Brückenkurs Mathematik
Vorlesungen 1 und 2

Alexandra Schwartz

TU Dresden
Fakultät Mathematik
Institut für Numerische Mathematik

alexandra.schwartz@tu-dresden.de

Skript
Wintersemester 2023/24

Letzte Änderung: 15. September 2023

Vorwort

Mathematik ist die Sprache der Naturwissenschaften. D.h. auch wenn Sie andere Fächer, wie Biologie, Physik, Informatik oder Maschinenwesen studieren, verwenden Sie mathematische Konzepte und Resultate, um interessante Objekte zu beschreiben und wichtige Zusammenhänge herzuleiten. Im Brückenkurs legen wir deswegen mathematischen Grundlagen für Ihr Studium. Hierfür wiederholen wir insbesondere aus der Schule bekannten Stoff.[1]

Bevor wir uns nun in die Welt der Logik, Funktionen, Mengen und Zahlen stürzen, noch ein paar Worte zu mathematischen Texten, wie zum Beispiel diesem Skript. Mathematische Texte bestehen immer aus den gleichen Grundbausteinen:

- **Definitionen:** In einer Definition legen wir fest, was wir genau mit einem mathematischen Begriff meinen, z.B. was es bedeutet, wenn eine Funktion *stetig* ist.

- **Sätze:** In einem Satz wird ein wichtiges Resultat festgehalten. Aus der Schule kennen Sie z.B. den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Ein Satz ist üblicherweise von der Form *Wenn die Voraussetzungen A, B und C erfüllt sind, dann ist irgendeine Aussage wahr.* Man sollte also immer überprüfen, ob wirklich alle Voraussetzungen erfüllt sind, bevor man den Satz anwendet. Wenn eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist, dann kann die Aussage immer noch stimmen, muss es aber nicht mehr.

- **Proposition**, **Lemma** und **Korollar:** Nicht ganz so zentrale Aussagen und Hilfsresultate nennt man oft Proposition bzw. Lemma, wobei die Übergänge von Satz zu Proposition zu Lemma fließend sind. Eine Aussage, die direkt aus einem Satz folgt, nennt man ein Korollar. Proposition, Lemma und Korollar haben den gleichen Aufbau wie ein Satz.

- **Beweis:** Zu einem Satz (Proposition, Lemma, Korollar) gehört immer ein Beweis. Hier wird nachgewiesen, dass der Satz richtig ist, d.h. es wird nachvollziehbar und lückenlos erklärt, warum unter den angegebenen Voraussetzungen die Aussage des Satzes immer wahr sein muss. Typische Beweistechniken sind *Widerspruchsbeweise*[2] und *Induktionsbeweise*[3]. Am Ende eines Beweises steht üblicherweise das Symbol $\square$ oder *q.e.d.*[4]

[1] Der Inhalt dieses Skripts basiert auf Material von Dr. Norbert Koksch und Prof. Dr. Sebastian Franz.

[2] Bei einem *Widerspruchsbeweis* nimmt man an, dass die Aussage des Satzes falsch ist und zeigt, dass daraus ein Widerspruch zu einer der Voraussetzungen oder einem bekannten Resultat folgt.

[3] *Induktionsbeweise* kennen Sie eventuell aus der Schule. Sie kommen oft zu Einsatz, wenn man zeigen will, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Anschaulich funktionieren Induktionsbeweise wie eine Leiter. Man muss auf die unterste Sprosse kommen (Induktionsanfang) und man muss wissen, wie man von einer beliebigen Sprosse zur nächsten kommt (Induktionsschluss). Hat man beide Komponenten, so kann man auf der Leiter beliebig hoch klettern.

[4] Die Abkürzung *q.e.d.* steht für *quod erat demonstrandum*, zu Deutsch *was zu zeigen war.*

Beweise stellen nicht nur sicher, dass mathematische Sätze tatsächlich richtig sind, sondern helfen auch den Satz zu verstehen, z.B. wofür die Voraussetzungen wichtig sind.

- **Beispiel:** Beispiele können als Motivation für die Einführung neuer Definitionen oder Sätze dienen. Sie werden auch oft verwendet, um Definitionen und Sätze zu veranschaulichen und Grenzen aufzuzeigen. Nach der Definition von *stetigen Funktionen* findet man z.B. oft Beispiele für stetige, aber auch für unstetige Funktionen. Und nach Sätzen findet man of Gegenbeispiele, die zeigen, dass die Aussage des Satzes nicht mehr stimmen muss, wenn man eine Voraussetzung weglässt.

- **Zwischentext:** Gut geschriebene mathematische Texte sind keine reinen Listen von Definitionen, Sätzen und Beweisen. Im Fließtext zwischen diesen Bausteinen wird unter anderem erklärt, warum die Sätze wichtig sind, wo sie angewendet werden können, an welchen Stellen man aufpassen muss, ... Es lohnt sich also, auch die Zwischentexte zu lesen.

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Logik, Mengen und Funktionen

1. Logik

Die Tätigkeit von Mathematiker:innen könnte man ungefähr wie folgt beschreiben: Wir setzen wahre Aussagen so zusammen, dass neue wahre Aussagen herauskommen.

Dies ist auch die Struktur, die uns in mathematischen Sätzen häufig begegnet: „Wenn die Aussagen A und B wahr sind (d.h. die Voraussetzungen erfüllt sind), dann ist auch die Aussage D wahr (d.h. die Schlussfolgerung gilt)."

Wir müssen daher die folgenden Punkte klären:

- Was ist eine Aussage?
- Wie kann man Aussagen verknüpfen, um neue Aussagen zu erhalten?

Dafür führen wir in diesem Kapitel die wichtigsten Begriffe aus der Logik ein. In Abschnitt 1.1 definieren wir Aussagen, in Abschnitt 1.2 führen wir Verknüpfungen von Aussagen ein und in Abschnitte 1.3 sammeln wir Regeln für das Rechnen mit Aussagen. Schließlich erweitern wir das Konzept von Aussagen in Abschnitt 1.4 durch Prädikate und Quantoren.

Wir gehen hierbei deutlich formaler (im Sinne von formelhafter) mit Aussagen um, als wir dies später in den meisten Vorlesungen tun werden. Dies erlaubt es uns die logischen Argumente, die wir später oft eher verbal ausdrücken, klar sichtbar zu machen. So können wir trainieren, wie wir denken müssen, um logisch korrekte Schlussfolgerungen zu ziehen. Dadurch können wir später typische Fehler vermeiden, z.B. dass im obigen Beispiel trotz der Voraussetzungen A und B nicht notwendig die Schlussfolgerung D gelten muss, weil es in D auch Spezialfälle gibt, die wir übersehen haben, oder weil wir implizit angenommen haben, dass zusätzlich auch Voraussetzung C erfüllt ist.

1.1. Aussagen und Wahrheitswerte

Der Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

ist ein Beispiel[1] für eine Aussage. Solche Aussagen bilden die Grundbausteine von mathematischen Texten.

[1] Dor Fuchs stellt einen Beweis dafür auf Youtube vor: `https://youtu.be/nRJy9UDMEO4?feature=shared`

Definition 1.1.

(a) Eine **Aussage** p ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, das die Eigenschaft hat, entweder wahr oder falsch zu sein.

(b) Wir nennen dann w (wahr) bzw. f (falsch) den **Wahrheitswert** der Aussage p.

Die zentrale Eigenschaft einer Aussage ist also, dass sie entweder wahr oder falsch ist. Nachfolgend wollen wir diese Definition an ein paar Beispielen veranschaulichen.

Beispiel 1.2. *(a)* Die Zahl 7 ist eine Primzahl.
Dies ist eine Aussage, die wahr ist, also den Wahrheitswert w hat.

(b) Die Zahl 7 ist eine gerade Zahl.
Dies ist eine Aussage, die falsch ist, also den Wahrheitswert f hat.

(c) Die Funktion f ist stetig.
Dies ist keine Aussage, denn sie kann wahr oder falsch sein, abhängig davon, welche Funktion wir betrachten.

(d) $a^2 + b^2 = c^2$
Dies ist ebenfalls keine Aussage, denn die Gleichung kann wahr oder falsch sein, abhängig davon, welche Werte a, b, c annehmen.

Beispiele (a,b) sind sogenannte **Elementaraussagen**. Im Gegensatz dazu nennt man Aussagen, die durch die Verknüpfung von mehreren Aussagen entstehen, auch **Aussagenverknüpfung**. Wie solche Verknüpfungen gebildet werden können, schauen wir uns im nächsten Abschnitt an. Der Begriff **Aussage** kann sowohl eine Elementaraussage als auch eine Aussageverknüpfung bezeichnen.

Beispiele (c,d) sind **Prädikate**. Erst, wenn wir die Leerstellen f, a, b, c mit konkreten Funktionen bzw. Zahlen füllen, entsteht eine Aussage. Zu Prädikaten kommen wir in Abschnitt 1.4.

1.2. Verknüpfungen von Aussagen und Wahrheitstabellen

Der Satz

Ein Polynom f mit ungeradem Grad hat in $\mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle.

ist auch eine Aussage, die sich aber bei genauerer Betrachtung aus den folgenden vier Aussagen zusammensetzt:

(i) f ist ein Polynom

(ii) f hat ungeraden Grad

(iii) f hat auf $\mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle

(iv) wenn (i) und (ii) wahr sind, dann ist auch (iii) wahr

Mathematische Resultate und Beweise bestehen im Allgemeinen aus solchen Verknüpfung von Aussagen. Hierfür verwenden wir die folgenden Operationen.

Definition 1.3. Seien p, q zwei Aussagen. Dann definieren wir mit Hilfe der fünf Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ die folgenden Aussagenverknüpfungen:

Name	Symbol	Aussprache
Negation	$\neg p$ (oder $\overline{p}$)	„nicht p"
Konjunktion	$p \wedge q$	„p und q"
Disjunktion	$p \vee q$	„p oder q" (nicht exklusives „oder")
Implikation	$p \Longrightarrow q$	„aus p folgt q", „wenn p, dann q", „p ist hinreichend für q"
Äquivalenz	$p \Longleftrightarrow q$	„p genau dann, wenn q", „p ist äquivalent zu q"

Hierbei sind die Wahrheitswerte der Aussagenverknüpfungen in Abhängigkeit von Wahrheitswerten von p, q wie folgt definiert:

p	$\neg p$
w	f
f	w

und

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Die Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ funktionieren also wie Funktionen, in die wir eine oder zwei Aussagen einsetzen und dadurch eine neue Aussage erhalten. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ergibt sich dabei aus den Wahrheitswerten der eingesetzen Aussagen entsprechend der Regeln für den verwendeten Operator.

Ein paar Anmerkungen zu diesen Operatoren:

- Den Negationsoperator $\neg$ wenden wir auf eine Aussage p an und erhalten so die neue Aussage $\neg p$, deren Wahrheitswert immer das Gegenteil des Wahrheitswerts von p ist.

- Den Konjunktionsoperator[2] $\wedge$ wenden wir auf zwei Aussagen p, q an und erhalten die neue Aussage $p \wedge q$, die genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen p und q wahr sind.

- Den Disjunktionsoperator[3] $\vee$ wenden wir auf zwei Aussagen p, q an und erhalten die neue Aussage $p \vee q$, die genau dann wahr ist, wenn mindestens[4] eine der beiden Aussagen p, q wahr ist.

- Den Implikationsoperator $\Longrightarrow$ wenden wir auf zwei Aussagen p, q an und erhalten die neue Aussage $p \Longrightarrow q$, die genau dann wahr ist, wenn entweder p und q beide wahr sind oder p falsch ist. Ist p falsch, so ist bei der Implikation also egal, welchen Wahrheitswert q hat.

  Der Implikationsoperator ist nicht symmetrisch, d.h. $p \Longrightarrow q$ und $q \Longrightarrow p$ sind zwei verschiedene Aussagen.

- Die Äquivalenz $p \Longleftrightarrow q$ ist eine Abkürzung für den logischen Ausdruck

  $$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p) \qquad \text{oder für} \qquad (p \Longrightarrow q) \wedge (\neg p \Longrightarrow \neg q).$$

  Die Aussage $p \Longleftrightarrow q$ ist also genau dann wahr, wenn p und q entweder beide falsch oder beide wahr sind.

  Der Äquivalenzoperator ist folglich symmetrisch, d.h. es macht keinen Unterschied, ob wir $p \Longleftrightarrow q$ oder $q \Longleftrightarrow p$ schreiben.

Wir illustrieren diese Verknüpfungen an ein paar Beispielen.

Beispiel 1.4. *(a)* Alle Schafe sind weiß.
Dies ist eine Aussage p, die falsch ist. Die zugehörige Negation $\neg p$ ist die Aussage Nicht alle Schafe sind weiß *oder* Es gibt Schafe, die nicht weiß sind. *Weil die Aussage p falsch ist, ist die zugehörige Negation $\neg p$ wahr.*

(b) Ein Polynom f mit ungeradem Grad hat in $\mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle.
Diese Aussage lässt sich auch schreiben als

$$(f \textit{ ist Polynom}) \wedge (f \textit{ hat ungeraden Grad}) \Longrightarrow (f \textit{ hat Nullstelle}).$$

[2] Als Eselsbrücke man man sich merken, dass das Zeichen für die Konjunktion $\wedge$ und das Zeichen für den Schnitt von zwei Mengen $\cap$ ähnlich aussehen. Ein Element liegt genau dann im Schnitt von zwei Mengen A, B, wenn es in A *und* in B liegt.

[3] Als Eselsbrücke für die Disjunktion $\vee$ kann man sich merken, dass das Zeichen für die Vereinigung von zwei Mengen $\cup$ ähnlich aussieht. Ein Element liegt genau dann in der Vereinigung von zwei Mengen A, B, wenn es in A *oder* in B liegt.
Alternativ kann man sich auch merken, dass *vel* das lateinische Wort für „oder auch" ist.

[4] $p \vee q$ ist ein nichtexklusives „oder" im Sinne von „oder auch". Die Disjunktion ist also auch dann wahr, wenn p und q beide wahr sind.

> *Sie ist also eine Implikation, bei der wir die zwei Voraussetzungen* f ist Polynom *und* f hat ungeraden Grad *mit einem „und“ verknüpft haben. Dass diese Implikation wahr ist — wenn also beiden Voraussetzungen wahr sind, immer auch die Aussage* f hat Nullstelle *wahr ist — kann man mit einem Beweis*[5] *zeigen.*

Wir haben die Wahrheitswerte der Verknüpfungen mit Hilfe einer **Wahrheitstabelle** definiert. Mit Hilfe einer solchen Wahrheitstabelle können wir auch nachweisen, dass zwei Aussagen gleich bzw. äquivalent sind.

Definition 1.5. Zwei Aussagenverknüpfungen p, q heißen **äquivalent**, wenn sich für alle möglichen Wahrheitswerte der enthaltenen Aussagen für p und q jeweils die gleichen Wahrheitswerte ergeben. Wir schreiben dann $p = q$.

Als Beispiel hierfür kommen wir wieder auf die verschiedenen möglichen Darstellungen von $p \iff q$ zurück.

Beispiel 1.6. *Wir haben in Beispiel 1.4 ohne Beweis zwei alternative Darstellungen für die Äquivalenz angegeben. Wir wollen nun nachrechnen, dass diese alternativen Darstellungen tatsächlich korrekt sind:*

p	q	$p \iff q$	$p \implies q$	$q \implies p$	$(p \implies q) \wedge (q \implies p)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

p	q	$p \iff q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$\neg p \implies \neg q$	$(p \implies q) \wedge (\neg p \implies \neg q)$
w	w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w	f
f	w	f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w

Wenn wir nun jeweils die dritte und die letzte Spalte vergleichen, so sehen wir, dass die entsprechenden Aussagenverknüpfungen in allen vier möglichen Fällen die gleichen Wahrheitswerte haben, d.h. wir haben folgendes gezeigt:

$$\begin{aligned}(p \iff q) &= (p \implies q) \wedge (q \implies p) \\ &= (p \implies q) \wedge (\neg p \implies \neg q).\end{aligned}$$

[5] Im Beweis verwendet man die drei Implikationen *jedes Polynom ist stetig auf* $\mathbb{R}$, *jedes Polynom mit ungeradem Grad nimmt auf* $\mathbb{R}$ *positive und negative Werte an* und *jede auf* $\mathbb{R}$ *stetige Funktion mit positiven und negativen Werten hat eine Nullstelle.* Die letzte Aussage ist als Zwischenwertsatz bekannt.

1.3. Rechnen mit logischen Ausdrücken

Die Aussage

$$2 \text{ ist ein Teiler von } 6, \text{ daher ist auch } 4 \text{ ein Teiler von } 6.$$

ist offensichtlich falsch. Aber wie lautet die Negation dieser Aussage, die dann wahr ist? Die hierfür notwendigen Rechenregeln für Aussageverknüpfungen wollen wir in diesem Abschnitt einführen.

Lemma 1.7. Seien p, q, r Aussagen. Dann gelten:

(a) **Kommutativgesetze:**

$$p \wedge q = q \wedge p \qquad \text{und} \qquad p \vee q = q \vee p$$

(b) **Assoziativgesetze:**

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) \qquad \text{und} \qquad (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

(c) **Distributivgesetze:**

$$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r) \qquad \text{und} \qquad (p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Für Konjunktion und Disjunktion gelten also die analoge Regeln wie für die Multiplikation und Addition von reellen Zahlen.

Wegen der Assoziativgesetze lässt man bei der Konjunktion (analog bei der Disjunktion) von mehreren Aussagen häufig die Klammern weg, da die Reihenfolge, in der man die Konjunktionsoperation anwendet, keine Auswirkung auf das Ergebnis hat. Wenn man hingegen verschiedene Operatoren mischt, sollte man Klammern setzen, da hier die Reihenfolge wichtig ist.

Beispiel 1.8. *Betrachte das Schild in Abbildung 1.1, auf dem beschrieben wird, wie man sich die Beilagen zu dem Seelachsfilet zusammenstellen kann. Also logischen Ausdruck dargestellt erhalten wir*

$$\textit{Erbspüree} \vee \textit{Nudelgratin} \wedge \textit{Tomatensalat}.$$

Aber in welcher Reihenfolge sollen wir die beiden Operationen $\vee$ und $\wedge$ durchführen? Die folgende Tabelle zeigt, das dies einen Unterschied macht, wobei wir E, N, T als Abkür-

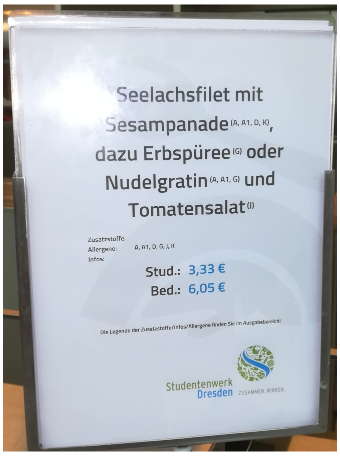


Abbildung 1.1.: Logik in freier Wildbahn

zungen für die jeweiligen Beilagen verwenden:

E	N	T	$E \vee N$	$(E \vee N) \wedge T$	$N \wedge T$	$E \vee (N \wedge T)$
w	w	w	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w
w	f	w	w	w	f	w
w	w	f	w	f	f	w
f	f	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f

Aus dem Kontext kann man sich hier erschließen, dass wahrscheinlich

$$(\mathit{Erbspüree} \vee \mathit{Nudelgratin}) \wedge \mathit{Tomatensalat}$$

gemeint war, d.h. dass man eine der beiden Sättigungsbeilagen auswählen kann. Mathematisch korrekt wäre hingegen die Lesart

$$\mathit{Erbspüree} \vee (\mathit{Nudelgratin} \wedge \mathit{Tomatensalat}),$$

da ein $\wedge$ *stärker bindet als ein* $\vee$.

Ähnlich wie beim Rechnen mit reellen Zahlen gibt es auch bei dem Rechnen mit logischen Ausdrücken eine kanonische Reihenfolge[6], in der die Operatoren auszuwerten sind,

[6] Diese Reihenfolge ist analog zum Rechnen mit reellen Zahlen, wenn man die Negation mit dem Vorzeichen einer Zahl, die Konjunktion mit der Multiplikation und die Disjunktion mit der Addition assoziiert.

wenn es keine Klammern gibt, die eine andere Reihenfolge vorschreiben:

$$\text{erst} \quad \neg \quad \text{dann} \quad \wedge \quad \text{dann} \quad \vee \quad \text{dann} \quad \Longrightarrow .$$

Für die bessere Lesbarkeit von Ausdrücken und um Fehler bei der Auswertung zu vermeiden, empfiehlt sich aber trotzdem der Einsatz von Klammern.

Auch für Implikationen und die Negation gibt es nützliche Rechenregeln, die man mit Hilfe von Wahrheitstabellen überprüfen kann.

Lemma 1.9. Seien p, q, r Aussagen. Dann gelten:

(a) **Ersetzen der Implikation:**

$$(p \Longrightarrow q) = (\neg p \vee q)$$

(b) **Ersetzen der Äquivalenz:**

$$(p \Longleftrightarrow q) = (\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$$

(c) **de Morgan'sche Regeln:**

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \qquad \text{und} \qquad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Man beachte, dass sich bei den de Morgan'schen Regeln der auftretende Operator ändert. Zum Beispiel ist die Aussage $p \wedge q$ genau dann nicht wahr, wenn p nicht wahr ist oder q nicht wahr ist.

Beispiel 1.10. *Wir berechnen als Beispiel, wie wir die Negation einer Implikation äquivalent darstellen können:*

$$\neg(p \Longrightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = \neg(\neg p) \wedge \neg q = p \wedge \neg q.$$

Dies stimmt mit unserer Beobachtung überein, dass die Implikation $p \Longrightarrow q$ genau dann falsch ist, wenn p wahr ist, aber trotzdem q falsch.

Damit können wir nun auch die Frage vom Anfang des Abschnitts beantworten. Die Implikation

$$(2 \textit{ teilt } 6) \Longrightarrow (4 \textit{ teilt } 6).$$

ist offensichtlich falsch. Die Negation hiervon, die dann wahr ist, ist

$$(2 \textit{ teilt } 6) \wedge (4 \textit{ teilt } 6 \textit{ nicht}).$$

Damit können wir nun auch zwei Argumente einführen, die wir häufig in Beweisen verwenden:

Lemma 1.11. Seien p, q zwei Aussagen. Dann gelten

(a) Sind die beiden Aussagen p und $p \Longrightarrow q$ wahr, so muss auch die Aussage q wahr sein, in Formeln
$$p \wedge (p \Longrightarrow q) = p \wedge q.$$

(b) Sind die beiden Aussagen $\neg q$ und $p \Longrightarrow q$ wahr, so muss auch die Aussage $\neg p$ wahr sein, in Formeln
$$(\neg q) \wedge (p \Longrightarrow q) = \neg q \wedge \neg p.$$

Beweis. Wir können dies mit Hilfe von Lemma 1.7 und Lemma 1.9 nachrechnen:

$$\begin{aligned} p \wedge (p \Longrightarrow q) &= p \wedge (\neg p \vee q) \\ &= (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \\ &= p \wedge q \\ (\neg q) \wedge (p \Longrightarrow q) &= (\neg q) \wedge (\neg p \vee q) \\ &= (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \\ &= \neg q \wedge \neg p \end{aligned}$$

□

Wir illustrieren die Anwendung dieser Argumente an zwei Beispielen.

Beispiel 1.12. *Wir wissen, dass Polynome stetige Funktionen sind, d.h. dass die Aussage*

$$f \text{ ist Polynom} \Longrightarrow f \text{ ist stetig}$$

wahr ist.

(a) Wenn wir also wissen, dass eine gegebene Funktion f ein Polynom ist, d.h. dass die Aussage „f ist Polynom" wahr ist, dann folgt, dass auch die Aussage „f ist stetig" wahr sein muss. So können wir zum Beispiel beweisen, dass die Funktion $f(x) = x^2 + 1$, die ein quadratisches Polynom ist, stetig ist.

(b) Wenn wir hingegen wissen, dass eine gegebene Funktion f nicht stetig ist, d.h. dass die Aussage „f ist stetig" falsch ist, dann folgt, dass auch die Aussage „f ist Polynom" falsch sein muss, d.h. eine unstetige Funktion f kann kein Polynom sein.

(c) *Achtung: Wenn die gegebene Funktion f kein Polynom ist, dann können wir aus der obigen Implikation keine Schlussfolgerungen*[7] *über die Stetigkeit von f treffen.*

Tatsächlich sind hier auch beide Fälle möglich: Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist kein Polynom, aber stetig. Und die Signumsfunktion[8] *$f(x) = \operatorname{sign} x$ ist kein Polynom und unstetig in $x = 0$.*

1.4. Prädikate und Quantoren

Kommen wir nun wieder zurück auf den Satz

Die Funktion f ist stetig.

Wir hatten festgestellt, dass dieser Satz keine Aussage ist, weil der Wahrheitswert davon abhängt, welche Funktion f wir betrachten.

Definition 1.13.

(a) Ein **Prädikat** ist ein sprachliches Gebilde mit Leerstellen bzw. Platzhaltern. Wenn alle diese Leerstellen mit geeigneten Objekten gefüllt werden, ergibt sich eine Aussage.

(b) Die Anzahl der Leerstellen, die mit verschiedenen Objekten gefüllt werden können, bezeichnet man als **Stellen** des Prädikats.

Ein Prädikat ist also eine Funktion, in die wir Objekte einsetzen können und die eine Aussage zurück gibt. Wieviele Variablen diese Funktion akzeptiert, hängt davon ab, wieviele Stellen das Prädikat hat. Ein paar Beispiele hierfür:

Beispiel 1.14. *(a)* Die Zahl 3 ist ein Teiler der Zahl 12.
Dies ist eine Aussage. Es gibt keine Leerstelle, in die wir etwas einsetzen können, d.h. wir können Aussagen als 0-stellige Prädikate interpretieren.

[7] Zur Erinnerung: Ist bei der Implikation $p \Longrightarrow q$ die Voraussetzung p falsch, so ist die Implikation immer wahr, egal welchen Wahrheitswert q hat. Die Implikation sagt also nur etwas über den Wahrheitswert von q aus, wenn die Voraussetzung p wahr ist.

[8] Die Signumsfunktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt das Vorzeichen einer reellen Zahl an, d.h.

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(b) Die Zahl x ist ein Teiler der Zahl 12.
Hier gibt es eine Leerstelle x, in die wir Zahlen einsetzen können, d.h. dies ist ein 1-stelliges Prädikat.

Wenn wir z.B. die Zahl $x = 6$ einsetzen, so erhalten wir die wahre Aussage „6 ist ein Teiler von 12“. Wenn wir hingegen die Zahl $x = 7$ einsetzen, so erhalten wir die falsche Aussage „7 ist ein Teiler von 12“.

(b) Die Zahl x ist ein Teiler der Zahl y.
Hier gibt es zwei Leerstellen x, y, in die wir Zahlen einsetzen können, d.h. dies ist ein 2-stelliges Prädikat.

Wenn wir z.B. die Zahlen $x = 2$ und $y = 4$ einsetzen, so erhalten wir die wahre Aussage „2 ist ein Teiler von 4“. Wenn wir hingegen die Zahlen $x = 2$ und $y = 5$ einsetzen, so erhalten wir die falsche Aussage „2 ist ein Teiler von 5“.

Ist P ein 1-stelliges Prädikat, so verwenden wir oft x als Platzhalter für die Leerstelle und schreiben wir $P(x)$ für die resultierende Aussage. Wenn wir ausdrücken wollen, dass für ein Objekt x das Prädikat $P(x)$ eine wahre Aussage ist, so schreiben wir $x : P(x)$ und sagen „x mit $P(x)$“.

Häufig wollen wir wissen, ob es überhaupt ein x mit der Eigenschaft P gibt, d.h. für welches die Aussage $P(x)$ wahr ist. Oder ist die Aussage sogar für alle x wahr? Und was passiert, wenn wir uns nur für x aus einer bestimmten Menge interessieren?

Mengen führen wir formal erst in Abschnitt 2 ein. Aber wir verwenden hier schon einmal, dass wir die Beziehung „x gehört zu der Menge M“ mit Hilfe des **Elementzeichens** beschreiben als $x \in M$.

Definition 1.15. Es sei P ein 1-stelliges Prädikat.

Name	Symbol	Aussprache
Existenzquantor	$\exists x : P(x)$	„es gibt (mindestens) ein x mit der Eigenschaft P“
	$\exists x \in M : P(x)$	„es gibt (mindestens) ein x in der Menge M mit der Eigenschaft P“
Allquantor	$\forall x : P(x)$	„alle x haben die Eigenschaft P“
	$\forall x \in M : P(x)$	„alle x in der Menge M haben die Eigenschaft P“

Ein paar Anmerkungen hierzu:

- Nach Voraussetzung ist P ein 1-stelliges Prädikat, d.h. erst wenn wir die Leerstelle x mit einem geeigneten Objekt gefüllt haben, entsteht eine Aussage $P(x)$. Im Gegensatz dazu ist $\exists x : P(x)$ eine Aussage, die wahr ist, wenn es mindestens ein x gibt, für das $P(x)$ eine wahre Aussage ist.

  Hier ist zunächst keine Grundmenge angegeben, aus der wir das Objekt x wählen dürfen. Im Allgemeinen interessieren uns aber nur spezielle Objekte, z.B. nur reelle Zahlen x oder nur stetige Funktionen f. Deswegen können wir auch eine Grundmenge M angeben. Die Aussage $\exists x \in M : P(x)$ ist dann wahr, wenn es mindestens ein x in dieser Grundmenge M gibt, für das $P(x)$ eine wahre Aussage ist. Wir könnten dies alternativ auch schreiben als

  $$\exists x : (x \in M) \wedge P(x),$$

  mit modifizierten dem 1-stelligen Prädikat $Q(x) = (x \in M) \wedge P(x)$.

- $\forall x : P(x)$ ist eine Aussage, die dann wahr ist, wenn $P(x)$ für alle x eine wahre Aussage ist. Hier können wir ebenfalls eine Grundmenge M angeben, aus der x gewählt werden darf. In diesem Fall könnten wir alternativ auch schreiben

  $$\forall x : (x \in M) \wedge P(x),$$

Wir betrachten ein paar Beispiele.

Beispiel 1.16. *(a) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - 1$ auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Diese Funktion hat bekanntlich zwei Nullstellen in $x = \pm 1$ und es gilt $f(x) \geq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher sind die folgenden beiden Aussagen wahr:*

$$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \qquad \textit{sowie} \qquad \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq -1.$$

Hingegen sind die folgenden Aussagen falsch:

$$\exists x \in [2, \infty) : f(x) = 0 \qquad \textit{sowie} \qquad \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0.$$

(b) Wir betrachten die Menge L aller affin-linearen Funktionen auf $\mathbb{R}$, also die Menge aller Funktionen der Form $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann können wir die Aussage „es gibt eine affin-lineare Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}$ keine Nullstelle hat“ schreiben als

$$\exists f \in L : (\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0).$$

Da wir den Fall $a = 0$, also konstante Funktionen zugelassen haben, ist diese Aussage wahr. Quantoren liest man von links nach rechts und lässt den Doppelpunkt zwischen Quantoren weg, d.h. wir könnten die gleiche Aussage auch etwas kürzer schreiben als

$$\exists f \in L \; \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0.$$

Wenn wir diese Schreibweise verwenden, ist es wichtig, dass wir die Quantoren in der richtigen Reihenfolge von links nachts rechts auswerten. Wenn wir die Reihenfolge ändern, erhalten wir nämlich die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists f \in L : f(x) \neq 0,$$

die besagt „für alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine affin-lineare Funktion $f \in L$, die in dem Punkt x keine Nullstelle hat“. Diese Aussage ist zwar auch richtig, aber beschreibt offensichtlich etwas völlig anderes.

Der Existenzquantor $\exists x : P(x)$ fordert nur die Existenz mindestens eines Objekts x, für das die Aussage $P(x)$ wahr ist. Es kann durchaus auch mehrere Objekte x geben, für die dies der Fall ist. Möchte man hingegen fordern, dass es genau ein Objekt x gibt, für welches $P(x)$ wahr ist, schreibt man oft

$$\exists! x : P(x).$$

Beispiel 1.17. *Die Funktion $f(x) = x + 1$ hat auf $\mathbb{R}$ genau eine Nullstelle, nämlich den Punkt $x = 1$. Wir könnten die Aussage „die Funktion f hat genau eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$“ schreiben als*

$$\exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = 0.$$

Wir haben bei den Beispielen 1.16 und 1.17 immer eine Menge M angegeben, aus der die Objekte x gewählt werden können. Wenn klar ist, wie die Grundgesamtheit aller möglichen Objekte x aussieht und wir wirklich auch alle möglichen x zulassen wollen, dann können wir auf die Angabe der Menge M verzichten. Trotzdem kann es aber sehr hilfreich sein, die Menge M der zulässigen Objekte explizit anzugeben:

- Die Angabe der Menge hilft schnell zwischen verschiedenen Arten von Objekten zu unterscheiden. In Beispiel 1.16 (b) sehen wir durch die Angaben $x \in \mathbb{R}$ und $f \in L$ direkt, dass x eine reelle Zahl beschreibt und f eine lineare Funktion.

- Die Angabe der Menge hilft sichtbar zu machen, über welche Objekte wir genau reden. Wenn wir zum Beispiel Aussagen über Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ machen wollen, dann macht es einen großen Unterschied, ob wir tatsächlich alle solchen Funktionen meinen oder nur stetige Funktionen oder nur differenzierbare Funktionen oder .... Deswegen ist es wichtig, sich selbst bewusst zu werden, welche Eigenschaften die betrachteten Objekte genau haben sollen (und welche nicht zwingend erfüllt sein müssen), und dies auch für andere nachvollziehbar aufzuschreiben.

Wenn eine Aussage falsch ist, dann ist die Negation dieser Aussage wahr. Daher begegnen uns auch oft Negationen von Aussagen, die Quantoren enthalten. Hierbei sind folgende Regeln zu beachten.

Lemma 1.18. Es sei $P(x)$ ein 1-stelliges Prädikat.

(a) **Negation von Existenzquantoren:**

$$\neg\big(\exists x : P(x)\big) = \forall x : \neg P(x) \qquad \text{und} \qquad \neg\big(\exists x \in M : P(x)\big) = \forall x \in M : \neg P(x)$$

(b) **Negation von Allquantoren:**

$$\neg\big(\forall x : P(x)\big) = \exists x : \neg P(x) \qquad \text{und} \qquad \neg\big(\forall x \in M : P(x)\big) = \exists x \in M : \neg P(x)$$

Bei der Negation ändert sich also der Quantor: Wenn es kein x gibt, so dass die Aussage $P(x)$ wahr ist, dann ist für alle x die Aussage $\neg P(x)$ wahr. Wenn die Aussage $P(x)$ nicht für alle x wahr ist, dann gibt es (mindestens) ein x, für das die Aussage $\neg P(x)$ wahr ist.

Beispiel 1.19. *Wir betrachten die Aussage „es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -1 ist". Hier wird die Existenz einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x^2 = -1$ verneint, d.h. wir können die Aussage schreiben als*

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1).$$

Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ können wir das zugehörige Quadrat x^2 ausrechnen, was nach der obigen Aussage dann ungleich -1 sein muss. Wir können die Aussage daher auch schreiben als

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1 \qquad \textit{oder} \qquad \forall x : (x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \neq -1).$$

Welche Darstellung einer Aussage am günstigsten ist, hängt davon ab, in welchen Zusammenhang wir sie verwenden wollen.

2. Mengen

Häufig wollen wir Objekte nicht einzeln betrachten, sondern Gruppen von gleichartigen Objekten zusammen untersuchen. Statt zum Beispiel einzeln nachzurechnen, dass die drei Funktionen $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + x$ und $h(x) = x^5$ stetig sind, können wir auch einmal zeigen, dass Polynome stetig sind. Dieses Wissen können wir dann danach auf alle Polynome anwenden.

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 werfen wir einen genaueren Blick auf die Beschreibung solcher Gruppen von Objekten mit Hilfe von Mengen und Teilmengen und wiederholen in Abschnitt 2.3, wie man mit Mengen rechnen kann. Schließlich führen wir in Abschnitt 2.4 das kartesische Produkt von Mengen ein.

2.1. Mengen und Elemente

Definition 2.1.

(a) Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und unterscheidbaren Objekte zu einem Ganzen.

(b) Objekte, die zu der Menge gehören, heißen **Elemente** der Menge. Ist a ein Element der Menge M, so schreiben wir $a \in M$. Ist hingegen a kein Element der Menge M, so schreiben wir $a \notin M$.

(c) Die **leere Menge** ist definiert als die Menge, die keine Elemente enthält. Wir schreiben hierfür $\emptyset$ (oder $\{\}$).

(d) Zwei Mengen A, B heißen **gleich**, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d.h.

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x : x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

Mengen werden im Normalfall mit großen Buchstaben benannt und mit geschweiften Klammern geschrieben. Z.B. würden wir die Menge aller geraden Zahlen zwischen 1 und 9 schreiben als

$$M = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Bei der Definition einer Menge geht es darum abzugrenzen, welche Elemente zu der Menge gehören und welche nicht. Daher müssen wir die folgenden Punkte berücksichtigen:

- Es muss klar sein, ob ein Objekt a zu der Menge M gehört oder nicht, d.h. $a \in M$ oder $a \notin M$. Beides gleichzeitig geht nicht.
- Ein Objekt a ist höchstens einmal in einer Menge M enthalten, d.h. Mengen enthalten keine Duplikate. Man würde also nie $\{a, a, b, c\}$ schreiben, sondern $\{a, b, c\}$.
- Eine Menge hat keine innere Struktur, insbesondere keine Reihenfolge. Die Menge $\{a, b, c\}$ ist als die gleiche Menge wie $\{b, c, a\}$.

Bisher haben wir Mengen beschrieben, indem wir alle Elemente aufgelistet haben. Bei größeren oder komplizierteren Mengen ist dies oft nicht möglich oder sehr unübersichtlich. Stattdessen beschreiben wir Mengen oft als alle Objekte aus einer gegeben Grundmenge, die eine gewisse Eigenschaft P haben. Dies können wir mit Hilfe von Prädikaten ausdrücken und schreiben dann

$$\{x \in M : P(x)\}.$$

Die Menge aller geraden Zahlen zwischen 1 und 9 könnten wir damit wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} M &= \{2, 4, 6, 8\} \\ &= \{x : x \text{ ist eine gerade Zahl zwischen 1 und 9}\} \\ &= \big\{y \in \{1, 2, \ldots, 9\} : y \text{ ist gerade}\big\} \\ &= \{z \in [1, 9] : z \text{ ist ein Vielfaches von 2}\}. \end{aligned}$$

Auch hier begrenzen wir die Menge mit geschweiften Klammern. Wir vergeben am Anfang eine Bezeichnung für die Elemente, z.B. den Buchstaben z, und legen gegebenenfalls eine Grundmenge fest, aus der wir diese Elemente ziehen, z.B. das Intervall $[1, 9]$. Dann kommt als Trennung ein Doppelpunkt[1] und danach die Eigenschaft, die Elemente der Menge charakterisiert.

Bevor wir uns anschauen, wie man mit Mengen rechnen kann, noch zwei Beispiele für Mengen.

Beispiel 2.2. *(a) Die Menge aller Quadratzahlen können wir schreiben als*

$$B = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\} = \{y \mid \exists x \in \mathbb{N} : y = x^2\}.$$

[1] Oft verwendet man als Trennzeichen in Mengen auch einen senkrechten Strich, z.B.

$$M = \big\{y \in \{1, 2, \ldots, 9\} \mid y \text{ ist gerade}\big\}.$$

Vor dem senkrechten Strich stehen die Elemente der Menge, in diesem Fall alle Zahlen y. Und nach dem Strich steht die zusätzliche Bedingung, dass y eie Darstellung der For $y = x^2$ haben muss mit einer natürlichen Zahl x.

(b) *Die Menge aller stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ können wir schreiben als*

$$C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \textit{ ist stetig}\}.$$

2.2. Teilmengen

Häufig interessieren wir uns nicht für alle Objekte in einer Grundgesamtheit, sondern nur für welche mit speziellen Eigenschaften. Zum Beispiel betrachten wir oft nicht alle reellen Zahlen $\mathbb{R}$, sondern nur die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder nur positive Zahlen.

Definition 2.3.

(a) Eine Menge A heißt eine **Teilmenge** der Menge B, wenn aus $a \in A$ immer $a \in B$ folgt. In diesem Fall schreiben wir

$$A \subseteq B.$$

(b) Ist A eine **echte Teilmenge** von B, d.h. gilt zusätzlich $A \neq B$, so schreiben wir

$$A \subset B \qquad \text{oder} \qquad A \subsetneq B.$$

Drei Bemerkungen zu den auftretenden Symbolen:

- In manchen Büchern wird das Symbol $\subset$ auch für Teilmengen verwendet und dann das Symbol $\subsetneq$ für echte Teilmengen. Hier lohnt es sich also genau hinzuschauen, wie die jeweiligen Symbole definiert werden.
- Ist B eine Teilmenge von A, so nennen wir A auch eine **Obermenge** von B und schreiben
$$A \supseteq B.$$
Analog schreiben wir $A \supsetneq B$ für eine echte Obermenge von B. Ob der Blickwinkel auf B als Teilmenge von A oder auf A als Obermenge von B günstiger ist, hängt vom Kontext ab.
- Wenn A keine Teilmenge von B ist, schreiben wir auch
$$A \nsubseteq B.$$
Analog schreiben wir $A \not\subset B$, wenn A keine echte Teilmenge von B ist.

Wir betrachten ein paar Beispiele für Teilmengen.

Beispiel 2.4. *(a) Wir betrachten die Mengen*

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{1, 2\}, \qquad C = \{4, 5\}, \qquad D = \{3\}$$

Dann sind A, B, C, D Mengen von Zahlen und es gelten

$$3 \in A, \qquad \emptyset \subset A, \qquad D \subset A, \qquad B \subset A, \qquad C \not\subseteq A.$$

(b) Wir betrachten die Menge

$$M = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Dann ist M eine Menge von Zahlenmengen und es gilt

$$\emptyset \in M, \qquad 1 \notin M, \qquad \{1\} \in M, \qquad \{\{1\}\} \subset M.$$

Für Teilmengen gelten die folgenden Rechenregeln.

Lemma 2.5. Seien A, B, C drei Mengen. Dann gelten:

(a) **Reflexivität:**

$$A \subseteq A$$

(b) **Antisymmetrie:**

$$A \subseteq B \,\wedge B \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad A = B$$

(c) **Transitivität:**

$$A \subseteq B \,\wedge B \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq C$$

Ist hierbei eine der beiden Inklusionen $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ strikt, so ist auch die Inklusion $A \subseteq C$ strikt.

(d) Sonstige nützliche Beziehungen:

$$A \not\subset A, \qquad A \subset B \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq B, \qquad A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

(e) **Gleichheit von Mengen:**

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Insbesondere Teil (e), also dass wir die Gleichheit von zwei Mengen durch gegenseitige Inklusion zeigen können, verwenden wir oft in Beweisen.

2.3. Rechnen mit Mengen

Kompliziertere Mengen lassen sich oft beschreiben, indem man sie aus mehreren einfacheren Mengen „zusammenbaut“. Hierfür sind die folgenden Mengenoperationen hilfreich:

Definition 2.6. Seien A, B zwei Teilmengen der gleichen Grundmenge M.

(a) Dann ist der **Schnitt** von A und B definiert als

$$A \cap B := \{m \in M \mid m \in A \wedge m \in B\}.$$

Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen die beiden Mengen A, B **disjunkt**.

(b) Dann ist der **Schnitt** von A und B definiert als

$$A \cup B := \{m \in M \mid m \in A \vee m \in B\}.$$

(c) Dann ist die **Differenz** von A und B definiert als

$$A \backslash B := \{m \in M \mid m \in A \wedge m \notin B\}.$$

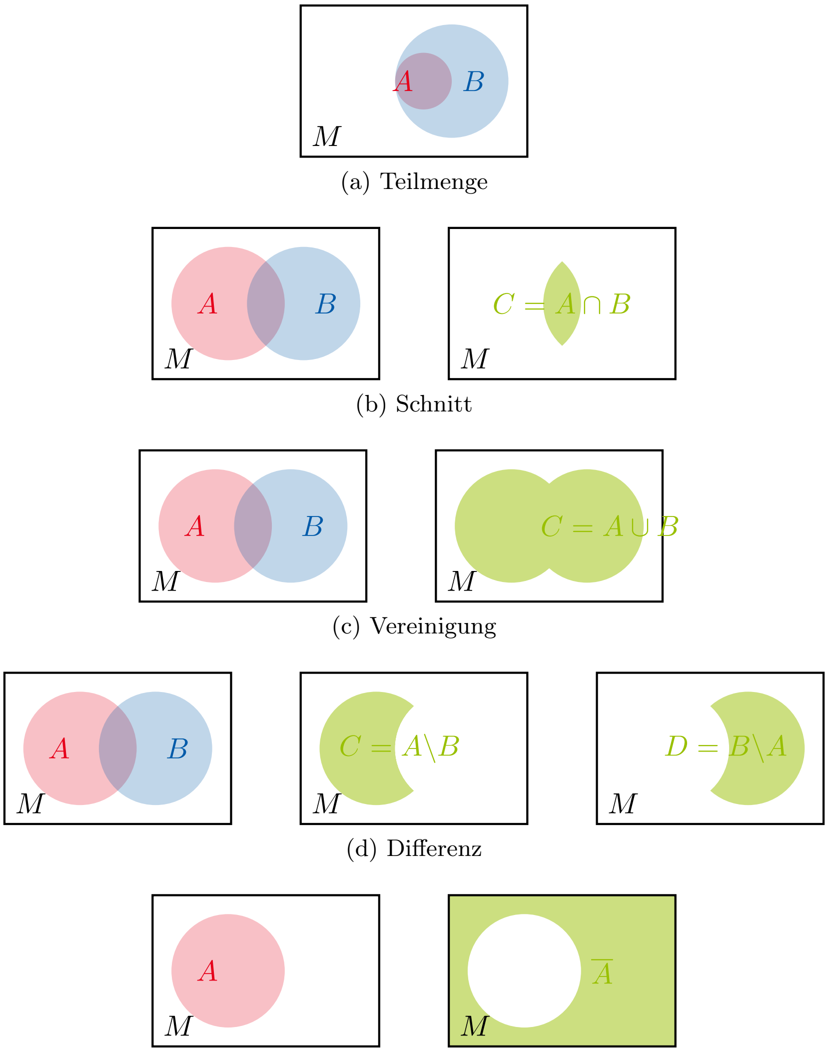
(d) Dann ist das **Komplement** von A (in M) definiert als

$$\overline{A} = \{m \in M \mid m \notin A\}.$$

Ein paar Anmerkungen zu diesen Definitionen:

- Schnitt und Vereinigung von Mengen macht im Normalfall nur Sinn, wenn beide Mengen aus der gleichen Grundmenge stammen, also die gleiche Art von Objekten enthalten. Eine Menge von Studierenden mit einer Menge von Zahlen zu vereinigen oder zu schneiden ist i.A. nicht zielführend.
- Für die Differenz $A \backslash B$ sagen wir „A ohne B“. Hier ist die Reihenfolge von A und B wichtig, d.h. im Allgemeinen sind $A \backslash B$ und $B \backslash A$ zwei völlig verschiedene Mengen.

  Mit der Differenz können wir das Komplement einer Menge A aus der Grundmenge M auch schreiben als
  $$\overline{A} = M \backslash A.$$
- Für das Komplement ist es wichtig, in welcher Obermenge wir arbeiten. Betrachten wir z.B. die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ als Teilmenge der ganzen Zahlen



(a) Teilmenge

(b) Schnitt

(c) Vereinigung

(d) Differenz

(e) Komplement

Abbildung 2.1.: Illustration von Definition 2.6 für eine Grundmenge M und zwei Teilmengen $A, B \subseteq M$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$, so gilt

$$\overline{\mathbb{N}} = \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Betrachten wir hingegen die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so ist das Komplement

$$\overline{\mathbb{N}} = \{z \in \mathbb{R} \mid z \notin \mathbb{N}\}$$

eine deutlich größere Menge.

Die Notation für Komplemente ist hier ungünstig, weil aus $\overline{A}$ nicht hervorgeht, bezüglich welcher Grundmenge wir das Komplement bilden. Diese Grundmenge muss also, wenn sie nicht aus dem Kontext klar ist, explizit angegeben werden.

Im Fall der Menge der stetigen Funktionen

$$C = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

würde man – wenn nicht explizit etwas anderes angegeben ist – als Grundmenge die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verwenden und erhielte

$$\overline{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist nicht stetig}\}.$$

Wir sammeln noch ein paar nützliche Rechenregeln für Mengen. Analoge Regeln kennen wir teilweise schon für logische Aussagen, wenn man Vereinigung durch „oder“ und Schnitt durch „und“ ersetzt.

Lemma 2.7. Seien M eine Grundmenge und $A, B, C \subseteq M$. Dann gelten:

(a) **Schnitt und Vereinigung mit Grundmenge und leerer Menge:**

$$A \cup M = M, \quad A \cap M = A \qquad \text{und} \qquad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

(b) **Kommutativgesetze:**

$$A \cup B = B \cup A \qquad \text{und} \qquad A \cap B = B \cap A.$$

(c) **Assoziativgesetze:**

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

(d) **Distributivgesetze:**

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \\
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), \\
(A \cup B) \backslash C &= (A \backslash C) \cup (B \backslash C), \\
(A \cap B) \backslash C &= (A \backslash C) \cap (B \backslash C), \\
A \backslash (B \cap C) &= (A \backslash B) \cup (A \backslash C), \\
A \backslash (B \cup C) &= (A \backslash B) \cap (A \backslash C).
\end{aligned}$$

(e) **De Morgan'sche Regeln:**

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{aligned}$$

Die Aussagen lassen sich zeigen, indem wir die entsprechenden logischen Bedingungen nachrechnen. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned}
x \in A \backslash (B \cap C) &\iff (x \in A) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\
&\iff (x \in A) \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
&\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
&\iff x \in (A \backslash B) \cup (A \backslash C).
\end{aligned}$$

Für die Aussagen (d) und (e) wollen wir uns jeweils noch ein Beispiel anschauen.

Beispiel 2.8. *(a) Wir betrachten in der Grundmenge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *die folgenden Mengen:*

$$\begin{aligned}
A &:= \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ist gerade}\}, \\
B &:= \{b \in \mathbb{N} \mid b \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}, \\
C &:= \{c \in \mathbb{N} \mid c \leq 10\}.
\end{aligned}$$

Dann ist $(A \cup B) \cap C$ *die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch* 2 *oder* 3 *teilbar sind und kleiner-gleich* 10 *sind. Das sind genau die natürlichen Zahlen, die durch* 2 *teilbar und kleiner-gleich* 10 *sind oder durch* 3 *teilbar und kleiner-gleich* 10 *sind, d.h.* $(A \cap C) \cup (B \cap C)$*. In beiden Fällen erhalten wir die Menge* $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.

(b) Wir betrachten in der Grundmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *die folgenden Mengen:*

$$\begin{aligned}
A &:= \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar}\}, \\
B &:= \{b \in \mathbb{N} \mid b \leq 10\}.
\end{aligned}$$

Dann ist $\overline{A \cap B}$ *die Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht in* $A \cap B$ *liegen, also nicht (gleichzeitig) durch* 3 *teilbar sind und kleiner-gleich* 10 *sind. Das sind genau die natürlichen Zahlen, die nicht durch* 3 *teilbar oder nicht kleiner-gleich* 10 *sind, d.h.* $\overline{A} \cup \overline{B}$*. In beiden Fällen erhalten wir die Menge* $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} \cup \{11, 12, 13, 14, \ldots\}$.

2.4. Kartesische Produkte

Als letzte Mengenoperation wollen wir noch das kartesische Produkt einführen.

Definition 2.9. Seien A, B zwei Mengen. Dann heißt die Menge

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

das **kartesische Produkt** (oder Kreuzprodukt) von A und B.

Wir sprechen $A \times B$ als „A kreuz B“ aus. Hier ist die Reihenfolge von A und B wichtig, denn die Elemente von $A \times B$ sind geordnete Tupel, bei denen im ersten Eintrag ein Element von A und in zweiten Eintrag ein Element von B steht.

Achtung: Auch wenn es Produkt heißt, werden bei dem kartesischen Produkt keine Elemente von Mengen multipliziert!

Beispiel 2.10. *(a) Wir betrachten die Mengen* $X = Y = \mathbb{R}$*. Dann ist*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

genau die Menge aller Punkte in der xy-Ebene.

(b) Unser Blutgruppe bestimmt sich aus einer Kombination von Antigenen und Antikörpern. Wir haben das Antigen vom Typ A oder das Antigen vom Typ B oder beide Antigene. Gegen die Antigene, die wir nicht haben, entwickeln wir Antikörper. Jeder Mensch gehört also bezüglich Typ A zur Menge

$$M_A := \{\textit{Antigen } A, \textit{Antikörper gegen } A\}$$

und bezüglich Typ B zur Menge

$$M_B := \{\textit{Antigen } B, \textit{Antikörper gegen } B\}.$$

Um unsere Blutgruppe zu bestimmen, brauchen wir beide Informationen, also das kartesische Produkt der beiden Mengen:

$$\begin{aligned} M_A \times M_B \;=\; \Big\{ & (\textit{Antigen } A, \textit{Antigen } B),\ (\textit{Antigen } A, \textit{Antikörper ggn. } B), \\ & (\textit{Antikörper ggn. } A, \textit{Antigen } B),\ (\textit{Antikörper ggn.} A, \textit{Antikörper ggn. } B)\Big\}. \end{aligned}$$

Menschen mit beiden Antigenen haben Blutgruppe AB, Menschen mit beiden Antikörpern haben Blutgruppe 0. Wer nur ein Antigen A bzw. B hat, gehört zu entsprechenden Blutgruppe A bzw. B.

3. Funktionen

Aus der Schule kennen wir Funktionen wie die Exponentialfunktion oder den Logarithmus, also Abbildungen, in die wir eine reelle Zahl einsetzen und die uns eine reelle Zahl zurückgeben. Die in Abschnitt 1.4 eingeführten Prädikate P haben eine ähnliche Eigenschaft, wir setzen ein Objekt x ein und erhalten eine Aussage $P(x)$ mit einem Wahrheitswert. Dies deutet darauf hin, dass wir den aus der Schule bekannten Funktionsbegriff ohne großen Aufwand von Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf allgemeinere Abbildungen erweitern können.

Wir beginnen daher in Abschnitt 3.1 mit einer allgemeinen Funktionsdefinition und erinnern uns in Abschnitt 3.2 an den Begriff der Umkehrfunktion.

3.1. Definition einer Funktion

Wir beginnen mit einer recht allgemeinen Definition einer Funktion.

Definition 3.1. Seien X, Y zwei Mengen.

(a) Eine Vorschrift, die (manchen) Elementen $x \in X$ ein Element

$$y = f(x) \in Y$$

zuordnet, heißt **Funktion** oder **Abbildung**. Wir schreiben für die Zuordnungsvorschrift dann auch

$$f : D_f \subseteq X \to Y, \qquad x \mapsto f(x)$$

und nennen x die **Variable** und $f(x)$ den **Funktionswert**.

(b) Die Menge

$$D_f := \{x \in X : (\exists y \in Y : y = f(x))\}$$

heißt der **Definitionsbereich** der Funktion f.

(c) Die Menge Y heißt der **Wertebereich** der Funktion f und die Menge

$$f(D_f) := \{y \in Y : (\exists x \in D_f : y = f(x))\}$$

heißt **Bildmenge** von f.

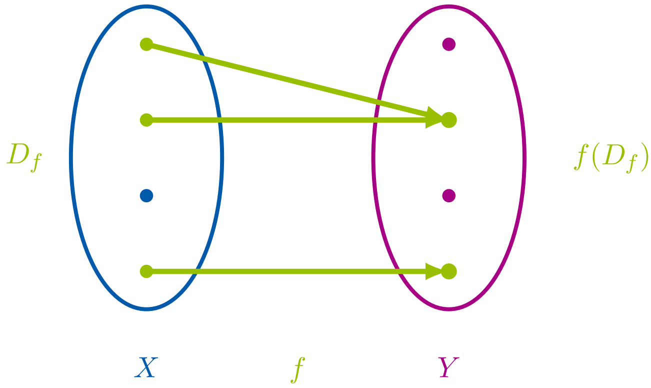


Abbildung 3.1.: Illustration von Definitionsbereich, Wertebereich und Bildmenge einer Funktion

Ein paar Anmerkungen zu diesen Begriffen:

- Wir verwenden die beiden Begriffe „Funktion“ und „Abbildung“ austauschbar.
- Eine Funktion hat also immer einen Definitionsbereich D_f und einen Wertebereich Y und ordnet jeder Variablen $x \in D_f$ einen Funktionswert $f(x) \in Y$ zu, siehe Abbildung 3.1 für eine Illustration.
- Der Definitionsbereich D_f muss nicht ganz X sein, d.h. die Funktion muss nicht allen $x \in X$ einen Funktionswert zuordnen. Aber sie darf keinem $x \in X$ mehr als einen Funktionswert zuordnen, d.h. der Funktionswert $f(x)$ muss — wenn er existiert — eindeutig sein.
- Die Bildmenge $f(D_f)$ muss ebenfalls nicht den ganzen Wertebereich Y abdecken. Es ist möglich, dass ein Wert $y \in Y$ von mehr als einem $x \in X$ als Funktionswert angenommen wird.
- Zwei Funktionen f, g heißen **gleich**, wenn gelten $f : D_f \subseteq X \to Y$ und $g : D_f \subseteq X \to Y$ mit $D_f = D_g$ und für alle $x \in D_f$ gilt $f(x) = g(x)$.

  Ein Beispiel für zwei gleiche Funktionen sind $f(x) = \sqrt{x^2}$ und $g(x) = |x|$ mit $X = D_f = D_g = Y = \mathbb{R}$.

Ein paar Beispiele zur Illustration.

Beispiel 3.2. *(a) Der natürliche Logarithmus ist eine Funktion f, die von $X = \mathbb{R}$ nach $Y = \mathbb{R}$ abbildet. Ihr Definitionsbereich ist $D_f = (0, \infty)$ und ihre Bildmenge ist $f(D_f) = \mathbb{R}$.*

(b) Wir betrachten die beiden Mengen

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\},$$
$$Y = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

Dann können wir eine Abbildung $D : X \to Y$ definieren, die jeder stetig differenzierbaren Funktion $f \in X$ ihre Ableitung $D(f) = f'$ zuordnet. Diese Ableitung existiert nach Annahme und ist eine stetige Funktion, erfüllt also $f' \in Y$. Der Ableitungsoperator[1] ist also eine Funktion, deren Variablen selbst Funktionen sind.

(c) Wir betrachten die Mengen $X = \mathbb{N}$ und $Y = \{w, f\}$. Dann ist das Prädikat $P(x) =$ xist eine gerade Zahl eine Abbildung $P : X \to Y$, die jeder natürlichen Zahl x den Wahrheitswert der Aussage „x ist eine gerade Zahl“ zuordnet.

Wir haben in Abbildung 3.1 gesehen, dass eine Funktion nicht alle Werte im Wertebereich Y annehmen muss und dass sie Werte im Wertebereich mehrfach annehmen kann. Funktionen, die jeden Wert im Wertebereich mindestens oder höchstens einmal annehmen, haben spezielle Namen.

Definition 3.3. Seien X, Y zwei Mengen und $f : D_f \subseteq X \to Y$ eine Funktion.

(a) Wird kein Element des Wertebereichs Y mehr als einmal angenommen, d.h. gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

so heißt die Funktion f **injektiv**.

(b) Werden alle Elemente des Wertebereichs Y angenommen, d.h. gilt

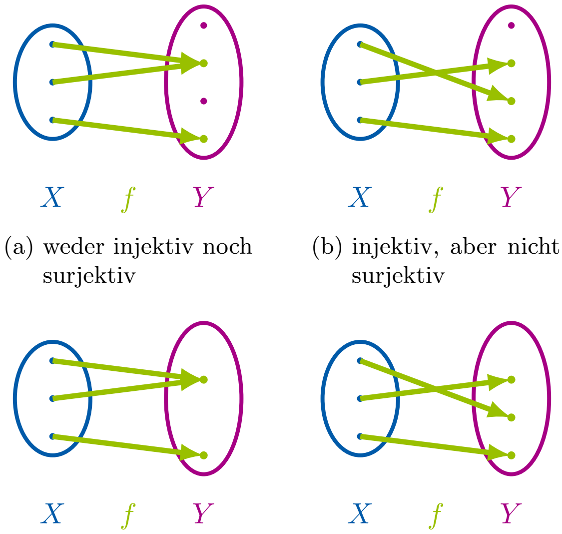
$$\forall y \in Y \ \exists x \in D_f : f(x) = y$$

so heißt die Funktion f **surjektiv**.

(c) Ist f injektiv und bijektiv, so heißt die Funktion f **bijektiv**.

Bei einer injektiven Funktion hat also jeder Wert $y \in Y$ von der Funktion f einmal oder keinmal angenommen, siehe Abbildung 3.2 für eine Illustration. Hingegen garantiert Surjektivität, dass der komplette Wertebereich Y von der Funktion f auch angenommen wird. Surjektivität kann man also immer erzwingen, indem man $Y = f(D_f)$ wählt. Bei einer bijektiven Funktion hat jeder Wert $y \in Y$ ein eindeutiges Urbild $x = f^{-1}(y) \in D_f$, d.h. es gibt genau ein $x \in D_f$ mif $f(x) = y$.

[1] Funktionen, deren Variablen selbst Funktionen sind, nennt man oft **Operatoren**, um nicht das gleiche Wort für die Beschreibung der Funktion und ihrer Variablen verwenden zu müssen. Grundsätzlich ist solch ein Operator aber auch eine Funktion im Sinne von Definition 3.1.



(a) weder injektiv noch surjektiv

(b) injektiv, aber nicht surjektiv

(c) surjektiv, aber nicht injektiv

(d) surjektiv und injektiv, also bijektiv

Abbildung 3.2.: Illustration von Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

3.2. Umkehrfunktion

Eine Funktion f ordnet Variablen x einen Funktionswert $y = f(x)$ zu. Wir können uns nun fragen, ob man diese Zuordnung auch wieder rückgängig machen kann, d.h. ob wir eine Funktion g finden können, die einem Punkt $y = f(x)$ den Funktionswert $g(y) = x$ zuordnet.

Definition 3.4. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ zwei Mengen und $f : D_f \subseteq X \to Y$ eine Funktion. Existiert eine Funktion $g : f(D_f) \subseteq Y \to X$ mit der Eigenschaft $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$, so heißt g die **Umkehrfunktion** zu f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Ein paar Anmerkungen zur Umkehrfunktion:

- Die Umkehrfunktion f^{-1} hat nichts mit dem Bruch $\frac{1}{f}$ zu tun.
- Die Umkehrfunktion muss nicht immer existieren. Ist f nicht injektiv, so gibt es $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Für die Umkehrfunktion müsste dann gelten $g(f(x_1)) = x_1$ und $g(f(x_2)) = x_2$, d.h. die Umkehrfunktion müssten den Punkt $y = f(x_1) = f(x_2)$ auf die beiden Punkte $x_1 \neq x_2$ abbilden. Sie darf aber jedem $y \in D_f$ nur einen Funktionswert zuordnen.

- Wenn die Umkehrfunktion f^{-1} existiert, hat sie als Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = f(D_f)$ und als Bildmenge $f^{-1}(D_{f^{-1}}) = D_f$.

Wir sehen also, dass Injektivität eine wichtige Voraussetzung für die Existenz der Umkehrfunktion ist. Tatsächlich können wir uns dann folgendes überlegen:

Satz 3.5. (Satz von der Umkehrfunktion) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ zwei Mengen und $f : D_f \subseteq X \to Y$ eine injektive Funktion. Dann gelten:

(a) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D_f) \subseteq Y \to X$ existiert.

(b) Für alle $x \in D_f$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ und für alle $y \in f(D_f)$ gilt $f(f^{-1}(y)) = y$.

(c) Die Umkehrfunktion von f^{-1} ist wieder die Funktion f, d.h. $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beweis. (a) Da f injektiv ist, gibt es für alle $y \in f(D_f)$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$. Wir können daher die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D_f) \subseteq Y \to X$ definieren, indem wir jedem $y \in f(D_f)$ dieses eindeutige $x \in D_f$ zuordnen.

(b) Für alle $x \in D_f$ gilt $y = f(x) \in f(D_f)$ und wir haben f^{-1} genau so definiert, dass dann $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ gilt.

Jedes $y \in f(D_f)$ hat wegen der Injektivität unter f ein eindeutiges Urbild $x = f^{-1}(y) \in D_f$ und wird durch die Umkehrfunktion auf dieses Urbild abgebildet. Es folgt $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

(c) Die Umkehrfunktion f^{-1} ist injektiv[2] nach Teil (a) und besitzt daher eine Umkehrfunktion $(f^{-1})^{-1}$. Dass diese Umkehrfunktion wieder die Funktion f ist, folgt dann aus Teil (b).

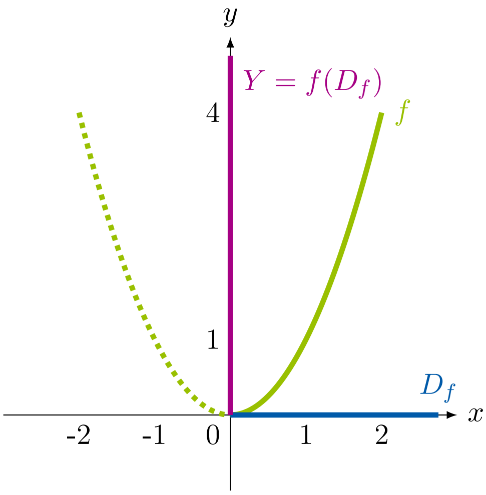
□

Für Funktionen $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten wir den Graph der Umkehrfunktion geometrisch durch Spiegeln des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

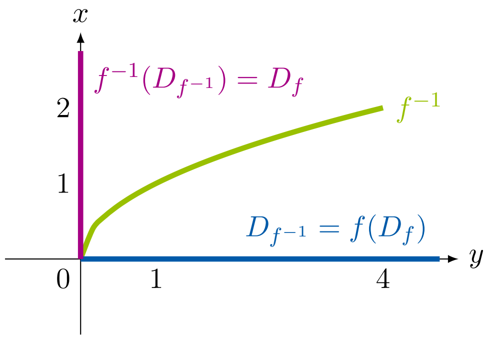
Beispiel 3.6. *Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, siehe Abbildung 3.3 für eine Illustration. Mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ und Wertebereich $Y = \mathbb{R}$ ist f weder injektiv noch surjektiv. Wenn wir aber den Definitionsbereich und Wertebereich einschränken auf $D_f = Y = [0, \infty)$, so ist die Funktion bijektiv. Die zugehörige Umkehrfunktion ist dann die Wurzelfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit*

$$f^{-1}(y) = +\sqrt{y}.$$

[2] Eine Umkehrfunktion f^{-1} ist, wenn sie existiert, immer injektiv. Wäre sie nicht injektiv, so gäbe es $y_1, y_2 \in f(D_f)$ mit $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x \in D_f$. Die Funktion f würde daher dem Punkt $x \in D_f$ zwei Funktionswerte $y_1 \neq y_2$ zuordnen, was der Definition einer Funktion widerspricht.



(a) Funktion



(b) Urbild

Abbildung 3.3.: Illustration der Umkehrfunktion am Beispiel $f(x) = x^2$

Teil II.

Reelle Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen

4. Zahlen

Wir arbeiten später je nach Anwendung mit verschiedenen Zahlenbereichen. Hier wollen wir zunächst in Abschnitt 4.1 die wichtigsten Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wiederholen. Anschließend wiederholen wir außerdem für reelle Zahlen die bekannten Rechenoperationen in Abschnitt 4.2, die bekannten Ordnungen in Abschnitt 4.3.

4.1. Grundlegende Zahlenmengen

Geht es darum Dinge abzuzählen, so verwenden wir die natürlichen Zahlen.

Definition 4.1. Die Menge der **natürlichen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die kleinste natürliche Zahl die 1 ist. Wollen wir die 0 auch mitnehmen, so schreiben wir[1]

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

In den natürlichen Zahlen können wir zwei beliebige Zahlen addieren oder multiplizieren und erhalten wieder eine natürliche Zahl. Wenn wir aber zwei natürliche Zahlen subtrahieren, kann es sein, dass wir eine negative Zahl erhalten. Deswegen erweitern wir als nächstes die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen.

Definition 4.2. Die Menge der **ganzen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

[1] In der Definition von $\mathbb{N}_0$ vereinigen wir die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit der Menge $\{0\}$, die als einziges Element die Zahl 0 enthält. Wir können nicht die Menge $\mathbb{N}$ mit der Zahl 0 vereinigen, weil das erste eine Menge und das zweite eine Zahl ist, also verschiedene Arten von Objekten.

Wir könnten die ganzen Zahlen alternativ auch definieren als

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Wenn wir nun also zwei beliebige ganze Zahlen addieren, subtrahieren oder multiplizieren, erhalten wir wieder eine ganze Zahl. Wenn wir aber zwei ganze Zahlen (ungleich 0) dividieren, kann es sein, dass wir eine gebrochene Zahl erhalten. Wir erweitern daher die ganzen Zahlen als nächstes zu den rationalen Zahlen.

Definition 4.3. Die Menge der **rationalen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{r}{q} : r, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Die rationalen Zahlen sind also alle Zahlen, die sich als Bruch $\frac{r}{q}$ zweier ganzer Zahlen r, q schreiben lassen. Wichtig ist hierbei, dass der **Nenner** q von Null verschieden sein muss. Der **Zähler** r hingegen darf Null sein. Die Darstellung einer rationalen Zahl ist nicht eindeutig, so gilt z.B.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}.$$

In der Menge der rationalen Zahlen können wir also zwei beliebige Zahlen addieren, subtrahieren oder multiplizieren und zwei beliebige Zahlen durcheinander teilen, solange der Nenner ungleich Null ist.

Für gewisse Rechnungen reicht die Menge der rationalen Zahlen jedoch nicht aus. So kann man z.B. Folgen von rationalen Zahlen $q_1, q_2, \ldots$ finden, die sich beliebig dicht an eine Zahl q^* annähern, aber deren Grenzwert q^* keine rationale Zahl ist, sondern z.B. π. Oder wir fragen und, welche Zahl wir mit sich selbst multiplizieren müssen, um 2 zu erhalten, versuchen also die Gleichung

$$x^2 = 2$$

zu lösen. In beiden genannten Beispielen sind die gesuchten Zahlen reelle Zahlen.

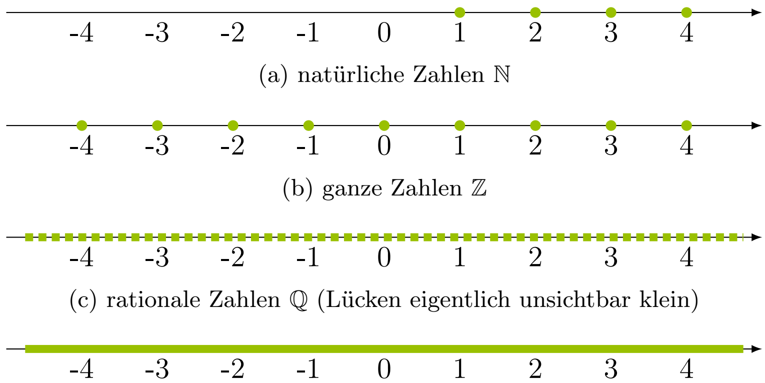
Definition 4.4. Die Menge der **reellen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{R} := \{r : r \text{ lässt sich als Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen konstruieren}\}.$$

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heißen **irrationale Zahlen** und werden gelegentlich geschrieben als

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Nach Definition lässt sich also jede reelle Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen annähern. Man sagt deswegen auch „die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$“. Diesen Effekt macht man sich am Computer zu nutze, denn viele reelle Zahlen lassen sich nicht exakt mit endlich vielen Nachkommastellen darstellen. Aber man kann sie auf diese Art zumindest gut approximieren.



(a) natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

(b) ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

(c) rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ (Lücken eigentlich unsichtbar klein)

(d) relle Zahlen $\mathbb{R}$

Abbildung 4.1.: Illustration der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen

In der Menge der reellen Zahlen können wir immer noch beliebige Zahlen addieren, subtrahieren oder multiplizieren und durch alles außer Null teilen. Gewisse Rechnungen funktionieren aber immer noch nicht, z.B. hat die Gleichung

$$x^2 = -2$$

in den reellen Zahlen immer noch keine Lösung. Hierfür benötigen wir die komplexen Zahlen.

Definition 4.5. Die Menge der **komplexen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

wobei $i := \sqrt{-1}$ die **imaginäre Einheit** ist.

Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ nennen wir a den **Realteil** und b den **Imaginärteil** der Zahl. Die reellen Zahlen können wir dann darstellen als komplexe Zahlen mit Imaginärteil 0.

Fassen wir den Realteil und den Imaginärteil einer komplexen Zahl als unterschiedliche Raumdimensionen auf, so können wir komplexe Zahlen in der **Gauß'schen Zahlenebene** visualisieren, siehe Abbildung 4.2. In dieser Ebene finden wir die reellen Zahlen auf der horizontalen Achse.

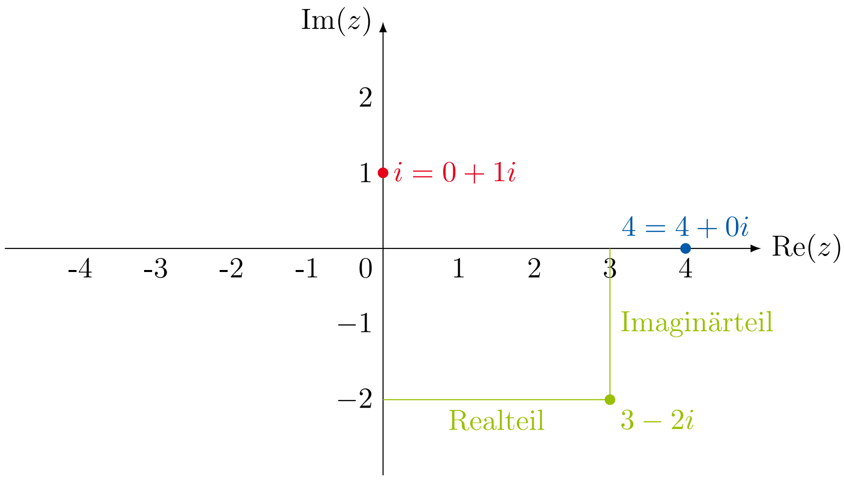


Abbildung 4.2.: Gauß'sche Zahlenebene als Darstellung von $\mathbb{C}$

Aus die komplexen Zahlen gehen wir erst später im Detail ein. Für den Moment halten wir fest, dass für die eingeführten Zahlenmengen die folgenden Inklusionen gelten:

$$N \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

4.2. Rechenregeln für reelle Zahlen

Aus der Schule kennen wir die vier Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$. Bei genauerer Betrachtung stellen wir fest, dass sich hinter diesen vier Grundrechenarten eigentlich nur zwei Rechenoperationen verstecken und zwei Abkürzungen. Was genau damit gemeint ist, wird im folgenden erklärt.

Lemma 4.6.

(a) Für die **Addition** $+$ gelten die folgenden Rechenregeln:

Kommutativgesetz	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x + y = y + x$
Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
neutrales Element der Add.	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$x + 0 = x$
additiv Inverses	$\forall x \in \mathbb{R} \exists! -x \in \mathbb{R}:$	$x + (-x) = 0$

(b) Für die **Multiplikation** $\cdot$ gelten die folgenden Rechenregeln:

Kommutativgesetz	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
neutrales Element der Mult.	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$x \cdot 1 = x$
multiplikativ Inverses	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists! x^{-1} \in \mathbb{R}:$	$x \cdot x^{-1} = 1$

(c) Addition und Multiplikation sind verknüpft durch:

$$\textbf{Distributivgesetz} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Aus den oben genannten Rechenregeln folgen weitere bekannte Regeln wie

$$0 \cdot x = 0 \qquad \text{und} \qquad (-1) \cdot x = -x.$$

Hier sehen wir auch, warum die 0 *kein multiplikativ Inverses* 0^{-1} besitzen kann, denn es müsste dann gelten $1 = 0 \cdot 0^{-1} = 0$. Deswegen können wir nicht durch 0 teilen.

Die **Subtraktion** $-$ ist eine Abkürzung für die Addition mit einem additiv Inversen, also

$$x - y = x + (-y).$$

Daher ist die Subtraktion auch nicht kommutativ, denn es gilt

$$x - y = x + (-y) = (-y) + x.$$

Analog ist die **Division** $:$ eine Abkürzung für die Multiplikation mit einem multiplikativ Inversen, also

$$x : y = x \cdot y^{-1}.$$

Die Division ist folglich auch nicht kommutativ, denn es ist

$$x : y = x \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot x.$$

4.3. Reelle Zahlen ordnen

Häufig interessieren uns nur nichtnegative Zahlen oder z.B. nur Zahlen, die kleiner als 7 sind. Hier nutzen wir aus, dass wir zwei reelle[2] Zahlen immer mit Hilfe einer **Ordnungsrelation** $\leq$ vergleichen können. Diese Relationen hat die folgenden Eigenschaften:

Lemma 4.7.

[2] Wir betrachten hier nur die Ordnungsrelation auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Diese Ordnungsrelation funktioniert auch für die Teilmengen der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen. Auf den komplexen Zahlen hingegen lässt sich eine solche Ordnungsrelation *nicht* definieren.

(a) Für die **Ordnungsrelation** $\leq$ gelten die folgenden Rechenregeln:

Reflexivität	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$x \leq x$
Antisymmetrie	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Longrightarrow x = y$
Transitivität	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
Totalität	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$(x \leq y) \vee (y \leq z)$

(b) Die Ordnungsrelation ist verträglich mit Addition und Multiplikation:

Verträglichkeit mit Add.	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
Verträglichkeit mit Mult.	$\forall x, y \in \mathbb{R}\, \forall z \in (0, \infty):$	$x \leq y \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Mit Hilfe dieser Ordnungsrelation definieren wir die anderen bekannten Relationen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ als

$$\begin{aligned} x < y \quad &:\Longleftrightarrow \quad (x \leq y) \wedge (x \neq y), \\ x \geq y \quad &:\Longleftrightarrow \quad y \leq x, \\ x > y \quad &:\Longleftrightarrow \quad y < x. \end{aligned}$$

Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt dann

positiv, wenn	$x > 0$,
negativ, wenn	$x < 0$,
nichtnegativ, wenn	$x \geq 0$,
nichtpositiv, wenn	$x \leq 0$.

Wenn wir zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ vergleichen, dann ist immer *genau eine* der folgenden drei Beziehungen war:

$$x < y \qquad \text{oder} \qquad x = y \qquad \text{oder} \qquad x > y.$$

Diese Eigenschaft heißt **Trichotomie**.

Im Fall $x < y$ nutzen wir später oft den folgenden Trick:

Lemma 4.8. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gibt es $z \in \mathbb{R}$ mit $x < z < y$.

Beweis. Hier wird die Existenz von mindestens einer Zahl z mit dieser Eigenschaft behauptet. Wenn wir also ein solches z konstruieren können, dann ist die Aussage bewiesen.

Wir definieren
$$z := \frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \in \mathbb{R}.$$
Dann gilt wie gewünscht
$$x = \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{x}{2}}_{<\frac{y}{2}} < \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = z = \underbrace{\frac{x}{2}}_{<\frac{y}{2}} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = y.$$

□

Mit Hilfe der Ordnungsrelation können wir nun auch Intervalle in $\mathbb{R}$ sauber definieren.

Definition 4.9. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ nennen wir

$$\begin{array}{ll} [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \textbf{abgeschlossenes Intervall}, \\ (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \textbf{offenes Intervall}, \\ [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \textbf{(rechts) halboffenes Intervall}, \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \textbf{(links) halboffenes Intervall}. \end{array}$$

Analog definieren wir Intervalle wie $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $(-\infty, b)$ oder $[a, \infty)$.

5. Rechnen mit Zahlen und Termen

Man sagt Mathematiker:innen ja nach, dass wir nicht gut rechnen können und es daher zu vermeiden suchen. Ganz ohne geht es aber leider nicht, deswegen wiederholen wir hier noch einmal ein paar wichtige Techniken, die alle aus der Schule bekannt sein sollten und deren Beherrschung essenziell ist. Falls Sie hier noch Lücken haben, finden Sie im Internet Unmengen an Aufgaben zu den jeweiligen Themen.

Wir beginnen mit der Wiederholung von Techniken für die Grundrechenarten in Abschnitt 5.1 und dem schriftlichen Rechnen in Abschnitt 5.2. Dann gehen wir in den Abschnitten 5.3, 5.4 und 5.5 auf das Rechnen mit Potenzen, Beträge und Termen ein.

5.1. Rechnen mit den Grundrechenarten

Wir wenden in diesem Abschnitt die Rechenregeln aus Lemma 4.6 an. Überlegen Sie sich gerne, wie die nachfolgenden Umformungen mit diesen Rechenregeln begründet werden können und ergänzen Sie die weggelassenen Zwischenschritte.

Für das **Ausmultiplizieren von Summen** ergibt sich damit[1]

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= (a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d\\ &= a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d.\end{aligned}$$

Wir müssen also jeden Summanden aus der ersten Klammer mit jedem Summanden aus der zweiten Klammer multiplizieren.

Das Gegenstück zum Ausmultiplizieren ist das **Ausklammern** von gemeinsamen Faktoren aus einer Summe

$$a\cdot c+b\cdot c=(a+b)\cdot c.$$

Wir können einen Faktor also nur dann ausklammern, wenn er in allen Summanden auftritt.

Die **binomischen Formeln** erlauben es uns in speziellen Fällen ebenfalls zwischen einer Summen- und einer Produktdarstellung zu wechseln. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt bekanntlich

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,\qquad (x-y)^2=x^2-2xy+y^2,\qquad (x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

[1] Wir verwenden die übliche Regel „Punkt vor Strich“ und schreiben daher $a\cdot b+c$ statt $(a\cdot b)+c$. Später werden wir den Malpunkt $\cdot$ auch oft weglassen und schreiben dann nur noch $ab+c$.

Wenn wir zum Beispiel Nullstellen von Funktionen oder Lösungen von Gleichungen suchen, ist die Produktdarstellung oft hilfreicher als die Summendarstellung.

Wir erinnern uns daran, dass eine Division $x : y$ nichts anderes ist, als eine Multiplikation mit einem multiplikativ Inversen y^{-1}. Hieraus ergeben sich die folgenden **Rechenregeln für Brüche** für $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ mit $q, s \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} + \frac{r}{s} &= \frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs} = \frac{ps + qr}{qs} && (\textbf{Hauptnenner}\text{ bilden})\\
\frac{p}{q} - \frac{r}{s} &= \frac{ps}{qs} - \frac{qr}{qs} = \frac{ps - qr}{qs} && (\textbf{Hauptnenner}\text{ bilden})\\
\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} &= \frac{pr}{qs}\\
\frac{p}{q} : \frac{r}{s} &= \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr} && (\text{Kehrbruch bilden})
\end{aligned}$$

Für die letzte Zeile muss $r = 0$ gelten. Nach dem Zusammenfassen von Brüchen sollten diese **gekürzt** werden, d.h. gemeinsame Faktoren aus dem Zähler und Nenner herausgekürzt werden. Hierdurch ändert sich der Wert des Bruchs nicht, aber die Darstellung und das weitere Rechnen vereinfachen sich.

5.2. Schriftliches Rechnen

Die Methoden für die schriftliche Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlen sollten aus der Grundschule bekannt sein. Nachfolgend ein paar Beispiele zur Erinnerung.

Beispiel 5.1. *(a)*

$$\begin{array}{r}
12,34\\
+\ 23,57\\
+\ \ 3,14\\
{\scriptstyle 1\ 1}\\
\hline
=39,05
\end{array}$$

Wir addieren zuerst alle zweiten Nachkommastellen und erhalten 15*, also* 5 *hinschreiben und „*1 *im Sinn“. Dann addieren wir alle ersten Nachkommastellen inklusive der „*1 *im Sinn“ und erhalten* 10*, also* 0 *hinschreiben und „*1 *im Sinn“. Als nächstes addieren wir alle Einerstellen inklusive der „*1 *im Sinn“ und erhalten* 9*, die wir hinschreiben. Schließlich addieren wir noch die Zehnerstellen und erhalten die noch fehlende* 3*.*

(b)

$$\begin{array}{rr} & 834,9 \\ - & 235,7 \\ - & 31,4 \\ & {\scriptstyle 1\,1\,1\;\;} \\ \hline = & 567,8 \end{array}$$

Wir beginnen bei der Nachkommastelle, wo wir von 9 *insgesamt* 11 *abziehen müssen. Dafür „leihen" wir uns von der Einerstelle eine* 1 *und rechnen* $19-11=8$*. Wir schreiben also* 8 *hin und merken uns, dass wir bei der Einerstelle eine* 1 *mehr abziehen müssen, weil wir die schon verbraucht haben. Bei der Einerstelle müssen wir also von* 4 *insgesamt* 7 *abziehen und „leihen" uns dafür eine* 1 *von der Zehnerstelle, um* $14-7=7$ *rechnen zu können. Bei der Zehnerstelle müssen wir die „geliehene"* 1 *dann mit abziehen, also von* 3 *insgesamt* 7 *abziehen. Hierfür „leihen" wir uns eine* 1 *von der Hunderterstelle und rechnen* $13-7=6$*. Bei der Hunderterstelle müssen wir die „geliehene"* 1 *dann mit abziehen und rechnen* $8-3=5$*.*

(c)

$$\begin{array}{rcl} 83,49 & \cdot & 23,7 \\ \hline 1\,669 & , & 8 \\ 250 & , & 47 \\ 58 & , & 443 \\ {\scriptstyle 1\,1\,1} & & {\scriptstyle 1\;\;} \\ \hline 1\,978 & , & 713 \end{array}$$

Wir berechnen die Produkte $83,49\cdot 20$ *und* $83,49\cdot 3$ *sowie* $83,49\cdot 0,7$ *und addieren die Ergebnisse auf.*

(d)

$$\begin{array}{l} \;\;\;8\;\;1,\;0\;0\;0 : 37,5 = 2,16 \\ -\;7\;\;5 \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;6,\;0 \\ \;\;\;-\;3,\;7\;5 \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;2,\;2\;5 \\ \;\;\;-\;2,\;2\;5\;0 \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Wir überlegen und zunächst, dass der Divisor $37,5$ *zweimal in* 80 *passt und bestimmen den verbleibenden Rest* 6*. Dann stellen wir fest, dass der Divisor* $37,5$ *nur* $0,1$*-mal in* 6 *passt und bestimmen den verbleibenden Rest* $2,25$*. In diesen Rest passt der Divisor noch genau* $0,06$ *mal, d.h. wir sind fertig.*

Um Fehler zu erkennen, empfiehlt es sich immer auch eine einfache Überschlagsrechnung zu machen. Bei Beispiel 5.1 (c) gilt zum Beispiel $83,49\approx 80$ und $23,7\approx 20$ und daher

$$83,49 \cdot 23,7 \approx 80 \cdot 20 = 1600.$$

Da wir beide Zahlen nach unten abgeschätzt haben, sollte da exakte Ergebnis also größer als 1600 sein, aber ungefähr in dieser Größenordnung.

5.3. Rechnen mit Potenzen

Wir erinnern uns kurz an die Definition von Potenzen.

Definition 5.2. Sei $a \in (0, \infty)$ eine gegebene Basis.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und für $n = 0$ ist die **n-te Potenz** von a definiert als

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \qquad \text{und} \qquad a^0 = 1.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die **$-n$-te Potenz** von a definiert als

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die **$\frac{1}{n}$-te Potenz** von a definiert als

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

(d) Für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die **$\frac{m}{n}$-te Potenz** von a definiert als

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

(e) Für $r \in \mathbb{R}$ ist die **r-te Potenz** von a allgemein definiert als

$$a^r = e^{\log(a^r)} = e^{r \cdot \log a},$$

wobei exp und log die natürliche Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus bezeichnen.

Beachte, dass wir hier nur Potenzen für positive Basen $a > 0$ definiert haben. Dies liegt daran, dass wir in der allgemeinen Definition von Potenzen $\log a$ berechnen müssen, was nur für positive a definiert ist. In den Fällen (a,b) sind auch negative Basen möglich, aber spätestens bei den Wurzeln in (c,d) müssen wir mit dem Vorzeichen aufpassen.

Für Potenzen gelten die nachfolgenden Rechenregeln.

Lemma 5.3. Die hier auftretenden Basen a, b und Exponenten r, s seien so gewählt, dass die Potenzen wohldefiniert sind.

(a) Produkt von zwei Potenzen mit gleicher Basis x:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

(b) Quotient von zwei Potenzen mit gleicher Basis a:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

(c) Potenz einer Potenz:

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

(d) Produkt von zwei Potenzen mit gleichem Exponenten p:

$$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$$

(e) Quotient von zwei Potenzen mit gleichem Exponenten p:

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir uns noch zwei Beispiele anschauen für Fehler, die an dieser Stelle oft auftreten.

Beispiel 5.4. *(a) Bei negativen Basen müssen wir nicht nur aufpassen, ob die resultierenden Ausdrücke wohldefiniert sind, sondern auch, welches Vorzeichen sie haben. Eine Wurzel ist per Definition immer nichtnegativ, d.h. es gilt zum Beispiel für alle* $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Insbesondere für $x = -1$ *gilt also*

$$\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1.$$

(b) Mit Produkten ond Quotienten von Potenzen kann man also in der Regel gut rechnen. Für Summen und Differenzen von Potenzen gibt es hingegen keine so einfachen Rechenregeln. Insbesondere darf man man Wurzeln und Potenzen ***nicht*** *auf die Summanden einzeln anwenden.*

Die nachfolgenden Ausdrücke sehen zum Beispiel alle ähnlich aus, aber ergeben unterschiedliche Ergebnisse:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^2+(-1)^2} &= \sqrt{9+1}=\sqrt{10}\approx 3,16\\ \sqrt{\big(3+(-1)\big)^2} &= \sqrt{4}=2\\ \sqrt{3^2}+\sqrt{(-1)^2} &= 3+1=4.\end{aligned}$$

5.4. Rechnen mit Beträgen

Wir sind im letzten Abschnitt schon über den Betrag gestolpert. Zur Erinnerung hier noch einmal die Definition.

Definition 5.5. Für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist der **Betrag** von a definiert als

$$|a| = \max\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0,\\ -a & \text{falls } a < 0.\end{cases}$$

Der Betrag ist also immer nichtnegativ, zum Beispiel

$$|-3| = -(-3) = 3.$$

Für den Betrag gelten die folgenden nützlichen Rechenregeln.[2]

Lemma 5.6. Seien $a, b, r \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gelten:

(a) Einfache Umformungen:

$$|-a| = |a|, \qquad |a^2| = |a|^2, \qquad |a\cdot b| = |a|\cdot|b|, \qquad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}.$$

(b) **Dreiecksungleichung:**

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(c) Abweichungen:

$$|a-b| \leq r \qquad \Longleftrightarrow \qquad b-r \leq a \leq b+r$$

[2] Der Begriff „Dreiecksungleichung“ ist für komplexe Zahlen anschaulicher. Wenn wir uns zwei Punkte a, b in der komplexen Ebene vorstellen, dann ist $|a+b|$ die Länge des Pfeils von 0 direkt nach $a+b$. Hingegen ist $|a|+|b|$ die Länge der beiden Pfeile von 0 nach a und von a nach $a+b$ und daher tendenziell länger als die direkte Verbindung von 0 nach $a+b$:

5.5. Rechnen mit Termen

Für das Rechnen mit Termen verwenden wir die gleichen Techniken wie für das Rechnen mit Zahlen. Nachfolgend ein paar Beispiele.

Beispiel 5.7. *(a) Wir lösen einen Betrag auf:*

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= \begin{cases} x^2-1 & \textit{falls } x^2-1 \geq 0, \\ -(x^2-1) & \textit{falls } x^2-1 < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-1 & \textit{falls } x^2 \geq 1, \\ -x^2+1 & \textit{falls } x^2 < 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-1 & \textit{falls } x \leq -1, \\ -x^2+1 & \textit{falls } -1 < x < 1, \\ x^2-1 & \textit{falls } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Wir addieren zwei Bruchterme:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3x+4} + \frac{5x+6}{7x+8} &= \frac{(2x+1)(7x+8)+(5x+6)(3x+4)}{(3x+4)(7x+8)} \\ &= \frac{14x^2+16x+7x+8+15x^2+20x+18x+24}{21x^2+24x+28x+32} \\ &= \frac{29x^2+61x+32}{21x^2+52x+32}. \end{aligned}$$

(c) Wir teilen ein kubisches Polynom durch ein lineares Polynom:

$$\begin{array}{rrrrl} (3x^3 & +\ 2x^2 & -\ x & +\ 1) & : (x-3) = 3x^2+11x+32+\frac{97}{x-3} \\ -\ (3x^3 & -\ 9x^2) & & & \\ \hline & 11x^2 & -\ x & & \\ & -\ (11x^2 & -\ 33x) & & \\ \hline & & 32x & +\ 1 & \\ & & -\ (32x & -\ 96) & \\ \hline & & & 97 & \end{array}$$

6. Gleichungen und Ungleichungen

Eine der grundlegenden Problemstellungen in der Mathematik ist das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen. Hierbei wollen wir alle Lösungen der Gleichung bzw. Ungleichung bestimmen, d.h. bei einer Umformung der Gleichung oder Ungleichung müssen wir darauf achten, dass wir auf jeden Fall keine Lösungen verlieren und bestenfalls auch keine neuen Lösungen erzeugen.

Wir betrachten hier nur den Fall einer Gleichung oder einer Ungleichung mit einer reellen Unbekannten $x \in \mathbb{R}$. Später werden uns auch Systeme von Gleichungen und Ungleichungen mit mehreren Unbekannten begegnen, aber dafür gelten dann die gleichen Grundprinzipien.

In Abschnitt 6.1 besprechen wir mögliche Umformungen von solchen Gleichungen und Ungleichungen und in Abschnitt 6.2 wenden wir diese Umformungen dann auf einige Beispiele an.

6.1. Zulässige und äquivalente Umformungen

Gegeben sei eine Gleichung

$$L(x) = R(x)$$

oder Ungleichung

$$L(x) \leq R(x)$$

für eine unbekannte Zahl $x \in \mathbb{R}$. Zu einer solchen Gleichung oder Ungleichung ist im Allgemeinen noch eine Menge D gegeben, in der wir nach Lösungen suchen. Diese Menge kann $D = \mathbb{R}$ sein, oft ist aber auch $D \subsetneq \mathbb{R}$. Dies kann zum Beispiel vorkommen, wenn nicht alle Terme in $L(x), R(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert sind oder wenn für die betrachtete Anwendung nur gewisse Lösungen relevant sind. Wenn die Menge D nicht explizit angegeben ist, dann verwenden wir die größte Menge in $\mathbb{R}$, für die $L(x)$ und $R(x)$ wohldefiniert sind.

Wir lösen solche Gleichungen und Ungleichungen im Allgemeinen, indem wir sie umformen, also beide Seiten modifizieren, um eine einfachere Struktur zu erhalten. Hierbei ist folgendes zu beachten.[1]

[1] Im nachfolgenden Resultat verwenden wir Prädikate, um die Lösungen einer Gleichung G zu beschreiben. Es ist $G(x)$ genau dann wahr, wenn x der Gleichung G genügt.

Definition 6.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ die Grundmenge, in der wir Lösungen einer Gleichung G_1 oder Ungleichung U_1 suchen. Der Übergang von der Gleichung G_1 auf eine Gleichung G_2 bzw. von der Ungleichung U_1 auf eine Ungleichung U_2 heißt

(a) **zulässige Umformung** auf D, wenn gilt

$$\forall x \in D : G_1(x) \Longrightarrow G_2(x) \qquad \text{bzw.} \qquad U_1(x) \Longrightarrow U_2(x),$$

(a) **äquivalente Umformung** auf D, wenn gilt

$$\forall x \in D : G_1(x) \Longleftrightarrow G_2(x) \qquad \text{bzw.} \qquad U_1(x) \Longleftrightarrow U_2(x),$$

Eine äquivalente Umformung ändert die Lösungsmenge der Gleichung G_1 (oder Ungleichung U_1) also nicht. Bei einer zulässigen Umformung verlieren wir keine Lösungen von G_1, aber es können zusätzliche **Scheinlösungen** hinzukommen, die zwar die umgeformte Gleichung G_2 lösen, aber nicht die Ausgangsgleichung G_1. Diese Scheinlösungen können wir mit Hilfe einer **Probe** eliminieren, d.h. wir setzen alle erhaltenen Lösungen und Scheinlösungen von G_2 in die Ausgangsgleichung G_1 ein und überprüfen, für welche diese tatsächlich erfüllt ist.

Nachfolgend einige Beispiele für zulässige und äquivalente Umformungen der Gleichung $L(x) = R(x)$ auf einer Menge D durch Modifikation mit einem Term $T(x)$ oder Einsetzen in eine Funktion F:

Gleichung $L(x) = R(x)$	zulässige Umformung	äquivalente Umformung
$L(x) \pm T(x) = R(x) \pm T(x)$	wenn T auf D definiert ist	
$L(x) \cdot T(x) = R(x) \cdot T(x)$	wenn T auf D definiert ist	wenn zusätzlich $T(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt
$\frac{L(x)}{T(x)} = \frac{R(x)}{T(x)}$	wenn T auf D definiert ist mit	$T(x) \neq 0$ für alle $x \in D$
$F(L(x)) = F(R(x))$	wenn F auf $L(D) \cup R(D)$ definiert ist	wenn F zusätzlich injektiv ist

Analoge Umformungen können wir auch auf eine Ungleichung $L(x) \leq R(x)$ anwenden, wobei wir hier bei Multiplikation und Division mehr auf das Vorzeichen des Terms $T(x)$ achten müssen.

Ungleichung $L(x) \leq R(x)$	zulässige Umformung	äquivalente Umformung
$L(x) \pm T(x) \leq R(x) \pm T(x)$	wenn T auf D definiert ist	
$L(x) \cdot T(x) \leq R(x) \cdot T(x)$	wenn T auf D definiert ist mit $T(x) \geq 0$ für alle $x \in D$	wenn sogar $T(x) > 0$ für alle $x \in D$ gilt
$\frac{L(x)}{T(x)} \leq \frac{R(x)}{T(x)}$	wenn T auf D definiert ist mit $T(x) > 0$ für alle $x \in D$	
$F(L(x)) \leq F(R(x))$	wenn F auf $L(D) \cup R(D)$ monoton wachsend ist	wenn F sogar streng monoton wachsend ist

Wir betrachten in Abschnitt 6.2 einige Beispiele, bei denen wir diese Umformungen anwenden. Aber vorher noch ein paar allgemeine Anmerkungen hierzu:

- Die Addition oder Subtraktion von einem Term $T(x)$ auf beiden Seiten verwenden wir sehr oft, um Terme zu eliminieren, die auf beiden Seiten der Gleichung (oder Ungleichung) auftreten, und um Terme von einer Seite auf die andere zu verschieben.

- Die Division durch einen Term $T(x)$ verwenden wir meistens, um Faktoren zu kürzen, die auf beiden Seiten auftreten. Hierbei müssen wir aber sicherstellen, dass $T(x) \neq 0$ gilt, d.h. Punkte $x \in D$ mit $T(x) = 0$ müssen wir dann separat betrachten. Wenn wir dies vergessen, kann es passieren, dass wir Lösungen der Gleichung verlieren, siehe Beispiel 6.5.

  Bei Ungleichungen müssen wir nicht nur sicherstellen, dass $T(x) \neq 0$ gilt, sondern auch, dass $T(x) > 0$ gilt. Wenn wir eine Ungleichung durch einen negativen Term teilen, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen herum. Hat der Term $T(x)$ nicht auf ganz D das gleiche Vorzeichen, so müssen wir eine Fallunterscheidung machen und die Fälle $T(x) > 0$, $T(x) < 0$ und $T(x) = 0$ getrennt betrachten.

- Die Multiplikation mit einem Term $T(x)$ verwenden wir oft, um Brüche aufzulösen. Hierbei sollten wir bestenfalls $T(x) \neq 0$ sicherstellen, weil wir sonst zusätzliche Scheinlösungen erzeugen. Bei Ungleichungen müssen wir außerdem wieder das Vorzeichen von $T(x)$ berücksichtigen, weil sich bei negativem $T(x)$ das Ungleichheitszeichen umdreht.

- Als Funktionen F verwenden wir oft Umkehrfunktionen, um Funktionen aufzulösen, die auf beiden Seiten der Gleichung auftreten. Wir verwenden zum Beispiel $F(z) = z^2$, um Wurzeln aufzulösen (siehe Beispiel 6.4), oder die Exponentialfunktion, um Logarithmen aufzulösen (siehe Beispiel 6.2). Wenn die Funktion F nicht injektiv ist, können hierdurch zusätzliche Scheinlösungen entstehen, die wir später durch eine Probe eliminieren müssen.

Bei Ungleichungen ist hier wichtig, dass die Funktion F monoton wachsend ist, damit aus $L(x) \leq R(x)$ auch $F(L(x)) \leq F(R(x))$ folgt.

Nicht zulässig sind Umformungen, durch die Lösungen verloren gehen. Beispiele hierfür sind einseitige Veränderungen einer Gleichung oder Teilen durch Terme, die 0 werden können. Verlorene Lösungen können nicht durch eine Probe zurückgewonnen werden.

Wenn es keine zulässige Umformung auf der ganzen Menge D gibt, können wir die Menge D auch in Teilmengen zerlegen (deren Vereinigung wieder D ergeben muss) und die Lösungen der Gleichungen auf den einzelnen Teilmengen separat bestimmen. Man spricht dann von einer **Fallunterscheidung**, siehe Beispiel 6.3.

6.2. Beispiele

Wir betrachten einige Beispiele für die Lösung von Gleichungen und Ungleichungen.

Beispiel 6.2. *Wir betrachten die Ungleichung*

$$\log(2x) \leq 2\log(x) \underbrace{=}_{\textit{Rechenregeln für } \log} \log(x^2).$$

Da der natürliche Logarithmus nur für $x > 0$ definiert ist, arbeite wir auf der Menge $D = (0, \infty)$.

Die zugehörige Umkehrfunktion, die natürliche Exponentialfunktion $F(x) = e^x$, ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Durch Anwendung von $F(z) = \exp(z)$ auf beiden Seiten erhalten wir daher die äquivalente Ungleichung

$$2x \leq x^2.$$

Wir würden nun gerne auf beiden Seiten der Ungleichung den Faktor x wegkürzen. Hierbei müssen wir aber darauf achten, dass (a) dieser Faktor nicht 0 wird, weil wir sonst eine Lösung verlieren, und (b) der Faktor nicht negativ wird, weil sich sonst das Vorzeichen in der Ungleichung umdreht. Glücklicherweise arbeiten wir auf $D = (0, \infty)$, d.h. uns interessiert nur der Fall $x > 0$ und wir erhalten die äquivalente Ungleichung

$$2 \leq x.$$

Die Lösungsmenge unserer Ungleichung ist daher

$$X^* = [2, \infty).$$

Beispiel 6.3. *Wir betrachten die Ungleichung*

$$|x+1| + |x-1| \leq 2.$$

Hier können wir $D = \mathbb{R}$ wählen.

Um die Beträge aufzulösen, machen wir Fallunterscheidungen. Hierfür stellen wir fest, dass das Argument des ersten Betrags, also $x+1$, an der Stelle $x = -1$ das Vorzeichen wechselt. Das Argument des zweiten Betrages, also $x-1$, wechselt hingegen an der Stelle $x = +1$ das Vorzeichen. Daher zerlegen wir $\mathbb{R}$ in die drei Mengen $(-\infty, -1)$, $[-1, 1]$ und $(1, \infty)$.

- *Im Fall $x \in (-\infty, -1)$ lautet die Ungleichung*

  $$|\underbrace{x+1}_{<0}| + |\underbrace{x-1}_{<0}| \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -(x+1) - (x-1) \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq -1.$$

  Da wir aber gerade nur $x \in (-\infty, -1)$ betrachten, hat die Ungleichung in dieser Menge also keine Lösungen.

- *Im Fall $x \in (1, \infty)$ lautet die Ungleichung*

  $$|\underbrace{x+1}_{>0}| + |\underbrace{x-1}_{>0}| \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1) + (x-1) \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 1.$$

  Da wir gerade nur $x \in (1, \infty)$ betrachten, hat die Ungleichung in dieser Menge auch keine Lösungen.

- *Im Fall $x \in [-1, 1]$ lautet die Ungleichung*

  $$|\underbrace{x+1}_{\geq 0}| + |\underbrace{x-1}_{\leq 0}| \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1) - (x-1) \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \leq 2.$$

  Diese Ungleichung ist für alle $x \in [-1, 1]$ erfüllt, d.h. alle $x \in [-1, 1]$ lösen die Ungleichung.

Die Menge aller Lösungen der Ungleichung erhalten wir nun, in dem wir die Lösungsmengen aus allen drei Fällen vereinigen. Da die Lösungsmenge in den ersten beiden Fällen leer war, erhalten wir

$$X^* = [-1, 1].$$

Beispiel 6.4. *Wir betrachten die Gleichung*

$$x \cdot \sqrt{x^2+3} = \sqrt{3x^2+1}.$$

Da die Wurzel nur für nichtnegative Argumente definiert ist, sollten wir kurz über die Menge D nachdenken. Glücklicherweise können die Argumente x^2+3 und $3x^2+1$ aber nicht negativ werden, d.h. wir können mit $D = \mathbb{R}$ arbeiten.

Um die Wurzeln zu aufzulösen, wollen wir beide Seiten der Gleichung quadrieren. Die Funktion $F(z) = z^2$ ist zwar auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, aber nicht injektiv. Daher ist das Quadrieren eine zulässige Umformung, aber keine äquivalente[2] Umformung, d.h. wir müssen am Ende eine Probe machen, um Scheinlösungen auszuschließen. Durch das Quadrieren erhalten wir die neue Gleichung

$$x \cdot \sqrt{x^2+3} = \sqrt{3x^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 \cdot (x^2+3) = 3x^2+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^4 = 1.$$

Die neue Gleichung hat also die Lösungen $x = +1$ und $x = -1$. EInsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt, dass $x = -1$ eine Scheinlösung ist und nur $x = +1$ die Ausgangsgleichung löst. Wir erhalten daher die Lösungsmenge

$$X^* = \{1\}.$$

Beispiel 6.5. *Wir betrachten die Gleichung*

$$(x^2-2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (2x+1) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

Hier können wir $D = \mathbb{R}$ wählen.

Der Faktor $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ tritt auf beiden Seiten der Gleichung auf. Wenn $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ gilt, dann hat die Gleichung die Form $0 = 0$ und ist daher erfüllt. Wir bestimmen daher zuerst die Nullstellen von $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Hierfür können wir ausnutzen, dass dies ein Polynom vom Grad 3 ist und daher drei Nullstellen x_1, x_2, x_3 hat. Wegen

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

folgt $-x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 6$. Gute Kandidaten[3] für Nullstellen sind daher $\pm 1, \pm 2, \pm 3$. Durch Ausprobieren sehen wir, dass das Polynom $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ die drei Nullstellen $-2, 1, 3$ hat. Diese drei Zahlen sind also Lösungen der Gleichung.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$ is der Faktor $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ungleich Null und wir können ihn daher im RAhmen eine äquivalenten Umformung wegdividieren und erhalten

$$(x^2-2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (2x+1) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 2 = 2x + 1.$$

[2] Bei genauerer Betrachtung interessieren uns nur Lösungen $x \geq 0$, da die beiden Terme $\sqrt{x^2+3}$ und $\sqrt{3x^2+1}$ nichtnegativ sind. Wenn wir uns deswegen direkt auf $D = [0, \infty)$ einschränken, dann sind auch beide Seiten der Gleichung nichtnegativ und folglich ist in diesem Fall $F(z) = z^2$ eine äquivalente Umformung.

[3] Grundsätzlich müssen die Nullstellen eines Polynoms nicht ganzzahlig sein. Aber da alle Koeffizienten in $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ganzzahlig sind und es sich hier um eine einfache Aufgabe zum Vorrechnen in der Vorlesung handelt, lohnt es sich, zunächst die ganzzahligen Kandidaten zu testen.

Diese quadratische Gleichungen hat auf $\mathbb{R}$ die beiden Lösungen $x = -1$ und $x = 3$. Wir betrachten aber gerade nur die Menge $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$ und erhalten daher nur eine zusätzliche Lösung $x = -1$.

Insgesamt hat die Gleichung daher die Lösungsmenge

$$X^* = \{-2, -1, 1, 3\}.$$

Hätten wir nicht aufgepasst und die Nullstellen von $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ bestimmt, so hätten wir die beiden Lösungen $x = -2$ und $x = 1$ verloren.

7. Fehler und Fehlerkultur

Ich mache Fehler, meine Kolleg:innen machen Fehler, unsere Tutor:innen machen Fehler und Sie machen Fehler. Das ist auch völlig normal. Wichtig ist es dabei nur, dass wir versuchen unnötige Fehler zu vermeiden und aus unseren Fehlern zu lernen.

Daher werfen wir in Abschnitt 7.1 einen Blick auf häufige Fehlerquellen und sprechen in Abschnitt 7.2 über einen produktiven Umgang mit Fehlern.

7.1. Häufige Fehlerquellen

Nachfolgend wollen wir typische Fehlerquellen sammeln, die wir zum Beispiel bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben regelmäßig sehen.

Bruchrechnung Tatsächlich passieren bei dem Rechnen mit Brüchen erstaunlich viele Fehler. Brüche werden oft falsch auseinander gezogen und dabei übersehen, dass zum Beispiel

$$\frac{1}{2+3} = \frac{1}{5} = 0,2 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \approx 0,83$$

zwei völlig verschiedene Zahlen ergibt.

Brüche werden auch oft falsch addiert und dabei nicht berücksichtigt, dass zum Beispiel

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+2}{2x} \qquad \text{und} \qquad \frac{x+1}{2+x}$$

zwei unterschiedliche Terme sind.

Wir haben die Rechenregeln für Brüche in Abschnitt 5.1 wiederholt. Wenn Sie sich hier noch nicht sicher fühlen, finden Sie im Internet viele Übungsaufgaben zu Brüchen und Bruchtermen. Denken Sie außerdem daran, dass Sie Brüche kürzen, um ihre Darstellung möglichst kompakt zu halten.

„Linearisieren" von Funktionen Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} : \big(f(x+y) = f(x) + f(y)\big) \wedge \big(f(c \cdot x) = c \cdot f(x)\big)$$

heißt **lineare Funktion**.[1] Mit linearen Funktionen können wir gut rechnen, weil wir Summen auseinanderziehen und Faktoren aus der Funktion herausziehen können.

[1] Lineare Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ werden Ihnen in der Linearen Algebra begegnen.

Aber: Die einzigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die linear sind, sind die Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x$ mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$. Für alle anderen Funktionen gelten also die obigen Rechenregeln nicht!

Zum Beispiel ist

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{aber} \qquad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

Fallunterscheidungen Wir haben in Abschnitt 6.2 gesehen, dass das Auflösen von Gleichungen und Ungleichungen häufig Fallunterscheidungen erfordert, z.B. weil wir einen Betrag auflösen oder Wurzeln ziehen oder Faktoren wegdividieren wollen. Hierbei müssen wir besonders auf die folgenden Punkte achten:

- *Beträge*: Zum Auflösen von Beträgen bestimmen wir für alle auftretenden Beträge die Stellen, an denen das Argument des Betrags sein Vorzeichen wechselt. Dann zerteilen wir $\mathbb{R}$ so in Teilmengen, dass innerhalb einer Teilmenge jeder Betrag ein konstantes Vorzeichen hat, siehe Beispiel 6.3. Die Vereinigung dieser Teilmengen muss $\mathbb{R}$ sein, d.h. wir dürfen keinen möglichen Fall weglassen.

  Auf jeder Teilmenge ersetzen wir dann alle Beträge entsprechend des Vorzeichens ihres Arguments und lösen die resultierende Gleichung. Dabei müssen wir darauf achten, dass nur die Lösungen relevant sind, die auch in der gerade betrachteten Teilmenge liegen.

- *Gerade Potenzen*: Wenn wir Quadrate oder allgemeiner gerade Potenzen durch Wurzelziehen auflösen, so dürfen wir nicht vergessen mit Beträgen zu arbeiten.

  Die Gleichung $(x+2)^2 = x^2$ kann man sehr schnell durch ausmultiplizieren lösen und erhält die einzige Lösung $x = -1$. Wir könnten stattdessen auch auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen. Wenn wir hier nicht aufpassen und nur den Fall $x + 2 = x$ betrachten, dann finden wir keine Lösung der Gleichung. Dies liegt daran, dass gilt

  $$(x+2)^2 = x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x+2| = |x|$$

  und wir daher zur Lösung der Gleichung die drei Fälle $x < -2$, $x > 0$ und $x \in [-2, 0]$ betrachten müssen. Die Gleichung $x + 2 = x$ entspricht hierbei dem zweiten Fall, die Lösung erhalten wir aber im dritten Fall.

- *Produkte*: Ein Produkt wird genau dann 0, wenn mindestens einer seiner Faktoren 0 ist. Diesen Effekt können wir uns bei der Bestimmung von Nullstellen zu Nutze machen und müssen ihn bei der Lösung von Gleichungen berücksichtigen.

  Wenn wir die Nullstellen einer Funktion wie

  $$f(x) = (x+2) \cdot (2x-3) \cdot (x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - 4)$$

bestimmen wollen, dann sollten wir diese Funktion *nicht ausmultiplizieren*, denn sonst müssten wir die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 6 bestimmen udn dafür haben wir keine Lösungsformel. Stattdessen verwenden wir, dass $f(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $x + 2 = 0$ 0der $2x - 3 = 0$ oder $x^2 - 3x + 1 = 0$ oder $x^2 - 4 = 0$ gilt. Jeden dieser vier Fälle können wir jetzt in einer Fallunterscheidung einzeln betrachten und müssen dort nur die Nullstellen von linearen oder quadratischen Polynomen bestimmen. Am Ende fassen wir die Nullstellen aus allen vier Fällen zusammen und erhalten die Nullstellen von f.

Wenn wir eine Gleichung wie

$$(x + 3) \cdot \sin x = \sin x$$

lösen wollen, dann wollen wir gerne den Faktor $\sin x$ auf beiden Seiten der Gleichung wegkürzen. Dies dürfen wir aber nur dann tun, wenn $\sin x \neq 0$ gilt, d.h. wir müssen eine Fallunterscheidung machen und die Punkte mit $\sin x = 0$ separat betrachten. Diese Fallunterscheidung wird oft vergessen, wodurch Lösungen der Gleichung verloren gehen.

Schreibweise Schließlich können wir uns durch die Art, wie wir Mathematik aufschreiben auch wahlweise helfen oder und selbst ein Bein stellen. Ein paar Tipps, um letzteres zu vermeiden:

- *Probe*: Bei vielen Rechnungen können wir am Ende durch ein Einsetzen der gefundenen Lösungen in die ursprüngliche Aufgabe Fehler identifizieren.
- *Saubere Schrift*: Wenn sich ein x kaum von einem y unterscheiden lässt, führt das schnell zu unnötigen Rechenfehlern. Wenn Sie Pech haben, sind wegen solcher Fehler dann nachfolgende Lösungsschritte deutlich schwerer oder gar nicht mehr durchführbar. Das ist insbesondere in Klausuren ärgerlich, wenn Sie eigentlich wissen, wie die Lösung funktionieren würde.
- *Klammern*: Viele Klammern in Termen, logischen Ausdrücken, ... sind nicht zwingend notwendig, wenn wir bei der Auswertung die geltenden Regeln wie „Punkt vor Strich" berücksichtigen. Aber sie helfen uns bei der Orientierung und sparen uns dadurch Zeit und reduzieren Fehler. Es bringt daher nichts, an Klammern zu sparen. Und auflösen können wir sie später immer noch.
- *Hilfreiche Notation*: Natürlich könnten wir eine Funktion auch als $x(f) = f^2 + 1$ statt $f(x) = x^2 + 1$ definieren, aber praktisch verwirrt eine solche Notation eher und kann daher zu Fehlern führen. Eine gute Notation zeichnet sich durch die folgenden Eigenschaften aus:

  - *so wenig, wie möglich*: Es werden nur Bezeichnungen für Objekte eingeführt, die wirklich gebraucht werden, und für ein Objekt werden nicht mehrere Bezeichnungen verwendet.
  - *so viel, wie nötig*: Alle auftretenden Objekte haben eine Bezeichnung und verschiedene Objekte haben verschiedene Bezeichnungen.
  - *sprechende Namen*: Anhand der Bezeichnung lässt sich gut erkennen, um was für ein Objekt es sich handelt. Zum Beispiel sind im Normalfall x, y Variablen, eine Funktion f hat die Ableitung f' und die Stammfunktion F, ε ist positiv aber ggf. sehr klein und zwei Konstanten $c, C > 0$ haben die Eigenschaft $c < C$.
  - *alles definiert*: Alle Bezeichnungen werden vor der ersten Verwendung eingeführt, zum Beispiel „sei $\varepsilon < 0$ beliebig".

- *Klare Struktur*: Ein mathematischer Text sollte mehr als eine Aneinanderreihung von Formeln sein. Eine klare und gut nachvollziehbare Struktur hilft nicht nur für das Verständnis des Texts, sondern kann auch Lücken in der Argumentation aufdecken.

  In mathematischen Texten finden sich daher oft Sätze wie „wir wollen den Satz ... anwenden und zeigen daher zunächst, dass die Voraussetzungen A und B des Satzes erfüllt sind". Dann ist allen klar, was das nächste Ziel ist, und wir vergessen keine der Voraussetzungen zu überprüfen.

  Bei Fallunterscheidungen sehen wir oft Sätze wie „daher betrachten wir die Fälle I, II und III getrennt". Alle möglichen auftretenden Fälle an einer Stelle gesammelt zu nennen hat den Vorteil, dass wir einfacher überprüfen können, ob wir mit den genannten Fällen wirklich alles abdecken. Dann können wir jeden Fall einzeln sauber benennen und abarbeiten und fassen schließlich alles wieder zusammen mit einem Satz wie „durch die Betrachtung aller möglichen Fälle sehen wir, dass ...".

Wenn Sie in Vorlesungen oder Fachbüchern mathematischen Texten begegnen, die Sie als besonders gut verständlich empfinden, dann lohnt sich ein Blick auf die Meta-Ebene: Was genau macht den Text eigentlich so gut lesbar? Ist es eine spezielle Struktur oder eine clevere Notation? Oft kann man sich hier Tricks abschauen und später in den eigenen Texten verwenden.

7.2. Umgang mit Fehlern

Auch wenn Sie sich an alle Hinweise aus Abschnitt 7.1 halten, werden Sie Fehler machen. Und auch Ihre Dozent:innen und Tutor:innen werden gelegentlich etwas falsches sagen oder an die Tafel schreiben. Was dann?

Zunächst einmal sollten wir uns klar machen, dass wir nicht in einem Vakuum Mathematik betreiben, sondern von vielen Faktoren beeinflusst wird, wieviel Zeit und Energie wir für die Beschäftigung mit Mathematik haben und wie gut wir an der Universität lernen können. Ein paar Beispiele hierfür sind:

- muss parallel arbeiten, um Geld für den Lebensunterhalt zu verdienen
- hat Kinder oder pflegebedürftige Eltern
- ist das erste Familienmitglied an der Universität
- hatte keinen guten (Mathematik-)Unterricht an der Schule
- hat eine andere Muttersprache
- hat gesundheitliche Einschränkungen
- hat einen Lerntyp, der nicht gut mit Vorlesungen funktioniert
- ...

Wenn Sie Ihre eigene Leistung mit der von anderen vergleichen, dann bedenken Sie immer, dass Sie ggf. unter unterschiedlichen Voraussetzungen spielen.

Ein paar Tipps für den Umgang mit Fehlern und Verständnisproblemen:

- Wenn Sie in der Vorlesung oder Übung einen Fehler entdecken, dann melden Sie sich gerne („Müsste das nicht eigentlich ... sein?") Ein für Sie offensichtlicher Schreibfehler an der Tafel kann für andere Studierende sehr verwirrend sein. Und manchmal passieren, gerade bei eher frei vorgetragenen Veranstaltungen, auch Fehler[2] in der Argumentation.
- Wenn Sie die Möglichkeit haben, ihre Lösungen zu Übungsaufgaben korrigieren zu lassen, nutzen Sie dieses Angebot. Lesen Sie die Korrekturen dann genau durch und wenn Sie die Korrektur nicht verstehen, fragen Sie nach.

  Fehler in Übungsaufgaben sind oft gute Indikatoren dafür, dass man etwas noch nicht verstanden hat. Je schneller man solche Verständnislücken erkennt und schließen kann, desto besser.
- Wenn Sie in der Vorlesung oder den Übungen etwas nicht verstehen, fragen Sie gerne direkt nach. Oft haben viele andere die gleiche Frage. Und wenn Sie nicht mitten in der Veranstaltung fragen wollen, dann können Sie auch am Ende nach vorne kommen und fragen.

[2] Solche Fehler passieren natürlich ausschließlich, um die Aufmerksamkeit der Studierenden zu testen und das Verständnis des Stoffes zu fördern. Ist klar, oder?

- Die meisten Dozent:innen und Kursassistent:innen haben eine Sprechstunde, ggf. nach Vereinbarung. Nutzen Sie diese Gelegenheit gerne! (Wenn Sie Prüfungsangst haben, dann ist das auch eine gute Möglichkeit, sich vor mündlichen Prüfungen etwas an die Prüfer:innen und ihre Büros zu gewöhnen.)
- Es ist hilfreich, wenn Sie eine Gruppe von Mitstudierenden finden, mit der Sie gemeinsam den Stoff besprechen und Übungsaufgaben lösen können.
  - Lassen Sie sich nicht von einem stärkeren Team mitschleppen, sondern versuchen Sie selbst Lösungen zu finden. Wenn Sie nicht weiterkommen, lassen Sie sich von den anderen Tipps geben.
  - Pushen Sie sich innerhalb der Gruppe gegenseitig, d.h. hinterfragen Sie die Lösungsvorschläge von anderen Gruppenmitgliedern kritisch und weisen Sie auf Unklarheiten oder Argumentationslücken hin.
  - Und unterstützen Sie sich in der Gruppe gegenseitig. Anderen Personen etwas zu erklären, schärft das eigene Verständnis noch einmal deutlich.