Écritures fractionnaires

1) Égalité de quotients

A) Simplification de quotient

Règle : Si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal.

Pour tous nombres a, b et k où b et k sont non nuls :

$$\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

Exemple 1 : Simplifie le quotient $\frac{42}{-140}$

$\frac{42}{-140} = -\frac{42}{140}$ → On détermine le signe du quotient.

$\frac{42}{-140} = -\frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{10 \cdot 7 \cdot 2}$ → On cherche les facteurs communs à 42 et 140.

$\frac{42}{-140} = -\frac{3}{10}$ → On simplifie le quotient.

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1{,}2}{6} = \frac{...}{18}$

$$\frac{-1{,}2}{6} \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 3}{=}} \frac{...}{18}$$

→ Pour passer de 6 à 18, **on multiplie par 3**.

donc $\frac{-1{,}2}{6} = \frac{-3{,}6}{18}$ → Ainsi, pour trouver le nombre manquant,

on multiplie -1,2 par 3, ce qui donne -3,6.

B) Réduction de quotients au même dénominateur

Exemple 3 : Réduis les quotients $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$ au même dénominateur.

Multiple de 9 : 9, 18, 27, **36**, 45, 54, …

Multiple de 12 : 12, 24, **36**, 48, 60, … → On cherche un multiple commun non nul aux dénominateurs (le plus petit possible).

Un multiple commun de 9 et 12 est 36. C'est aussi le plus petit.

$\frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{8}{36}$ et $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{15}{36}$ → On détermine les écritures fractionnaires ayant 36 pour dénominateur.

Exemple 4 : Compare les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$

Les dénominateurs 7 et 8 n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Le plus petit multiple commun est $7 \cdot 8 = 56$, donc $\frac{2 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{16}{56}$ et $\frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{21}{56}$

Or $\frac{16}{56} < \frac{21}{56}$

Donc $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$

C) Produit en croix

Propriétés :

- Si **deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux** alors **leurs produits en croix sont égaux**.
- Réciproquement, si **les produits en croix de deux nombres en écriture fractionnaire sont égaux** alors **ces deux nombres sont égaux**.

Pour tous nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{équivaut à} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Remarque : En particulier, pour démontrer que deux nombres en écriture fractionnaire ne sont pas égaux, il suffit de démontrer que leurs produits en croix ne sont pas égaux.

Exemple 5 : Les nombres $\frac{2,1}{3,5} = \frac{4,1}{6,9}$ sont-ils égaux ? Justifie.

$2,1 \cdot 6,9 = 14,49$ et $3,5 \cdot 4,1 = 14,35$ → On calcule les produits en croix.

$14,49 \neq 14,35$ → On les compare.

Donc $\frac{2,1}{3,5} \neq \frac{4,1}{6,9}$ → Les **produits en croix ne sont pas égaux** donc **les nombres ne sont pas égaux**.

Exemple 6 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{-1,2}{6} = \frac{\dots}{7}$

$-1,2 \cdot 7 = 6 \cdot ?$ → On écrit l'égalité des produits en croix.

Donc $? = -\frac{8,4}{6} = -\ 1,4$ → On trouve le nombre manquant.

2) Addition ou soustraction

Règle : Pour **additionner (ou soustraire)** des nombres en écriture fractionnaire **ayant le même dénominateur**, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

Pour tous nombres a, b et c où b est non nul :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Exemple 7 : Calcule l'expression $\frac{3}{5} + \frac{12}{5}$

Remarque : Si les nombres en écriture fractionnaire n'ont pas le même dénominateur, il faut les réduire au même dénominateur.

Exemple 8 : Calcule l'expression $A = -1 + \frac{13}{30} - \frac{-11}{12}$

Multiple de 30 : 30, **60**, 90, 120, … → On cherche le plus multiple commun non nul à 30 et 12.

Multiple de 12 : 12, 24, 36, 48, **60**, 72, …

$A = \frac{-1 \cdot 60}{1 \cdot 60} + \frac{13 \cdot 2}{30 \cdot 2} + \frac{11 \cdot 5}{12 \cdot 5}$ → On détermine le signe de chaque quotient et on réduit les quotients au même dénominateur 60.

$A = \frac{-60}{60} + \frac{26}{60} + \frac{55}{60} = \frac{-60 + 26 + 55}{60}$ → On additionne les numérateurs et on garde le dénominateur.

$A = \frac{21}{60} = \frac{7 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{7}{20}$ → On simplifie si possible.

3) Multiplication

Règle : Pour **multiplier des nombres en écriture fractionnaire**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Remarque : Si $b=1$, la formule devient $a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d}$.

Exemple 9 : Calcule l'expression $B = \frac{-35}{33} \cdot \frac{-39}{-80}$.

$B = -\frac{35}{33} \cdot \frac{39}{80}$ → On détermine le signe du résultat.

$B = -\frac{7 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 3}{11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}$ → On cherche des facteurs communs.

$B = -\frac{7 \cdot 13}{11 \cdot 2 \cdot 8}$ → On simplifie.

$B = -\frac{91}{176}$ → On calcule.

4) Division de deux quotients

A) Inverse d'un nombre non nul

Définition : **Deux nombres sont inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Propriétés :

- Tout nombre **c** non nul admet un inverse qui est le nombre $\frac{1}{c}$
- Tout nombre en écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\frac{b}{a}$.

Remarques :

- Un nombre et son inverse ont toujours le même signe. En effet, leur produit (égal à 1) est positif et seul le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Zéro est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse. En effet, tout nombre multiplié par 0 donne 0 et ne donnera jamais 1.

Exemple 10 : Quels sont les inverses des nombres 3 et $\frac{-7}{3}$?

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

L'inverse de $\frac{-7}{3}$ est $\frac{1}{\frac{-7}{3}} = \frac{3}{-7} = \frac{-3}{7}$.

B) Diviser des quotients

Règle : **Diviser par un nombre non nul** revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

Pour tous nombres a, b, c et d où b, c et d sont non nuls :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Exemple 11 : Calcule $C = \frac{-8}{7} \div \frac{5}{-3}$

$C = +\left(\frac{8}{7} \div \frac{5}{3}\right)$ → On détermine le signe du résultat.

$C = \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{5}$ → On multiplie par l'inverse du 2ème quotient.

$C = \frac{8 \cdot 3}{7 \cdot 5}$ → On multiplie les fractions.

$C = \frac{24}{35}$ → On calcule.

Exemple 12 : Calcule $D = \frac{\frac{-32}{21}}{\frac{-48}{-35}}$ et donne le résultat en le simplifiant le plus possible.

$D = -\frac{\frac{32}{21}}{\frac{48}{35}}$ → On détermine le signe du résultat.

$D = -\frac{32}{21} \cdot \frac{35}{48}$ → On multiplie par l'inverse du 2ème quotient.

$D = -\frac{8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8}$ → On cherche des facteurs communs.

5) Priorités

Les règles des priorités s'appliquent aux calculs comportant des fractions.

Exemple 13 :

$E = \frac{4}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)$ → Lorsque le calcul comporte des parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses en veillant aux priorités.

$E = \frac{4}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right)$

$E = \frac{4}{5} - \frac{9}{8}$

→ Lorsque le calcul ne comporte pas de parenthèses, on effectue en priorité divisions et multiplications puis les additions et soustractions.

$E = -\frac{13}{40}$

Remarque : On effectue d'abord les calculs au numérateur et au dénominateur avant de diviser.

Exemple 14 :

F =