Proportionnalité – pourcentage – échelle

1) Repérer une situation de proportionnalité

Définitions :

- Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant par un même nombre non nul les valeurs de l'autre. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité.**
- Deux grandeurs proportionnelles sont deux grandeurs qui varient dans les mêmes proportions.
- Un tableau qui contient des données proportionnelles s'appelle un **tableau de proportionnalité.**

Remarque : Avec des grandeurs G1 et G2 proportionnelles, si on multiplie G1 par k pour obtenir G2, cela revient à diviser G2 par k (ou le multiplier par $\frac{1}{k}$) pour obtenir G1.

Exemple 1 : À la station service, la machine affiche 1,5 € au litre. Le prix à payer s'obtient en multipliant le volume distribué par le prix au litre.

C'est-à-dire : prix = 1,5 × volume

Le prix est proportionnel au volume d'essence.

Énoncé 1 : Les tableaux ci-dessous sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

a)

3	8	16	4	5,2
7,5	20	40	10	13

b)

12	18	32	27	54
8	12	20	18	36

Correction : a) On calcule les quotients, pouvant être le coefficient de proportionnalité :

$$\frac{7,5}{3} = \mathbf{2,5} \quad ; \quad \frac{20}{8} = \mathbf{2,5} \quad ; \quad \frac{40}{16} = \mathbf{2,5} \; ; \; \frac{10}{4} = \mathbf{2,5} \quad ; \quad \frac{13}{5,2} = \mathbf{2,5}$$

Ils sont égaux donc c'est un tableau de proportionnalité de coefficient **2,5**.

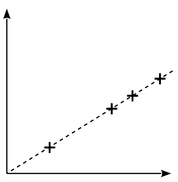
b) $\frac{12}{8} = \mathbf{1{,}5}$ ☑ ; $\frac{18}{12} = \mathbf{1{,}5}$ ☑ ; $\frac{32}{20} = \mathbf{1{,}6}$ ☒

On a trouvé un quotient différent des deux précédents, il est donc inutile de calculer les suivants.
Ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

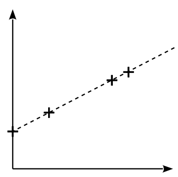
Propriété : Une situation représentée par des points alignés avec l'origine du repère est équivalente à **une situation de proportionnalité**.

Énoncé 2 : Le(s)quel(s) de ces trois graphiques représente(nt) une situation de proportionnalité ?

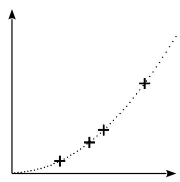
a)



b)



c)



Correction : a) Les points sont **alignés** avec l'origine du repère donc c'est une situation de proportionnalité.

b) Les points sont **alignés mais pas avec l'origine du repère** donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

c) Les points **ne sont pas alignés** donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

2) Résoudre un problème de proportionnalité

Exemple 2 : **en utilisant les règles sur les colonnes**

La prime annuelle d'un vendeur est proportionnelle au montant des ventes qu'il a réalisées pendant l'année. Le directeur utilise le tableau suivant pour verser les primes à ses vendeurs. Les cases colorées peuvent se remplir en utilisant les règles portant sur les colonnes.

Les ventes sont divisées par 4...

...donc les ventes doublent.

Les montants s'additionnent...

Ventes (en €)	2 000	8 000	**16 000**	18 000	20 000	38 000
Primes (en €)	**125**	500	1 000	1 125	1 250	**2 375**

...donc les primes sont divisées par 4.

La prime double...

...donc les primes s'additionnent.

Exemple 3 : **en utilisant le coefficient de proportionnalité**

Au supermarché, le prix des tomates est proportionnel à la masse achetée. On peut donc présenter les grandeurs dans un tableau de proportionnalité. On passe d'une valeur à l'autre en multipliant ou divisant par **2,5**.

2,5 s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Masse de tomates (kg)	3	8
Prix (CHF)	7,5	**?**

$\cdot$ 2,5

? = $8 \cdot 2{,}5 = 20$

8 kg de tomates coûtent 20.-

Exemple 4 : **en utilisant les produits en croix**

À la boulangerie de Nabila, cinq baguettes coûtent 7 euros.

Pour calculer le prix de trois baguettes, on peut utiliser **les produits en croix**.

Nombre de baguettes	5	3
Prix en €	7	**?**

L'égalité des produits en croix donne : $5 \cdot$ **?** $= 7 \cdot 3$.

Donc : **?** $= \dfrac{7 \cdot 3}{5} = 4{,}2$

Trois baguettes coûtent 4,20 €.

3) Utiliser ou calculer un pourcentage

Définition : Un **pourcentage** traduit une situation de proportionnalité où la quantité totale est ramenée à 100.

Le pourcentage d'un nombre : Chercher le pourcentage d'un nombre, c'est comme chercher une fraction de ce nombre. Il faut transformer le pourcentage en fraction et effectuer la multiplication.

Exemple 5 : On cherche 20% de 60.

$$\frac{20}{100} \cdot 60 = \frac{2}{10} \cdot 60 = \frac{2}{1} \cdot 6 = 12$$

Astuce : Pour organiser les données, on pourra utiliser le tableau de proportionnalité suivant :

	Valeurs de l'énoncé	**Pourcentage**
Portion		
Quantité totale		**100**

Énoncé 3 : Julien obtient une réduction de 15% sur un vélo valant CHF 160 ,-.

a) Quel est le montant de la réduction obtenue par Julien ?

b) Quel est le montant payé à la caisse par Julien ?

Tri des données :

	En CHF	**En %**
Réduction	**?**	*15*
Total	*160*	**100**

Correction : a) Julien obtient une réduction de 15% sur un vélo valant CHF 160.-

$1608 \cdot \frac{15}{100} = 24$

Le montant de la réduction obtenue par Julien est de CHF 24.-

b) On calcule la différence entre le prix initial du vélo et le montant de la réduction : 160 – 24 = 136.

Le montant payé à la caisse est donc de CHF 136.-

Énoncé 4 : Macha fait les courses pour le petit-déjeuner de sa famille. Elle achète : 3 pains au chocolats, 4 croissants, 2 petits pains au noix, 9 pains complets, 7 pommes et 5 oranges.

Quel est le pourcentage de fruits dans ces courses ?

Tri des données :

	nombre	**En %**
Fruits	*7+5=**12***	**?**
Articles	*3+4+2+9+7+5=**30***	**100**

Correction : L'égalité des produits en croix donne :

$? \cdot 30 = 12 \cdot 100$

Donc $? = 12 \cdot 100 \div 30$

Et $? = 40$

Il y a 40% de fruits dans ces courses.

Énoncé 5 : Maëlle refait la décoration de sa chambre. Le tapis coûte CHF 90, ce qui représente 60% de son budget. Quel était le budget prévu pour la décoration de sa chambre ?

Correction : dans cette situation, on cherche un nombre à partir d'un pourcentage donné. Il s'agit de trouver le tout («le cent pour cent») à partir d'une partie de ce tout.

Il faut d'abord trouver la multiplication qui représente la situation :

$$? \cdot \frac{60}{100} = 90$$

Ensuite on résout : $$? = \frac{90 \cdot 100}{60} = \frac{3 \cdot 100}{2} = 150$$

Le budget prévu était de CHF 150.-

Propriété : Dans une réduction ou une augmentation de **p %**, la nouvelle quantité représente respectivement **(100 - p)%** ou **(100 + p)%** de la quantité initiale.

Énoncé 6 : Le jour des soldes, une paire de chaussures à CHF 120.- est soldée à 35%.
Quel est son nouveau prix ?

Correction : Soit P le nouveau prix.

$P = (100 - 35)\ \% \cdot 120 = 65\ \% \cdot 120 = (65 \div 100) \cdot 120$

$P = 0{,}65 \cdot 120 = 78$

Le nouveau prix des chaussures est CHF 78.-

Énoncé 7 : Le prix du diesel était de CHF 1,92 en septembre 2022. Puis le prix était de CHF 2,42 en octobre 2022.
Quel est le pourcentage d'augmentation du prix du diesel entre septembre et octobre 2022 ?

Correction : Soit p le pourcentage d'augmentation.

$2{,}42 = (1 + p) \cdot 1{,}92$ donc $1 + p = 2{,}42 \div 1{,}92$ soit $p \approx 0{,}260$.

Le diesel a augmenté d'environ 26% entre septembre et octobre 2022.

4) Utiliser ou calculer une échelle

Définition : Les dimensions sur un plan (ou sur une carte) sont proportionnelles aux dimensions réelles. **L'échelle** du plan (ou de la carte) est le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les dimensions sur le plan en fonction des dimensions réelles.

Il s'exprime souvent sous forme fractionnaire : $\dfrac{\text{dimensions sur le plan}}{\text{dimensions réelles}}$.

Les dimensions sont exprimées dans la même unité.

Énoncé 8: Sur la maquette d'une maison à l'échelle 1/48 :

Quelle est la taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette ?

Quelle est la taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m de long dans la réalité ?

Correction : On exprime toutes les dimensions en cm. L'échelle est le coefficient de proportionnalité.

Sur la maquette (en cm)	1	12	x
En réalité (en cm)	48	y	720

×48

Après calcul, on conclut :

La taille réelle d'une pièce longue de 12 cm sur la maquette est **576 cm** (ou 5,76 m).

En effet, $\mathbf{y} = 12 \cdot 48 = 576$.

La taille sur la maquette d'une pièce de 7,2 m (720 cm) de long dans la réalité est **15 cm**.

En effet, $\mathbf{x} = 720 \div 48 = 15$.