

Vaja 10: Filtriranje slik v frekvenčni domeni

Pripravila: Gašper Podobnik & Tomaž Vrtovec

Navodila

Filtriranje slike $g(u, v)$ predstavlja konvolucijo slike s filtrom $h(u, v)$ v prostorski domeni (u, v) , zato je v določenih primerih to operacijo lažje opraviti v frekvenčni domeni (m, n) , kjer je filtriranje slike enako množenju spektra slike $G(m, n)$ s spektrom filtra $H(m, n)$:

$$G(m, n) = \text{DFT}\{g(u, v)\} \Rightarrow G'(m, n) = G(m, n) H(m, n) \Rightarrow g'(u, v) = \text{IDFT}\{G'(m, n)\},$$

kjer je $g'(u, v)$ filtrirana slika, $G'(m, n)$ pa njen spekter. Diskretna Fourierova preslikava (DFT) ter pripadajoča inverzna preslikava (IDFT) sta za slike določeni v dveh dimenzijah (2D) kot:

$$G(m, n) = \text{DFT}\{g(u, v)\} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) e^{-j2\pi(\frac{mu}{M} + \frac{vn}{N})}; \quad \begin{matrix} 0 \leq m < M \\ 0 \leq n < N \end{matrix},$$

$$g(u, v) = \text{IDFT}\{G(m, n)\} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m, n) e^{j2\pi(\frac{mu}{M} + \frac{vn}{N})}; \quad \begin{matrix} 0 \leq u < M \\ 0 \leq v < N \end{matrix},$$

kjer je M število stolpcev in N število vrstic slike $g(u, v)$ oz. njenega spektra $G(m, n)$.

1. Dana je 2D sivinska slika `pattern-236x330-08bit.raw` velikosti $M \times N = 236 \times 330$ slikovnih elementov, ki je zapisana v obliki surovih podatkov (RAW) z 8 biti na slikovni element.

Naložite in prikažite dano sliko.

2. Napišite funkcijo za računanje 2D DFT oz. 2D IDFT:

```
def computeDFT2(iMatrix, iDir):
    """
    Funkcija za računanje 2D DFT oz. 2D IDFT
    """

    return oMatrix
```

kjer vhodni argument `iMatrix` predstavlja 2D sliko $g(u, v)$ oz. 2D spekter $G(m, n)$, `iDir` pa predstavlja smer preslikave ('forward' za DFT, 'inverse' za IDFT), medtem ko izhodni argument predstavlja pripadajoči 2D spekter $G(m, n)$ oz. 2D sliko $g(u, v)$.

Pri implementaciji upoštevajte, da je 2D DFT oz. 2D IDFT mogoče izvesti kot zaporedje

DFT oz. IDFT stolpcev in DFT oz. IDFT vrstic 2D slike oz. 2D spektra:

$$G(m, n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) e^{-j2\pi \frac{nv}{N}} \right\} e^{-j2\pi \frac{mu}{M}}$$

$$G(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} w_M(m, u) \sum_{v=0}^{N-1} w_N(n, v) g(u, v)$$

\Downarrow

$$G'(u, n) = \sum_{v=0}^{N-1} w_N(n, v) g(u, v); \quad w_N(n, v) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi \frac{nv}{N}}; \quad 0 \leq n < N,$$

$$G(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} w_M(m, u) G'(u, n); \quad w_M(m, u) = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j2\pi \frac{mu}{M}}; \quad 0 \leq m < M.$$

Zapis koeficientov $w_N(n, v)$ oz. $w_M(m, u)$ v matrični obliki omogoča hitrejši izračun 2D DFT oz. 2D IDFT:

$$W_N = \begin{bmatrix} w_N(0, 0) & \dots & w_N(n, 0) & \dots & w_N(N-1, 0) \\ w_N(0, 1) & \dots & w_N(n, 1) & \dots & w_N(N-1, 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0, v) & \dots & w_N(n, v) & \dots & w_N(N-1, v) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0, N-1) & \dots & w_N(n, N-1) & \dots & w_N(N-1, N-1) \end{bmatrix}$$

$$W_M = \begin{bmatrix} w_M(0, 0) & \dots & w_M(m, 0) & \dots & w_M(M-1, 0) \\ w_M(0, 1) & \dots & w_M(m, 1) & \dots & w_M(M-1, 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_M(0, u) & \dots & w_M(m, u) & \dots & w_M(M-1, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_M(0, M-1) & \dots & w_M(m, M-1) & \dots & w_M(M-1, M-1) \end{bmatrix}$$

\Downarrow

$$G(m, n) = W_N g(u, v) W_M = \text{DFT}\{g(u, v)\}$$

\Downarrow

$$g(u, v) = W_N^* G(m, n) W_M^* = \text{IDFT}\{G(m, n)\},$$

kjer W_N^* oz. W_M^* predstavlja konjugirano matriko koeficientov W_N oz. W_M (izpeljava je podana v prilogi).

Izračunajte 2D DFT dane slike ter rekonstruirajte sliko preko 2D IDFT.

3. Napišite funkcijo za analizo 2D DFT spektra:

```
def analyzeDFT2(iMatrix, iOperations, dTitle=""):
    """
    Funkcija za analizo 2D DFT spektra
    """

    return oMatrix
```

kjer vhodni argument $iMatrix = G(m, n)$ predstavlja 2D spekter, $iOperations$ pa poljubne parametre analize, npr.:

- 'amplitude': izračuna se amplitudni spekter;
- 'phase': izračuna se fazni spekter;
- 'ln': izračuna se naravni logaritem spektra;
- 'log': izračuna se desetiški logaritem spektra;
- 'scale': spekter se pretvori na celotno 8-bitno dinamično območje;
- 'center': spekter se pretvori v način središčnega prikazovanja;
- 'display': spekter se prikaže kot slika.

Parametri analize vplivajo na vhodni 2D spekter v takem vrstnem redu, kot so podani. Izhodni argument $oMatrix$ predstavlja tako spremenjeni vhodni 2D spekter.

Prikažite 2D amplitudni in fazni spekter dane slike.

4. Napišite funkcijo za določanje 2D spektra izbranega idealnega nizkoprepustnega (ILPF) ali visokoprepustnega (IHPF) filtra:

```
def getFilterSpectrum(iMatrix, iD0, iType):
    """
    Funkcija za določanje 2D spektra izbranega idealnega
    nizkoprepustnega (ILPF) ali visokoprepustnega (IHPF) filtra
    """

    return oMatrix
```

kjer vhodni argument $iMatrix$ predstavlja vhodno matriko 2D spektra filtra, $iD0 = D_0$ mejno frekvenco filtra, $iType$ pa vrsto filtra ('ILPF' za nizkoprepustni, 'IHPF' za visokoprepustni). Izhodni argument $oMatrix = H(m, n)$ predstavlja 2D spekter filtra.

Pri implementaciji upoštevajte, da sta 2D spektra ILPF oz. IHPF enaka:

$$H_{ILPF}(m, n) = \begin{cases} 1; & D_{m,n} \leq D_0 \\ 0; & D_{m,n} > D_0 \end{cases}; \quad D_{m,n} = \sqrt{\left(m - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{N}{2}\right)^2},$$

$$H_{IHPF}(m, n) = 1 - H_{ILPF}(m, n).$$

Določite 2D spektre ILPF in IHPF pri mejnih frekvencah, ki so enake $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{3}$ najmanjše dimenzije 2D spektra dane slike. Prikažite 2D spekter filtra, filtrirajte sliko v frekvenčni domeni ter rekonstruirajte sliko z 2D IDFT.

Vprašanja

Odgovore na sledeča vprašanja zapišite v poročilo, v katerega vstavite zahtevane izrise in programske kode.

1. Dopolnite obstoječo funkcijo `getFilterSpectrum()` tako, da bo omogočala implementacijo Butterworthovega nizkoprepustnega (BLPF) in visokoprepustnega (BHPF) filtra drugega reda ($q = 2$):

$$H_{BLPF}(m, n) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_{m,n}}{D_0}\right)^{2q}}; \quad D_{m,n} = \sqrt{\left(m - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{N}{2}\right)^2},$$

in sicer tako, da parameter `iType` nastavite na `'BLPF'` oz. `'BHPF'`.

Priložite programsko kodo tako dopolnjene funkcije `getFilterSpectrum()`.

2. Filtrirajte sliko iz navodil v frekvenčni domeni z BLPF in BHPF pri enakih mejnih frekvencah, kot so podane pod točko 4 v navodilih.

Priložite izvedeno programsko kodo, izrise 2D spektrov filtra ter izrise rekonstruiranih slik po filtriranju. Kaj opazite v primerjavi s filtriranjem z ILPF oz. IHPF? Obrazložite odgovor.

3. Poleg slike iz navodil je dana še 2D sivinska slika `pumpkin-200x152-08bit.raw` velikosti $M \times N = 200 \times 152$ slikovnih elementov (glej Vaja 3: *Interpolacija in decimacija slik*) ter 2D sivinska slika `cameraman-256x256-08bit.raw` velikosti $M \times N = 256 \times 256$ slikovnih elementov (glej Vaja 7: *Prostorsko filtriranje slik*). Obe sliki sta zapisani v obliki surovih podatkov (RAW) z 8 biti na slikovni element.

Na podlagi teh treh slik pokažite, da enosmerna spektralna komponenta slike vsebuje informacijo o povprečni sivinski vrednosti slike. Obrazložite odgovor ter priložite ustrezno programsko kodo in morebitne izrise.

Dodatek

Odgovore na sledeče probleme ni potrebno prilagati k poročilu, prispevajo pa naj k boljšemu razumevanju vsebine.

Dopolnite obstoječo funkcijo `getFilterSpectrum()` tako, da bo omogočala implementacijo idealnega področno neprepustnega (INRF) in prepustnega (INPF) filtra:

$$H_{\text{INRF}}(m, n) = \prod_{k=1}^K H_{\text{IHPF},k}(m, n) H_{\text{IHPF},-k}(m, n)$$

$$H_{\text{INPF}}(m, n) = 1 - H_{\text{INRF}}(m, n),$$

kjer $H_{\text{IHPF},k}(m, n)$ predstavlja IHPF s središčem v točki (m_k, n_k) , $H_{\text{IHPF},-k}(m, n)$ pa IHPF s središčem v točki $(-m_k, -n_k)$ v frekvenčni domeni (m, n) .

Priloga

2D DFT je mogoče izvesti kot zaporedje DFT stolpcev in DFT vrstic 2D slike:

- **preslikava stolpcev** \rightarrow delno preslikavo $G'(u, n)$ pridobimo glede na vrstico v v sliki $g(u, v)$, tako da naredimo 1D DFT u -tega stolpca slike $g(u, v)$:

$$\begin{bmatrix} G'(u, 0) \\ G'(u, 1) \\ \vdots \\ G'(u, n) \\ \vdots \\ G'(u, N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_N(0, 0) & \dots & w_N(n, 0) & \dots & w_N(N-1, 0) \\ w_N(0, 1) & \dots & w_N(n, 1) & \dots & w_N(N-1, 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0, v) & \dots & w_N(n, v) & \dots & w_N(N-1, v) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N(0, N-1) & \dots & w_N(n, N-1) & \dots & w_N(N-1, N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(u, 0) \\ g(u, 1) \\ \vdots \\ g(u, v) \\ \vdots \\ g(u, N-1) \end{bmatrix}$$

$$G'(u, \cdot) = W_N(n, v) g(u, \cdot)$$

\downarrow

$$G'(u, n) = W_N g(u, v)$$

- **preslikava vrstic** \rightarrow končno preslikavo $G(m, n)$ pridobimo glede na stolpec u v delni preslikavi $G'(u, n)$, tako da naredimo 1D DFT n -te vrstice delne preslikave $G'(u, n)$:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} G(0, n) & G(1, n) & \dots & G(m, n) & \dots & G(M-1, n) \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} G'(0, n) & G'(1, n) & \dots & G'(m, n) & \dots & G'(M-1, n) \end{bmatrix} \cdot \\
 & \begin{bmatrix} w_M(0, 0) & \dots & w_M(m, 0) & \dots & w_M(M-1, 0) \\ w_M(0, 1) & \dots & w_M(m, 1) & \dots & w_M(M-1, 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_M(0, u) & \dots & w_M(m, u) & \dots & w_M(M-1, u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_M(0, M-1) & \dots & w_M(m, M-1) & \dots & w_M(M-1, M-1) \end{bmatrix} \\
 & G(\cdot, n) = G'(\cdot, n) W_M(m, u) \\
 & \quad \downarrow \\
 & G(m, n) = G'(u, n) W_M
 \end{aligned}$$

