Ejercicios Tema 5 – Cálculo Numérico I – 21 de Abril, 2018

1. Intro PDE

1. Considere la EDP
$$2u_x + 3u_z = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \,.$$
   Determine el orden de la EDP y muestre que las siguientes funciones son soluciones

   a) $u(x, y, z) = y^5 \cos y$

   b) $u(x, y, z) = y^{-1} \cos y$

   c) $u(x, y, z) = f(y)$ para casi todo $f(y)$ ¿Que debe satifacer?

   d) $u(x, y, z) = \exp(3x - 2z)$

   e) $u(x, y, z) = \exp(z - \frac{3}{2}x)$

2. Encuentre todas las soluciones $u(x, y)$ de

   a) $u_x = x^2 + y^2$

   b) $x_{xx} = 12xy$

2. Formulas de diferencias finitas

1. Demuestre la formula
$$\frac{u(x, y - 2\Delta y) - 4u(x, y - \Delta y) + 3u(x, y)}{2\Delta y} = u_y(x, y) + O(\Delta y^2) \,.$$

3. Ecuación del calor

1. Dada la ecuación del **Calor**, $u_t = u_{xx}$, $0 < x < a$, $t > 0$, define condiciones iniciales de tipo Dirichlet y condiciones de frontera de tipo Neumann tales que la solución exacta del problema es $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cos \pi x$.

2. Dada la ecuación del **Calor** con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad 0 < x < a, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) &= u(a,t) = g(t)\,, \end{aligned}$$

   queremos aplicar el esquema **explícito** para resolverla. Conteste:

   - ¿Cuál es el error de discretización y el orden del método?
   - ¿Cuáles derivadas ocurren en el error de la discretización?
   - ¿Y para cuáles soluciones este esquema es exacto en los puntos?

3. Considera el Problema de Valores Iniciales y de Frontera (PVIF)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \operatorname{sen}(\pi x), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

   a) Aplica el esquema **explícito** derivado en clase al problema, usando $\Delta x = 1/4$ y $\Delta t = 0.02$. Calcula (a mano) la solución aproximada en el tiempo $t = 0.04$, avanzando de un paso de tiempo al siguiente.

   b) Busca (o resuevle) la solución exacta del problema (en un libro, en Internet) y compara con tu solución numérica.

4. Aplica el esquema **explícito** a la ecuación del **calor** con condiciones de frontera de Neumann

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad 0 < x < 4, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right), \\ u_x(0,t) &= u_x(4,t) = 0. \end{aligned}$$

   a) Usa $\Delta x = 1$ y $\Delta t = 1/3$ y avanza la solución hasta $t = 2/3$. Aproxima los términos u_x usando un esquema que tenga un error de truncamiento consistente con el del esquema de la EDP.

   b) Busca la solución exacta del problema (en un libro, en Internet) y compara con tu solución numérica.

5. La idea de este ejercicio es derivar un esquema.

   a) Discretizar la EDP del calor y derivar el esquema implícito:

   $$-\sigma w_{i-1}^{j} + (1+2\sigma) w_i^j - \sigma w_{i+1}^j = w_i^{j-1} \quad \text{con} \quad \sigma := D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

   b) ¿Cuál es el tamaño asintótico del error de consistencia en el tiempo?

   c) ¿Cuál es el tamaño asintótico del error de consistencia en el espacio?

   d) Dibujar el "stencil" computacional.

   e) Escribe un paso del algoritmo en forma matricial (solo para C.F. de tipo Dirichlet) y conteste lo siguiente. ¿Qué hay que hacer en el paso j-ésimo para obtener los valores en los nodos desconocidos a partir de los conocidos? ¿Qué condición hay que pedir al sistema lineal resultante, para poder resolverlo?

6. (Lab) Given the problem

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\pi} u_{xx} && \text{in } \ (-1,1)\times(0,2] \\ u(x,0) &= \cos \pi x && \text{for } \ x \in [-1,1] \\ \partial_x u(-1,t) = \partial_x u(1,t) &= 0 && \text{for } \ t > 0 \end{aligned}$$

implement finite differences of 2^{nd} order for the heat equation (above) and verify that the experimental rate of convergence (erc) equals two.
Hint: First prove a finite difference formula similar to the one in exercise 2.1 (above).
Hint: You need an exact solution. Then, you could measure the error in a point $x = 0.3, y = 2$ on a sequence of meshes that have this point (3 meshes are sufficient).