ĐÁP ÁN ĐỀ CHÍNH THỨC

PFIEV

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO KỸ SƯ CHẤT LƯỢNG CAO

ĐÁP ÁN MÔN THI: TOÁN (PHÂN NGÀNH CLC 2020)

I. Phần Đại số:

Câu 1 (3 Điểm):

1.

a) Giả sử λ là một giá trị riêng (có thể phức) của A và X là véc tơ riêng tương ứng. Ta có $\lambda \mid X \mid^2 = <\lambda X, \bar{X}> = <AX, \bar{X}> = <X, \bar{A}\bar{X}> = <X, \bar{\lambda}\bar{X}> = \bar{\lambda} \mid X \mid^2$ vậy $\lambda = \bar{\lambda}$ do đó λ là số thực. **(0.5 đ)**

b) Vì A là ma trận đối xứng thực nên theo định lý cơ bản tồn tại ma trận trực giao thực Ω sao cho ${}^t\Omega A \Omega = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$. Do đó, $A = \Omega\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\, {}^t\Omega$. Lại có,

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(\Omega\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\, {}^t\Omega) = \mathrm{Tr}({}^t\Omega\Omega\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n))$$

$$= \mathrm{Tr}(diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$. Tương tự,

$$\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \mathrm{Tr}(diag(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1}$$. Do đó,

$$\mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{1/2} \lambda_k^{-1/2} \right)^2 = n^2$$ theo bđt Cauchy-Schwarz.

(0.5đ)

2. Theo trên $A = \Omega\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\, {}^t\Omega$, do đó

$$f(A) = f(\Omega\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\, {}^t\Omega) = \Omega f(diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n))\, {}^t\Omega$$

$$= \Omega \chi_A(diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n))\, {}^t\Omega = \Omega\, diag(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n))\, {}^t\Omega.$$

Vậy, tất cả các giá trị riêng của $f(A)$ là $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$. **(0.5đ)**

3.

+) Giá trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = -3; \lambda_3 = 15$. **(0,5đ)**

+) KGCR(A, -3)=Vect($\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$); KGCR(A, 15)=Vect($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$); **(0.5đ)**

10/12/20

+) Trực giao hóa Gram-Schmidt cho ta $\Omega = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

với ${}^t\Omega A \Omega = diag(-3;-3;15)$. **(0.5đ)**

II. Phần Giải tích:

Câu 2 (1 Điểm):

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t} = t\tan\frac{1}{\sqrt{t^2}} \to 0$ khi $t \to 0$ (do định lý kẹp); Tương tự $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0$ và $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0$. **(0.25đ)**

Ta kiểm tra: với $t = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(h_1,h_2,h_3) - f(0,0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)h_2 - \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)h_3}{t}$$

$= \frac{(h_1+h_2+h_3)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}\tan\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} \to 0$ khi $(h_1, h_2, h_3) \to (0, 0, 0)$

(bởi vì $\frac{(h_1+h_2+h_3)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} \le 3\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2} \to 0$ khi $(h_1, h_2, h_3) \to (0, 0, 0)$).

Do đó, f khả vi tại (0, 0, 0) và $d_{(0,0,0)}f = 0$. **(0.25 đ)**

2. Với $x \neq 0$ ta có $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0,0) = 2x\tan\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos^{-2}\frac{1}{|x|}$. Đại lượng này không tiến đến 0 khi $x \to 0$ (chẳng hạn, chọn $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, thì $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,0,0) \to -1$ khi $n \to \infty$). Vậy $\frac{\partial f}{\partial x}$ không liên tục tại (0, 0, 0). Do đó, f không thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^3$. **(0.5 đ)**

Câu 3 (2 Điểm):

1. Ta chứng minh φ là song ánh: $\varphi(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + 7xe^y = X \\ y - x^4 = Y \end{cases}$.

Thế $y = x^4 + Y$ vào phương trình đầu ta có $x^5 + 7xe^{x^4+Y} = X$. Hàm số $h(x) = x^5 + 7xe^{x^4+Y} - X$ đơn điệu tăng ngặt (vì $h'(x) > 0$) và biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$, nên $h(x)$ là song ánh $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$, từ đó φ song ánh. **(0.5 đ)**

Dễ thấy φ thuộc lớp C^1 trên $\mathbb{R}^2$, lại có

$$\det(J\varphi(x,y)) = \begin{vmatrix} 5x^4 + 7e^y & 7xe^y \\ -4x^3 & 1 \end{vmatrix} = 5x^4 + 7e^y + 28x^4e^y > 0 \text{ với mọi } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vậy, φ là một C^1-vi phôi từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$. **(0.5 đ)**

2. Đổi sang tọa độ cầu $x = r\cos\theta\cos\varphi;\ y = r\cos\theta\sin\varphi;\ z = r\sin\theta$, ta có

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^t f(r^2) r^2 dr.$$ **(0.5 đ)**

$$= 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr. \text{ Do đó, } F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$ **(0.5 đ)**

Câu 4 (2 Điểm):

1. Dùng D'Alembert, xét tại hai đầu mút $x = 3$ & $x = -3$ cho miền hội tụ là $(-3, 3)$.

(0,5đ)

Chia làm hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} nX^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} X^n$$

$$= \frac{X}{(1-X)^2} - \ln(1-X) \quad \text{với } X = \frac{x}{3}$$ **(0,5đ)**

$$= \frac{3x}{(3-x)^2} + \ln 3 - \ln(3-x).\ \forall x \in (-3,3)$$

2. $y_h = C_1 + C_2 e^x$ **(0,5đ)**

$$y_p = K_1 x + (K_2 x + K_3)e^{2x} \Rightarrow K_1 = K_2 = K_3 = 1$$

$$\Rightarrow y = C_1 + C_2 e^x + (x+1)e^{2x} + x.$$ **(0,5đ)**

III. Phần Xác suất:

Câu 5: (2 Điểm):

a. A_1, A_2, A_3 : "lấy được bóng đỏ từ hộp I, II, III". A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau, $P(A_1) = 0,8;\ P(A_2) = 0,7;\ P(A_3) = 0,6$.

Gọi B: " lấy được 3 bóng có đúng 1 bóng đèn màu đỏ".

$$P(B) = P(A_1.\overline{A_2}.\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}.A_2.\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.A_3)$$

$$= P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)$$ **(0.5 đ)**

$$= 0,8.0,3.0,4 + 0,7.0,2.0,4 + 0,6.0,2.0,3 = 0,188$$

b. Gọi C: "Hai bóng đèn lấy ra ở hộp II và III khác màu nhau".

Do việc lấy bóng đèn ở 3 hộp là độc lập với nhau, nên ta chỉ cần tính xác suất C.

$$P(C) = P(A_2.\overline{A_3}) + P(\overline{A_2}.A_3) = P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_2}).P(A_3)$$

$$= 0,7.0,4 + 0,3.0,6 = 0,46$$ **(0.5 đ)**

c. $X \in \{0;1;2;3\}$

$$P(X=0) = P(\overline{A_1}.\overline{A_2}.\overline{A_3}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = 0,024$$

$$P(X=1) = P(B) = 0,188$$

$$P(X=2) = P(A_1.A_2.\overline{A_3}) + P(A_1.\overline{A_2}.A_3) + P(\overline{A_1}.A_2.A_3)$$

$$= 0,8.0,7.0,4 + 0,8.0,3.0,6 + 0,2.0,7.0,6 = 0,452$$

$$P(X=3) = P(A_1.A_2.A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = 0,336$$

$X=x$	0	1	2	3
P($X=x$)	0,024	0,188	0,452	0,336

(0.5 đ)

d. $E(X) = \sum_{i=0}^{3} i.P(X=i) = 2,1$

$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} i^2.P(X=i) = 5,02$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 5,02 - 2,1^2 = 0,61.$ **(0.5 đ)**