Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

Merkblatt zur 2. Übung am 22. September 2023
Thema: Wichtige Rechenoperationen, Termumformungen, Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen bzw. Ungleichungen

Binomische Formeln

Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Gleichheiten.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Anwendung: Quadratische Ergänzung.
Gegeben sei ein Ausdruck der Gestalt $x^2 + px + q$ mit gewissen Zahlen $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Manchmal ist es wünschenswert, einen solchen Ausdruck in die Gestalt $(x+a)^2 + b$ zu überführen. Das geht, indem zum Ausgangsterm ein geeigneter Summand addiert, danach gleich wieder abgezogen und schließlich eine binomische Formel („rückwärts") benutzt wird:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Das entspricht der Gestalt $(x+a)^2 + b$ mit $a = \frac{p}{2}$ und $b = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$.
Bemerkung: Wie die obige Anwendung bereits verdeutlicht, werden die binomischen Formeln oft „rückwärts" benötigt, etwa um eine Summe als Quadrat umzuschreiben.

Gleichungen und Ungleichungen

Die Ausführungen auf diesem Merkblatt beschränken sich auf quadratische Gleichungen und Ungleichungen sowie Gleichungen und Ungleichungen, in denen Beträge vorkommen.

- **Quadratische Gleichungen.** Gesucht seien alle (reellen) Lösungen x der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. (Dabei seien p und q vorgegebene reelle Zahlen.)
  - Falls der Wert $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ positiv ist, dann hat die Gleichung zwei unterschiedliche reelle Lösungen, nämlich
  $$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
  (oft auch kurz wie folgt geschrieben: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$).
  - Falls der Wert $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ gleich Null ist, dann hat die Gleichung nur eine reelle Lösung, nämlich $x_{1/2} = -\dfrac{p}{2}$.
  - Falls der Wert $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ negativ ist, dann hat die Gleichung gar keine reelle Lösung.

  Bemerkung: Ist eine quadratische Gleichung noch nicht in der Form $x^2 + px + q = 0$ gegeben, dann sollte sie zunächst durch äquivalente Umformungen in diese Gestalt überführt werden. Vorher lassen sich die Ausführungen von eben nicht anwenden. Das gilt insbesondere dann, wenn die Gleichung in der Gestalt $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 1$ vorliegt.

- **Quadratische Ungleichungen.** Gesucht seien alle (reellen) Lösungen x einer quadratischen Ungleichung $x^2 + px + q \sim 0$, wobei $\sim$ für eines der Relationszeichen $\leq$, $<$, $\geq$, $>$ steht. Dann sind als erstes alle Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zu bestimmen. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der Ungleichung hängt dann, neben dem Relationszeichen, davon ab, ob die Gleichung zwei unterschiedliche reelle Lösungen x_1, x_2 (mit $x_1 < x_2$) besitzt (im Folgenden als „Fall 1“ bezeichnet) oder nur eine reelle Lösung $x_{1/2}$ besitzt (im Folgenden als „Fall 2“ bezeichnet) oder gar keine reelle Lösung besitzt (im Folgenden als „Fall 3“ bezeichnet).

	$\leq$	$<$	$\geq$	$>$
Fall 1	$\mathcal{L} = [x_1, x_2]$	$\mathcal{L} = (x_1, x_2)$	$\mathcal{L} = (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$	$\mathcal{L} = (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
Fall 2	$\mathcal{L} = \{x_{1/2}\}$	$\mathcal{L} = \emptyset$	$\mathcal{L} = \mathbb{R}$	$\mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus \{x_{1/2}\}$
Fall 3	$\mathcal{L} = \emptyset$	$\mathcal{L} = \emptyset$	$\mathcal{L} = \mathbb{R}$	$\mathcal{L} = \mathbb{R}$

  Bemerkung: Diese Diskussion der Gestalt der Lösungsmenge ist nur dann richtig, wenn die Ungleichung in der Form $x^2+px+q \sim 0$ vorliegt (0 auf der rechten Seite und der quadratische Ausdruck mit dem Faktor 1 vor x^2 auf der linken Seite). Ist das nicht der Fall, sollte sie zunächst durch äquivalente Umformungen in diese Gestalt überführt werden. Dabei ist zu beachten, dass sich beim Multiplizieren mit sowie beim Dividieren durch eine negative Zahl das Relationszeichen umdreht.

- **Umgang mit Beträgen.** Der (absolute) Betrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

  Angenommen, es ist eine Gleichung gegeben, in der die Unbekannte x innerhalb von Betragsstrichen vorkommt. Dann ist zur Lösung der Gleichung eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Vorzeichens des Ausdrucks im Betrag erforderlich. Für jeden Fall entsteht dann eine einfachere Gleichung (bei uns meist eine lineare oder quadratische Gleichung). Man bestimmt dann alle Lösungen dieser einfacheren Gleichung. Am Ende muss man allerdings noch überprüfen, ob alle erhaltenen Lösungen auch die Bedingung des aktuellen Falls erfüllen und somit tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung sind, oder ob gewisse Lösungen der einfacheren Gleichung entfallen.

  Kommen in der Gleichung mehrere Beträge vor, sind entsprechend mehr Fälle zu diskutieren.

  Zur Lösung von Ungleichungen, in denen Beträge vorkommen, geht man analog vor.