TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

A. Schwartz
Fakultät Mathematik ▪ Institut für Numerische Mathematik

Brückenkurs Mathematik

Vorlesung 2: Zahlen, Rechnen, Gleichungen und Fehler

Ziele der heutigen Vorlesung – Gliederung

Ziele der heutigen Vorlesung

- wichtige Zahlenräume wiederholen

  Natürlich, rational oder doch eher komplex?

- wichtige Rechenoperationen wiederholen

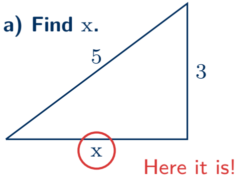
  Team „ausmultiplizieren“ oder Team „faktorisieren“?

- Ansätze zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen wiederholen

  find x

- typische Fehler vermeiden

  how not to



Zahlen – Gliederung

Welche Arten von Zahlen kennen wir?

Die natürlichen Zahlen

Definition

Die Menge der **natürlichen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Wir verwenden auch oft die Menge

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Die ganzen Zahlen

Definition

Die Menge der **ganzen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Die rationalen Zahlen

Definition

Die Menge der **rationalen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{r}{q} : r, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Die reellen Zahlen

Definition

Die Menge der **reellen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{R} := \{\mathrm{r} : \mathrm{r} \text{ lässt sich als Grenzwert von rationalen Zahlen konstruieren}\}.$$

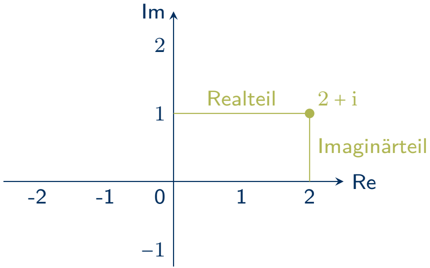
Die komplexen Zahlen

Definition

Die Menge der *komplexen Zahlen* ist definiert als

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\},$$

wobei $i := \sqrt{-1}$ die *imaginäre Einheit* ist.



Zulässige Rechenoperationen auf verschiedenen Zahlenmengen

Zahlenmenge	$+$	$-$	$\cdot$	$:$	$\sqrt{\ }$	$\lim$
$\mathbb{N}$	ja	teilweise	ja	teilweise	teilweise	–
$\mathbb{Z}$	ja	ja	ja	teilweise	teilweise	–
$\mathbb{Q}$	ja	ja	ja	ja	teilweise	teilweise
$\mathbb{R}$	ja	ja	ja	ja	teilweise	ja
$\mathbb{C}$	ja	ja	ja	ja	ja	ja

„Zulässig“ heißt hier, dass z.B. der Quotient von zwei rationalen Zahlen immer eine rationale Zahl ergibt. Hingegen muss die Wurzel aus einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ergeben.

Addition und Multiplikation von reellen Zahlen

Lemma

Addition $+$	***Kommutativgesetz***	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x + y = y + x$
	Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
	neutrales Element der Add.	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$x + 0 = x$
	additiv Inverses	$\forall x \in \mathbb{R} \exists! -x \in \mathbb{R}:$	$x + (-x) = 0$
Multiplikation $\cdot$	***Kommutativgesetz***	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$x \cdot y = y \cdot x$
	Assoziativgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
	neutrales Element der Mult.	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$x \cdot 1 = x$
	multiplikativ Inverses	$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \exists! x^{-1} \in \mathbb{R}:$	$x \cdot x^{-1} = 1$
	Distributivgesetz	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Anmerkungen zu Addition und Multiplikation

- Die **Subtraktion** – ist keine eigenständige Rechenoperation, sondern eine Abkürzung für

$$x - y := x + (-y).$$

- Die **Division** : ist keine eigenständige Rechenoperation, sondern eine Abkürzung für

$$x : y := x \cdot y^{-1}.$$

- Achtung: Subtraktion und Division sind nicht kommutativ.
- Für das multiplikativ Inverse schreiben wir auch

$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

- Die Zahl 0 hat kein multiplikativ Inverses, denn sonst würde folgen

$$1 = 0 \cdot 0^{-1} = (1 + (-1)) \cdot 0^{-1} = 0^{-1} + (-0^{-1}) = 0.$$

Ordnungsrelation für die reellen Zahlen

Lemma

*Für die **Ordnungsrelation** $\leq$ gelten auf $\mathbb{R}$:*

Reflexivität	$\forall x \in \mathbb{R}:$	$x \leq x$
Antisymmetrie	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Longrightarrow x = y$
Transitivität	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
Totalität	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$(x \leq y) \vee (y \leq z)$
Verträglichkeit mit Add.	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
Verträglichkeit mit Mult.	$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall z \in (0, \infty):$	$x \leq y \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

Andere bekannte Relationen für reelle Zahlen

- Mit Hilfe dieser Ordnungsrelation definieren wir die anderen bekannten Relationen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ als

$$
\begin{aligned}
x < y \quad &:\Longleftrightarrow \quad (x \leq y) \wedge (x \neq y), \\
x \geq y \quad &:\Longleftrightarrow \quad y \leq x, \\
x > y \quad &:\Longleftrightarrow \quad y < x.
\end{aligned}
$$

- Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt dann

positiv, wenn $x > 0$,
negativ, wenn $x < 0$,
nichtnegativ, wenn $x \geq 0$,
nichtpositiv, wenn $x \leq 0$.

Nützliche Eigenschaften reeller Zahlen

Lemma

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *ist genau eine der folgenden drei Beziehungen war:*

$$x < y \qquad \textit{oder} \qquad x = y \qquad \textit{oder} \qquad x > y.$$

Diese Eigenschaft hießt ***Trichotomie****.*

Lemma

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x < y$. *Dann gibt es* $z \in \mathbb{R}$ *mit* $x < z < y$.

Intervalle in den reellen Zahlen

Definition

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ nennen wir

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \textbf{abgeschlossenes Intervall}, \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \textbf{offenes Intervall}, \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \textbf{(rechts) halboffenes Intervall}, \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \textbf{(links) halboffenes Intervall}.
\end{aligned}$$

Anmerkungen:

- Analog definieren wir unbeschränkte Intervalle wie $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $(-\infty, b)$ oder $[a, \infty)$.
- Für offene Intervalle findet man auch die Notation

$$(a, b) =]a, b[.$$

Rechnen mit Zahlen und Termen – Gliederung

Was sind typische Teilschritte beim Rechnen mit Zahlen und Termen?

Kopfrechnen, schriftliches Rechnen, Taschenrechner

- Kleinere Rechnungen sollten man im Kopf durchführen können, für größere Zahlen sollte in der Grundschule das schriftliche Rechnen geübt worden sein.
- Beispiele zum schriftlichen Rechnen finden Sie im Skript.
- In Klausuren ist oft kein Taschenrechner erlaubt, deswegen sollte man auch ohne zurecht kommen. Bei Hausaufgaben kann der Taschenrechner aber immer zur Kontrolle eingesetzt werden.
- Um Fehler zu erkennen, kann eine zusätzliche Überschlagsrechnung helfen, zum Beispiel

$$(9187,5 =)105 \cdot 87,4 \approx 100 \cdot 90 = 9000.$$

Ausmultiplizieren von Klammern

- Nach den Rechenregeln für + und · gilt

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= (a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d\\ &= a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d.\end{aligned}$$

- Wir müssen also jeden Summanden aus der ersten Klammer mit jedem Summanden aus der zweiten Klammer multiplizieren.
  DIes gilt auch für Klammern mit mehr als zwei Summanden.
- Wir verwenden die übliche Regel „Punkt vor Strich“ und schreiben daher $a\cdot b+c$ statt $(a\cdot b)+c$.
  Später werden wir den Malpunkt · auch oft weglassen und schreiben dann nur noch $ab+c$.
- **Achtung:** Ausmultiplizieren ist nicht immer sinnvoll, z.B. wenn Nullstellen gesucht werden.

Beispiel: Ausmultiplizieren

Multipliziere den folgenden Ausdruck aus:

$$(x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - 1)$$

Ausklammern eines gemeinsamen Faktors

- Nach den Rechenregeln für $+$ und $\cdot$ gilt

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{c} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{c} = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) \cdot \mathrm{c}.$$

- Ausklammern ist das Gegenstück von Ausmultiplizieren.
- Geeignete Faktoren zum Ausklammern zu finden, kann aber schwieriger sein.

Beispiel: Ausklammern mit Polynomdivision

Klammere den Faktor $x - 2$ aus dem folgenden Polynom aus:

$$x^3 + 5x^2 - 18x + 8$$

Binomische Formeln

Lemma

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2,\\ (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2,\\ (x+y)(x-y) &= x^2 - y^2.\end{aligned}$$

Anmerkungen

- Von links nach rechts gelesen erhält man die Formeln durch einfaches Ausmultiplizieren.
- Wichtiger ist häufig das Lesen von rechts nach links, d.h. das Erkennen einer Produktdarstellung.

Beispiel: Ausklammern mit binomischen Formeln

Faktorisiere den folgenden Ausdruck:

$$x^2 - 2x + 1 + 3(x^2 - 1)$$

Rechnen mit Brüchen

– Nach den Rechenregeln für $+$ und $\cdot$ gilt für alle $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ mit $q, s \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} + \frac{r}{s} &= \frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs} = \frac{ps + qr}{qs} && (\textbf{Hauptnenner}\text{ bilden}) \\
\frac{p}{q} - \frac{r}{s} &= \frac{ps}{qs} - \frac{qr}{qs} = \frac{ps - qr}{qs} && (\textbf{Hauptnenner}\text{ bilden}) \\
\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} &= \frac{pr}{qs} \\
\frac{p}{q} : \frac{r}{s} &= \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr} && (\text{Kehrbruch bilden})
\end{aligned}$$

Für die letzte Zeile muss $r = 0$ gelten.

– Nach dem Zusammenfassen von Brüchen sollten diese **gekürzt** werden. Hierdurch ändert sich der Wert des Bruchs nicht, aber die Darstellung und das weitere Rechnen vereinfachen sich.

Beispiel: Addition von Brüchen

Vereinfache für $x \neq \frac{4}{3}, \frac{8}{7}$ die folgende Summe:

$$\frac{2x+1}{3x+4} + \frac{5x+6}{7x+8}$$

Beispiel: Doppelbruch

Vereinfache für $x \neq -1$ den folgenden Term:

$$\frac{\frac{x-1}{x^2+1}}{\frac{x+1}{2x^2+2}}$$

Potenzen mit verschiedenen Arten von Exponenten

Definition

Sei $a \in (0, \infty)$ eine gegebene Basis. Dann gelten

$n = 0$	n-**te Potenz** von a	$a^0 = 1$,
$n \in \mathbb{N}$	n-**te Potenz** von a	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}$
$n \in \mathbb{N}$	$-n$-**te Potenz** von a	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,
$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n}$-**te Potenz** von a	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,
$m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{m}{n}$-**te Potenz** von a	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,
$r \in \mathbb{R}$	r-**te Potenz** von a	$a^r = e^{\log(a^r)} = e^{r \cdot \log a}$,

wobei $\exp$ und $\log$ die natürliche Exponentialfunktion und den natürlichen Logarithmus bezeichnen.

Achtung: Allgemeine Potenzen sind nur für positive Basen $a > 0$ definiert.

Rechenregeln für Potenzen

Lemma

Die hier auftretenden Basen a, b *und Exponenten* r, s *seien so gewählt, dass die Potenzen wohldefiniert sind.*

Produkt von zwei Potenzen mit gleicher Basis x	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
Quotient von zwei Potenzen mit gleicher Basis a	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
Potenz einer Potenz	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
Produkt von zwei Potenzen mit gleichem Exponenten p	$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
Quotient von zwei Potenzen mit gleichem Exponenten p	$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$

Achtung: Für Summen und Differenzen von Potenzen gibt es keine einfachen Rechenregeln.

Beispiel: Potenzen und negative Basen

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ausdrücke wohldefiniert und was beschreiben sie:

$$\sqrt{x^2} \qquad \text{und} \qquad (x-1)^{\frac{5}{3}}$$

Beispiel: Summen von Potenzen vs. Potenzen von Summen

Berechne die folgenden drei Zahlen:

$$\sqrt{3^2 + (-1)^2}, \qquad \sqrt{\big(3 + (-1)\big)^2}, \qquad \sqrt{3^2} + \sqrt{(-1)^2}$$

Beträge von reellen Zahlen

Definition

Für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist der **Betrag** von a definiert als

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Anmerkung Der Betrag ist also immer nichtnegativ, zum Beispiel

$$|-3| = -(-3) = 3.$$

Rechenregeln für Beträge

Lemma

Seien $a, b, r \in \mathbb{R}$ *reelle Zahlen. Dann gelten:*

(a) *Einfache Umformungen:*

$$|-a| = |a|, \qquad |a^2| = |a|^2, \qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \qquad \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} \;(\textit{für } a \neq 0).$$

(b) ***Dreiecksungleichung:***

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

(c) *Abweichungen:*

$$|a - b| \leq r \qquad \Longleftrightarrow \qquad b - r \leq a \leq b + r$$

Anmerkung Beobachtung (c) verwenden wir oft, um „Kugeln“ um einen Mittelpunkt b zu beschreiben.

Beispiel: Fallunterscheidung wegen Betrag

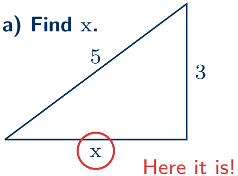
Welchen Wert hat der folgende Ausdruck für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|x^2 - 1|$$

Gleichungen und Ungleichungen – Gliederung

Wie lösen wir (Un)Gleichungen?

a) Find x**.**



Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Typische Problemstellungen in der Mathematik sind:

- **Gleichung lösen:** Bestimme alle $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, die der folgenden Gleichung genügen:

$$L(x) = R(x).$$

- **Ungleichung lösen:** Bestimme alle $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, die der folgenden Ungleichung genügen:

$$L(x) \le R(x).$$

Anmerkungen

- Wir betrachten hier nur den Fall einer (Un)Gleichung mit einer Unbekannten.
- Ihnen werden später auch System von (Un)Gleichungen mit mehreren Unbekannten begegnen, aber hierfür verwendet man die gleichen Techniken.
- Wir suchen Lösungen nur in einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$.

Zulässige und äquivalente Umformungen

Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ die Grundmenge, in der wir Lösungen einer Gleichung G_1 oder Ungleichung U_1 suchen. Der Übergang von der Gleichung G_1 auf eine Gleichung G_2 bzw. von der Ungleichung U_1 auf eine Ungleichung U_2 heißt

(a) **zulässige Umformung** auf D, wenn gilt

$$\forall x \in D : G_1(x) \Longrightarrow G_2(x) \qquad \text{bzw.} \qquad U_1(x) \Longrightarrow U_2(x),$$

(a) **äquivalente Umformung** auf D, wenn gilt

$$\forall x \in D : G_1(x) \Longleftrightarrow G_2(x) \qquad \text{bzw.} \qquad U_1(x) \Longleftrightarrow U_2(x),$$

Anmerkungen

– Bei einer zulässigen Umformung können zusätzliche **Scheinlösungen** entstehen, die durch eine **Probe** eliminiert werden können.

– Bei einer äquivalenten Umformung ändert sich die Lösungsmenge nicht.

Umformungen von Gleichungen

Gleichung $L(x) = R(x)$	zulässige Umformung	äquivalente Umformung
$L(x) \pm T(x) = R(x) \pm T(x)$	wenn T auf D definiert ist	
$L(x) \cdot T(x) = R(x) \cdot T(x)$	wenn T auf D definiert ist	wenn zusätzlich $T(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt
$\frac{L(x)}{T(x)} = \frac{R(x)}{T(x)}$	wenn T auf D definiert ist mit $T(x) \neq 0$ für alle $x \in D$	
$F(L(x)) = F(R(x))$	wenn F auf $L(D) \cup R(D)$ definiert ist	wenn F zusätzlich injektiv ist

Umformungen von Ungleichungen

Ungleichung $L(x) \leq R(x)$	zulässige Umformung	äquivalente Umformung
$L(x) \pm T(x) \leq R(x) \pm T(x)$	wenn T auf D definiert ist	
$L(x) \cdot T(x) \leq R(x) \cdot T(x)$	wenn T auf D definiert ist mit $T(x) \geq 0$ für alle $x \in D$	wenn sogar $T(x) > 0$ für alle $x \in D$ gilt
$\frac{L(x)}{T(x)} \leq \frac{R(x)}{T(x)}$	wenn T auf D definiert ist mit $T(x) > 0$ für alle $x \in D$	
$F(L(x)) \leq F(R(x))$	wenn F auf $L(D) \cup R(D)$ monoton wachsend ist	wenn F sogar streng monoton wachsend ist

Anmerkungen zu Umformungen

- Als Funktion F wählen wir oft die Umkehrfunktion einer auftretenden Funktion. Hier darauf achten, ob die Umkehrfunktion auf ganz $\mathrm{L(D)} \cup \mathrm{R(D)}$ existiert.
- Wenn wir mit Faktoren multiplizieren, die 0 werden können, können wir zusätzliche Scheinlösungen erzeugen.
- Wenn wir Ungleichungen mit negativen Termen multiplizieren (dividieren), dreht sich das Ungleichheitszeichen um.
- **Nicht zulässig** sind Umformungen, durch die Lösungen verloren gehen, z.B. einseitige Veränderungen. Verlorene Lösungen können nicht durch eine Probe zurückgewonnen werden.
- Teilen durch Terme, die 0 werden können, ist eine unzulässige Umformung, weil wir i.A. Lösungen verlieren.
- Wenn es keine zulässige Umformung auf ganz D gibt, können wir D auch in Teilmengen zerlegen (deren Vereinigung D ist) und die Lösungen durch eine **Fallunterscheidung** auf den einzelnen Teilmengen separat bestimmen.

Beispiel: Gleichung mit Logarithmus

Bestimme für die Gleichung

$$\log(2x) \leq 2\log(x)$$

die größtmögliche Grundmenge D und alle Lösungen in D.

Beispiel: Gleichung mit Logarithmus
Fortsetzung

Beispiel: Gleichung mit Betrag

Bestimme für die Gleichung

$$|x + 1| + |x - 1| \leq 2$$

die größtmögliche Grundmenge D und alle Lösungen in D.

Beispiel: Gleichung mit Betrag
Fortsetzung

Beispiel: Gleichung mit Wurzel

Bestimme für die Gleichung

$$x \cdot \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3x^2 + 1}$$

die größtmögliche Grundmenge D und alle Lösungen in D.

Beispiel: Gleichung mit Wurzel
Fortsetzung

Beispiel: Gleichung mit Polynom

Bestimme für die Gleichung

$$(x^2 - 2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (2x + 1) \cdot (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

die größtmögliche Grundmenge D und alle Lösungen in D.

Beispiel: Gleichung mit Polynom
Fortsetzung

Fehler und Fehlerkultur – Gliederung

Typische Fehlerquellen beim Rechnen[1]

– Bruchrechnung, insbesondere Brüche auseinanderziehen und Doppelbrüche auflösen

– übersehene bzw. unvollständige Fallunterscheidungen bei Beträgen, Wurzeln, Faktoren kürzen

– unnötiges Ausmultiplizieren

– „Linearisieren“ von Funktionen: Für die meisten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+y) \neq f(x) + f(y) \qquad \text{und} \qquad f(a \cdot x) \neq a \cdot f(x)$$

– Probe vergessen

[1] Beispiele dazu im Skript

Typische Fehlerquellen beim Aufschreiben[2]

- Weiterrechenfehler durch unsaubere Schrift
- zu wenige Klammern, deswegen keine klare Struktur in Formeln
- unsaubere, überflüssige oder irreführende Notation
- keine klare Argumentationsstruktur

[2] mehr Details im Skript

Anerkennen unterschiedlicher Voraussetzungen

Viele Faktoren beeinflussen, wie gut und wie schnell Sie an der Universität lernen können:

- muss parallel arbeiten, um Geld für den Lebensunterhalt zu verdienen
- hat Kinder oder pflegebedürftige Eltern
- ist das erste Familienmitglied an der Universität
- hatte keinen guten (Mathematik-)Unterricht an der Schule
- hat eine andere Muttersprache
- hat gesundheitliche Einschränkungen
- hat einen Lerntyp, der nicht gut mit Vorlesungen funktioniert
- ...

Tipps für den Umgang mit Fehlern und Verständnisproblemen

– potentielle Fehler in der Vorlesung/den Übungen ansprechen („Müsste das nicht eigentlich . . . ?“)

– Korrekturangebote für Übungsaufgaben nutzen, Korrekturen lesen und Fragen klären

– Fehler in eigenen Lösungen als Indikator für Verständnisprobleme nutzen

– Fragen in Vorlesung/Übungen stellen oder am Ende der Veranstaltung nach vorne kommen

– Sprechstunden von Dozent:innen, Kursassistent:innen und Tutor:innen nutzen

– eine Lerngruppe finden (gegenseitig motivieren, Dinge erklären, Tipps zu Aufgaben geben, Lücken in Lösungen finden)