3. Método de la Potencia y sus relativos

Una referencia es: [Sauer, Capítulo 12].

Definicion 4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz con eigenvalores ordenados de la manera

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Cuando $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, decimos que λ_1 es el *eigenvalor dominante* de A. En este caso, al eigenvector asociado, $\boldsymbol{v}_1$, se le llama *eigenvector dominante* y al par $(\lambda_1, \boldsymbol{v}_1)$ *eigenpar dominante*.

Bonito: Si A tiene un eigenvalor dominante, entonces podemos aproximar la pareja $(\lambda_1, \boldsymbol{v}_1)$ por el Método de la Potencia.

3.1. Teoría.

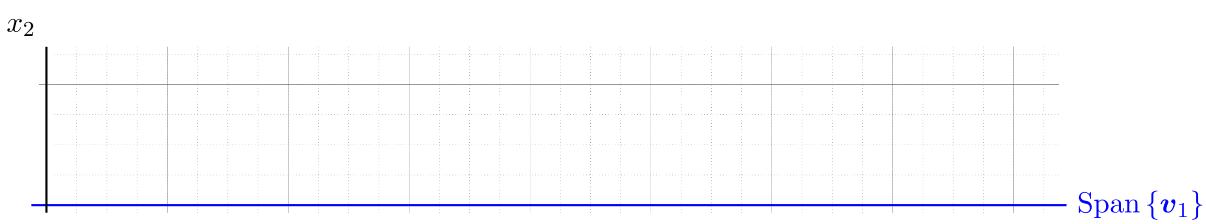
La idea del método es tomar un vector $\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$ (casi cualquiera) y formar la secuencia

$$\boldsymbol{q},\ A\boldsymbol{q},\ A^2\boldsymbol{q},\ A^3\boldsymbol{q},\ \ldots,$$

que convergirá a la dirección del eigenvector dominante. Después veremos como obtener el eigenvalor asociado.

Ejemplo 2 (La idea geométrica del método).

$$\text{Dado} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & . \\ . & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dibuje } \boldsymbol{q},\ A\boldsymbol{q},\ A^2\boldsymbol{q},\ A^3\boldsymbol{q}.$$



Nota. El cálculo de A^i es "costoso", pero nunca es requerido, puesto que $A^{i+1}\boldsymbol{q} = A(A^i\boldsymbol{q})$.

Teorema 4. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz semisimple. Si A tiene un eigenpar dominante $(\lambda_1, \boldsymbol{v}_1)$, entonces la secuencia de vectores*

$$\boldsymbol{q}^{i+1} := \frac{1}{\lambda_1} A\boldsymbol{q}^i, \quad \boldsymbol{q}^0 := \boldsymbol{q} \tag{1}$$

tiende al vector $c_1\boldsymbol{v}_1$ cuando $i \to \infty$ y $\boldsymbol{q} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n$ con $c_1 \neq 0$.

Demostración.

□

Ejercicio 1. Considere la última igualdad de la secuencia $\boldsymbol{q}^i = A^i\boldsymbol{q}/\lambda_1^i$ y muestre que $\exists C > 0$ tal que

$$\left\|\boldsymbol{q}^i - c_1\boldsymbol{v}_1\right\| \leq C\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^i \quad \text{con} \quad i = 2, 3, \ldots$$

y por lo tanto $\boldsymbol{q}^i \to c_1\boldsymbol{v}_1$.

Definicion 5. Decimos que una secuencia $\left\{x^i\right\}_i$ convergente a $x^\star$, es linealmente convergente si existe $r \in (0, 1)$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\left\|x^{i+1} - x^\star\right\|}{\left\|x^i - x^\star\right\|} = r$$

donde r es el radio de convergencia.

Ejercicio 2. Muestre que bajo la hipotesis $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$, $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, la secuencia $\boldsymbol{q}^i = A^i\boldsymbol{q}/\lambda_1^i$ converge linealmente hacia $c_1\boldsymbol{v}_1$ con el radio de convergencia $r = |\lambda_2/\lambda_1|$.