Cálculo Numérico I – Ejercicios Tema 1 – 31 de Enero, 2018

# 1. Método de la Potencia y relativos

1. Demuestre el siguiente teorema.

   **Teorema** (Convergencia del método de la potencia)**.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz semisimple. Si $A$ tiene un valor propio dominante $\lambda_1$ con vector propio asociado $v_1$, entonces la secuencia reescalada de vectores*
   $$q_j = \frac{A^j q}{\lambda_1^j}$$
   *cumple*
   $$||q_j - c_1 v_1|| \leq C \left\| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right\|^j, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$
   *y por tanto $q_j \to c_1 v_1$ cuando $j \to \infty$.*

2. Este ejercicio muestra que una matriz es semisimple si y solo si es diagonalizable. Demuestre las siguientes implicaciones:

   *a*) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ semisimple, con vaps $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y veps asociados $v_1, \dots, v_n$. Sean $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y $V$ la matriz con columnas $v_1, \dots, v_n$. Entonces $V^{-1}AV = D$.

   *b*) Supongamos que $V^{-1}AV = D$, con $D$ una matriz diagonal y $V$ una matriz no singular. Entonces, los vaps de $A$ son los elementos de la diagonal de $D$, y las columnas de $V$ son $n$ veps linealmente independientes de $A$.

3. Dado una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ semisimple con valores propios $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3i$, $\lambda_3 = 1$. Supongamos que $\vec{q} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \vec{v}_i$ con $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

   *a*) ¿A cuál eigenvector y con qué radio de convergencia converge el método de la potencia?

   *b*) ¿A cuál eigenvector y con qué radio de convergencia converge el método de la potencia inversa?

   *c*) ¿A cuál eigenvector y con qué radio de convergencia converge el método de la potencia inversa con shift $\rho = 3$?

   *d*) Determine el intervalo $I$ de shifts reales tal que el método de la potencia inversa con un shift $\rho \in I$ converge al vector propio $v_2$.
   (*Pista: un dibujo del los eigenvalores ayuda.*)

4. Suponga que usamos el método de la Potencia. Haz dos pasos (a mano) con los datos
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Solo estamos interesado en la última aproximación.
   (*Pista: Al final puedes normalizar y calcular la aproximación del eigenvalor.*).

5. Suponga que usamos el método de la Potencia inversa. Haz dos pasos (a mano) con los datos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solo estamos interesado en la última aproximación. ¿El método funciona?
(*Pista: Al final puedes normalizar y calcular la aproximación del eigenvalor.*).

6. Dado la matriz y el vector inicial:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

decide y justifica cual de los siguientes métodos funciona

- Método de la Potencia
- Método de la Potencia inversa
- Método de la Potencia inversa con shift $\rho = 1$.

7. Otros ejercicios dejado en clase.

## 2. Método QR y lo demás

1. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices similares ($B = S^{-1}AS$).
   Demuestre que $(\lambda, v)$ es eigenpar $A$ si y sólo si $(\lambda, S^{-1}v)$ es eigenpar de $B$.

2. Escriba la demostración del Teorema de Schur con todos los detalles.

   **Teorema** (Teorema de Schur)**.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces existe una matriz triangular superior $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

   $$T = U^H AU.$$

   (*Pista: Inducción sobre la dimensión de la matriz $A$.*)

3. Demuestre el siguiente teorema.

   **Teorema** (Teorema Espectral para matrices hermitianas)**.** *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz Hermite. Entonces existe una matriz diagonal real $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

   $$D = U^* AU.$$

   *Las columnas de $U$ son eigenvectores de $A$, y las entradas de la diagonal de $D$ son eigenvalores de $A$.*

   Argumenta también porque:

   - Los eigenvalores de una matriz hermitiana son reales.
   - Una matriz hermitiana es semisimple.

   (*Pista: puedes usar el Teorema de Schur.*)

4. Comprobar que la secuencia de matrices $A_j$ del algoritmo QR simple son similares unitarias.
   ¿Cuál es la transformación de similitud?

5. Aplica el algoritmo QR simple a la matriz real simétrica

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Haz una sola iteración "a mano" (no uses Matlab).

6. Muestra que el algoritmo QR simple preserva la forma Hessenberg de las matrices $A_j$:

   **Proposición.** *Si $A_{m-1}$ es Hessenberg no singular, entonces $A_m$ también lo es.*

   (*Pista: Muestra que el producto de una matriz Hessenberg y una triangular superior (en cualquier orden) da una matriz Hessenberg.*

7. Comprobar que la secuencia de matrices $A_j$ del algoritmo QR con shift dinámico son similares unitarias. ¿Cuál es la transformación de similitud?

8. Muestra que, dado un vector cualquiera $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, hay un único ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que la rotación inversa de ángulo $\theta$
$$Q_\theta^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
aplica el vector $x$ en un vector horizontal que apunta hacia la derecha, es decir:
$$Q_\theta^T x = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y > 0.$$
Además, muestra que:
$$\cos\theta = \frac{x_1}{\|x\|_2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{x_2}{\|x\|_2}, \quad y = \|x\|_2.$$

9. Este ejercicio justifica la elección de $a_{n,n}$ como shift dinámico en el algoritmo QR con shift dinámico. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz en forma Hessenberg con entradas $a_{ij}$.
   *a*) Ver que $\rho = a_{n,n}$ es el cociente de Rayleigh asociado al vector $\vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
   *b*) Ver que el vector $\vec{e}_n$ aproxima un vep de la matriz $A^T$ cuando la entrada $a_{n,n-1}$ es pequeña.

10. Este ejercicio muestra que la elección del cociente de Rayleigh $\rho = a_{n,n}$ no siempre funciona (ni siquiera cuando $A$ tiene vaps reales diferentes).
    Considera la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
    y aplica un paso del algoritmo QR con shift dinámico de Rayleigh.
    ¿Qué le pasa a la iteración del algoritmo? ¿A qué es debido? ¿Cómo lo resolverías?

## 2.1. Iteración de subespacios (Iteración Simultánea) y el algoritmo QR

11. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz.

    *a*) Sea $v \in \mathbb{C}^n$ eigenvector de $A$. Muestre que el subespacio $\text{span}\{v\}$ es invariante por $A$.

    *b*) Sea $S_\lambda$ cualquier eigenespacio de $A$ (de dimensión mayor o igual a 1). Muestra que $S_\lambda$ es invariante por $A$.

    *c*) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$ cualquier conjunto de $k$ eigenvectores de $A$ asociados con los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Muestra que $\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es invariante por $A$.

    *d*) Sea
    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
    Encuentra los eigenespacios de $A$, y encuentra un espacio $S$ que es invariante por $A$ pero no es combinación lineal de eigenvectores de $A$.

12. Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $S \subset \mathbb{C}^n$, $AS = \{Ax \mid x \in S\}$.

    *a*) Muestra que si $S$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$, entonces $AS$ es también es un subespacio de $\mathbb{C}^n$.

    *b*) Muestra que $A^m S = A(A^{m-1}S)$.

    *c*) Muestra que si $S = \text{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$, entonces $AS = \text{span}\{Ax_1, \ldots, Ax_k\}$.

    *d*) Suponga que $S \cap \text{Null}\{A\} = \{0\}$. Muestre que si $\{x_1, \ldots, x_k\}$ forma una base de $S$, entonces $\{Ax_1, \ldots, Ax_k\}$ forma una base de $AS$. Por tanto, $\dim(AS) = \dim(S)$.

13. Sea $A$ semisimple con eigenpares $(\lambda_i, v_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$ ordenados tal que $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$. Además, existe $k$ tal que $|\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|$.

    *a*) Muestra que la condición $|\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|$ implica que $\text{Null}\{A\} \subseteq \mathcal{U}_k := \text{span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.

    *b*) En general, muestra que $\text{Null}\{A^m\} \subseteq \mathcal{U}_k$ para todo $m > 0$.

    *c*) Dado $S$ de 12.d), concluye que $A^m S$ tienen (al menos) dimensión $k$ para todo $m > 0$.

14. Sea $q_1, \ldots, q_k$ una base de $S$. Concluye de los dos ejercicios anteriores que si $S \cap U_k = \{0\}$, entonces $A^m q_1, \ldots, A^m q_k$ forman una base de $A^m S$. Por tanto, podemos simplemente iterar una base de $S$ para obtener bases para $AS$, $A^2 S$, etc.