Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich



# Merkblatt zur 3. Übung am 25. September 2023
## Thema: Lineare Gleichungssysteme, weitere Aufgaben zu Rechenoperationen, zu Termumformungen und zum Lösen und Umstellen von Gleichungen

### Summenzeichen $\Sigma$

Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Dann bedeutet $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ nichts weiter als die Summe $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Statt $k$ kann auch eine andere Bezeichnung für den Summationsindex verwendet werden. Dieser muss außerdem nicht bei 0, er kann auch bei einer anderen natürlichen Zahl beginnen.

**Beispiele:**

$$\sum_{k=0}^{4} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30, \qquad \sum_{i=1}^{3} (3i-4) = (3 \cdot 1 - 4) + (3 \cdot 2 - 4) + (3 \cdot 3 - 4) = 6$$

### Potenzgesetze

Für alle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $p, q \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Gleichheiten (vorausgesetzt, die Potenzen sind jeweils definiert).

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \qquad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}, \qquad x^p \cdot y^p = (xy)^p \qquad \frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p \qquad (x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

### Wurzeln und Logarithmen

- Sei $x \geq 0$ eine vorgegebene nichtnegative Zahl. Die **(Quadrat-) Wurzel** aus $x$, geschrieben als $\sqrt{x}$, ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat gleich $x$ ist.

  Beispiele:

  - $\sqrt{81} = 9$, denn $9^2 = 81$
  - $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, denn $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

  Allgemeiner ist die ***m*-te Wurzel** aus $x$, geschrieben als $\sqrt[m]{x}$, diejenige nichtnegative Zahl, deren $m$-te Potenz gleich $x$ ist.

  Beispiele:

  - $\sqrt[3]{125} = 5$, denn $5^3 = 125$
  - $\sqrt[10]{1024} = 2$, denn $2^{10} = 1024$

- Seien $a > 0$ und $x > 0$ vorgegebene positive Zahlen. Der **Logarithmus von *x* zur Basis *a***, geschrieben als $\log_a(x)$, ist diejenige Zahl $b$, für die gilt: $a^b = x$. Um einen solchen Logarithmus zu berechnen, ist also die Frage zu beantworten, womit $a$ potenziert werden muss, um $x$ zu erhalten.

  Beispiele:

  - $\log_3(81) = 4$, denn $3^4 = 81$
  - $\log_5(\frac{1}{25}) = -2$, denn $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Der Logarithmus einer Zahl $x$ zur Basis e (Eulersche Zahl) wird anstelle von $\log_{\mathrm{e}}(x)$ meist mit $\ln(x)$ bezeichnet. Der Logarithmus einer Zahl $x$ zur Basis 10 wird anstelle von $\log_{10}(x)$ häufig mit $\lg(x)$ bezeichnet.

**Umschreiben von Wurzeln und Quotienten als Potenz:**

- Wurzeln lassen sich als Potenzen mit gebrochenem Exponenten umschreiben: $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$. Speziell: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
- Quotienten lassen sich als Potenzen umschreiben: $\dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$.