平行束重建

Lambert-Beers 定律：$I = I_0 e^{-\mu \cdot \Delta x}$，入射射线强度$I_0$，出射射线强度$I$，材料线衰减系数$\mu$，材料厚度$\Delta x$。

射线在非均匀物体中的衰减：$I = I_0 e^{-\int_L \mu(x)dx}$

投影：$p = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int_L \mu(x)dx$

静（直角）坐标系中的物体截面：$f(x, y)$

旋转（直角）坐标系中的物体截面：$f'(t, s)$，其中，$f'(t, s) = f(x, y)$，$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$。

投影：$p(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t, s)\, ds$，$\theta$为t轴与x轴夹角。

截面的傅里叶变换：$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-i2\pi(ux+uy)} dxdy$

投影的傅里叶变换（旋转坐标系描述）：$P(w, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, \theta)\, e^{-i2\pi wt} dt$

投影的傅里叶变换（静坐标系描述）：$P(w, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, e^{-i2\pi w(xcos\theta+ysin\theta)} dxdy$

傅里叶切片定理：$F(wcos\theta, wsin\theta) = P(w, \theta)$

平行束投影特点：$p(t, \theta + \pi) = p(-t, \theta)$，$P(w, \theta + \pi) = P(-w, \theta)$

截面的傅里叶反变换（极坐标系）：

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(wcos\theta, wsin\theta) e^{i2\pi w(xcos\theta+ysin\theta)} w dw$$

滤波反投影公式（傅里叶切片定理+截面的傅里叶反变换）：

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P(w, \theta) e^{i2\pi w(xcos\theta+ysin\theta)} |w| dw$$

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P(w, \theta) e^{i2\pi wt} |w| dw$$

$|w|$加矩形窗后的傅里叶反变换：

$$h(t) = \int_{-\Gamma}^{\Gamma} |w|\, e^{i2\pi wt} dw = \frac{1}{2\delta^2}\left(\frac{\sin 2\pi\Gamma t}{2\pi\Gamma t}\right) - \frac{1}{4\delta^2}\left(\frac{\sin\pi\Gamma t}{\pi\Gamma t}\right)^2, \Gamma = \frac{1}{2\delta} cycles/mm$$

$$h(n\delta) = \begin{cases} \frac{1}{4\delta^2}, n = 0 \\ 0, n = even \\ -\frac{1}{(n\pi\delta)^2}, n = odd \end{cases}$$

截面具有有限空间紧支集，即如果$t \notin [-t_m, t_m]$，则$p(t, \theta) = 0$。滤波反投影公式：

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-t_m}^{t_m} p(t', \theta) h(t - t') dt'$$

等角扇束重建

等角扇束与平行束的关系：$\theta = \beta + \gamma$，$t = D\sin\gamma$，探测器角度γ为射线与中心射线的夹角，投影角度β为中心射线与y轴的夹角，D为射线源至旋转中心的距离。

由平行束重建公式逐步推导等角扇束重建公式

$$\mathrm{f(x,y)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-t_m}^{t_m}\mathrm{p}(t',\theta)h(t-t')dt'$$

代入$\mathrm{t}=xcos\theta+ysin\theta$，$\mathrm{x}=\mathrm{rcos\theta}$，$\mathrm{y}=\mathrm{rsin\theta}$

$$\mathrm{f(x,y)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-t_m}^{t_m}\mathrm{p}(t',\theta)h(xcos\theta+ysin\theta-t')dt'$$

$$\mathrm{f(r,\phi)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-t_m}^{t_m}\mathrm{p}(t',\theta)h(rcos\phi cos\theta+rsin\phi sin\theta-t')dt'$$

$$\mathrm{f(r,\phi)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-t_m}^{t_m}\mathrm{p}(t,\theta)h(rcos(\theta-\phi)-t)dt$$

代入$\mathrm{dtd\theta}=\mathrm{Dcos\gamma d\gamma d\beta}$，$\theta=\beta+\gamma$，$\mathrm{t}=\mathrm{Dsin\gamma}$，其中，$\gamma_\mathrm{m}$可类比$\mathrm{t_m}$，若$\gamma\notin[-\gamma_\mathrm{m},\gamma_\mathrm{m}]$，则$\mathrm{q}(\gamma,\beta)=0$

$$\mathrm{f(r,\phi)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\beta\int_{-\gamma_m}^{\gamma_m}\mathrm{q}(\gamma,\beta)h(rcos(\beta+\gamma-\phi)-Dsin\gamma)\,\mathrm{Dcos\gamma d\gamma}$$

代入$\mathrm{Lcos\gamma'}=\mathrm{D}+\mathrm{rsin(\beta-\phi)}$，$\mathrm{Lsin\gamma'}=\mathrm{rcos(\beta-\phi)}$，其中，L为射线源至重建点$(\mathrm{r},\phi)$的距离，$\gamma'$为通过$(\mathrm{r},\phi)$的射线与中心射线的夹角

$$rcos(\beta+\gamma-\phi)-Dsin\gamma=rcos(\beta-\phi)cos\gamma-[rsin(\beta-\phi)+D]sin\gamma$$

$$rcos(\beta+\gamma-\phi)-Dsin\gamma=Lsin(\gamma'-\gamma)$$

$$\mathrm{f(r,\phi)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\beta\int_{-\gamma_m}^{\gamma_m}\mathrm{q}(\gamma,\beta)h\big(Lsin(\gamma'-\gamma)\big)\,\mathrm{Dcos\gamma d\gamma}$$

代入$\mathrm{h(Lsin\gamma)}=\left(\frac{\gamma}{Lsin\gamma}\right)^2h(\gamma)$

$$\mathrm{f(r,\phi)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\beta\int_{-\gamma_m}^{\gamma_m}\mathrm{q}(\gamma,\beta)h(\gamma'-\gamma)\,\mathrm{Dcos\gamma d\gamma}$$

令$g(\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\sin\gamma}\right)^2h(\gamma)$

$$\mathrm{f(r,\phi)}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{L^2}d\beta\int_{-\gamma_m}^{\gamma_m}\mathrm{q}(\gamma,\beta)g(\gamma'-\gamma)\,\mathrm{Dcos\gamma d\gamma}$$

若γ采样间隔为v，则滤波函数的离散形式为

$$\mathrm{g(\gamma)}=\begin{cases}\frac{1}{8v^2},n=0\\0,n=odd\\-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi\sin(nv)}\right)^2,n=even\end{cases}$$

等角扇束重建执行方法：

1、在角度β下，由等角扇束系统采集投影数据$\mathrm{q}(\gamma,\beta)$，或者说获取列向量$\mathrm{q}(\gamma,\beta)$

2、计算向量逐元素乘积$\mathrm{q}'(\gamma,\beta)=D\cdot\mathrm{q}(\gamma,\beta)\odot cos\gamma$，$D$为常数

3、对一维向量进行滤波$\mathrm{q}''(\gamma,\beta)=\mathrm{q}'(\gamma,\beta)*\mathrm{h(\gamma)}$，可以选择空间域卷积或频域乘积运算

4、将$\mathrm{q}''(\gamma,\beta)$反投影至截面上，并对反投影过程中涂抹到的像素进行加权，即将这些像素值都除以L^2，其中L为射线源至截面像素中心的距离，因此每个截面像素要乘的权重不同。

5、不断增加角度β，重复步骤 1-4

等距扇束重建

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{U^2}d\beta\int_{-\gamma_m}^{\gamma_m}q(s,\beta)h(s'-s)\frac{D}{\sqrt{D^2+s^2}}\,ds$$

其中，$U=\frac{D+rsin(\beta-\phi)}{D}$

平板探测器圆轨迹锥束重建

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{D}{D+yx'}\right)^2d\beta\int_{-\gamma_m}^{\gamma_m}q(s,v,\beta)h(s'-s)\cos(\xi)\,ds$$

其中，复合比例因子$\cos(\xi)=\cos(\gamma)\cos(\tau)=\frac{D}{\sqrt{D^2+s^2}}\frac{\sqrt{D^2+s^2}}{\sqrt{D^2+s^2+v^2}}=\frac{D}{\sqrt{D^2+s^2+v^2}}$；虚拟探测器像素坐标为$(s,v)$；旋转坐标系$(x',y',z')$的$x'$轴与虚拟探测器平行（或者说虚拟探测器位于x’z’平面内）；τ为射线与xy（或x’y’）平面的夹角（或者说射线在xy平面的投影射线与射线的夹角），γ为中心射线与射线在xy平面的投影射线的夹角，因此ξ为射线与中心射线的夹角。