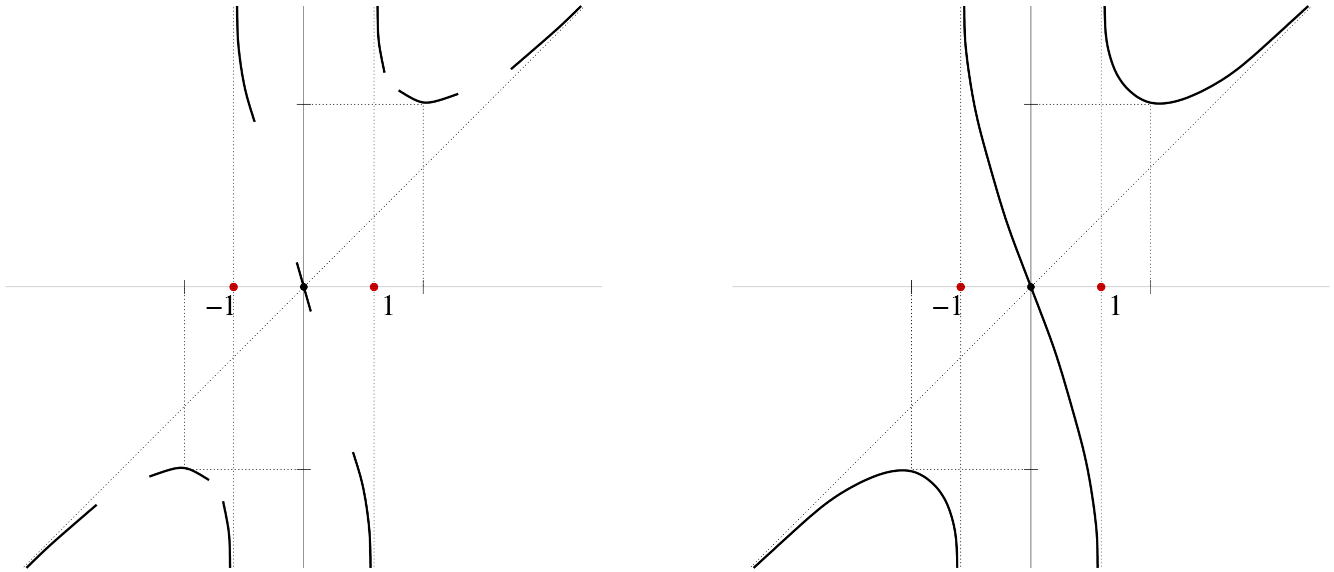
  $(-\sqrt{3}, -1)$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, 1)$: $f'(x) < 0$, also f streng monoton **fallend**

beachte auf $(-1, 1)$: obwohl $f'(0) = 0$ ist f auf <u>ganzem</u> Intervall streng fallend (→ zusätzliche Analyse)

- **Krümmungseigenschaften:** Analyse des Vorzeichens von $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ liefert für $x \neq \pm 1$

  $(-\infty, -1)$ und $(0, 1)$: $f''(x) < 0$, also f streng **konkav**

  $(-1, 0)$ und $(1, \infty)$: $f''(x) > 0$, also f streng **konvex**

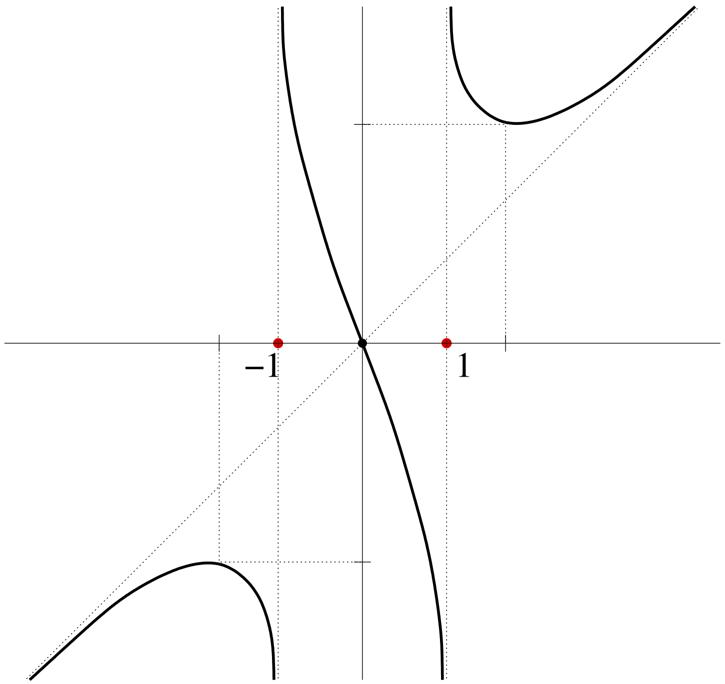


- **Wendepunkte:**

  notwendige Bedingung: $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x^2+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 0$ (Kandidat)

  hinreichende Bedingung: $f'''(x) = \dfrac{-6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4}$ und $f'''(0) \neq 0$

  folglich: $x_W = 0$ ist tatsächlich **Wendepunkt**



2 Stammfunktionen

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion, $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall

Frage: Gibt es eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$, so dass $F'(x) = f(x)$?

F heißt dann **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von f auf I und man schreibt

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int f\,dx$$

somit gilt
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx \;=\; f(x)$$

Ist F eine Stammfunktion von f, dann erhält man **alle** Stammfunktionen von f durch

$$F(x) + c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Das Symbol $\int f(x)\,dx$ steht auch für die Menge aller Stammfunktionen von f.

Satz. Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion F auf I.

2.1 Stammfunktionen für elementare Funktionen

Ableitungsregeln für elementare Funktionen liefern folgende Stammfunktionen:

Potenzfunktionen: $f(x) = x^p$ für $x \in (0, \infty)$, $p \in \mathbb{R}$

$$\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + c \quad \text{für } p \neq -1$$

falls $p \in \mathbb{N}$ dann für $x \in \mathbb{R}$ gültig, falls $-p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ dann für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gültig

falls $p = -1$: $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x$ für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \,, \qquad \text{insbesondere} \quad \int e^x \, dx = e^x + c$$

Winkelfunktionen: $f(x) = \sin x$, $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ auf $\mathbb{R}$

$g(x) = \cos x$, $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + c$ auf $\mathbb{R}$

<u>weitere Funktionen:</u> vgl. Formelsammlung

2.2 Rechenregeln für zusammengesetzte Funktionen

seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass die verwendeten Stammfunktionen bzw. Ableitungen existieren dann gelten folgende **Rechenregeln**:

$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int cf(x)\,dx = c \int f(x)\,dx \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

$$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = 3 \int x^2\,dx - 4 \int x\,dx + 5 \int 1\,dx = x^3 - 2x^2 + 5x + c$$

Partielle Integration: Stammfunktion von Produkten (wdh. $(fg)' = f'g + fg'$)

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx}$$

Beispiel: bestimme Stammfunktion von $f(x) = x^2 \sin x$

$$\int \underbrace{x^2}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'}\,dx \overset{\text{1. part. Int.}}{=} -x^2 \cos x + \int \underbrace{2x}_{g'=\varphi} \underbrace{\cos x}_{f=\psi'}\,dx$$

$$\overset{\text{2. part. Int.}}{=} -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x\,dx \;=\; -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

Substitution: Stammfunktion für verkettete Funktion (wdh. $g(h(x))' = g'(h(x))h'(x)$)

Funktion f habe die Form: $f(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ für geeignete Funktionen g, h. Dann gilt:

$$\int f(x)\,dx = \boxed{\int g'(h(x)) \cdot h'(x)\,dx = g(h(x))}$$

Beispiel: bestimme Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}}$

wähle: $g(y) = \sqrt{y}$, $h(x) = 2x^2 + 3$ dann: $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $h'(x) = 4x$

somit: $f(x) = \dfrac{1}{2}\, g'(h(x)) \cdot h'(x)$ und

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx = \frac{1}{2}\int g'(h(x)) \cdot h'(x)\,dx = \frac{1}{2}\, g(h(x)) + c = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + c$$

Spezialfälle:

$g(y) = \dfrac{1}{2}\, y^2$: $\displaystyle\int h(x) \cdot h'(x)\,dx = \frac{1}{2}\, h(x)^2$

$g(y) = \ln|y|$: $\displaystyle\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \ln|h(x)|$ falls $h(x) \neq 0$

3 Bestimmtes Integral

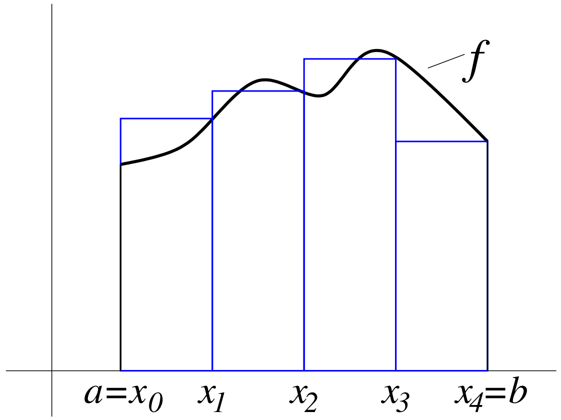
sei $f : I \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktion

Frage: **Flächeninhalt** zwischen Graphen von f und x-Achse im Intervall $[a, b] \subset I$?

wähle *Zwischenpunkte* von $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ mit $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$

Zwischensumme als Näherung:

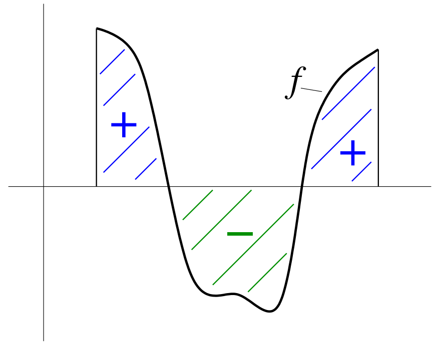
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$



Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ heißt **bestimmtes** (Riemann) **Integral** von f auf dem Intervall $[a, b]$

man schreibt: $$S = \int_a^b f(x)\,dx$$ (existiert für jede stetige Funktion) (bestimmtes) Integral $\int_a^b f(x)\,dx$

geometrische Interpretation



vorzeichenbehafteter Flächeninhalt zwischen
Graph von f und x-Achse auf Intervall $[a,b]$

(über x-Achse positiv, unter x-Achse negativ)

Berechnung mittels **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung**

Sei F Stammfunktion der Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ und $[a,b] \subset I$. Dann gilt

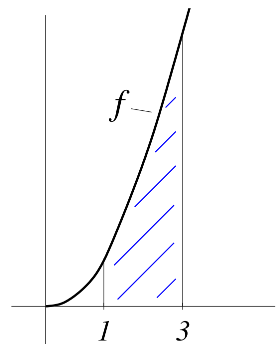
$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hinweis: damit erhält man leicht bekannte Rechenregeln

z.B. $\int_a^b f \pm g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$, $\quad \int_a^b cf\,dx = c\int_a^b f\,dx \quad (c \in \mathbb{R})$

$\int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx = \int_a^c f\,dx$, $\quad \int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

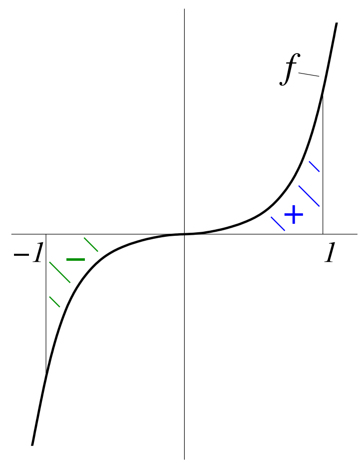


Beispiele

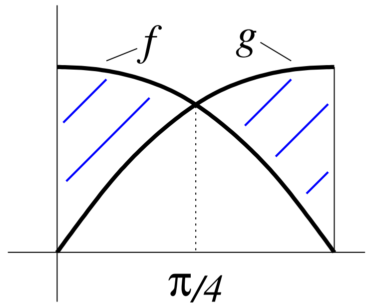
(a) $$\int_1^3 x^2\,dx \;=\; \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_1^3 \;=\; 9 - \frac{1}{3} \;=\; \frac{26}{3}$$

(b) $$\int_{-1}^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^1 = 0$$

("Auslöschung" von positivem und negativem Flächeninhalt)



(c) *Flächeninhalt* zwischen Graphen von $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \sin x$ auf Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$



<u>falsch</u>: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x - \sin x \, dx = \big[\sin x + \cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1+0) - (0+1) = 0 \quad \rightarrow$ Auslöschung (vgl. (b))

<u>richtig</u>: erst Schnittpunkte von f und g bestimmen: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, dann auf einzelnen Intervallen integrieren

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \cos x \, dx = \big[\sin x + \cos x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \big[-\cos x - \sin x\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(2\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(-1 + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} - 2$$