Calcul littéral

1) Vocabulaire

- Le calcul avec des lettres et des nombres s'appelle **le calcul littéral**.
- Lorsqu'on utilise une lettre pour symboliser une grandeur, on sous-entend que sa valeur numérique n'est pas fixée. On dit que cette lettre est **une variable**. Elle est souvent désignée par les lettres x, y, ou z. Pour préciser sa valeur numérique, on utilise le signe « = ».

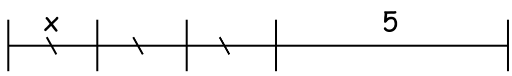
  Exemple 1 : $x = 2{,}5$; $y = \frac{1}{3}$; etc.

- **Exprimer un résultat « en fonction d'une variable »**, c'est trouver une expression mathématique où figure cette variable. On appelle cela aussi **une expression littérale ou une formule**.

  Exemple 2 : j'ai choisi un nombre x. Je l'ai triplé puis j'ai ajouté 5. J'ai trouvé un nombre.

  L'expression du résultat en fonction de x est $3 \cdot x + 5$

  Illustration géométrique :



- Dans l'exemple ci-dessus, pour obtenir une valeur numérique de l'expression, on **substitue un nombre à la variable**, c'est-à-dire, on remplace la variable par un nombre. Ainsi on peut effectuer des calculs.

  Exemple 3 : pour $x = 0$ le résultat est $3 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$

  pour $x = 7{,}2$ le résultat est $3 \cdot 7{,}2 + 5 = 21{,}6 + 5 = 26{,}6$

  etc.

2) Egalité

Le signe « = » se lit « est égal à ».

Une égalité peut être toujours vraie, parfois vraie et parfois fausse, ou toujours fausse.

Une égalité qui est toujours vraie s'appelle **une identité**.

<u>Exemple 4 :</u>

1) L'égalité $3(y+2) = 3y+6$	est toujours vraie	C'est une **identité**.
2) L'égalité $2y - 3 = 5$	est vraie pour $y = 4$, sinon elle est fausse.	C'est une égalité qui peut être vraie ou fausse selon la valeur de y. ***C'est une équation.***
3) L'égalité $3(y+2) = 3y + 2$	est toujours fausse.	C'est une **fausse égalité**.

<u>Attention :</u> pour prouver qu'une égalité n'est pas une identité, il suffit de trouver une valeur pour laquelle cette égalité n'est pas vraie. On appelle cette valeur **un contre-exemple**.

3) Écriture d'une expression littérale

<u>Définition :</u> une **expression littérale** est une écriture mathématique qui contient une ou plusieurs lettres.

<u>Exemple 5 :</u> x ; $2\cdot(y + 5)$; $2a^3+b$; $\dfrac{x^2}{4y^3}$ sont des expressions littérales.

<u>Conventions :</u> pour alléger les expressions littérales, on peut supprimer le signe de la multiplication entre :

- deux lettres : $\mathbf{a \cdot b = ab}$
- un nombre et une lettre : $4{,}5 \cdot x = 4{,}5\, x$
- un nombre et une parenthèse : $3 \cdot (a + b) = 3\,(a + b)$
- une lettre et une parenthèse : $a \cdot (2 + b) = a\,(2 + b)$
- deux parenthèses : $(2 + b) \cdot (a + b) = (2 + b)(a + b)$

<u>Remarque :</u> on ne peut pas supprimer le signe de la multiplication entre deux nombres :

$$2 \cdot 3 \neq 23$$

<u>Définition :</u> l'expression $3a^2b$ est le produit d'un nombre et des lettres. On appelle cette expression un **monôme**.

<u>Exemple 6 :</u> $\dfrac{x^2}{4}$; 1 ; x ; ab^4c sont des monômes.

$a^2 + b^3$; $2c(a + b)$; $(x^3 - y)(x + y)$; $\dfrac{1}{x}$ ne sont pas des monômes.

Pour le monôme $3a^2b$: 3 est le **coefficient numérique**,

a^2b est la **partie littérale**.

Pour le monôme $\frac{-x^2}{4}$: $\frac{-1}{4}$ est le **coefficient numérique**,

x^2 est la **partie littérale**.

Pour le monôme xy : 1 est le **coefficient numérique**,

xy est la **partie littérale**.

<u>Remarque :</u> on écrit le coefficient numérique avant la partie littérale et on écrit les lettres par ordre alphabétique.

<u>Exemple 7 :</u> l'écriture conventionnelle de l'expression $2x^25xy$ est $2\cdot5\cdot x\cdot x^2\cdot y = 10x^3y$

<u>Définition :</u> deux monômes sont **semblables** s'ils ont la même partie littérale.

<u>Définition :</u> une somme de monômes non semblables s'appelle un **polynôme**.

<u>Exemple 8 :</u> $x^2 + 4x + 5$; $4a^3 + 3ab$; $\frac{x}{3} + 2x^4y$ sont des polynômes.

<u>4) Opérations avec des monômes</u>

a) <u>Somme et différence de monômes</u>

Dans une addition ou une soustraction de monômes, la réduction se fait uniquement entre monômes semblables.

<u>Exemple 9 :</u> i) $xy + 3x^2y + 2xy - 6x^2y = \underbrace{xy + 2xy} + \underbrace{3x^2y - 6x^2y}$

$$= 3\,xy - 3\,x^2y$$

ii) $\frac{1}{3}x^2y + 6\times2y - \frac{1}{6}x^2y = \left(\frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{6}x^2y\right) + 6\cdot2\cdot x\cdot y$

$$= \frac{1}{6}x^2y + 12xy$$

b) Produit et quotient de monômes

Pour multiplier des monômes, on multiplie les coefficients entre eux et les parties littérales entre elles. On fait de même pour la division.

Pour réduire le résultat on utilise les propriétés des puissances :

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\quad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Exemple 10 :

1) $(-2a^2b) \cdot (-5ac) = (-2)\cdot(-5)\cdot a^3bc = 10a^3bc$

2) $9^4 \cdot 3^2 = (3^2)^4 \cdot 3^2 = 3^8 \cdot 3^2 = 3^{10}$

3) $7^4 \cdot 2^4 = (7\cdot 2)^4 = 14^4$

4) $\dfrac{2x^2y}{6xy} = \dfrac{2\cdot x\cdot x\cdot y}{2\cdot 3\cdot x\cdot y} = \dfrac{x}{3}$ pour $x, y \neq 0$

5) $\dfrac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2} = 0{,}01 = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2}$

5) Opérations avec les polynômes

- Pour additionner deux polynômes, on simplifie d'abord l'écriture en supprimant les parenthèses, on réduit ensuite les monômes semblables.

  Exemple 11 : $(2a^2 + 3a - 1) + (a^2 - 2a) =$

  $2a^2 + 3a - 1 + a^2 - 2a =$

  $2a^2 + a^2 + 3a - 2a - 1 =$

  $3a^2 + a - 1$

- Pour soustraire un polynôme, on additionne son opposé.

  Exemple 12 : $(2x^2y + 3xy^2) - (5x^2y + 2xy^2 - 3) =$

  $2x^2y + 3xy^2 + (-5x^2y - 2xy^2 + 3) =$

  $2x^2y + 3xy^2 - 5x^2y - 2xy^2 + 3 =$

  $2x^2y - 5x^2y + 3xy^2 - 2xy^2 + 3 =$

  $-3x^2y + xy^2 + 3$

- Produit de polynômes : voir distributivités

La simple distributivité

Propriété :

Pour tous nombres relatifs *k*, *a* et *b* :

$$\mathbf{k} \cdot (a + b) = \mathbf{k} \cdot a + \mathbf{k} \cdot b$$

$$\mathbf{k} \cdot (a - b) = \mathbf{k} \cdot a - \mathbf{k} \cdot b$$

Remarque : ces égalités s'utilisent dans les deux sens.

→ Transformer de gauche à droite s'appelle ***Développer***

→ Transformer de droite à gauche s'appelle ***Factoriser***

Exemple 13 : développe l'expression suivante : $A = -3{,}5(x - 2)$

$A = -3{,}5 \cdot (x - 2)$ ⟶ On replace le signe · dans l'expression.

$A = (-3{,}5) \cdot x + (-3{,}5) \cdot (-2)$ ⟶ On distribue le facteur **−3,5** aux termes x et −2.

$A = -3{,}5x + 7$ ⟶ On calcule et on simplifie l'expression.

Exemple 14 : factorise les expressions suivantes : $B = 14a - 7b$ et $C = -x^2 + 3x$

$B = 14a - 7b$

$B = 7 \cdot 2a - 7 \cdot b$

$B = 7 \cdot (2a - b)$

$C = -x^2 + 3x$

$C = (-x) \cdot x + 3 \cdot x$

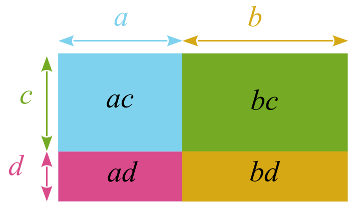
$C = (-x + 3) \cdot x = x \cdot (-x + 3)$

La double distributivité

Propriété :

Pour tous nombres relatifs a , b , c et d :

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(c + d) = \boldsymbol{a}c + \boldsymbol{a}d + \boldsymbol{b}c + \boldsymbol{b}d$$



Exemple 15 : développe et simplifie l'expression suivante : D = $(3x + 1)(y - 4)$.

D = $3x \cdot (y) + 3x \cdot (-4) + 1 \cdot (y) + 1 \cdot (-4)$ D = $3xy - 12x + y - 4$

6) Les identités remarquables

Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b :

Première identité remarquable : $\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$;

Deuxième identité remarquable : $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$;

Troisième identité remarquable : $\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$.

Exemple 16 : développe et réduis l'expression $(x + 3)^2$.

On utilise l'identité $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$ avec $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{3}$.

$(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})^2 = \boldsymbol{x}^2 + 2 \cdot \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{3} + \mathbf{3}^2$ ⟶ On remplace $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b}$ par $\mathbf{3}$ dans $\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$.

$(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})^2 = x^2 + 6x + 9$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 17 : développe et réduis l'expression $(3x - 5)^2$.

On utilise l'identité $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$ avec $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{5}$.

$(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{5})^2 = (\mathbf{3}\boldsymbol{x})^2 - 2 \cdot \mathbf{3}\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{5} + \mathbf{5}^2$ ⟶ On remplace $\boldsymbol{a}$ par $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b}$ par $\mathbf{5}$ dans $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$.

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés !

$\boldsymbol{a} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}$ donc $\boldsymbol{a}^2 = (\mathbf{3}\boldsymbol{x})^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$.

$(\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{5})^2 = 9x^2 - 30x + 25$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 18 : développe et réduis l'expression $(7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise l'identité $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ avec $\boldsymbol{a} = \mathbf{7}\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b} = \mathbf{2}$.

$(\mathbf{7}\boldsymbol{x} + \mathbf{2})(\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}) = (\mathbf{7}\boldsymbol{x})^2 - \mathbf{2}^2$ ⟶ On remplace $\boldsymbol{a}$ par $\mathbf{7}\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b}$ par **2** dans $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$.

$(\mathbf{7}\boldsymbol{x} + \mathbf{2})(\mathbf{7}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}) = 49x^2 - 4$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.