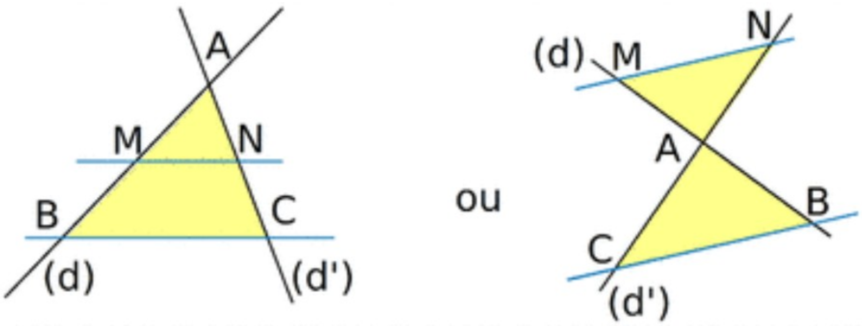
Le théorème de Thalès

1) Théorème de Thalès



Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.

B et ***M*** sont deux points de (d) distincts de A.

C et **N** sont deux points de (d') distincts de A.

Si **les droites (BC) et (MN) sont parallèles**

alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

← Triangle **AMN**

← Triangle **ABC**

Remarques :

- M et N peuvent être situés de l'autre côté de A par rapport à B et C.
- On parle alors d'une configuration « en papillon » ou « croisée ».
- Le premier rapport $\dfrac{AM}{AB}$ comporte les noms des points de la droite (d), tandis que le second rapport $\dfrac{AN}{AC}$ comporte les noms des points de la droite (d').

Exemple 1 : Sur la figure ci-dessous, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

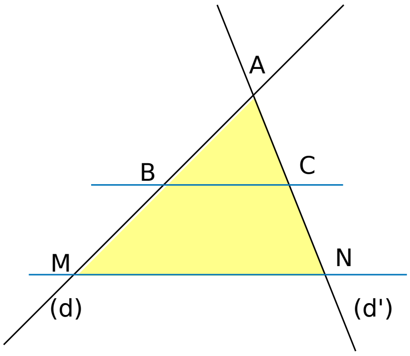
On a :

AB = 3 cm ;

AN = 4 cm ;

AM = 7 cm.

Calcule la longueur AC.



Réponse : Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{BC}{MN}$

soit $\dfrac{3}{7} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{BC}{MN}$.

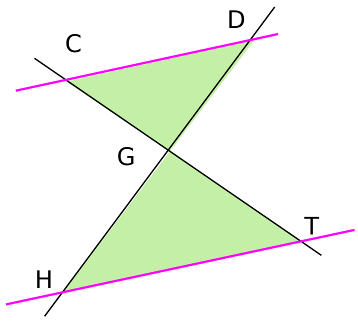
On utilise la propriété des produits en croix pour calculer la longueur demandée.

Calcul de AC : $7 \cdot AC = 3 \cdot 4$ soit $AC = \dfrac{3 \cdot 4}{7} = \dfrac{12}{7}$ donc $AC = \dfrac{12}{7}$ cm.

Exemple 2 : Sur la figure ci-dessous, les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

On donne DG = 25 mm ; GH = 45 mm ; CG = 20 mm et HT = 27 mm.

Calcule GT et CD.



Réponse : Les droites (DH) et (CT) sont sécantes en G.

Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{GC}{GT} = \dfrac{GD}{GH} = \dfrac{CD}{HT}$

soit $\dfrac{20}{GT} = \dfrac{25}{45} = \dfrac{CD}{27}$.

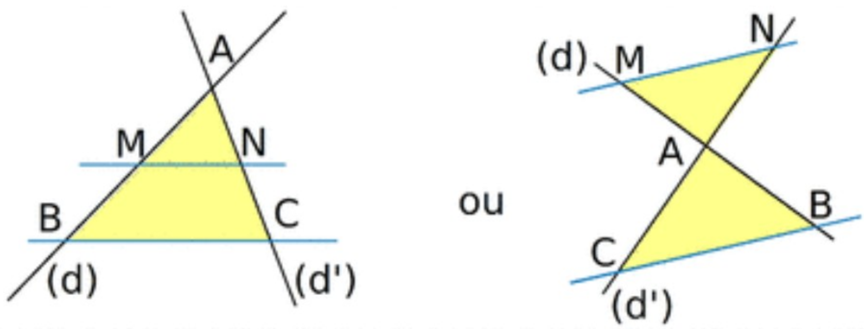
Calcul de GT : $25 \cdot GT = 45 \cdot 20$.

$$GT = \frac{45 \cdot 20}{25}$$ donc GT = 36 mm.

Calcul de CD : $25 \cdot 27 = 45 \cdot CD$.

$$CD = \frac{25 \cdot 27}{45}$$ donc CD = 15 mm.

2) Réciproque du théorème de Thalès :



Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.

B et **M** sont deux points de (d) distincts de A.

C et **N** sont deux points de (d') distincts de A.

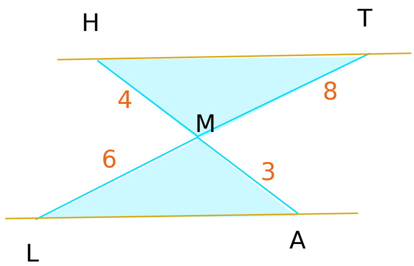
Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre **et** si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

alors **les droites (BC) et (MN) sont parallèles**

Remarques :

- Attention, il ne suffit pas de vérifier l'égalité des rapports : il faut aussi s'assurer que les points sont bien placés dans le même ordre.
- Attention, il ne faut pas utiliser les valeurs approchées pour affirmer que deux quotients sont égaux.

Exemple 3 : Les droites (LA) et (HT) sont-elles parallèles ?



Réponse : D'une part, $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$.

D'autre part, $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

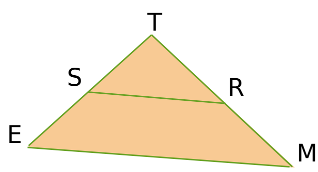
On constate que $\frac{MH}{MA} = \frac{MT}{ML}$.

De plus, les points A, M, H d'une part et les points L, M, T d'autre part sont alignés dans le même ordre.

Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.

Exemple 4 : Sur la figure ci-dessous, on a :

TR = 11 cm , TS = 8 cm , TM = 15 cm et TE = 10 cm.



Montre que les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

<u>Réponse :</u> Les droites (ES) et (MR) sont sécantes en T.

D'une part, $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$

D'autre part, $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$

On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$ $\left(\text{En effet, on a } \frac{22}{30} \neq \frac{24}{30}\right)$

Or, si les droites (RS) et (ME) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité.

Comme ce n'est pas le cas, les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles (**contraposée du théorème de Pythagore**).