Markus Herrich

# Gleichungen mit 2 Variablen, Kombinatorik

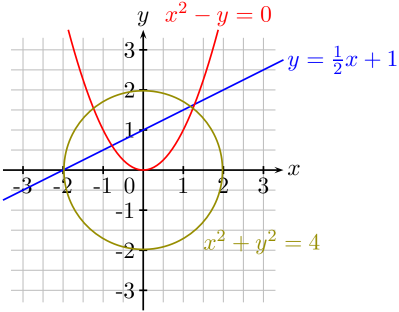
Brückenkurs 2023

# Gleichungen mit 2 Variablen

# Gleichungen mit 2 Variablen: erste Beispiele

Skizziere für jede der folgenden Gleichungen die Menge aller Punkte $(x, y)$, die die Gleichung erfüllen, im Koordinatensystem.

(a) $y = \frac{1}{2}x + 1$  (b) $x^2 - y = 0$  (c) $x^2 + y^2 = 4$



## Was beschreibt eine Gleichung mit 2 Variablen?

Eine Gleichung, die zwei reelle Variablen $x$ und $y$ enthält, beschreibt eine **Punktmenge in der $xy$-Ebene**. Von entarteten Fällen abgesehen, handelt es sich bei dieser Punktmenge um eine **Kurve** in der $xy$-Ebene.

**Spezialfall:** Gleichung liegt in der Gestalt $y = f(x)$ vor.

$\rightarrow$ Dann handelt es sich bei der Kurve um den Graphen einer Funktion.

**Beispiele für entartete Fälle:**

- $x^2 + y^2 = 0$ $\rightarrow$ beschreibt nur einen Punkt
- $x^2 + y^2 = -1$ $\rightarrow$ beschreibt die leere Menge

# Geradengleichungen

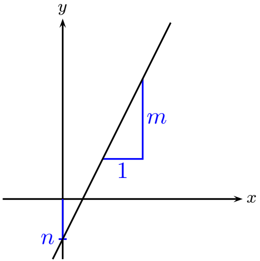
Durch eine Gleichung der Gestalt

$$\boxed{ax + by = c}$$

mit vorgegebenen Zahlen $a, b, c$, wobei $(a, b) \neq (0, 0)$, wird eine Gerade beschrieben.

Vorausgesetzt, die Gerade verläuft nicht senkrecht, lässt sie sich auch in der Normalform beschreiben:

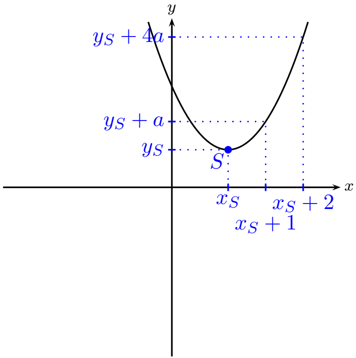
$$\boxed{y = mx + n}$$



# Parabelgleichungen

Durch eine Gleichung der Gestalt $\boxed{y = a(x - x_S)^2 + y_S}$
mit vorgegebenen Zahlen $a, x_S, y_S$, wobei $a \neq 0$, wird eine Parabel beschrieben, deren Symmetrieachse parallel zur $y$-Achse verläuft.

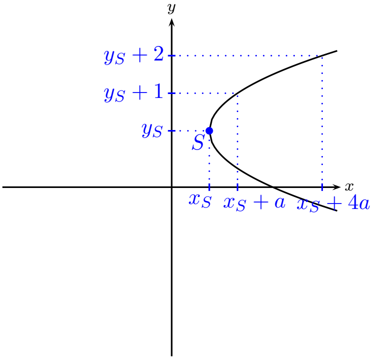
- $(x_S, y_S)$ ist der Scheitelpunkt der Parabel
- nach oben geöffnet, falls $a > 0$;
  nach unten geöffnet, falls $a < 0$



# Parabelgleichungen

Durch eine Gleichung der Gestalt $\boxed{x = a(y - y_S)^2 + x_S}$ mit vorgegebenen Zahlen $a, x_S, y_S$, wobei $a \neq 0$, wird eine Parabel beschrieben, deren Symmetrieachse parallel zur $x$-Achse verläuft.

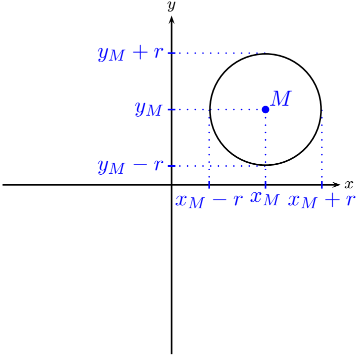
- $(x_S, y_S)$ ist der Scheitelpunkt der Parabel
- nach rechts geöffnet, falls $a > 0$;
  nach links geöffnet, falls $a < 0$



# Kreisgleichungen

Durch eine Gleichung der Gestalt $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$
mit vorgegebenen Zahlen $r, x_M, y_M$, wobei $r > 0$, wird ein Kreis beschrieben.

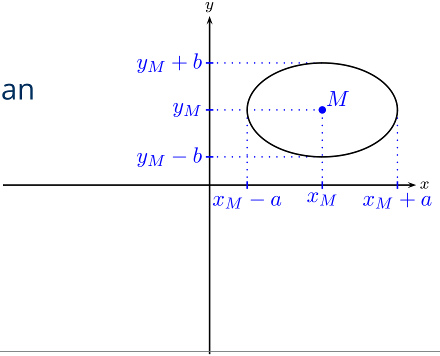
- $(x_M, y_M)$ ist der Mittelpunkt des Kreises
- $r$ ist der Radius des Kreises



# Ellipsengleichungen

Durch eine Gleichung der Gestalt $$\frac{(x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$
mit vorgegebenen Zahlen $a, b, x_M, y_M$, wobei $a, b > 0$, wird eine Ellipse beschrieben, deren Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

- $(x_M, y_M)$ ist der Mittelpunkt der Ellipse
- $a$ und $b$ geben die Längen der Halbachsen an

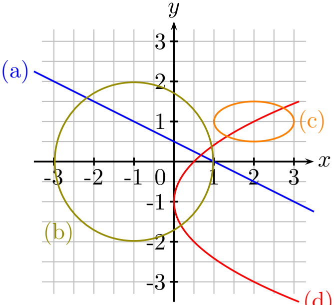


# Gleichungen mit 2 Variablen: Beispiele

Zeichne die durch die folgenden Gleichungen beschriebenen Kurven in ein Koordinatensystem.

(a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ (b) $(x+1)^2 + y^2 = 4$ (c) $(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 1$

(d) $x = \frac{1}{2}(y+1)^2$



## Ungleichungen mit 2 Variablen

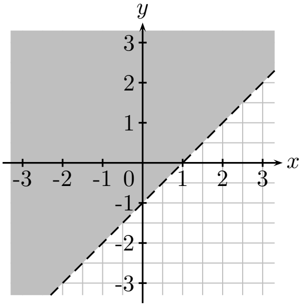
Auch eine Ungleichung, die zwei reelle Variablen $x$ und $y$ enthält, beschreibt eine Punktmenge in der $xy$-Ebene.

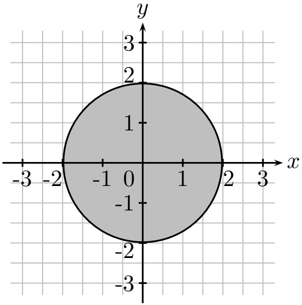
Um diese Punktmenge zu veranschaulichen, sollte man

- zunächst die Begrenzungskurve zeichnen
- und anschließend überlegen, auf welcher Seite davon sich die Punktmenge befindet und ob die Begrenzungskurve selbst dazu gehört.

# Ungleichungen mit 2 Variablen: Beispiele

- $y > x - 1$ beschreibt den Bereich oberhalb der Geraden mit der Gleichung $y = x - 1$ (ohne die Gerade selbst)
- $x^2 + y^2 \leq 4$ beschreibt das Innere des Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $2$ (inkl. der Kreislinie)



# Grundlagen der Kombinatorik

# Problemstellungen in der Kombinatorik

Gegeben seien $n$ Objekte (z.B. $n$ Kugeln, $n$ Geräte, $n$ Personen). In der (abzählenden) Kombinatorik werden unter anderem folgende Problemstellungen untersucht:

1. **Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Objekte anzuordnen?**

   Zur Beantwortung dieser Frage kommt es u.a. darauf an, ob alle Objekte unterschiedlich oder ob einige Objekte untereinander gleich sind.

2. **Wie viele Möglichkeiten gibt es, von den $n$ Objekten nacheinander $k$ Objekte zu entnehmen?**

   Hier kommt es unter anderem darauf an, ob die Reihenfolge, in der die $k$ Objekte entnommen werden, relevant ist oder nicht.

   Außerdem kommt es in beiden Fällen auch noch darauf an, ob die Objekte jeweils mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen entnommen werden.

# Problemstellungen in der Kombinatorik

Folgende Probleme werden wir im Folgenden etwas genauer diskutieren.

- Anzahl der Möglichkeiten, $n$ Objekte anzuordnen, wenn diese alle voneinander verschieden sind
  $\rightarrow$ Anzahl der **Permutationen ohne Wiederholung**
- Anzahl der Möglichkeiten, $n$ Objekte anzuordnen, wenn von diesen einige untereinander gleich sind
  $\rightarrow$ Anzahl der **Permutationen mit Wiederholung**
- Anzahl der Möglichkeiten, von $n$ Objekten $k$ Objekte ohne Zurücklegen zu entnehmen, wenn die Reihenfolge der entnommenen Objekte irrelevant ist
  $\rightarrow$ Anzahl der **Kombinationen $k$-ter Ordnung ohne Wiederholung**

# Problemstellungen in der Kombinatorik

Folgende Probleme werden wir im Folgenden etwas genauer diskutieren.

- Anzahl der Möglichkeiten, von $n$ Objekten $k$ Objekte ohne Zurücklegen zu entnehmen, wenn die Reihenfolge der entnommenen Objekte relevant ist
  $\rightarrow$ Anzahl der **Variationen $k$-ter Ordnung ohne Wiederholung**
- Anzahl der Möglichkeiten, von $n$ Objekten $k$ Objekte mit Zurücklegen zu entnehmen, wenn die Reihenfolge der entnommenen Objekte relevant ist
  $\rightarrow$ Anzahl der **Variationen $k$-ter Ordnung mit Wiederholung**

# Permutationen ohne Wiederholung

Gegeben seien $n$ Objekte. Auf wie viele verschiedene Arten lassen sie sich anordnen, wenn alle Objekte voneinander verschieden sind?

**Antwort:** Die Anzahl aller möglichen Anordnungen ist

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

($n$! wird als „$n$ Fakultät“ gesprochen).

# Permutationen ohne Wiederholung

**Beispiel:** Bei einer Leichtathletik-EM starten im Finale des 100-Meter-Laufs acht Läufer. Wie viele verschiedene Reihenfolgen für den Zieleinlauf gibt es?

In diesem Beispiel ist $n = 8$, es gibt also

$$8! = \underline{\underline{40320}}$$

mögliche Reihenfolgen für den Zieleinlauf.

## Permutationen mit Wiederholung

Gegeben seien wiederum $n$ Objekte. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese anzuordnen, wenn unter den $n$ Objekten einige untereinander gleich sind?

**Einführendes Beispiel:** Gegeben seien $6$ Kugeln: $3$ rote, $2$ blaue und $1$ gelbe.

- Um die $6$ Kugeln auf $6$ Plätze zu verteilen, gibt es zunächst $6!$ Möglichkeiten.
- Wenn aber bei einer gewissen Anordnung die beiden blauen Kugeln miteinander vertauscht werden, dann entsteht in Wirklichkeit keine neue Anordnung.

  $\rightarrow$ Halbierung der Anzahl der Anordnungen
- Entsprechend entsteht keine neue Anordnung, wenn die 3 roten Kugeln untereinander vertauscht werden.
  $\rightarrow$ weitere Reduzierung der Anzahl um den Faktor $3!$

Insgesamt gibt es also nur $\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$ mögliche Anordnungen.

# Permutationen mit Wiederholung

Zurück zum allgemeinen Fall. Angenommen, unter den $n$ Objekten gibt es $s$ Sorten, wobei $n_1$ Objekte zur ersten Sorte gehören, $n_2$ Objekte zur zweiten usw.

Im einführenden Beispiel gab es unter den $n = 6$ Kugeln drei Sorten: drei rote ($n_1 = 3$), zwei blaue ($n_2 = 2$) und eine gelbe ($n_3 = 1$).

Die Anzahl aller möglichen Anordnungen ist dann

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_s!}$$

# Permutationen mit Wiederholung

**Beispiel:** Bei einer Leichtathletik-EM starten im Finale des 100-Meter-Laufs acht Läufer. Davon kommen drei aus Großbritannien, zwei aus Deutschland, zwei aus Frankreich und einer aus Polen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen für den Zieleinlauf gibt es, wenn man sich nicht für die Läufer selbst, sondern nur für die Nationen interessiert?

In diesem Beispiel ist $n = 8$ (acht Läufer) und außerdem $n_1 = 3$ (drei aus Großbritannien), $n_2 = 2$ (zwei aus Deutschland), $n_3 = 2$ (zwei aus Frankreich) und $n_4 = 1$ (einer aus Polen). Hinsichtlich der Nationen gibt es demnach

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = \underline{\underline{1680}}$$

mögliche Reihenfolgen für den Zieleinlauf.

## Variationen ohne Wiederholung

Gegeben seien wiederum $n$ unterschiedliche Objekte. Wie viele Möglichkeiten gibt es, von diesen nacheinander $k$ Objekte zu entnehmen, wenn

- die **Reihenfolge** der entnommenen Objekte **relevant** ist,
- **ohne Zurücklegen** gezogen wird, das heißt, ein Objekt nicht wieder zurückgelegt wird, nachdem es einmal entnommen wurde?

**Antwort:** Die Anzahl der Möglichkeiten dafür ist

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

# Variationen ohne Wiederholung

**Beispiel:** Bei einer Leichtathletik-EM starten im Finale des 100-Meter-Laufs acht Läufer. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Medaillenvergabe gibt es?

In diesem Beispiel sind $n = 8$ und $k = 3$. Es gibt also

$$\frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{\underline{336}}$$

Möglichkeiten für die Vergabe der drei Medaillen.

# Variationen mit Wiederholung

Gegeben seien wiederum $n$ unterschiedliche Objekte. Wie viele Möglichkeiten gibt es, von diesen nacheinander $k$ Objekte zu entnehmen, wenn

- die **Reihenfolge** der entnommenen Objekte **relevant** ist,
- **mit Zurücklegen** gezogen wird, das heißt, ein entnommenes Objekt wieder zurückgelegt wird, bevor der nächste Zug erfolgt?

**Antwort:** Die Anzahl der Möglichkeiten dafür ist

$$n^k$$

# Variationen mit Wiederholung

**Beispiel:** Das Schloss eines Aktenkoffers ist mit einem aus vier Ziffern bestehenden Zahlencode gesichert. Wie viele Möglichkeiten für einen solchen Code gibt es?

In diesem Beispiel sind $n = 10$ und $k = 4$. Es gibt also

$$10^4 = \underline{\underline{10000}}$$

Möglichkeiten für einen aus vier Ziffern bestehenden Code.

# Kombinationen ohne Wiederholung

Gegeben seien wiederum $n$ unterschiedliche Objekte. Wie viele Möglichkeiten gibt es, von diesen nacheinander $k$ Objekte zu entnehmen, wenn

- die **Reihenfolge** der entnommenen Objekte **keine Rolle** spielt,
- **ohne Zurücklegen** gezogen wird, das heißt, ein Objekt nicht wieder zurückgelegt wird, nachdem es einmal entnommen wurde?

  – Mit Beachtung der Reihenfolge gäbe es $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

  – Jede Permutation der $k$ gezogenen Objekte soll nun aber nicht als neue Möglichkeit zählen.
  $\rightarrow$ Reduzierung der Anzahl um den Faktor $k!$

## Kombinationen ohne Wiederholung

Um aus $n$ Objekten nacheinander und ohne Zurücklegen $k$ Objekte zu entnehmen, gibt es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge der entnommenen Objekte keine Rolle spielt.

$\binom{n}{k}$ ist dabei der sogenannte **Binomialkoeffizient**. Gesprochen wird dieser Ausdruck als „$n$ über $k$“.

# Kombinationen ohne Wiederholung

**Beispiel:** Beim Lotto 6 aus 49 werden aus 49 Kugeln (durchnummeriert von 1 bis 49) nacheinander und ohne Zurücklegen sechs Kugeln gezogen. Die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, spielt für das Ergebnis keine Rolle. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

In diesem Beispiel ist $n = 49$ und $k = 6$. Demzufolge gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \underline{\underline{13\,983\,816}}$$

Möglichkeiten.

## Ausblick: Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit nur endlich vielen Ergebnissen (möglichen Ausgängen). Falls jedes Ergebnis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt, spricht man von einem **Laplace-Experiment**.

Ein **Ereignis** eines Zufallsexperimentes ist eine Teilmenge der Ergebnismenge, das heißt, eine Menge von Ergebnissen.

Bei einem Laplace-Experiment lässt sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses nach der folgenden Formel berechnen:

$$\frac{\text{Anzahl der Ergebnisse, die zum Ereignis gehören}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse des Zufallsexperimentes}}.$$

Die Anzahlen in Zähler und Nenner lassen sich häufig mit Hilfsmitteln aus der Kombinatorik berechnen.

## Ausblick: Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Beispiel:** Bei einer Lotto-Ziehung 6 aus 49 handelt es sich um ein Laplace-Experiment, denn jede Ziehung ist gleichwahrscheinlich. Die Anzahl aller Ergebnisse dieses Zufallsexperiments beträgt $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man mit einem Tipp $6$ Richtige?

Antwort: Zum Ereignis „sechs Richtige“ gehört nur ein Ergebnis (denn nur eine mögliche Ziehung stimmt mit dem abgegebenen Tipp überein). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7{,}15 \cdot 10^{-8} = 0{,}00000715\%.$$

## Ausblick: Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage: Mit welcher Wkt. hat man mit einem Tipp genau $4$ Richtige?

Antwort: Wir überlegen, wie viele Ergebnisse zum Ereignis „genau 4 Richtige" gehören.

D.h., wie viele der möglichen Ziehungen bestehen aus genau 4 der getippten und aus genau 2 der nicht getippten Zahlen?

Zunächst gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten dafür, dass eine Ziehung genau 4 der 6 getippten Zahlen enthält. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es $\binom{43}{2}$ Möglichkeiten für die zwei übrigen, nicht getippten Zahlen.

Die gesuchte Anzahl beträgt somit $\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13\,545$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, genau vier Richtige zu erzielen, beträgt somit

$$\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 9{,}69 \cdot 10^{-4} = 0{,}0969\%.$$