Les puissances

1) Utiliser de nouvelles notations

A) Puissances d'exposant positif

Définitions :
Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}} \text{ s'écrit } a^n$$

- a^n se lit « **a exposant n** » ou « a puissance n »
- a^n est appelé **puissance** n-ième de a
- n est appelé l'exposant

Remarque : Par convention $a^0 = 1$

$a^1 = a$ a^2 se lit « a au carré » a^3 se lit « a au cube »

Exemple 1 : Donne l'écriture décimale de 5^4

Correction : $5^4 = 5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5 = \mathbf{625}$

Exemple 2 : Écris sous la forme d'une puissance : $7^2{\cdot}7^3$

Correction : $7^2{\cdot}7^3 = (7{\cdot}7){\cdot}(7{\cdot}7{\cdot}7) = \mathbf{7^5}$

B) Puissances d'exposant négatif

Définitions :

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$$\frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}} \text{ s'écrit } a^{-n}$$

Remarque : Pour tout entier n, a^{-n} est l'inverse de a^n soit $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

et en particulier $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

Exemple 3 : Donne l'écriture décimale de 10^{-3}.

Correction : $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$

Exemple 4 : Écris sous la forme d'une puissance : $\frac{2^3}{2^5}$

Correction : $\frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2} = \mathbf{2^{-2}}$

Propriété :

Pour tout nombre entier relatif *n*,

- Si *a* est **positif** alors a^n est **positif**
- Si *a* est **négatif** alors a^n est
  - **positif** lorsque l'exposant n est pair, et
  - **négatif** lorsque l'exposant n est impair.

Exemple 5 : Détermine le signe de :

$A = (-3)^4$

$B = -\ 3^4$

$C = (-2)^5$

Correction : A : Comme -3 est **négatif** et l'exposant 4 est **pair**, A est un nombre **positif**.

B : Il s'agit ici d'une puissance de 3, nombre **positif**, précédée d'un signe - . B est un nombre **négatif**.

C : Comme -2 est **négatif** et l'exposant 5 est **impair**, C est un nombre **négatif**.

C) Enchaîner des calculs

Règle : Dans le cas d'un enchaînement de calculs, la puissance, qui est elle-même une multiplication doit se calculer avant les multiplications.

En résumé, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses, puis les exposants, puis les multiplications et les divisions et finalement les additions et les soustractions.

Exemple 6 : Calcule $A = 1 + 5 \cdot 2^4$

Correction :
$$A = 1 + 5 \cdot 2^4$$
$$A = 1 + 5 \cdot 16$$
$$A = 1 + 80$$
$$\mathbf{A = 81}$$

2) Utiliser les puissances de 10

A) Définition

Propriété : Pour tout nombre entier $n > 0$:

$$\mathbf{10^n} \text{ s'écrit } \mathbf{1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}}} \; ; \qquad \mathbf{10^{-n}} \text{ s'écrit } \mathbf{\underbrace{0,0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1}$$

Rappel : $10^0 = 1$

Exemple 7 : Écris les nombres 100000 ; 0,01 ; 100 et 0,000001 sous la forme d'une puissance de 10

Correction :
$100000 = 10^5$
$0,01 = 10^{-2}$
$100 = 10^2$
$0,000001 = 10^{-6}$

B) Calculer avec des puissances de 10

Règles de calcul :

Pour m et p entiers relatifs quelconques

- règle du produit : $10^m \cdot 10^p = 10^{m+p}$
- règle du quotient : $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$
- règle de la puissance de puissance : $(10^m)^p = 10^{m \cdot p}$

Attention : Il n'y a pas de règle avec l'addition ou la soustraction !

Exemple 8 : Écris les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance de 10.

$A = 10^4 \times 10^3$

$B = 10^{-3} \cdot 10^{-7}$

$C = \dfrac{10}{10^{-3}}$

$D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$

$E = (10^{-3})^{-7} \cdot (10^2)^{-3}$

Correction :

$A = 10^4 \cdot 10^3$
$A = 10^{4\,+\,3}$
$\mathbf{A = 10^7}$

$B = 10^{-3} \cdot 10^{-7}$
$B = 10^{-3\,+\,(-7)}$
$\mathbf{B = 10^{-\,10}}$

$C = \dfrac{10^1}{10^{-3}}$
$C = 10^{1\,-\,(-3)}$
$C = 10^{1\,+\,3}$
$\mathbf{C = 10^4}$

$D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$
$D = 10^{-7\,-\,3}$
$\mathbf{D = 10^{-10}}$

$E = (10^{-3})^{-7} \cdot (10^2)^{-3}$
$E = 10^{21} \cdot 10^{-6}$
$E = 10^{21\,+\,(-6)}$
$\mathbf{E = 10^{15}}$

Exemple 9 : Donne l'écriture décimale des nombres

$F = 10^3 + 10^2$ *et* $G = 10^{-2} - 10^{-3}$

Correction : $F = 10^3 + 10^2 = 1000 + 100 = \mathbf{1100}$

$G = 10^{-2} - 10^{-3} = 0{,}01 - 0{,}001 = \mathbf{0{,}009}$

3) Utiliser la notation scientifique

A) Définition

Définitions :

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $\mathbf{a \cdot 10^n}$, où a est un nombre décimal **ayant un seul chiffre non nul pour partie entière** et où n est un nombre **entier relatif**.

a est appelé mantisse du nombre.

Exemple 10 : Écris le nombre A = 6430 en notation scientifique.

Correction : $A = 6430 = 6{,}43 \cdot 1000 = 6{,}43 \cdot 10^3$

L'écriture scientifique de A est donc $6{,}43 \cdot 10^3$.

B) Comparer deux nombres en écriture scientifique

Règle : Pour **comparer** deux nombres en notation scientifique, on compare d'abord leurs signes. S'ils sont de même signe, on peut comparer leurs **ordres de grandeur** à l'aide des **exposants** de leur puissance de 10.

En cas d'égalité des exposants, on compare alors les mantisses.

Exemple 11 : Compare

- $A = 1{,}7 \cdot 10^3$ et $B = 2{,}5 \cdot 10^2$
- $C = 12{,}4 \cdot 10^3$ et $D = 3{,}1 \cdot 10^4$

Correction :

- L'ordre de grandeur de A est 10^3 alors que B est de l'ordre de 10^2. Donc $\boldsymbol{A > B}$.
- La notation scientifique de C est :

  $C = 1{,}24 \cdot 10 \cdot 10^3 = 1{,}24 \cdot 10^4$

  C et D ont le même ordre de grandeur.

  Or $1{,}24 < 3{,}1$ donc $\boldsymbol{C < D}$.

C) Calculer avec des nombres en notation scientifique

Règle : Dans un calcul ne comportant que des multiplications et divisions, on **regroupe** les nombres écrits sous la forme de **puissance de 10** d'un côté et **les mantisses** de l'autre côté, puis on calcule avec les règles habituelles.

Exemple 12 : 1) Donne l'écriture scientifique du produit de

$$A = 2 \cdot 10^4$$

et $$B = 3 \cdot 10^3$$

2) Donne l'écriture décimale de $C = \dfrac{14 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4}$

Correction :

1)
$$A \cdot B = 2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^3$$
$$A \cdot B = 2 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 10^3$$
$$A \cdot B = 6 \cdot 10^{4+3}$$
$$A \cdot B = 6 \cdot 10^7$$

2)
$$C = \frac{14 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4}$$
$$C = \frac{14 \cdot 5}{2} \cdot \frac{10^{-3} \cdot 10^6}{10^4}$$
$$C = 35 \cdot \frac{10^{-3+6}}{10^4}$$
$$C = 35 \cdot \frac{10^3}{10^4}$$
$$C = 35 \cdot 10^{3-4}$$
$$C = 35 \cdot 10^{-1}$$
$$C = 3{,}5$$