Ejercicios Tema 3 – Cálculo Numérico I – 2 de Marzo, 2018

1. Tema 3 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.1. Resolver EDOs explícitamente

1. Determina el orden y decide si las siguientes ecuaciones son lineales:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad && (y+2)y' + y = 1 \\
&b) \quad && 3y' + (t+4)y = t^2 - y''' \\
&c) \quad && 3y'' = \cos(2ty) \\
&d) \quad && y^{(4)} + \sqrt{t}y''' + \cos t = e^y
\end{aligned}
$$

2. Verifique que $y(t) = 10 - ce^{-t}$ con cualquier constante c es solución de $y' + y = 10$.

Teoría. Se dice que una EDO es de variables separables si puede escribirse de la forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

que resulta muy práctica para su integración. Suponiendo que $G(y)$ y $F(x)$ son primitivas de $g(y)$ y $f(x)$ respectivamente, tenemos simplemente las siguientes relaciones:

$$\frac{d}{dx}\big[G\big(y(x)\big)\big] = g\big(y(x)\big)\, y'(x) = f(x),$$

con lo cual al integrar obtenemos directamente que la *solución general* es $G(y) = F(x) + C$ para una constante arbitraria C. (Si $G(y)$ es invertible tenemos $y(x) = G^{-1}\big(F(x) + C\big)$.)

(La penúltima página de este documento explica la separación de variables.)

3. Integra la ecuación: $(t+2)y' = t^2$.

4. Solve the equation: $(t+2)y' = y$.

5. Resuelve la EDO $yy' + x = 0$:

   a) Determina los puntos singulares de la EDO, es decir el conjunto de puntos $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ donde el campo $f(x,y)$ no es una función contínua.

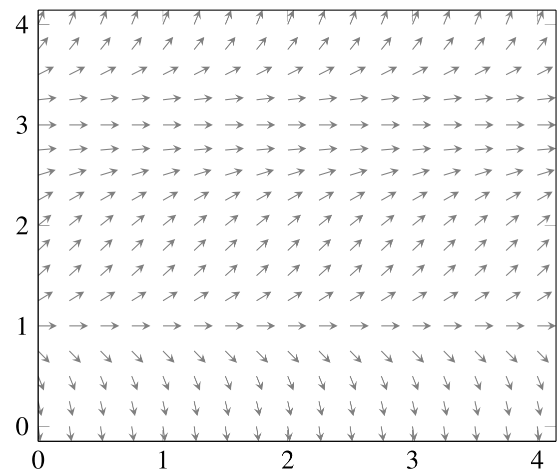
   b) Encuentra la solución general en forma implícita. Describir las curvas-solución (*trayectorias*).

   c) Encuentra la solución general en forma explícita. ¿Cuál es el intervalo maximal I de definición de las soluciones?

6. Esboza el campo de pendientes de la EDO $y' = 3y(1 - y/5)$.

7. Sketch the slopefield of the ODE $y' = (y - 1)(y - 5)$.

8. Dado el siguiente campo direccional graficado:



¿Cuál de las siguientes EDO lo genera?

$a)$ $y' = (y - 2)(y - 4)$.
$b)$ $y' = (y - 1)^2(y - 3)$.
$c)$ $y' = (y - 1)(y - 3)^2$.
$d)$ $y' = -(y - 1)(y - 3)^2$.

9. Solve the IVP
$$y' = y(2 - y) \quad \text{with} \quad y(t_0) = y_0\,.$$

10. Dado el PVI
$$x' = x \quad \text{con} \quad x(0) = x_0\,.$$
Grafica la solución exacta y algunas de las soluciones numéricas (utilizando el método de Euler) con distintos pasos h.

1.2. Comprobar existencia y unicidad de soluciones

1. Considera el PVI
$$y' = y \quad \text{con} \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{en} \quad [0,1]\,.$$
¿El teorema de existencia y unicidad garantiza una única solución?
Encuentre la constante de Lipschitz, si existe.

2. Dado el PVI
$$y' = y^{\frac{2}{5}} \quad \text{con} \quad y(t_0) = 0\,.$$
   - Decide (usando el Teorema visto en clase) si hay soluciones.
   - Argumenta si la hipótesis de unicidad (del Teorema) aplica o no.
   - Resuelve el PVI y determine todas las soluciones.
   - La condición inicial (t_0, y_0) determina el dominio de definición de la EDO. ¡Determina este invervalo!

3. Given is the IVP
$$y' = y^3 \quad \text{with} \quad y(t_0) = y_0\,.$$
   - Decide (using a Theorem seen in the lecture) whether there is a solution and whether it is unique.
   - Solve the IVP and give the general solution.
   - The choice of the initial condition (t_0, y_0) affects the interval on which the solution is defined. Determine this interval!

4. Considere el PVI $y' = \sqrt{y^2+5} + x^3,\ y(0) = y_0$. ¿Tiene solución? ¿Es única? ¿Cuál es el intervalo máximo de existencia de la solución?

5. Considere el PVI $y' = |y|\,,\ y(0) = y_0$ ¿Tiene solución? ¿Es única? ¿Cuál es el intervalo máximo de existencia de la solución?

6. Consider the IVP $y' = ty + t^3,\ y(0) = y_0,\ t \in [-2, 3]$ Determine whether it has a solution, whether the solution is unique and on what inverval it is defined.

7* Demuestre el siguiente teorema.

Teorema (Existencia y unicidad para EDO lineales). *Si las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son continuas en un intervalo abierto $I \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces el PVI lineal*
$$x' + a(t)x = b(t), \qquad x(t_0) = x_0$$
tiene exactamente una solución global, es decir una única solución definida para todo $x \in I$.

(Pista: Ver el ejemplo antes del Teorema III.2.)

1.3. Comprobar que un método funcione

1. Considere el PVI
$$y' = -100y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0,1],$$
y suponga que lo queremos resolver por el método de Euler explícito.

   a) Calcule la cota teórica derivada en clase para el error global $g(t=1)$ en función del paso h, es decir encuentre una expresión $\text{cota}(h)$ tal que $g(1) \leq \text{cota}(h)$.

   b) Muestre que la solución numérica es $w_i = (1-100h)^i$

   c) Utilizando MatLab/Octave/Python, calcule el error global exacto en $t=1$ cuando el paso es $h \in \{\frac{1}{50}, \frac{1}{100}\}$ y compare la cota teórica con el error exacto del apartado anterior.

Teoría. La expansión en series de Taylor para una función en dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suficientemente suave es:
$$f(x+h, y+h) = f(x,y) + hf_x(x,y) + hf_y(x,y) + O(h^2),$$
y la expansión de Taylor para una función en una variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente suave es:
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + O(h^3).$$

2. Un paso de tiempo del método de Trapecio explícito está definido por
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f\big(t_i, w_i\big) + f\big(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i)\big)\right]$$
Muestre que el error local satisface $e_{i+1} = O(h^3) \leq Ch^3$.
Sugerencia: Use una expansión de Taylor (en dos variables) para el termino $f\big(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i)\big)$.

3. Demuestre que el error de truncamiento local del método de Trapecio implícito
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f\big(t_i, w_i\big) + f\big(t_{i+1}, w_{i+1}\big)\right]$$
se comporta como $O(h^3)$.

4. Un paso de tiempo del método de Punto medio (abstracto) esta definido por
$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + h/2, z(t_i + h/2)\right)$$
Muestre que el error local satisface $e_{i+1} = O(h^3) \leq Ch^3$ y concluye que el error global es $O(h^2)$. (*Sugerencia*: Use la expansión de Taylor en una variable (dada arriba).)

5. Un paso de tiempo del método de Punto medio explícito esta definido por
$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right)$$
Muestre que el error local satisface $e_{i+1} = O(h^3) \leq Ch^3$.
Sugerencia: Use la expansión de Taylor en dos variables (dada arriba) para el termino $f\big(\ldots\big)$.

6. ¿Para cuáles funciones es exacto el método de Punto Medio?

1.4. Aplicar métodos

1. Dado el PVI
$$y' = t^2 y \quad \text{con} \quad y(0) = 1\,.$$
   - Usa separación de variables para encontrar la solución del PVI.
   - Aplica el método de Euler explícito con paso $h = 1/4$ al PVI en el intervalo $[0, 1]$ y lista los valores de la solución numérica w_i, $i = 0, 1, \ldots, 4$. Encuentra el error en $t = 1$ comparando con la solución exacta.
   - Igual, pero usando el método de Euler implícito (paso $h = 1/4$ en $[0, 1]$).
   - Igual, pero usando el método del Trapecio (paso $h = 1/4$ en $[0, 1]$).
   - Igual, pero usando el método del Punto Medio (paso $h = 1/4$ en $[0, 1]$).
   - Igual, usando el método RK4 (paso $h = 1/4$ en $[0, 1]$).

2. Haz un paso de tamaño $h = 1/2$ (a mano) de cada uno de los métodos {Euler explícito, Euler implícito, Trapecio (explícito), Trapecio (implícito) y Punto Medio} aplicado al PVI:
$$y' = 5(2 - y)\,, \quad y(0) = 1.$$

3. Aplica el método de Euler con paso $h = 1/4$ al PVI
$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - y_2 \\ y_2' &= +y_1 - y_2 \qquad\qquad \text{en} \quad [0, 1]. \\ &\text{con} \quad y_1(0) = 1\,,\; y_2(0) = 0. \end{aligned}$$
   - Verifica que
$$y_1(t) = e^{-t}\cos t \quad \text{y} \quad y_2(t) = e^{-t}\sin t$$
     es la solución exacta.
   - Encuentra los errores de truncamiento globales de y_1 y y_2 en $t = 1$.

4. Aplica un paso del método del Trapecio explícito con $h = 1/4$ al PVI
$$\begin{aligned} y'' - 2ty' + 2y &= 0, \\ y(0) = y'(0) &= 1. \end{aligned}$$
   Pista: Primero cambia la ecuación por un sistema de 2 ecuaciones.
   ¿Cómo se hace? $\rightarrow$ ver la última página de este documento.

1.5. Métodos conservativos

1. Sea

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

la solución exacta del PVI

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix}$$

Verifique si el método de

- Euler (explícito)
- Euler (implícito)
- Trapecio (explícito)
- Trapecio (implícito)
- Punto Medio (explícito)
- * Punto Medio (implícito) con paso intermedio, *i.e.*

$$\begin{aligned} w_{i+1/2} &= w_i + \frac{h}{2} f(t_{i+1/2}, w_{i+1/2}) \\ w_{i+1} &= w_i + h f(t_{i+1/2}, w_{i+1/2}) \end{aligned}$$

aummenta, mantiene o disminuye la energia (la distancia al origen $(0,0)$ del plano $x - y$).

1.6. “stiff equations”

1.* Determine los puntos fijos y su tipo (repulsor, atractor) de las siguientes funciones de iteración:

$$F_1(y) = y + 10(y^2 - 2y - 3)\ln|y| \quad \text{y} \quad F_2(y) = (1+y)\sin y\,.$$

2. Determine cuál es el límite del paso h, tal que los métodos {Euler explícito, Trapecio (explícito) Punto Medio} aplicados a la siguiente EDO funcionan, es decir, w_i tiende al punto atractor para $i \to \infty$.

$$y' = 50(2-y)y\,, \quad y(0) = 1.$$

   Pista: la solución a la que converge es $y(t) \equiv 2$.

3. Demuestre que el método Euler implícito para la siguiente EDO es estable para cualquier paso, es decir, la approximación w_i tiende al punto atractor para $i \to \infty$ **independientemente de** h.

$$y' = 50(2-y)\,, \quad y(0) = 1.$$

4. Encuentra todas las soluciones de equilibrio y el valor del Jacobiano en éstos para la EDO

$$y' = 10y - 10y^2\,.$$

   ¿Es la ecuación de tipo “stiff”?

5. Considera la EDO lineal

$$y' = ay + b \quad \text{con} \quad a < 0\,.$$

   - Encuentra el equilibrio (la solución de equilibrio).
   - Decide, dibujando un campo direccional, si todas las soluciones tienden hacia el equilibrio cuando $t \to \infty$.
   - Escribe el método de Euler implícito para la ecuación.
   - Considerando Euler implícito como una iteración de *punto fijo*, demuestra que la solución aproximada dada por Euler implícito converge hacia el equilibrio cuando $t \to \infty$.

Método de Separación de Variables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Paso 1. Despejar (Poner de un lado de la igualdad las x's y de otro las y's)

NOTA: LAS DERIVADAS NO PUEDEN QUEDAR EN EL DENOMINADOR $\frac{1}{dx}$

$$dy = \frac{y}{x}dx.$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Paso 2: Integrar.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

Solo poner la C del lado de las x's.

$$\ln|y| = \ln|x| + C.$$

Paso 3: Encontrar "y".
Despejar

$$\cancel{e}^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + C}$$

!. Leyes de la exp.

$$|y| = \cancel{e}^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{C}}_{C \text{ nueva}}.$$

$$|y| = C|x|.$$

$$\boxed{y = Cx}$$

Extensión para ecuaciones de orden $n > 1$

Cada EDO de orden $n > 1$ se puede convertir en un sistema de n ecuaciones (de orden 1).

Esto se hace como sigue:

Sea $$y^{(n)} = f\left[t, \underbrace{y}_{=:y_0}, \underbrace{y'}_{=:y_1}, \underbrace{y''}_{=:y_2}, \dots, \underbrace{y^{(n-1)}}_{=:y_{n-1}}\right] \qquad (E_n)$$

Definimos →

Entonces

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = f\left[t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\right] \end{cases} \qquad (S_n)$$

Con esas definiciones la ecuac. (E_n) equivale al sistema (S_n).

Igualmente, un sistema de 2 EDOs de orden n se puede convertir en un sistema de $2n$ ecuaciones de orden 1. Con eso pueden simular el péndulo ó el satelite.

En el libro [Sauer, p. 309] encuentran un código para simular un satelite.