PRÁCTICA 2 – EDO

1. Reglas

- Fecha de entrega límite: 28 de Abril de 2018, a las 23:55 horas
- Grupos de exactamente 3 o 4 estudiantes. Un sólo documento por grupo.
- Deberá entregarse a través de
  Comunidad ITAM → Trabajos y Exámenes → Práctica 2
- Qué se entrega:
  - Un **documento de práctica** en formato PDF.
  - Un archivo comprimido con todos los **archivos Matlab** que hayan utilizado (funciones, *scripts*, etc.) en formato ZIP o GZIP.
- El documento de práctica debe ser conciso, idealmente de menos de 10 páginas.
  La estructura:
  - Resultados de los Ejercicios de la Práctica 2.
  - Mencionar como los resultados reflejan la teoría del curso.
  - (Opcional) Bibliografía referenciada en el documento.
- Su código Matlab debe estar bien comentado (donde sea necesario) y debe utilizar nombres significativos para las variables/constantes/funciones para ser fácilmente legible y entendible. Detalles de implementación que no se parecen a los dados en clase (como decisiones de implementación, posibles optimizaciones/mejoras que hayan hecho, entrada/salida de datos, etc.) deben ser comentados.

Nota importante: Hay que entregar un guión (*a MatLab script*) que reproduzca los resultados de cada ejercicio (por ejemplo: `ejercicio_31.m`, `ejercicio_32.m`, etc).

2. Consejos para la implementación

- En los laboratorios vimos como implementar un metodo generico, es decir, uno que aplica un paso dado como parametro. Pueden usar esa idea para reducirse la implementacion de los ejercicios abajo, pues solo requieren la implementacion del paso local. Tambien vimos como se implementa el metodo RK 2/3.
- Para verificar el orden p de un método, recuerden que p es aproximadamente la pendiente de la curva del error en una gráfica log-log. Motivado por esa relación, se define el *"experimental order of convergence" (eoc)* como el cociente
$$p \approx \mathrm{eoc}(h_1, E_2, h_2, E_2) := \frac{\log\left(E_{M,2}/E_{M,1}\right)}{\log\left(h_2/h_1\right)}\,,$$
donde $E_{M,i}$ es el error asociado con paso h_i usando un método M para aproximar una solución de una EDO.

3. Problemas

3.1. Euler (3 puntos). Aplica el método de Euler (explícito) con paso $h = 0.1$ al PVI:
$$y' = y + 2e^{-t}\,, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$
en el intervalo $[0, 1]$.

1. Lista los valores de la solución numérica w_i para $i = 0, 1, \ldots, 10$.
2. Dada la familia de soluciones
$$y(t) = \left(y_0 e^{-t_0} + e^{-2t_0} - e^{-2t}\right) e^t \tag{2}$$
   - encuentra el error global en $t = 1$ usando la solución exacta.
   - calcula el máximo de los errores **locales**, *i.e.* $\max_i |e_i|$.
   - dibuja una gráfica log-log del error **global** del método de Euler en $t = 1$ como función de $h = 0.1 \times 2^{-k}$ para $k = 0, 1, \ldots, 5$.
   - crea una tabla con las columnas como abajo, que contiene en la fila k los valores asociados al paso $h_k := 0.1 \times 2^{-k}$ donde $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

k	paso	máximo de los errores **locales** del método de Euler	`eoc`
1	…		
$\vdots$	…		

   - Interpreta la gráfica y la tabla. ¿Cómo se relacionan los resultados con la teoría? Nota: Guarda la gráfica en un archivo con formato PDF (o EPS) de preferencia.

3.2. Trabajo *vs* precisión *vs* orden (1 puntos). Para este ejercicio usa el PVI (1) y su solución general exacta (2). El trabajo realizado por un método depende del número de intervalos y "estados" (evaluaciones de funciones).

- Aplica el método del Trapecio (explícito) con el paso $h_1 = 1/10$ y calcula el error global $E_{\text{Trapecio}}(h_1)$ en el punto $t = 1$.
- Después dobla el trabajo de las siguientes formas:
  1. usa el mismo método con el paso $h_2 = h_1/2$ y calcula $E_{\text{Trapecio}}(h_2)$,
  2. ahora usa el método Runge-Kutta 4 con el mismo paso h_1 y calcula $E_{\text{RK4}}(h_1)$.
- Rellena la tabla siguiente.

·	Trapecio(h_1)	Trapecio(h_2)	RK4(h_1)
Error (global en $t = 1$)	·	·	·
número de estados	·	·	·

¿Cuál es la forma más conveniente para reducir el error (en este caso) y porqué?

3.3. Punto medio implícito (1 puntos). Aplica el método del Punto Medio implícito con pasos $h = 1/10$ y $h = 1/100$ al PVI

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

para $t \in [0, 1]$. La solución exacta es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-t} \sin t \\ y_2(t) &= e^{-t} \cos t\,. \end{aligned}$$

1. Para ambos pasos ($h = 1/10$ y $h = 1/100$) encuentra los errores globales aproximando las componentes y_1 y y_2 en $t = 1$.
2. ¿Es consistente la reducción del error (al pasar de $h = 1/10$ a $h = 1/100$) con el orden del método del Punto Medio? Explica.

3.4. Ecuaciones *stiff*: explícito *vs* implícito (2 puntos). Considera el PVI

$$y' = 5y - 3y^2\,, \quad y(0) = \frac{1}{2}\,, \quad t \in [0, 20].$$

1. Aplica Euler *implícito* con paso constante $h = \frac{1}{2}$ al PVI.
   Lista el valor $y(20)$.
   ¿Hacia cuál de las soluciones de equilibrio converge la trayectoria?
2. Ahora aplica Euler *explícito* con pasos constantes $h \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$.
   ¿Para que valores de h funciona bien el método de Euler explícito? (es decir, la trayectoria converge hacia la solución de equilibrio correcta). Usando la teoría explica porqué.
3. Aplica el método RK2/3 adaptativo con tolerancia relativa $tol \in \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{100}\right\}$ y compara con los resultados anteriores. ¿Qué es mejor el método implícito o un método explícito adaptativo?
4. Determina el paso máximo estable para el método RK2/3 adaptativo (sin extrapolación).

3.5. Verificar orden (1 punto). El objetivo de este ejercicio es comparar métodos y verificar su orden global. Usando una (y solo una) ecuación de su preferencia, verifiquen el orden y comparen los errores de los siguientes métodos:

- `Euler (explícito)`,
- `Trapecio (explícito)`, `Punto Medio (explícito)`
- `RK4`

Recomendamos que presenten sus resultados de este ejercicio (junto con su ecuación y la solución exacta) en forma (de preferencia) de una gráfica (log-log) o en forma de tablas. Viendo los resultados se debe poder comparar los errores y el orden de los métodos (usen los 3 valores de h dados por $1/50, 1/100, 1/200$).

3.6. Shooting method (2 punto). Dado el BVP

$$
\begin{aligned}
y'' &= 10y'(1-y) \\
y(0) &= 1 \\
y(1) &= 1 - \frac{\pi}{20}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

aproxima su solución con el *shooting method* utilizando una pendiente inicial s de tu gusto y una iteracion de Newton para aproximar la pendiente exacta.

Para eso,

a) Define el PVI. (también en el documento)

b) Escoge una pendiente inicial s y aproxima la pendiente exacta con el método (con tolerancia 10^-10). Después, documente el resultado (numero de iteraciones de newton, las pendiente obtenidas en cada iteración de Newton y el valor dela función $F(s) = w(b; s) - y_b$.

c) Compara la solución obtenida con la solución exacta, dada por

$$y(t) = 1 - \frac{\pi}{20} \tan\left(\frac{\pi}{4} t\right),$$

es decir, calcule y documente el máximo de los errores en el intervalo $[0, 1]$.