Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Dr. Lederle, Dipl. -Inf. Starke

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF-110 - Diskrete Strukturen
Wintersemester 2023/24

1. Übungsblatt für die Woche 16.10. - 20.10.2023

Mengenlehre

Hinweis: Die Nachbereitungsaufgabe, die zur Abgabe bestimmt ist, ist mit einem $\boxed{\text{A}}$ gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen Ihnen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes.

Ü1 (a) Es werden Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\} \text{ und } B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\} \cup (1, 3]$$

als Teilmengen der reellen Zahlen betrachtet. Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$. Skizzieren Sie $A \times B$ in der euklidischen Ebene.

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ definiere $S_i := \{0, 1, \ldots, i\}$. Bestimmen Sie

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i.$$

(c) Beweisen Sie anhand der Definition des geordneten Paars (s. Vorlesung), dass aus $(a, b) = (c, d)$ stets $a = c$ und $b = d$ folgt. Geben Sie ein Beispiel für Mengen a, b, c, d an, für die $\{a, \{b\}\} = \{c, \{d\}\}$ gilt, aber nicht $a = c$ und $b = d$.

(d) Bestimmen Sie für die Menge $A := \{+, \circ\}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$. Wie groß ist die Mächtigkeit der Potenzmenge der Menge $B := \{+, \circ, 1, 5\}$? Bestimmen Sie die Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$ und überprüfen Sie an diesem Beispiel, dass $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist.

Ü2 Überprüfen Sie für jede der folgenden Gleichungen, ob sie für beliebige Mengen A, B und C richtig oder falsch sind. Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$,

(b) $(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B$,

(c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Hinweis: Sie dürfen die in der Vorlesung aufgelisteten Rechenregeln für Mengenoperationen als bekannt voraussetzen.

Ü3 (a) Wo befinden sich die sogenannten Dreieckszahlen $\frac{(n+1)n}{2}$ im Pascalschen Dreieck?

(b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, für die $\binom{n}{2} < \binom{n}{3}$ gilt.

(c) In einer Gruppe von 17 Leuten seien zwei Personen ausgewählt und mit den Spitznamen A und B bezeichnet. Auf wie viele Arten kann man aus dieser Gruppe 12 Leute so auswählen, dass die folgende Regel (R1) bzw. (R2) erfüllt wird:

(R1) falls man A wählt, muss man auch B wählen,

(R2) falls man A wählt, darf man B nicht wählen?

Die Nachbereitungsaufgabe ist bis zum 24.10. bei Opal als einzelnes PDF-Dokument abzugeben.

A (a) Definiere $A \coloneqq \{\{n+2, n+3\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B \coloneqq \{\{n^2, 2^n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Geben Sie jeweils ein Element in den Mengen $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus (A \cup B)$ an.

(b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ wird die Menge

$$M_n \coloneqq \{A \mid A \subseteq \{0, \ldots, n-1\} \text{ und } |A| \text{ gerade}\}$$

betrachtet.

i. Geben Sie M_4 und $(M_4 \cap M_3) \setminus M_2$ als Mengen konkreter Elemente an.

ii. Bestimmen Sie für die Anzahl der Elemente von M_n eine Formel in Abhängigkeit von n. Begründen Sie warum die von Ihnen gefundene Formel richtig ist.

Achtung: Eine saubere Begründung ist hier recht kompliziert, wenn Sie keine finden ist das nicht schlimm.

(c) Beweisen Sie anhand der Definition des Binomialkoeffizienten, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}, n > 8$ gilt:

$$\binom{n}{8} > \binom{n-1}{7}.$$

H1 Von 39 Teilnehmer:innen eines internationalen Studierendentreffens beherrschen 11 die spanische, 19 die englische und 23 die deutsche Sprache. Es gibt nur genau eine Person beim Treffen, die alle drei Sprachen beherrscht. Es sprechen 4 Teilnehmer:innen nur Spanisch und Deutsch, 7 sprechen nur Englisch und Deutsch, und 2 Teilnehmer:innen sprechen nur Spanisch und Englisch.

(a) Wie viele Teilnehmer:innen beherrschen nur eine der drei Sprachen?

(b) Wie viele Teilnehmer:innen beherrschen keine dieser drei Sprachen?

Tipp: Verwenden Sie Venn-Diagramme zur Veranschaulichung.

H2 Gegeben sind folgende Zeichenketten:

$$\{0,1\} \mathrel{?} \mathcal{P}(\{0,1\}), \qquad \{\} \mathrel{?} \mathcal{P}(\{\}), \qquad \mathcal{P}(\{1\}) \mathrel{?} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) \cup \mathcal{P}(\{1,2\}),$$
$$\{a\} \mathrel{?} \{\{a\}\}, \qquad \{\emptyset\} \mathrel{?} \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad \emptyset \mathrel{?} (\{\emptyset\} \cap \mathcal{P}(\{27, 42\})).$$

(a) Bestimmen Sie, in welchen der Zeichenketten das Ersetzen des "?" durch "$\in$" zu einer wahren Aussage führt.

(b) Bestimmen Sie, in welchen der Zeichenketten das Ersetzen des "?" durch "$\subseteq$" zu einer wahren Aussage führt.