Découvrir et utiliser les nombres premiers

1) Diviseurs et multiples

Définition : soient a et b deux nombres entiers relatifs, avec b non nul.

On dit que **le nombre b est un diviseur du nombre a** s'il existe un nombre entier n tel que :

$$a = b \cdot n$$

On dit aussi que **b divise a** ou que **a est un multiple de b**.

Exemples :

- $48 = 6 \cdot 8$, donc 8 et 6 sont des diviseurs de 48.
- $48 = (-2) \cdot (-24)$, donc -2 et -24 sont des diviseurs de 48.

Remarques :

- 1 est un diviseur de tous les nombres.
- Tout nombre entier non nul est un diviseur de 0.

2) Nombres premiers

Définition : un **nombre premier** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2	3	5	7	11	13	17	19	
23	29	31	37	41	43	47	53	
59	61	67	71	73	79	83	89	97

Exemple de nombres **non** premiers :

- 8 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 1, 2, 4 et 8.
- 1 n'est pas un nombre premier car il admet un seul diviseur, lui-même.
- 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par n'importe quel nombre non nul.

3) Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété : un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre près.

Exemple 1 : décomposition de 84 en produit de facteurs premiers
La décomposition est unique : elle ne dépend pas du procédé utilisé pour l'obtenir.

1ère méthode : on cherche ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

- 84 est divisible par 2 : $84 = 2 \cdot 42$
- 42 est divisible par 2 : $84 = 2 \cdot 2 \cdot 21$
- 21 est divisible par 3 : $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

Or, 7 est premier, donc la décomposition de 84 en produit de facteurs premiers est terminée.
On écrit cette décomposition : $\mathbf{84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7}$

2ème méthode : on écrit d'abord un produit quelconque égal à 84.

$$84 = 4 \cdot 21 \quad \text{donc} \quad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Les nombres 2, 3 et 7 sont premiers, donc la décomposition de 84 en produit de facteurs premiers est : $\mathbf{84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7}$

Exemple 2 : décomposition de 1600 en produit de facteurs premiers

$$1600 = 16 \cdot 100 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 25 \quad \text{donc} \quad 1600 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

La décomposition de 1600 en produit de facteurs premiers est : $\mathbf{1600 = 2^6 \cdot 5^2}$

4) Plus grand diviseur commun à deux nombres entiers strictement positifs

Propriété : parmi tous les diviseurs communs à deux nombres entiers strictement positifs a et b, il en existe un qui est plus grand que tous les autres.

Le plus grand diviseur commun à a et b est noté : **PGCD(a ; b)**

Exemple 1 : trouver PGCD(48 ; 18)

- Les diviseurs positifs de 48 sont : **1** ; **2** ; **3** ; 4 ; **6** ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48.
- Les diviseurs positifs de 18 sont : **1** ; **2** ; **3** ; **6** ; 9 ; 18.
- Les diviseurs communs à 48 et 18 sont : **1** ; **2** ; **3** et **6**.
- Le plus grand diviseur commun à 48 et 18 est donc **6**.

- On écrit : PGCD (48 ; 18) = 6

Exemple 2 : trouver PGCD(80 ; 76)

- Les diviseurs positifs de 80 sont : **1** ; **2** ; **4** ; 5 ; 8 ; 10 ; 16 ; 20 ; 40 ; 80.
- Les diviseurs positifs de 76 sont : **1** ; **2** ; **4** ; 19 ; 38 ; 76.
- Les diviseurs communs à 80 et 76 sont : **1** ; **2** et **4**.
- Le plus grand diviseur commun à 80 et 76 est donc **4**.

- On écrit : PGCD (80 ; 76) = 4

Propriétés : soient a et b deux nombres premiers strictement positifs (avec a > b) et soit r le reste de la division euclidienne de a par b.

- PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a - b)
- PGCD(a ; b) = PGCD (b ; r)

Exemple 3 : soient a = 48 et b = 18. On a vu dans l'exemple 1) que PGCD(48 ; 18) = 6.

- a - b = 48 – 18 = 30 et on a bien PGCD(30 ; 18) = 6
- $48 = 18 \cdot 2 + 12$, donc le reste de la division euclidienne de 48 par 18 est 12, et on a bien PGCD(18 ; 12) = 6.

Remarques :

- Si a est un multiple de b, alors PGCD(a ; b) = b.
- PGCD(a ; a) = a.

5) Nombres premiers entre eux

Définition : on dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

Exemple : les nombres 48 et 35 sont premiers entre eux.
En effet, les diviseurs positifs de 48 sont **1** ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48 et les diviseurs de 35 sont **1** ; 5 ; 7 ; 35.
Le plus grand diviseur commun à 48 et 35 est **1**.

6) Méthodes pour calculer le plus grand diviseur commun à deux nombres entiers strictement positifs

A) Algorithme des différences

Exemple : calculer le plus grand diviseur commun à 182 et 117

Méthode : pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents avec l'algorithme des différences, on suit les étapes suivantes :

Etape 1 : on soustrait le plus petit nombre du plus grand nombre.

Etape 2 : on compare le résultat de cette soustraction au plus petit des deux nombres :

- s'ils sont égaux, alors le PGCD est égal au plus petit des nombres ;
- sinon on recommence l'étape 1 avec le résultat de la soustraction et le plus petit nombre.

On utilise la propriété : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; a – b)

182 – 117 = 65	PGCD(182 ; 117) = PGCD(117 ; 65)
117 – 65 = 52	PGCD(117 ; 65) = PGCD(65 ; 52)
65 – 52 = 13	PGCD(65 ; 52) = PGCD(52 ; 13)
52 – 13 = 39	PGCD(52 ; 13) = PGCD(13 ; 39)
39 – 13 = 26	PGCD(13 ; 39) = PGCD(13 ; 26)
26 – 13 = 13	PGCD(26 ; 13) = PGCD(13 ; 13)

L'algorithme s'arrête lorsque a – b = b.

On obtient alors PGCD(a ; b) = PGCD(b ; b) = b

Ici, PGCD(13 ; 13) = 13

Donc **PGCD(182 ; 117) = 13**

Remarque : si on continuait l'algorithme, la différence suivante serait nulle.
Le PGCD cherché est donc **la dernière différence non nulle**.

B) Algorithme d'Euclide

Exemple : calculer le plus grand diviseur commun à 182 et 117

Méthode : pour calculer le PGCD de deux nombres entiers différents avec l'algorithme d'Euclide, on suit les étapes suivantes :

Etape 1 : on effectue la division euclidienne du plus grand de ces nombres par le plus petit.

Etape 2 : on examine le reste de cette division :

- si ce reste est égal à zéro, alors le PGCD est le diviseur de cette division euclidienne ;
- si ce reste n'est pas égal à 0, on recommence l'étape 1 avec le diviseur et le reste de cette division.

On utilise la propriété : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

- $182 = 117 \cdot 1 + 65$ PGCD(182 ; 117) = PGCD(117 ; 65)

  65 est le reste de la division euclidienne de 182 par 117

- $117 = 65 \cdot 1 + 52$ PGCD(117 ; 65) = PGCD(65 ; 52)

  52 est le reste de la division euclidienne de 117 par 65

- $65 = 52 \cdot 1 + 13$ PGCD(65 ; 52) = PGCD(52 ; 13)

  13 est le reste de la division euclidienne de 65 par 52

- $52 = 13 \cdot 4 + 0$ PGCD(52 ; 13) = PGCD(13 ; 39)

  0 est le reste de la division euclidienne de 52 par 13

L'algorithme s'arrête lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul, ce qui signifie que b est un diviseur de a.

On obtient alors PGCD(a ; b) = b

Ici, PGCD(52 ; 13) = 13

Donc **PGCD(182 ; 117) = 13**

Remarque : le PGCD cherché est donc le **dernier reste non nul** des divisions euclidiennes successives.

8) Méthode pour résoudre un problème de partage équitable

Exemple : Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut utiliser toutes ses billes pour confectionner des paquets identiques ayant chacun un même nombre de billes rouges et un même nombre de billes noires.

1) Quel nombre maximal de paquets Marc pourra-t-il réaliser ?

2) Quelle sera alors la composition de chaque paquet ?

Correction :

1) Interprétation de l'énoncé.

On appelle n le nombre maximal de paquets identiques que Marc pourra réaliser en utilisant toutes ses billes.

Les n paquets doivent tous contenir le même nombre de billes rouges et le même nombre de billes noires, donc :

- le quotient de la division euclidienne de 108 par n correspond au nombre de billes rouges dans un paquet ;
- le quotient de la division euclidienne de 135 par n correspond au nombre de billes noires dans un paquet.

De plus, Marc doit utiliser toutes ses billes.

Les restes des divisions euclidiennes de 108 par n et de 135 par n doivent être nuls.

Par conséquent, n doit diviser 108 et 135.

Comme Marc veut réaliser le plus grand nombre de paquets, **n est le plus grand diviseur commun à 108 et 135**.

Calcul du PGCD de 108 et 135 :

$135 = 108 \cdot 1 + 27$

Donc PGCD(135 ; 108) = PGCD(108 ; 27)

$108 = 27 \cdot 4 + 0$

Donc 27 est un diviseur de 108 et PGCD(108 ; 27) = 27

D'où PGCD(135 ; 108) = 27

Marc pourra réaliser au maximum 27 paquets identiques en utilisant toutes ses billes.

2) Le nombre de billes rouges par paquet est le quotient de 108 par 27, soit 4.

Le nombre de billes noires par paquet est le quotient de 135 par 27, soit 5.

Chaque paquet sera composé de 4 billes rouges et de 5 billes noires.