1^{er} LABORATORIO – EDP

En esta practica relacionamos unos esquemas para la ecuación del Calor (EDP) con métodos para EDO y comprobamos que funcionen. Los métodos para EDO con ℓ estados, definen un operador que use los estados a los tiempos discretos $j-1,\, j-2,\, \ldots,\, j-\ell$ para generar la nueva aproximación. Hemos visto el esquema **explícito** (Euler), que es simplemente

$$W^j = W^{j-1} + k\, P_{h,k}(t,\, x,\, W^{j-1})$$

donde k es el paso del tiempo, h del espacio y $P_{h,k}$ discretiza Du_{xx} al tiempo de la aproximación W^{j-1} $(\ell = 1)$.

Otros esquemas

- El esquema **implícito** es
$$W^j = W^{j-1} + k\, P_{h,k}(t,\, x,\, W^j)\,.$$
- El esquema **Crank–Nicolson** (trapecio en el tiempo) es
$$W^j = W^{j-1} + \frac{k}{2}\Big[P_{h,k}(t,\, x,\, W^{j-1}) + P_{h,k}(t,\, x,\, W^j)\Big]$$
- El esquema **Punto Medio implícito** consiste (ver ejercicios Tema 3) de un medio paso Euler implícito y un medio paso Euler explícito, aquí se puede hacer lo mismo.
- * El esquema **RK4** es explícito, entonces podemos aplicarlo (solo para interesados).

1. Consejos para implementar

Como definir matrices (sparse). Lean

```
help spdiags
```

Para cada matriz empleada en los esquemas de arriba conviene definirla en una función separada, pues la matriz del explícito no es muy distinta de la del implícito. Además, los esquemas Crank–Nicolson y Punto Medio usan esas matrices.

Como se puede ver un método, p. ej. el **Esquema explícito**:

```
function [W] = mCalor_EE_dirichlet(Ix, It, M, N, ec)
% Purpose: esquema explicito (Forward Time - Central Space)
% In : Ix  ...  interval del espacio [a, b]
%      It  ...  interval del tiempo  [0, T]
%      M   ...  numero de pasos en el espacio
%      N   ...  numero de pasos en el tiempo
%      ec  ...  (estructura) con
%                ec.D   ... coefficiente de difusion
%                ec.ic  ... (function handle) condicion inicial
%                ec.bcL ... (function handle) condicion de frontera Left
%                ec.bcR ... (function handle) condicion de frontera Right
%
% Out:  W  ... (M+1)x(N+1) matrix con la aproximacion numerica
%

end
```

Como hacer un *plot* de la solución numérica:

```
Ix = [0,1];    It = [0,1];
eq.ic  = @(x) cos(2*pi*x);
eq.bcL = @(t) exp(-4*t);
eq.bcR = @(t) 0*t;
eq.D   = 1.0/pi^2;
W = mCalor_EE_dirichlet(Ix, It, M, N, ec);

xn = linspace(Ix(1), Ix(2), M+1);
Tn = linspace(It(1), It(2), N+1);
mesh(xn, Tn, W', 'LineWidth',1.5);        % 3-D plot of solution w
view(60,30);
axis([Ix(1) Ix(2) It(1) It(2) -1 1]);
xlabel('x');
ylabel('t');
```

2. Implementación

2.1. Esquema explícito. Implementelo para ecuaciones del tipo
$$u_t = Du_{xx} \quad \text{para} \quad x \in (-1,1)\,,\ t \in (0,T)$$
con condiciones de frontera Dirichlet $u(-1,t) = 0$ y de Neumann $u_x(1,t) = 0$.

2.2. Esquema implícito. Implementelo para ecuaciones del tipo
$$u_t = Du_{xx} \quad \text{para} \quad x \in (-1,1)\,,\ t \in (0,T)$$
con condiciones de frontera Dirichlet $u(-1,t) = 0$ y de Neumann $u_x(1,t) = 0$.

3. Aplicar tus esquemas

Ejercicio 1. Usa tus esquemas para resolver el PVIF
$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{2}u_{xx} & ,x \in (-1,1)\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = 1 + \sin\dfrac{\pi}{2}x & ,x \in [-1,1] \end{cases}$$
con condiciones homogéneas de Dirichlet en $x = -1$ y de Neumann ($u_x \equiv 0$) en $x = 1$. Para eso resuelve las siguientes cuestiones:

1. Encuentre la solución de equilibrio, es decir, la función $u(x,t) = \phi(x)$ que satisface la EDP y tal que $u_t(x,t) = \partial_t\phi \equiv 0$.
2. Observe que no construimos las condiciones de frontera. Constrúyelas de orden 1, es decir, $\mathcal{O}(h)$. Realiza una simulación con $h = 0.1$ y $k = 1/90$. *se ve bien para* $k = 1/100$.
3. Reduce h, k cada vez a su mitad. ¿Qué observas? y ¿Cuál es la manera correcta de reducir la malla y porqué?
4. Ahora construye condiciones a la frontera de orden $\mathcal{O}(h^2)$, como tu método, ¿Cierto? Repite, los apartados 2 y 3. ¿Qué observas?

Ejercicio 2. Haz lo mismo como en Ejercicio 1, pero con el PVIF
$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & ,x \in (-1,1)\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = \mathcal{H}(x) & ,x \in [-1,1] \end{cases}$$
con condiciones homogéneas de Dirichlet en $x = -1$ y de Neumann ($u_x \equiv 0$) en $x = 1$. En este ejemplo, $\mathcal{H}(x)$ es la función de Heaviside.