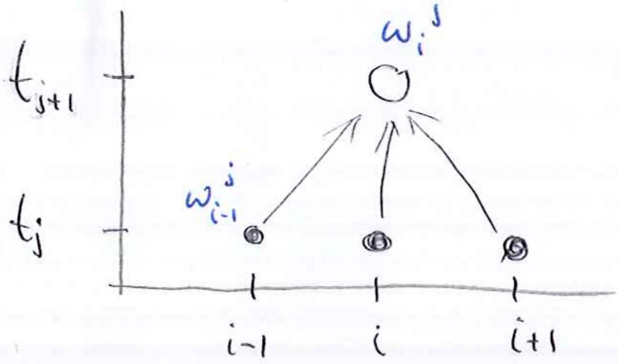
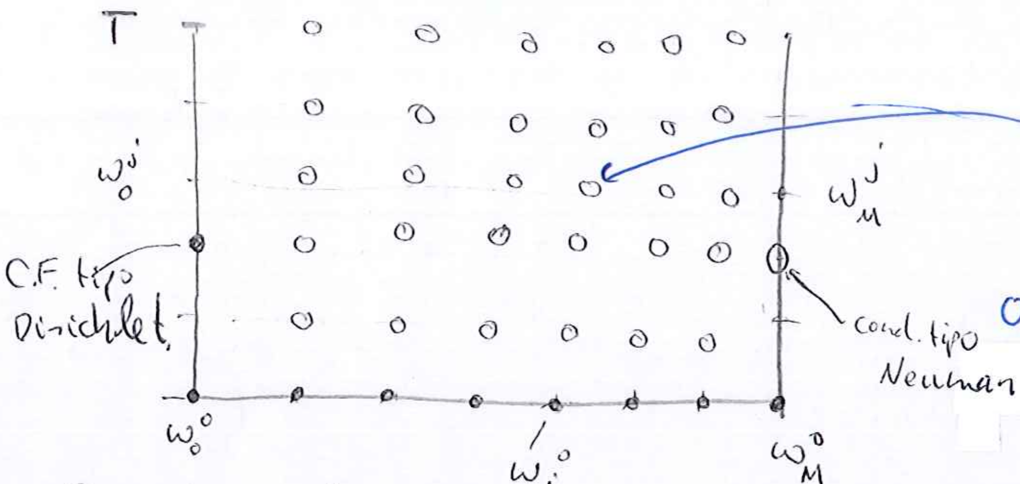


Circulo vacio es un valor desconocido

circulo lleno es un valor conocido.

A lo largo del tiempo queremos aproximar desconocidos para muchos tiempos, pues:



w_i^j por determinar

$0 < j \leq N$

Clase 26

Cuando las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet, entonces conocemos w_0^j y w_M^j, pues.

$$\left.\begin{array}{ll} l(t) = u(x=0,t) & \text{da } w_0^j \\ r(t) = u(x=L,t) & \text{da } w_M^j \end{array}\right\}$$

y solo buscamos los desconocidos para $0 < i < M$.

Cuando hay una C.F. tipo Neumann, por ejemplo, $u_x(L,t)=0$, entonces tenemos que aproximar esa cond. con una formula de diferencias finitas y esa formula debe tener un error de discretización igual al que cometimos en la EDP, en este caso con $O(h^2)$.

La serie de Taylor nos da

$$\frac{u(x-2h,t) - 4u(x-h,t) + 3u(x,t)}{2h} = u_x(x,t) + O(h^2) \qquad (5)$$

→ Ejercicio 5.2.1 (Demuestre esa formula).

~~Supongamos que tenemos C.F de tipo Dirichlet,~~
Entonces empezando con la C.I. $\{w_i^0\}_{i=0..M}$ avanzamos en la dir. del tiempo t, paso a paso, determinando una fila $\{w_i^{j+1}\}_{i=1..M-1}$ a partir de la anterior $\{w_i^j\}_i$.
El primer y último valor de la nueva fila, se determina con la C.F. (o en caso de Neuman, con una formula similar a la de arriba).

c) La forma maticial del método.

En esta parte supongamos que tenemos C.F. de tipo Dirichlet.
Entonces, tenemos $M-1$ desconocidos (y ecuaciones) en cada paso del tiempo, i.e.

cond. F.

$$w_1^{j+1} = \sigma \boxed{w_0^j} + (1-2\sigma) w_1^j + \sigma w_2^j$$

$$w_i^{j+1} = \sigma w_{i-1}^j + (1-2\sigma) w_i^j + \sigma w_{i+1}^j \qquad i = 2,\dots M-1$$

$$w_{M-1}^{j+1} = \sigma w_{M-2}^j + (1-2\sigma) w_{M-1}^j + \sigma \boxed{w_M^j}$$

donde $\sigma = \frac{Dk}{h^2}$.

Eso, se puede escribir en forma matricial: con

$$W^j = (w_1^j \ w_2^j \ \dots, w_{M-1}^j)^t$$

las ecuaciones para $i = 1 \dots M-1$ estan dados por

$$\left\{ W^{j+1} = A W^j + S^j \right. \qquad (6)$$

con

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} (1-2\sigma) & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & (1-2\sigma) & \sigma & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & (1-2\sigma) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}}, \quad S^j = \begin{pmatrix} \sigma w_0^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma w_M^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M-1}.$$

Ojo, esa formula solo es para (determinar) w_i^{j+1} $i = 1, \dots, M-1$.
Los valores en la frontera w_0^{j+1}, w_M^{j+1} se determinan usando las C.F.

-> Ejercicios. 3. {1, 2, 3, 4}.
(útil: tabla de sen / cos).

¿Cómo implementar C.F. de tipo Neumann?

La forma maticial (con C.F. de tipo Dirichlet) se puede escribir de forma completa:

$$I \cdot \begin{pmatrix} w_0^{j+1} \\ W^{j+1} \\ w_M^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \sigma & (1-2\sigma) & \sigma & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 \cdots & \sigma & (1-2\sigma) & \sigma \\ 0 \cdot & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0^j \\ W^j \\ w_M^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l(t_{j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t_{j+1}) \end{pmatrix};$$

es decir, incluyendo las C.F. al sistema.

Con cond. de tipo Neumann (en la derecha), es decir, $u_x(b,t) = r(t)$ se tiene que cambiar la última igualdad

$$w_M^{j+1} = r(t_{j+1})$$

por la aprox. de (5); i.e.,

$$\frac{w_{M-2}^{j+1} - 4 w_{M-1}^{j+1} + 3 w_M^{j+1}}{2h} = r(t_{j+1}).$$

es decir, la ultima fila de la identidad I en la izq. cambia...

→ útil para Lab. EDP 1.

2.2. El esquema implícito

Def. El *esquema implícito* (de Euler) para la ec. del Calor usa la dif. hacia atrás en el tiempo (para aprox. $\partial_t u$, y la dif. centrada para $\partial_x \partial_x u$.

→ Ejercicio. 3.5

Haber resuelto este ejercicio da el esquema

$$-\sigma\, w_{i-1}^{j} + (1+2\sigma)\, w_i^{j} - \sigma\, w_{i+1}^{j} = w_i^{j-1} \qquad \text{con } \sigma := D\frac{k}{h^2}$$

para $i = 1, \dots, M-1$. (⇒ Stencil: )

La forma matricial para cond. de frontera tipo Dirichlet es:

$$W^j = A^{-1}\left(W^{j-1} + \sigma S^j\right)$$

con

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (1+2\sigma) & -\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma & (1+2\sigma) & -\sigma & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -\sigma & (1+2\sigma) & -\sigma \\ 0 & \cdots & 0 & -\sigma & (1+2\sigma) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}} \quad y \quad S^j = \begin{pmatrix} w_0^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_M^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M-1}.$$