Michael Schröder
Zentrum für Lehrerbildung, Schul- und Berufsbildungsforschung

Analytische Geometrie

Brückenkurs 2023

Inhaltsverzeichnis

Begriffsbedeutung – Analytische Geometrie

Der Grundgedanke der Analytischen Geometrie besteht darin, dass geometrische Untersuchungen mit rechnerischen Mitteln geführt werden. Geometrische Objekte werden durch Gleichungen beschrieben und mit algebraischen Methoden untersucht.

Kernideen:

-Geometrische Objekte werden als Punktmengen aufgefasst

-Koordinatisierung

1 Vektoren

1 Vektoren

Aus dem Alltag:

Es existieren (physikalische) Größen, die durch Angabe einer Zahl vollständig beschrieben werden:

z.B.:

Es existieren aber auch (physikalische) Größen, wo die Angabe einer Zahl nicht genügt:

z.B.:

Zur vollständigen Beschreibung benötigt man:

-Richtung

-Orientierung

-Länge (Betrag)

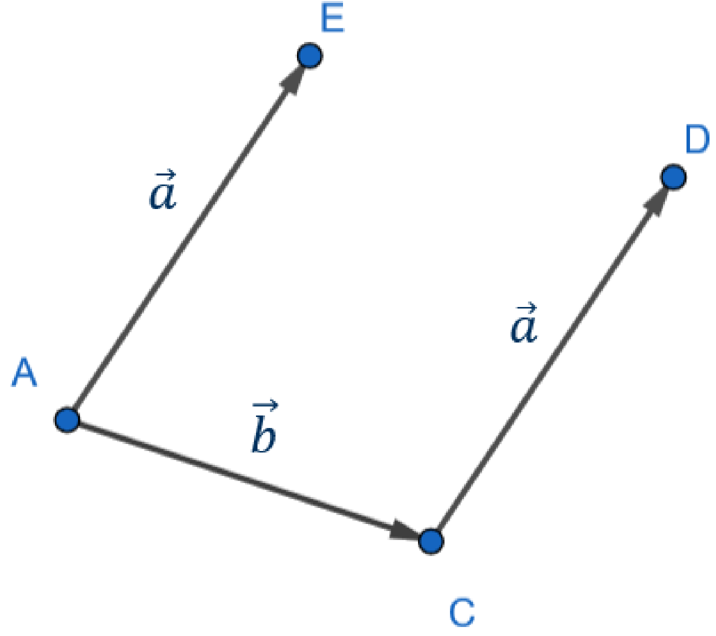
Vektoren

1 Vektoren

Definition:

Im zwei- oder dreidimensionalen Raum betrachten wir ein beliebiges Punktepaar (A, E), wobei A den Anfangspunkt und E den Endpunkt bezeichnet, und bezeichnen dieses Paar als **Pfeil**.

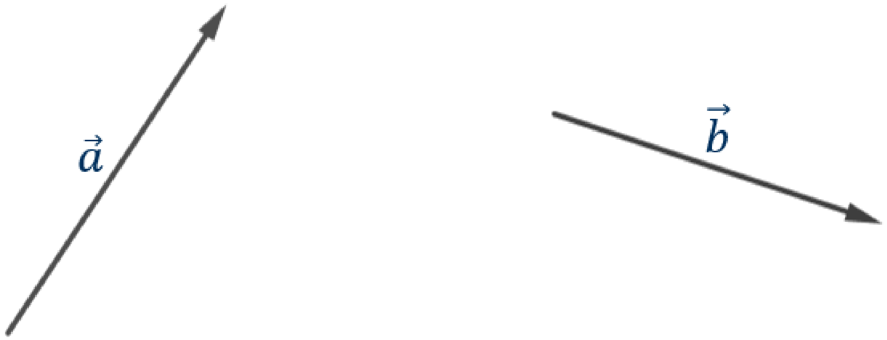
Eine Menge von parallelen Pfeilen mit gleicher Orientierung und gleicher Länge bezeichnet man als **Vektor**.



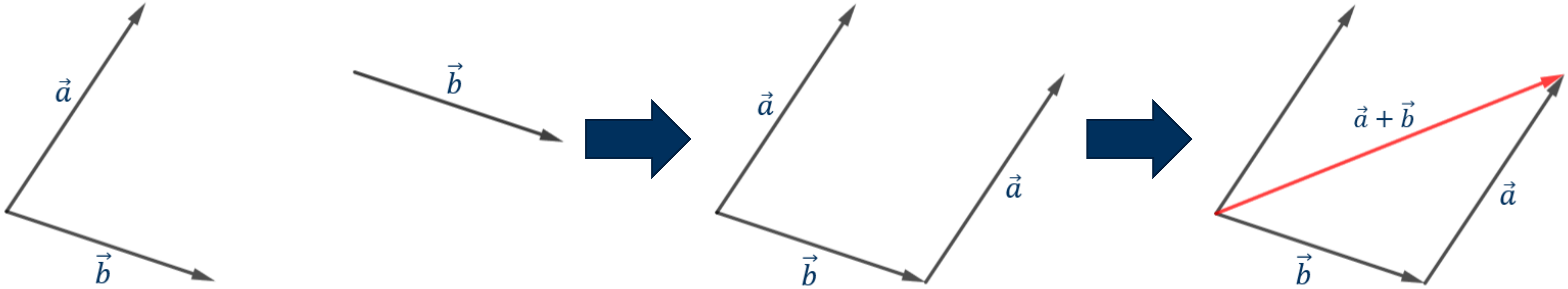
$\vec{a} \neq \vec{b}$

1 Vektoren

Rechnen mit Vektoren

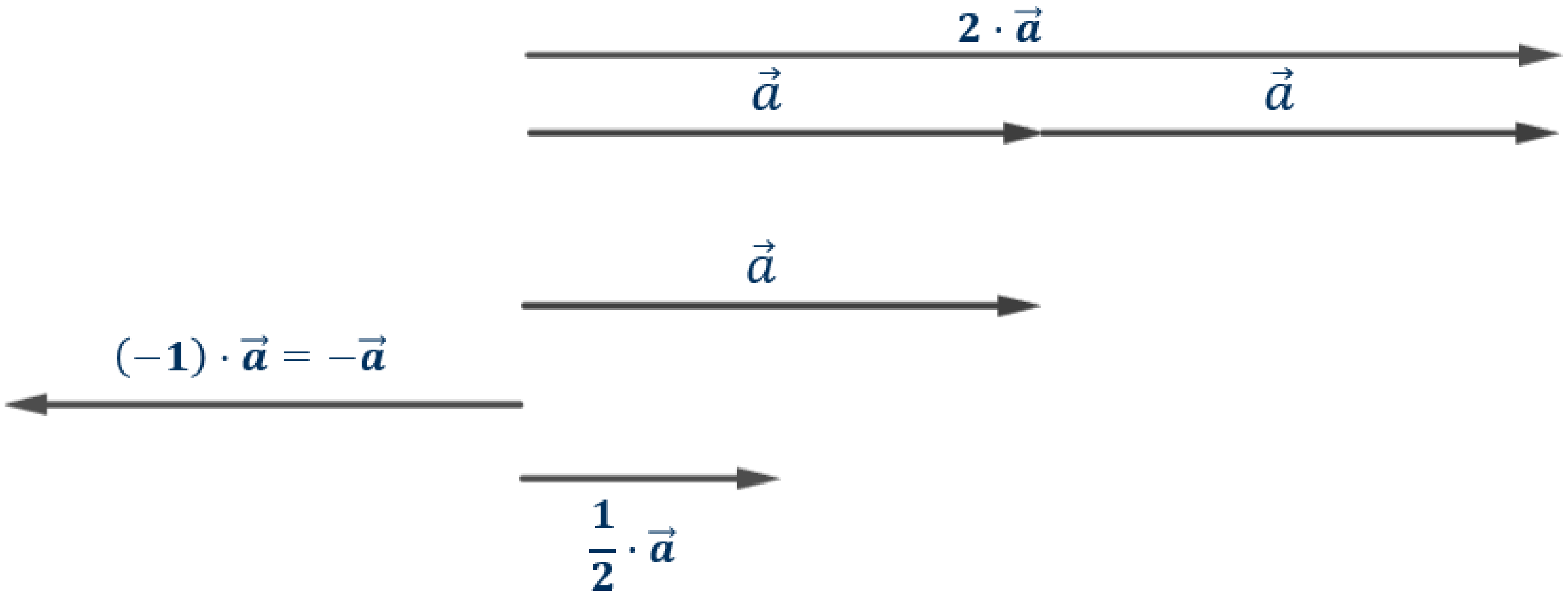


$\vec{a} + \vec{b}$:



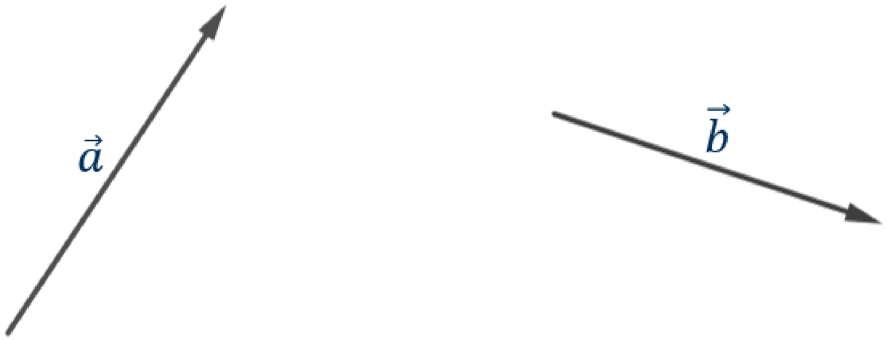
Rechnen mit Vektoren

$\boldsymbol{r} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$:

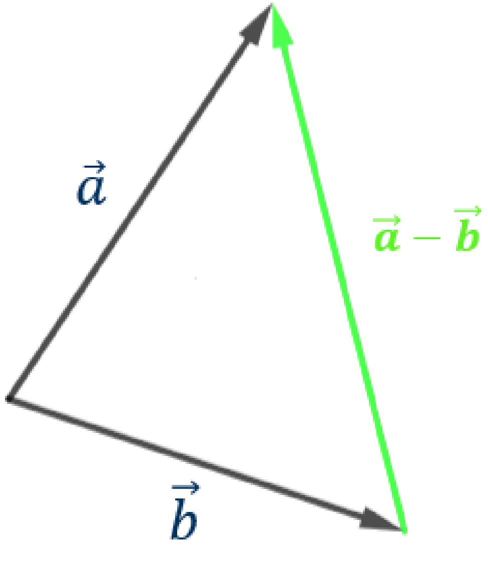


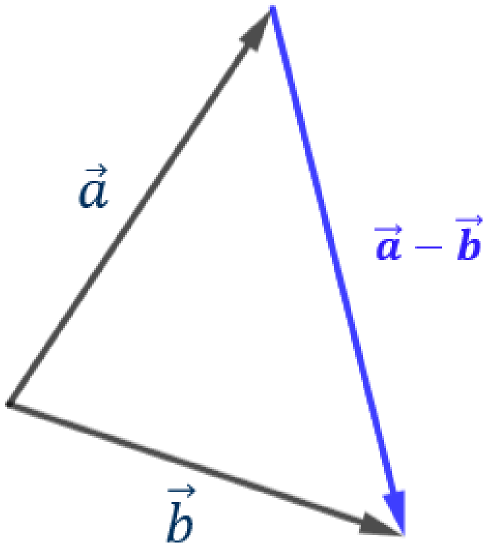
1 Vektoren

Rechnen mit Vektoren



$\vec{a} - \vec{b}$:

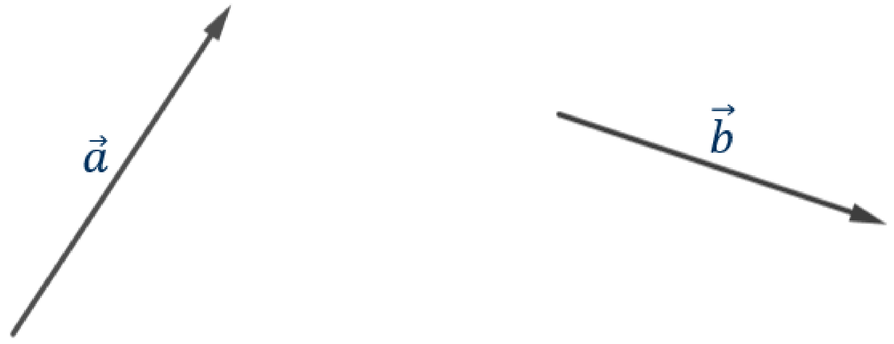




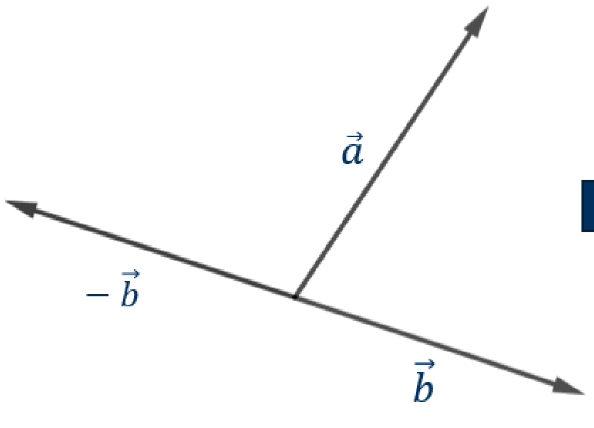
?

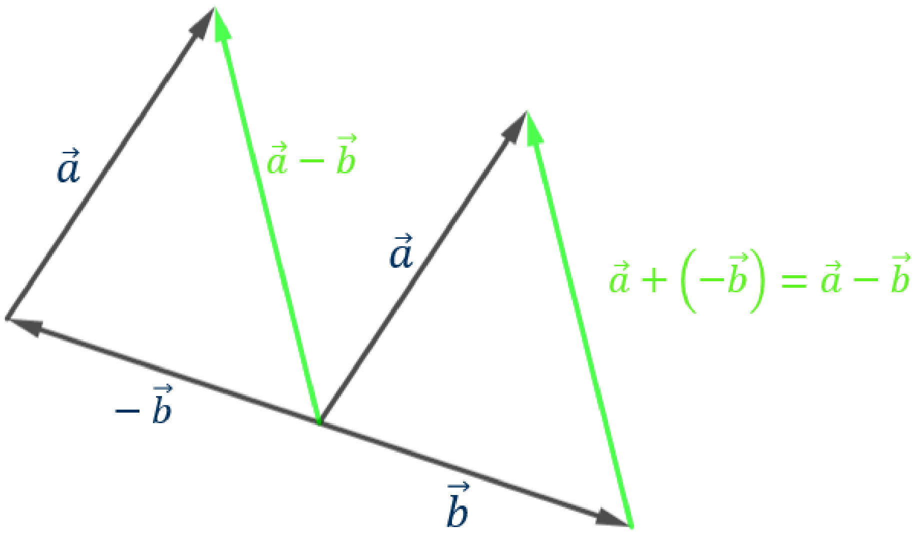
1 Vektoren

Rechnen mit Vektoren



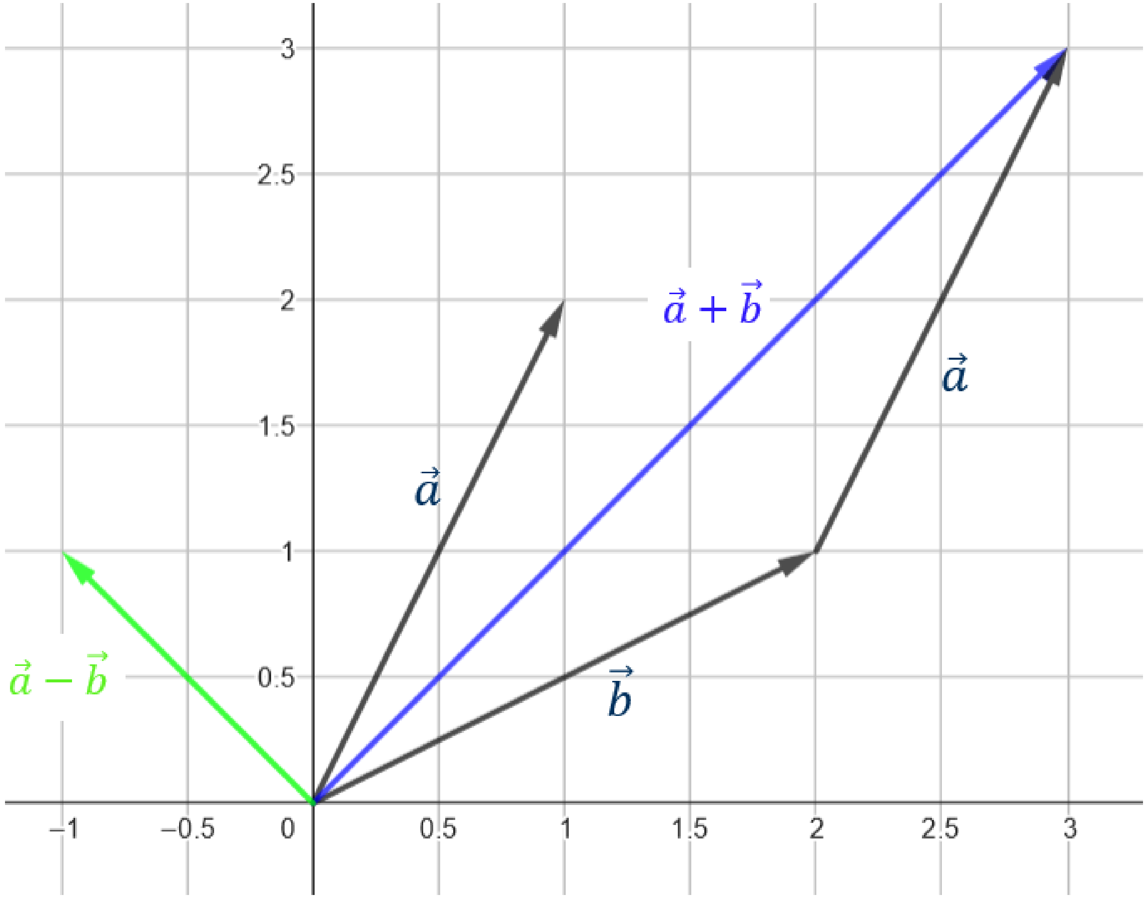
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right):$





1 Vektoren

Rechnen mit Vektoren – Koordinatisieren



$\vec{a} = \binom{1}{2}$, $\vec{b} = \binom{2}{1}$

Aus der Abbildung

$\vec{a} + \vec{b} = \binom{3}{3}$, $\vec{a} - \vec{b} = \binom{-1}{1}$

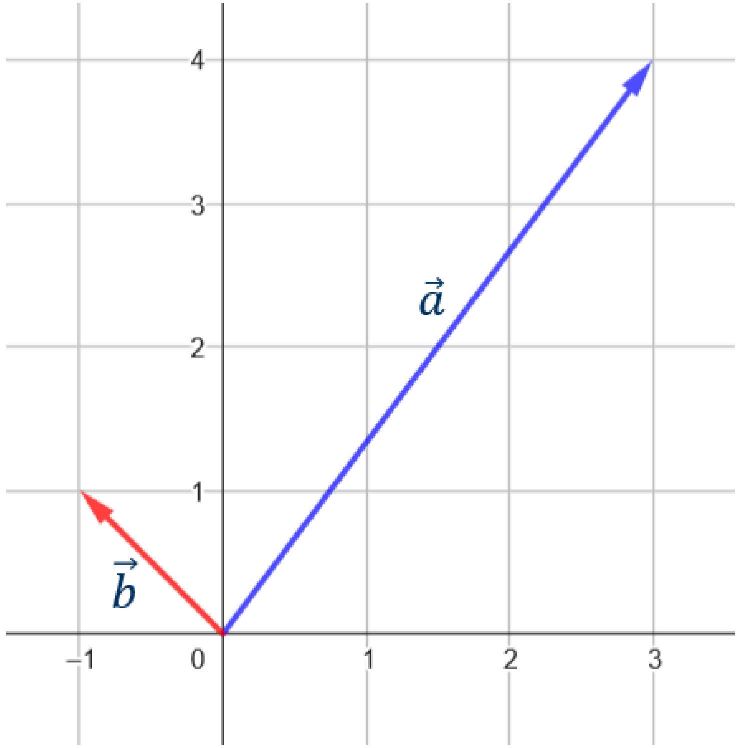
Offensichtliche Rechnung: Komponentenweise

$\vec{a} + \vec{b} =$

$\vec{a} - \vec{b} =$

1 Vektoren

Betrag/Länge eines Vektors



Wir bezeichnen die Länge eines Vektors $\vec{a}$ mit $a = |\vec{a}|$.

Zur Ermittlung nutzt man den Satz des Pythagoras:

Sei $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$, dann gilt $\quad a^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad$ und somit

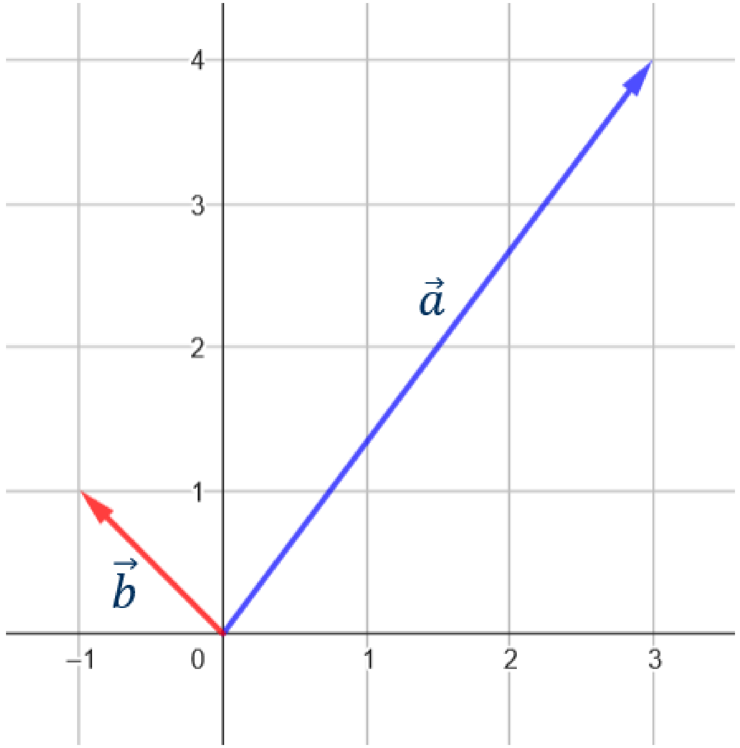
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

In der Abbildung: $\vec{a} = \binom{3}{4}$ $\qquad a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{b} = \binom{-1}{1}$ $\qquad b = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{-1^2 + 1^2} = \sqrt{-1 + 1} = \sqrt{0} = 0$

1 Vektoren

Betrag/Länge eines Vektors



Wir bezeichnen die Länge eines Vektors $\vec{a}$ mit $a = |\vec{a}|$.

Zur Ermittlung nutzt man den Satz des Pythagoras:

Sei $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$, dann gilt $a^2 = a_1^2 + a_2^2$ und somit

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

In der Abbildung: $\vec{a} = \binom{3}{4}$ $\quad a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\vec{b} = \binom{-1}{1}$ $\quad b = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

Jetzt richtig

1 Vektoren

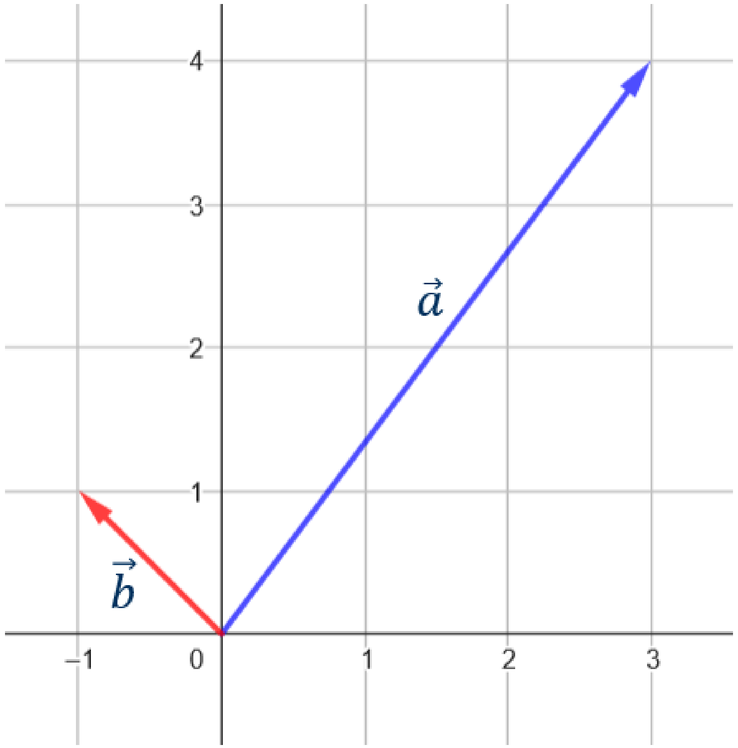
Betrag/Länge eines Vektors

Wir bezeichnen die Länge eines Vektors $\vec{a}$ mit $a = |\vec{a}|$.

Zur Ermittlung nutzt man den Satz des Pythagoras:

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, dann gilt $a^2 = a_1^2 + a_2^2$ und somit

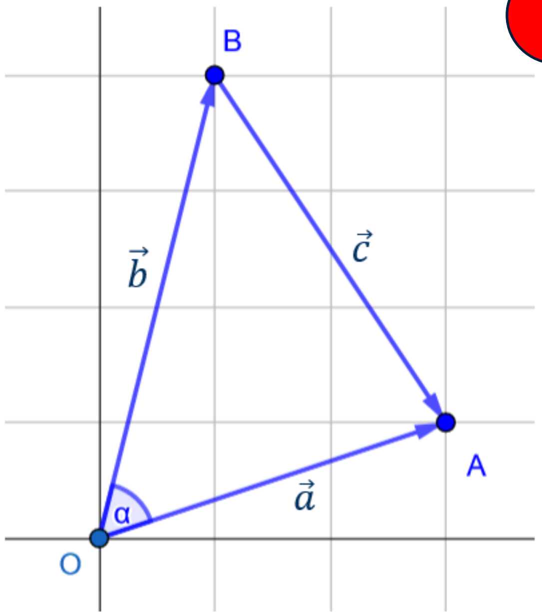
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



Für Vektoren mit drei Komponenten gilt analog: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt



Wir betrachten das Dreieck OAB mit $O(0|0)$, $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$.

Es seien $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$,

$\alpha = \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right), a = |\vec{a}|, b = \left|\vec{b}\right|, c = |\vec{c}|$.

Mit dem Kosinussatz kann man für dieses Dreieck schreiben:

$$c^2 =$$

Einsetzen der obigen Bezeichnungen führt zu: $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$

Es folgt ein wenig elementare Mathematik…

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$ Beträge ersetzen

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 = a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$ linke Seite auflösen

$$a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2 = a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$ Subtrahieren der $(.)^2$

$$-2a_1b_1-2a_2b_2 = -2\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$ Division durch -2

$$a_1b_1+a_2b_2 = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

Dieser Zusammenhang wird häufiger benötigt, daher führen wir für diese Gleichung eine neue Schreibweise ein:

Kurzform der Definition: Skalarprodukt $\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$

Daraus kann gefolgert werden: $\vec{a}\circ\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2$

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Im Raum: $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Aus $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$ folgt für $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$: $\cos\alpha =$

Für $\alpha \in [0°; 90°)$ gilt $\cos\alpha > 0$ und somit $\vec{a} \circ \vec{b} > 0$.

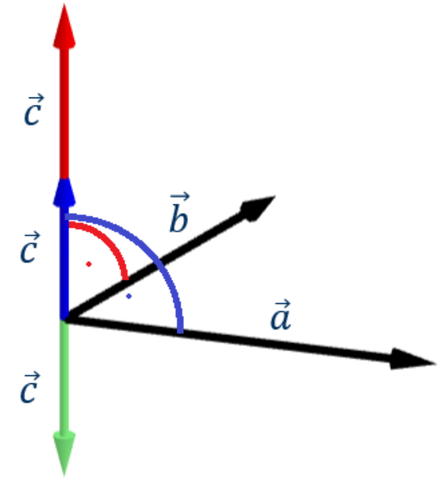
Für $\alpha = 90°$ gilt $\cos\alpha = 0$ und somit $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$. Or

Für $\alpha \in (90°; 180°]$ gilt $\cos\alpha < 0$ und somit $\vec{a} \circ \vec{b} < 0$.

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Wir betrachten im Raum zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die keine Vielfachen voneinander sind.

Finden wir einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl senkrecht zu $\vec{a}$ als auch senkrecht zu $\vec{b}$ ist?



Ziel: $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

Aus der Orthogonalitätsbedingung des Skalarprodukts folgt demnach der Ansatz für $\vec{c}$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{c} \perp \vec{a}:\quad & 0 = \vec{c} \circ \vec{a} = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ \vec{c} \perp \vec{b}:\quad & 0 = \vec{c} \circ \vec{b} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \end{aligned}\right\}$$

Unterbestimmtes LGS

Da das LGS mit $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ eine Lösung besitzt,

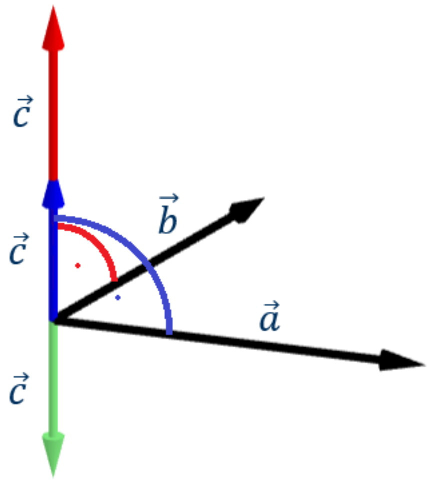
muss es unendlich viele Lösungen besitzen.

Ist dies nicht offensichtlich?

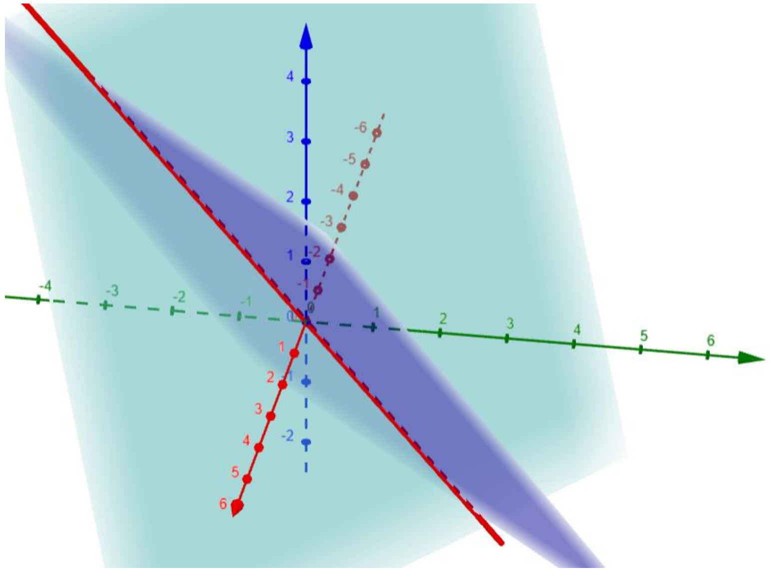
2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

$0 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$

$0 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3$



Interpretation als Ebenengleichungen



Wir schauen uns von den unendlich vielen Lösungen eine Spezielle an...

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

I $\quad 0 = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \quad | \cdot b_1$

II $\quad 0 = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \quad | \cdot a_1$

I-II $\quad 0 = a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_1b_3c_3)$

$0 = c_2 \cdot (a_2b_1 - a_1b_2) + c_3 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3) \quad | - c_2 \cdot (a_2b_1 - a_1b_2)$

$-c_2 \cdot (a_2b_1 - a_1b_2) = c_2 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) = c_3 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3)$

III $\quad c_2 \cdot \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{=} = c_3 \cdot \underbrace{(a_3b_1 - a_1b_3)}_{=}$

Da unendlich viele Lösungen existierten und ich nur eine spezielle Lösung möchte, wähle ich:

$$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$$
$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Damit ergibt sich für c_1: $\quad c_1 = a_2b_3 - a_3b_2$

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Wir haben damit einen Vektor $\vec{c}$ gefunden, der die Orthogonalitätsbedingungen ($\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$) erfüllt. Dieser hat folgende Komponentendarstellung:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

-Die Darstellung ist **eine** Möglichkeit von unendlich vielen.

-Da häufiger ein Vektor mit diesen Bedingungen gesucht wird, hat man dieses Ergebnis zur folgenden Definition erhoben:

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Definition **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt** genannt)

Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wie kann man sich dies merken?

$$\begin{array}{ccc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \cancel{a_2} & \cancel{b_2} & a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & \end{array}$$

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Das Vektorprodukt hat ganz viele Eigenschaften. Von denen betrachten wir nur diese genauer:

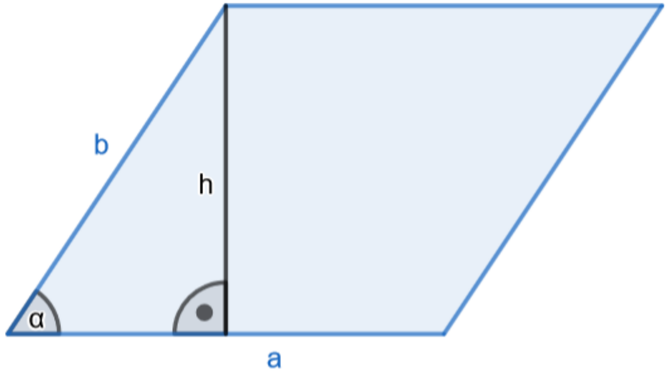
$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

-Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf (wenn diese keine Vielfachen voneinander sind).

-Für den Flächeninhalt F eines Parallelogramms gilt:

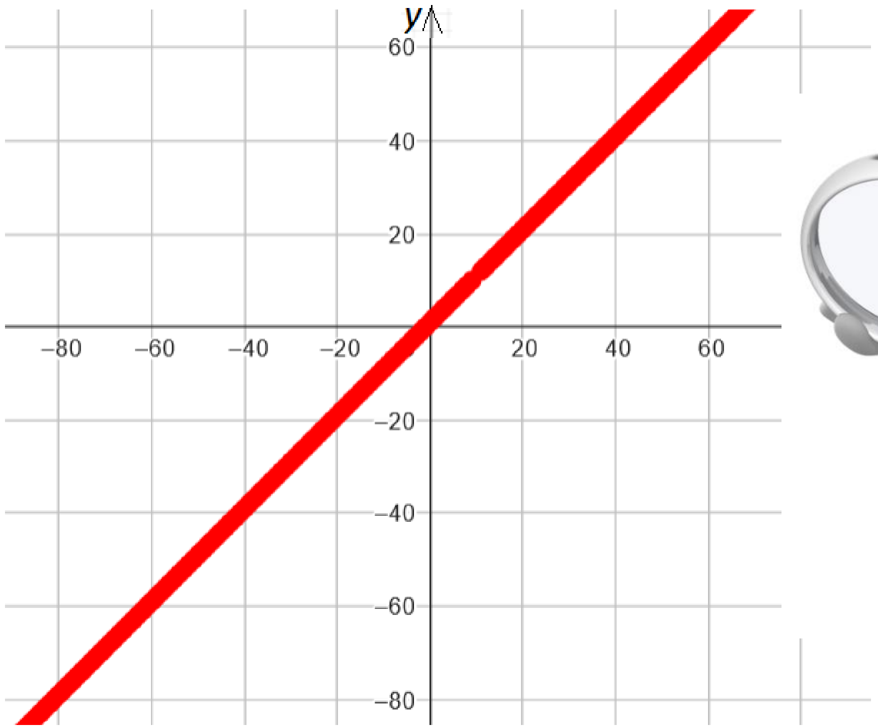
$F = a \cdot b \cdot \sin \sphericalangle(a, b)$

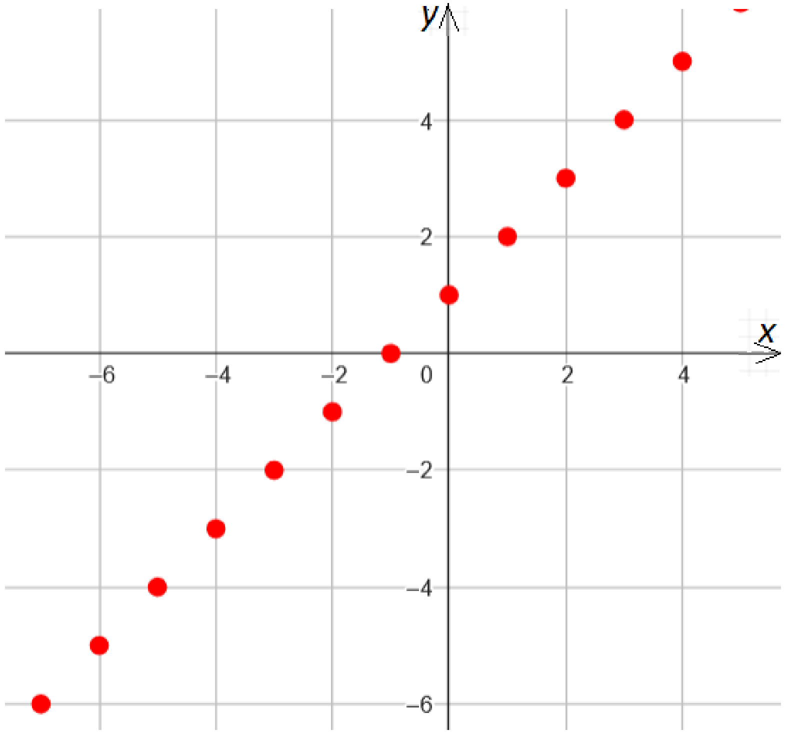
-Es kann allgemein gezeigt werden: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = F$



3 Geraden und Ebenen

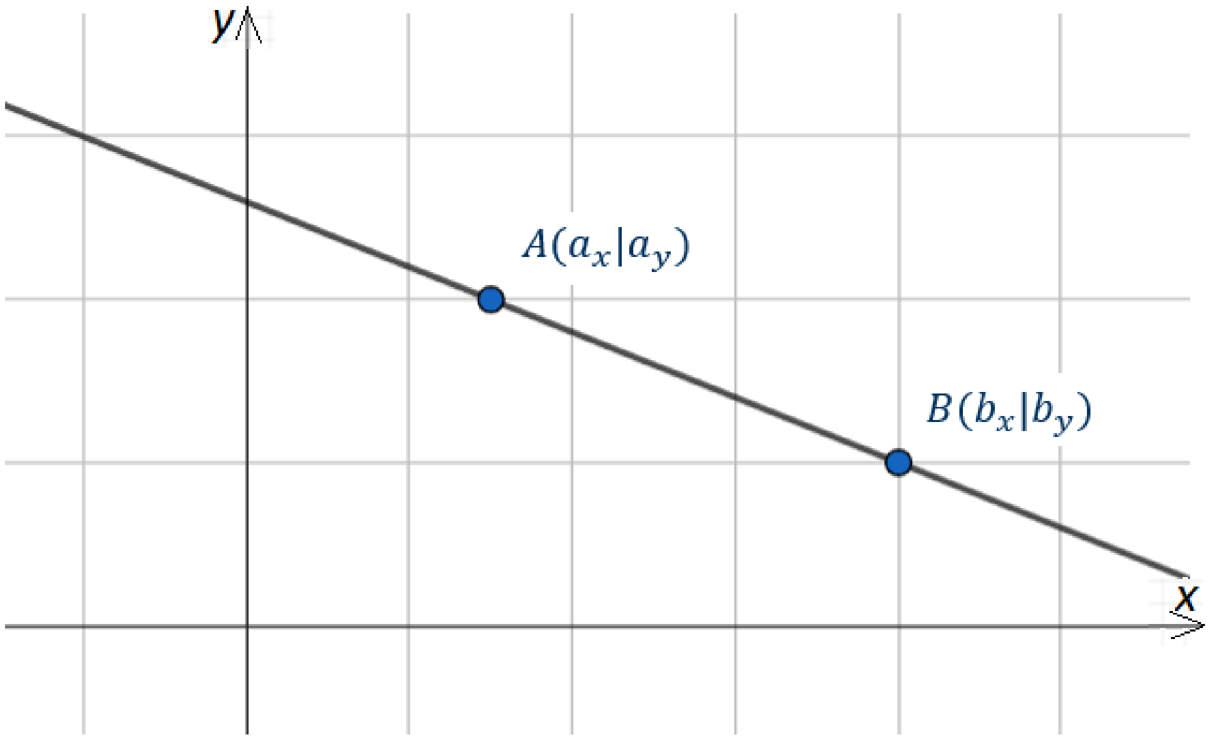
Was ist eine Gerade?





3 Geraden und Ebenen

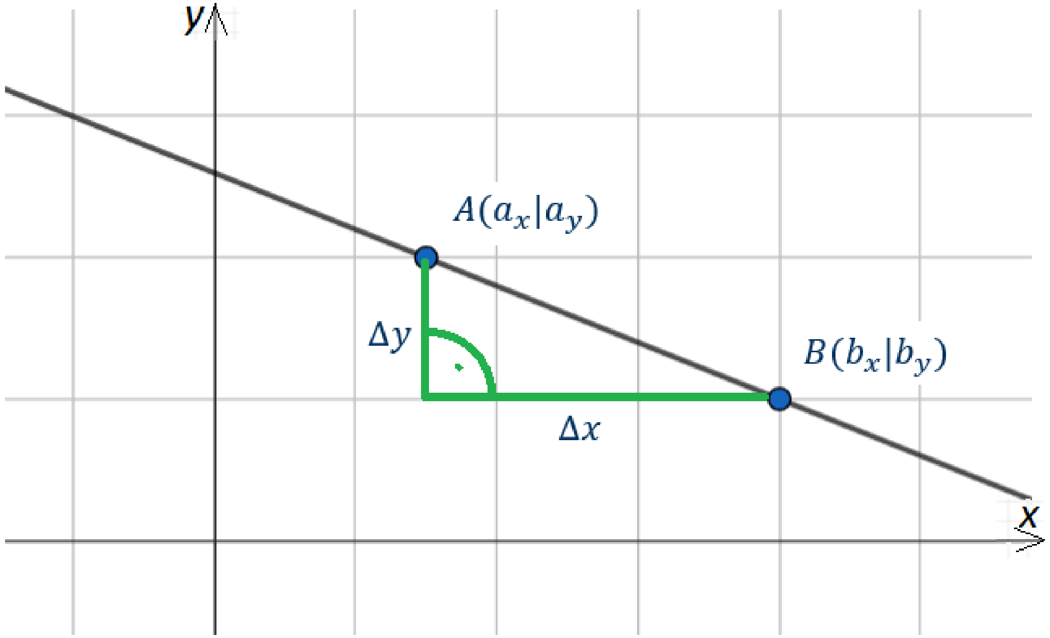
Geraden in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$)



Darstellungsmöglichkeiten:

3 Geraden und Ebenen

Geraden in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$) – parameterfreie Darstellung



Ansatz: $y = m \cdot x + n$ mit

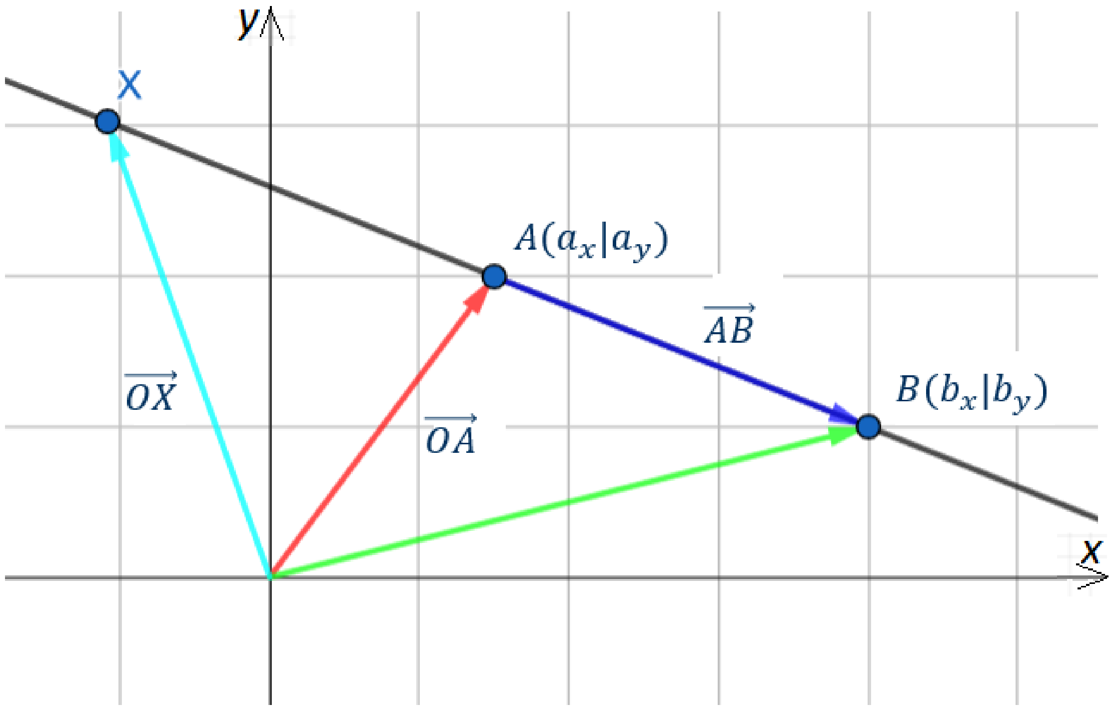
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x}$ ...Anstieg

n...y – Achsenabschnitt

Ermittlung von n: Nach Bestimmung von m, wird ein Punkt der Gerade in die Geradengleichung eingesetzt. Die Gleichung wird nach n aufgelöst.

z.B.: Aus $y_A = m \cdot x_A + n = \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x} \cdot x_A + n$ folgt $n = y_A - \frac{b_y - a_y}{b_x - a_x} \cdot x_A$

Geraden in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$) – Parameterdarstellung



Sei X ein beliebiger Punkt auf der Gerade g, die durch die Punkte A und B verläuft.

Somit folgt, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AX}$ parallel sind, d.h. sie sind Vielfache voneinander.

Demnach existiert eine Zahl t mit $\overrightarrow{AX} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.

Umgekehrt existiert zu jedem t auch ein X.

Weiterhin gilt nach Subtraktion von Vektoren:

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$

Dies liefert: $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = t \cdot \overrightarrow{AB}$.

Addition von $\overrightarrow{OA}$ ergibt letztendlich: $\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}\ ,}$

Geraden in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$) – Parameterdarstellung

$$g : \vec{x}(t) = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} \;, \qquad t$$

Stützvektor

3 Geraden und Ebenen

Geraden in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$)

- Es existieren weitere Darstellungsformen (Normalenform, Hesse'sche Normalenform, Achsenabschnittsform, …).
- Da alle Darstellungsformen die gleiche Gerade beschreiben können, müssen die verschiedenen Darstellungsformen ineinander überführbar sein (dies kann u.a. in den Übungsaufgaben trainiert werden).
- Falls jemand nach einer senkrechten Gerade s zur Gerade g fragt:

  Für die Anstiege gilt: $m_g \cdot m_s = -1$

  Für die Richtungsvektoren gilt: $\vec{v}_g \circ \vec{v}_s = 0$ Mit $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ kann $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

3 Geraden und Ebenen

Geraden im Raum (im $\mathbb{R}^3$)

- Es existiert die Parameterdarstellung analog zum $\mathbb{R}^2$ (eine Komponente mehr).
- Zur parameterfreien Darstellung des $\mathbb{R}^2$ gibt es im $\mathbb{R}^3$ keine ähnliche Darstellung.
- **Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$**

  - **Darstellung von Geraden.** Im $\mathbb{R}^3$ (d.h. im dreidimensionalen Raum) lässt sich eine Gerade nach wie vor durch eine Parameterdarstellung beschreiben. Hingegen ist die Darstellung durch eine parameterfreie Gleichung <u>nicht</u> mehr möglich.

Hier muss ich widersprechen:

3 Geraden und Ebenen

Geraden im Raum (im $\mathbb{R}^3$)

Der Mathematiker Julius PLÜCKER (deutscher Mathematiker, 1801 bis 1868) hat eine parameterfreie Gleichung einer Gerade im Raum angegeben:

Seien $\vec{v}$ ein Richtungsvektor und G ein Punkt der Gerade g, so gilt nur für die Punkte $X \in g$:

$$g: \ \vec{v} \times \overrightarrow{GX} = \vec{0}$$

Diese Darstellung einer Geraden wird Plücker-Form genannt.

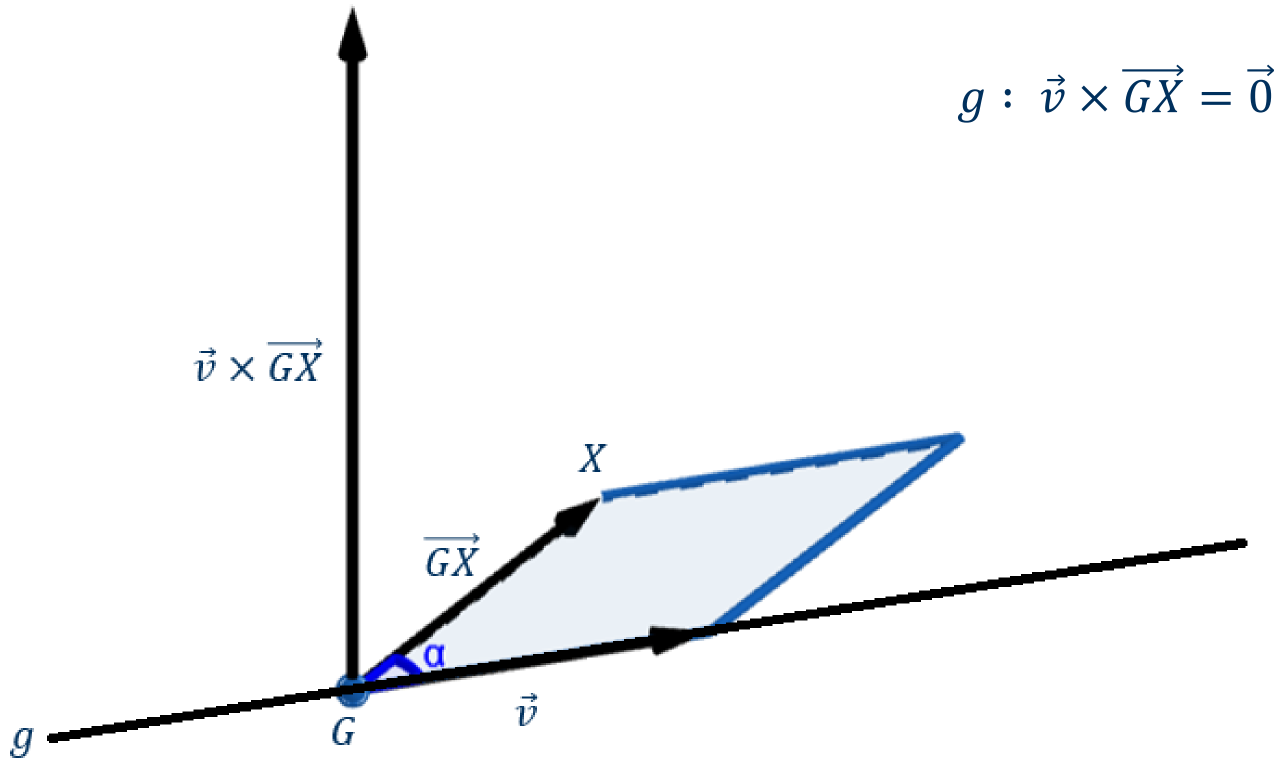
3 Geraden und Ebenen

Geraden im Raum (im $\mathbb{R}^3$)

Plücker-Form

Seien $\vec{v}$ ein Richtungsvektor und G ein Punkt der Gerade g, so gilt nur für die Punkte $X \in g$:

$$g:\ \vec{v} \times \overrightarrow{GX} = \vec{0}$$



Lagebeziehungen von Geraden

Geraden können…

-
-
-
-

Nutzbare Nachweisverfahren kennen Sie bereits aus der Schule bzw. sind schnell im Internet zu finden. Diese werden hier nicht vorgestellt.

3 Geraden und Ebenen

Lagebeziehung: Punkt – Gerade

Seien P ein Punkt und g eine Gerade. Dann gibt es nur zwei mögliche Lagebeziehungen:

$P \in g$ oder

Falls $P \in g$ gilt, so existiert eine reelle Zahl t, mit der $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ gilt.

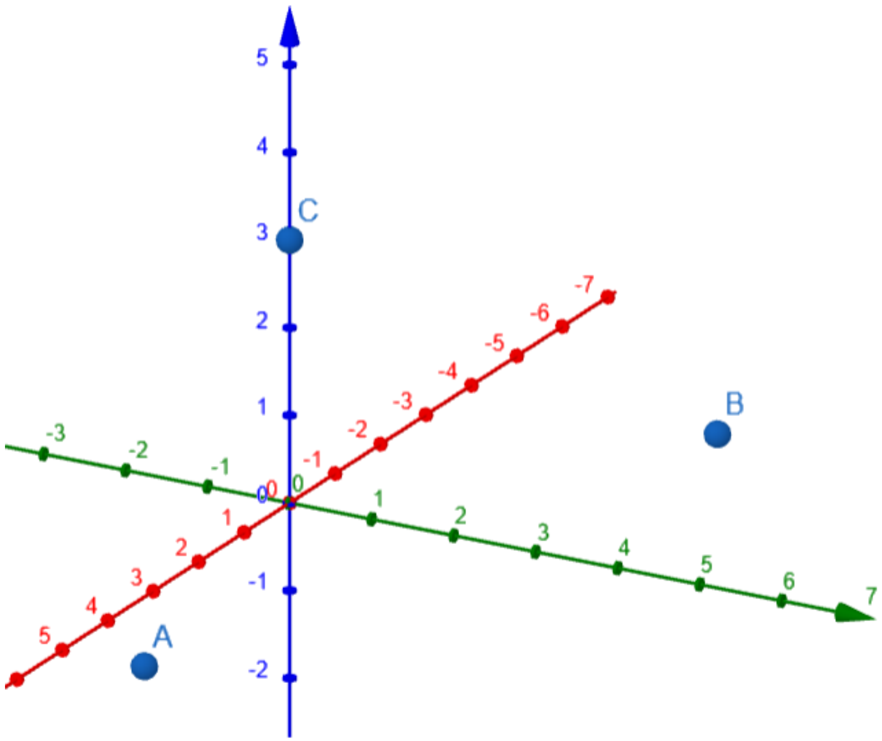
Falls $P \notin g$ gilt, so existiert keine reelle Zahl t, mit der $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ gilt.

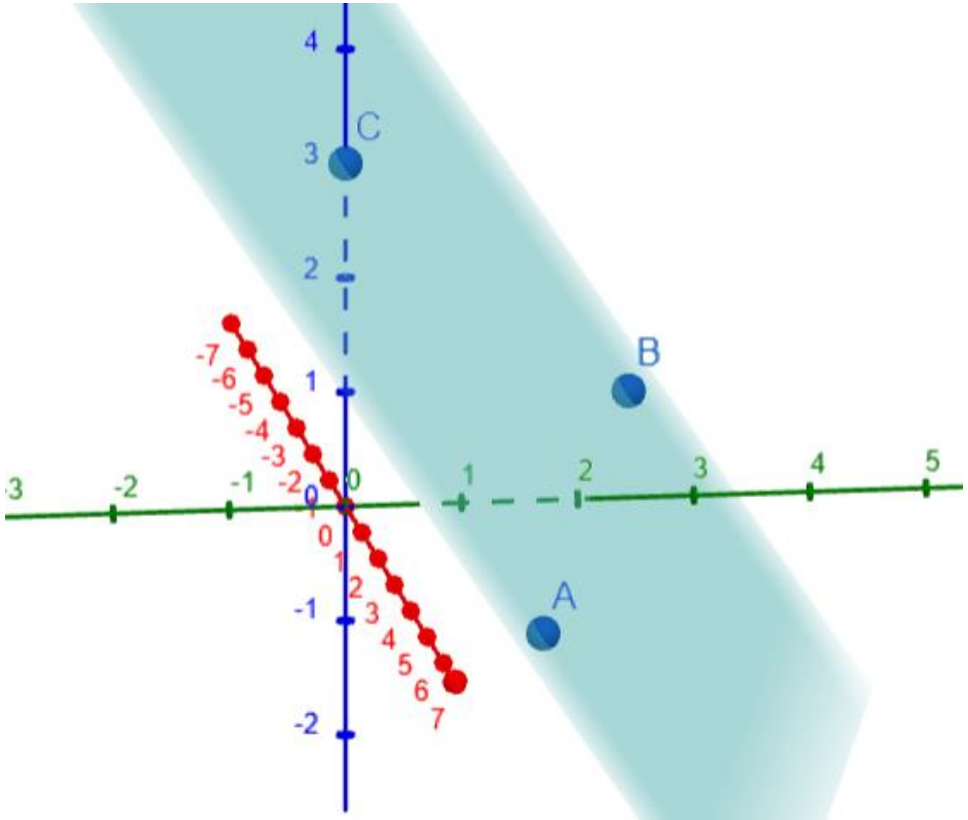
Dieses Verfahren wird auch Punktprobe genannt.

Das Verfahren der Punktprobe existiert auch für Geraden in parameterfreien Form.

3 Geraden und Ebenen

Ebenen





3 verschiedene Punkte im Raum, die nicht auf einer Gerade liegen, erzeugen genau eine Ebene.

Ebenen - Darstellungsformen

Parameterdarstellung

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \quad ,r,s \in \mathbb{R}$$

Stützvektor Spannvektoren

Parameterfreie Darstellung

$$E : ax + by + cz = d$$

3 Geraden und Ebenen

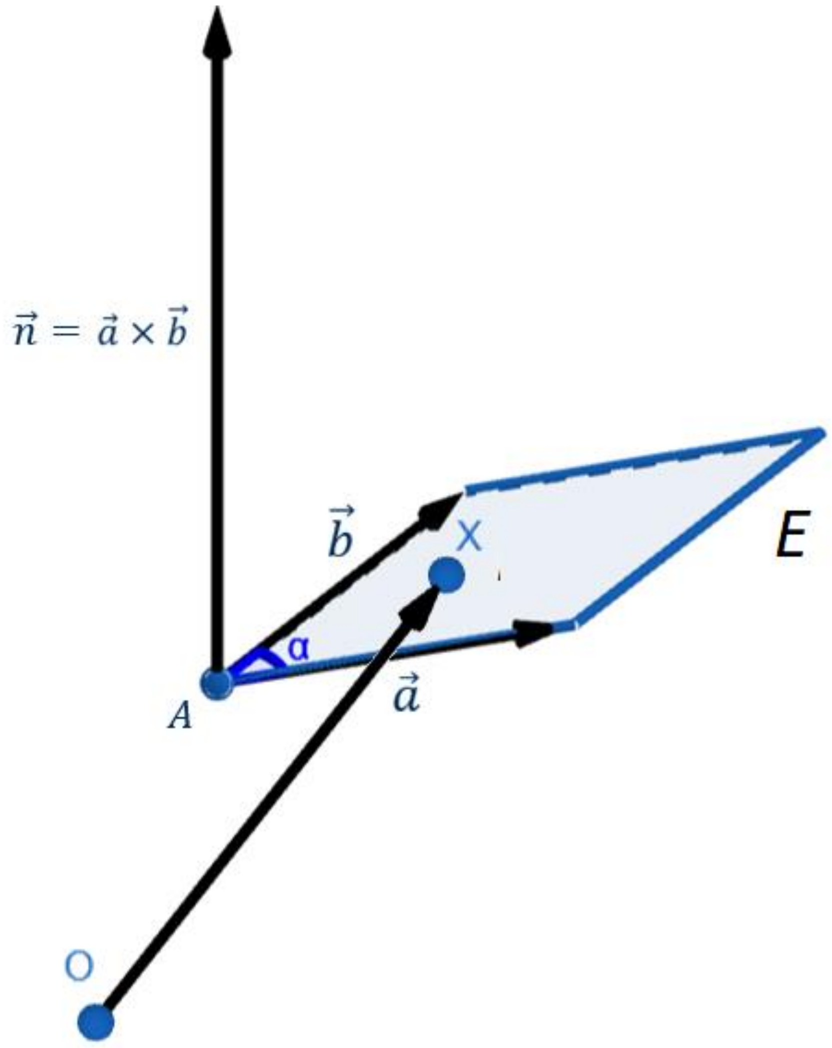
Ebenen - Darstellungsformen

Seien A, B und C drei nicht auf einer Gerade liegenden Punkte und E die Ebene, in der diese drei Punkte liegen. Dann lautet eine zugehörige Parameterdarstellung der Ebene:

$$E\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \quad , r, s \in \mathbb{R}$$

Sei X ein beliebiger Punkt der Ebene E, d.h. es existieren reelle Zahlen r und s, so dass obige Gleichung für den Punkt X erfüllt ist.

Dann gilt:



3 Geraden und Ebenen

Ebenen - Darstellungsformen

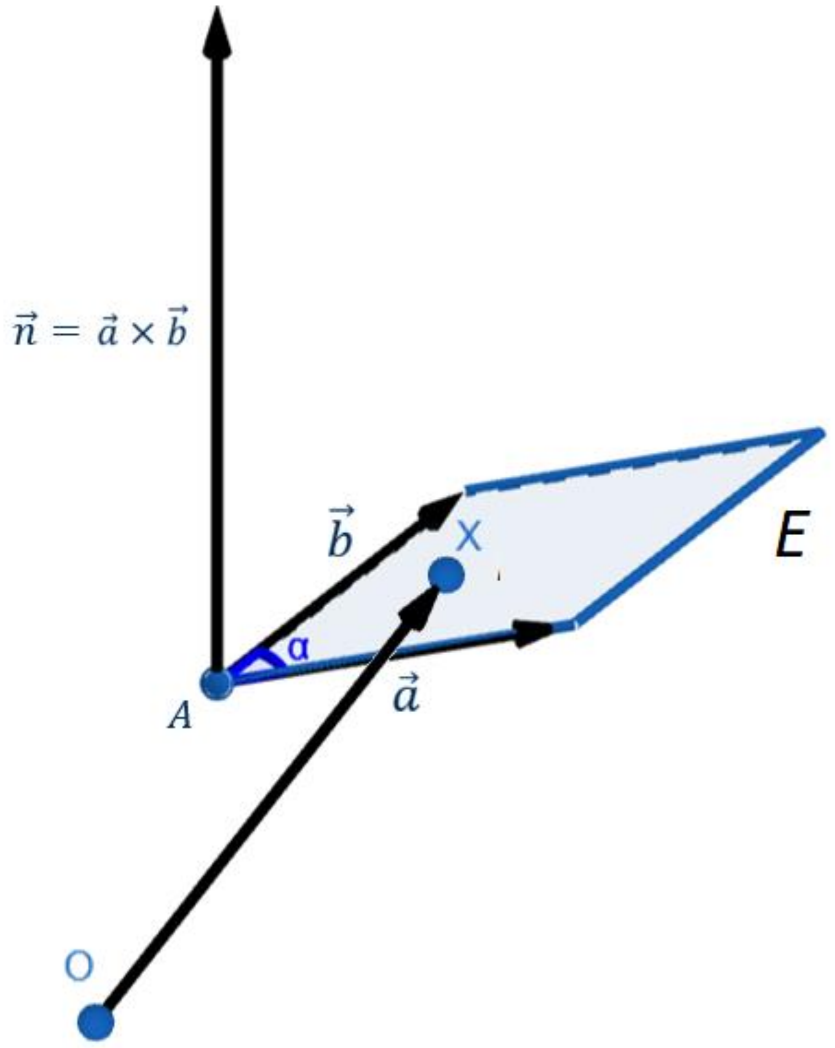
$\overrightarrow{AX} \circ \vec{n} = 0 \quad$ mit $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

Aus $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$ folgt mit der obigen Orthogonalitäts-bedingung:

$$0 = \overrightarrow{AX} \circ \vec{n} = \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right) \circ \vec{n} = \overrightarrow{OX} \circ \vec{n} - \overrightarrow{OA} \circ \vec{n} \qquad | + \overrightarrow{OA} \circ \vec{n}$$

$$\overrightarrow{OX} \circ \vec{n} = \underbrace{\overrightarrow{OA} \circ \vec{n}}_{= d}$$

Mit $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ folgt



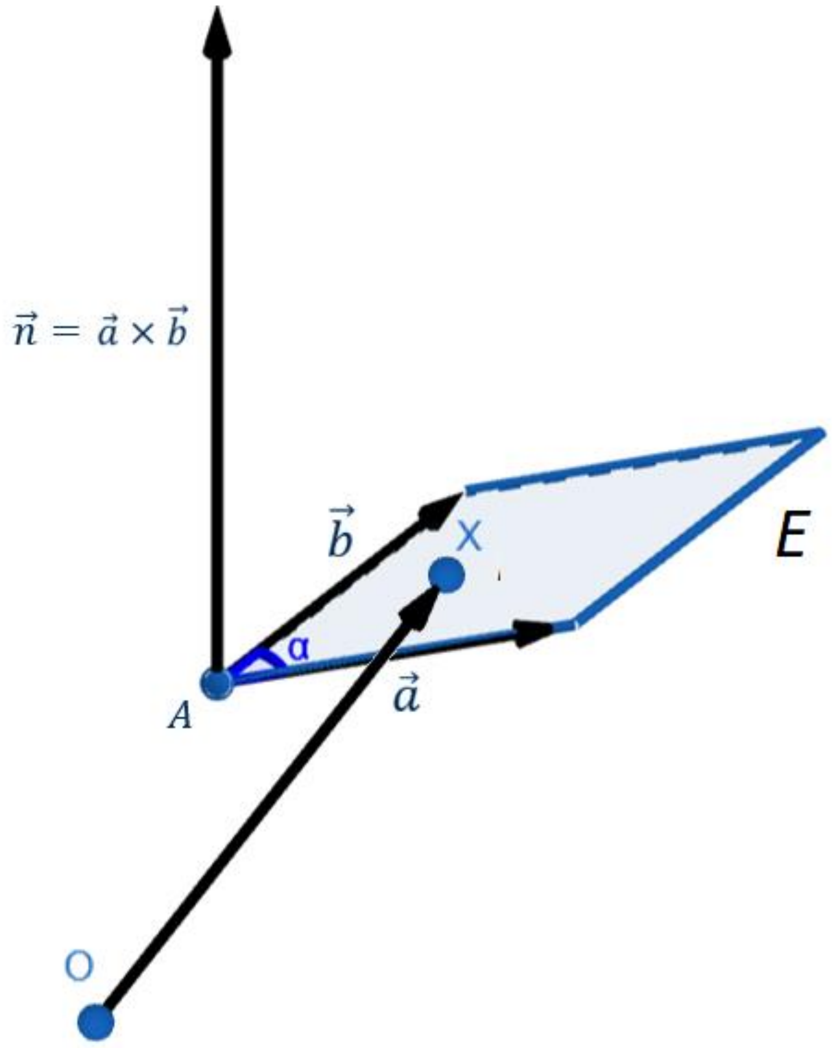
3 Geraden und Ebenen

Ebenen - Darstellungsformen

$$\overrightarrow{OX} \circ \vec{n} = \overrightarrow{OA} \circ \vec{n}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d$$

$$ax + by + cz = d$$



Das ist genau die parameterfreie Darstellung der Ebene E.

Die Parameter a, b und c bilden also **einen** Normalenvektor der Ebene E.

3 Geraden und Ebenen

Ebenen - Darstellungsformen

Annahme: Drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen, sind in der Ebene E mit

$E : x - 2y + 3z = 2.$

Es ist möglich, dass die Umwandlung der Parameterform von E in die parameterfreie Form diese Gleichung liefert:

$$E : \; -2x + 4y - 6z = -4$$

Das ist nicht schlimm! Beide Gleichungen können durch Multiplikation mit einer reellen Zahl ineinander überführt werden, d.h. die Gleichungen sind äquivalent, d.h. die Lösungsmengen sind identisch. Es handelt sich demnach immer noch um die gleiche Ebene E.

Ebenen - Darstellungsformen

Es gibt weitere Darstellungsformen:

Normalenform

Hesse‘sche Normalenform

…

3 Geraden und Ebenen

Lagebeziehungen mit Ebenen

Seien P ein Punkt, g eine Gerade und E eine Ebene.

Punkt – Ebene Entweder $P \in E$ oder $P \notin E$ Nachweis mittels Punktprobe

Gerade – Ebene Entweder $g \in E$ oder $g || E$ oder g schneidet E

$\vec{v}_g \perp \vec{n}$

Es existieren verschiedene Verfahren zur Schnittpunktbestimmung.

$P \in g \Rightarrow P \in E$ $P \in g \Rightarrow P \notin E$

3 Geraden und Ebenen

Lagebeziehungen mit Ebenen

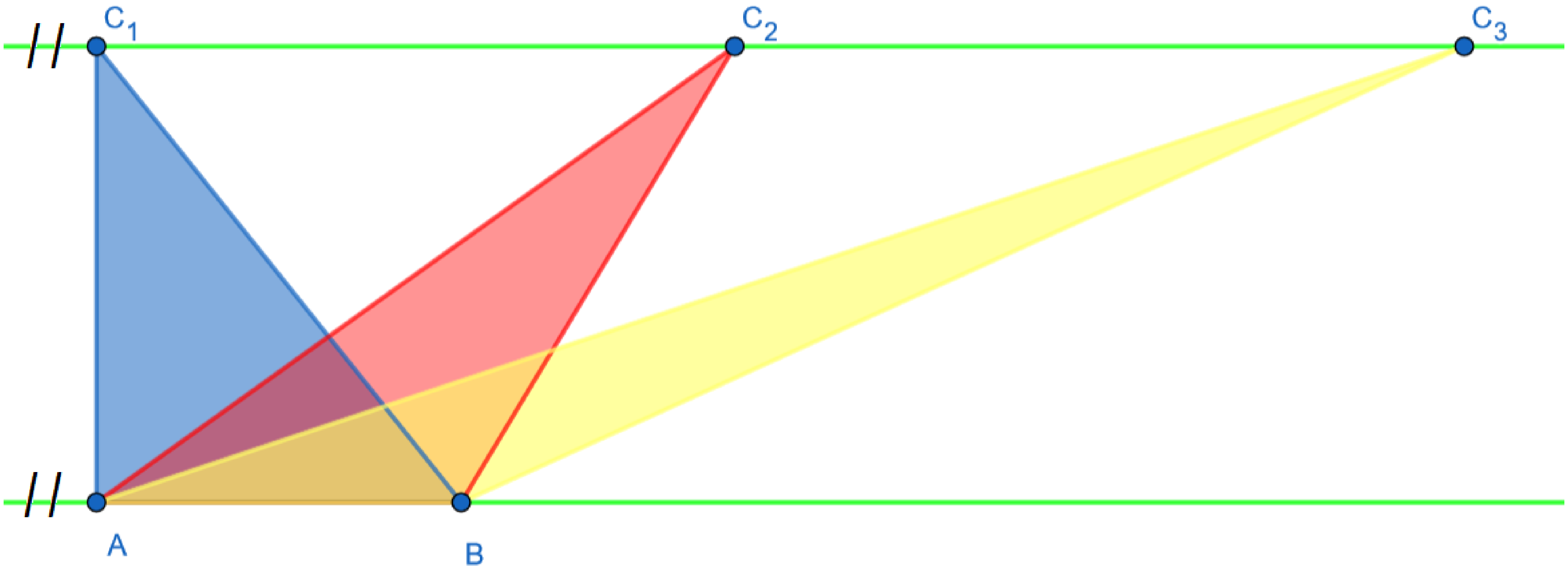
Ebene – Ebene Entweder $E_1 = E_2$ oder $E_1||E_2$ oder E_1 und E_2 schneiden sich

Je nach Ebenendarstellung bietet sich ein anderes Nachweisverfahren an.

4 Abstände

4 Abstände

Welches Dreieck hat den größten Flächeninhalt?



4 Abstände

Auf dem Merkblatt steht u.a.:

- **Abstand Punkt – Gerade.** Gegeben seien ein Punkt $P = (x_P, y_P)$ und eine Gerade g. Gesucht sei der Abstand des Punktes von der Geraden.

  Die Geradengleichung sollte zunächst in die Gestalt $ax + by = c$ überführt werden (falls sie nicht schon in dieser Form vorliegt). Dann lässt sich der gesuchte Abstand wie folgt berechnen:

$$\operatorname{dist}(P, g) = \left| \frac{ax_P + by_P - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| .$$

Standardproblem: Was muss ich denn jetzt wie und wo einsetzen und eigentlich rechnen?!

Kernproblem: Wieso gilt diese Gleichung? Woher kommt diese?!

4 Abstände

Beispiel:

Seien A und P Punkte, $\vec{v}$ der Richtungsvektor einer Gerade g und $A \in g$. Dann gilt für den Abstand d des Punktes P von der Gerade g:

$$d = dist(P, g) = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}$$

Mehr als 1000 Worte: