Iteración simultánea:

- Dado $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & \cdot \\ \cdot & 1 & 4 \\ \cdot & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \in \{-3, -1, 3\}$

$\vec{e}_1 \nearrow -3$, $\quad V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow -1$, $\quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \uparrow 3$

$$S = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{q_1^{(0)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{q_2^{(0)}} \right\} \cap \text{span}\left\{ \vec{V}_2 \right\} = \{0\}$$

$$\downarrow$$

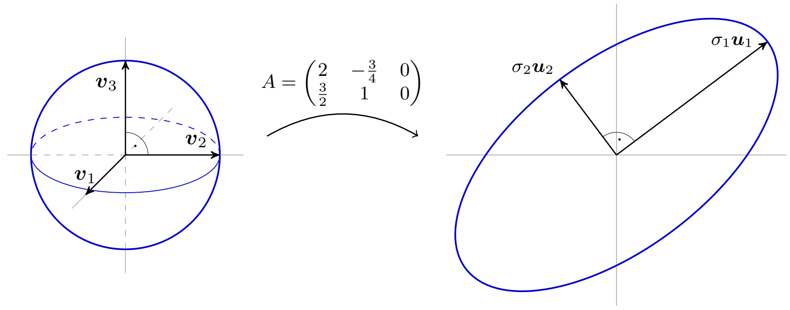
$$\mathcal{J} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \perp \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=: \vec{n}_{\mathcal{J}}}.$$

Haz 5 iteraciones de la iteración simultánea y observe que el vector ortonormal ~~normal~~ a $q_1^{(m)}, q_2^{(m)}$ se parece con cada iteración más a $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Sobre la pista de la descomposición en valores singulares

Podemos considerar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como una transformación lineal

$$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$$



1. Geométricamente, dado una bola $B := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$ obtenemos como imagen un elipsoide $A(B) := \{A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{x} \in B\}$. ¿Este siempre tiene volumen?

2. En el caso $n = m$, si $\det(A) \neq 0$, ¿el volumen de A(B) puede ser nulo?

3. Dado que podemos encontrar una base ortogonal para los semiejes de $A(B)$, digamos que $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ es esta base. ¿Será que podemos construir una base ortogonal $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ con $m = n$? Digamos $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ tal que $A\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i$. ¿Qué dice el Teorema Espectral en el caso $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica?

Pensando en bases ortonormales definimos:

Definición 1. Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y bases ortonormales $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$, $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$ que satisfacen

$$A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i\boldsymbol{u}_i \quad \text{para} \quad \sigma_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, \min\{m, n\}) \tag{1}$$

llamamos a los

- $\boldsymbol{v}_i\,(i = 1, \ldots, n)$ vectores singulares de la derecha de A.
- $\boldsymbol{u}_i\,(i = 1, \ldots, m)$ vectores singulares de la izquierda de A.
- $\sigma_i\,(i = 1, \ldots, \min\{m, n\})$ valores singulares de A.

Cada σ_i en la Ec. (1) es el tamaño del i-ésimo semieje de $A(B)$.

4. Considerando Definición 1.
   - ¿Cuántos semiejes hay (piensa en la relación entre m y n)?
   - Es fácil ver (convencerte de eso) que $\mathcal{U}$ puede ser una base ortonormal.
   - ¿Será que $\mathcal{V}$ puede ser ortonormal también? ¿Será posible en general con $m \neq n$?
   - ¿Qué pasa cuando $m > n$ ó $m < n$?
   - Trate de escribir las ecuaciones dadas por Ec. (1) como una ecuación matricial. Primero para $m = n$, después para $n > m$ y $m > n$.

El resultado debe verse como sique:

Definición 2. Para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y bases ortonormales $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$, $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m$ que satisfacen

$$A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i \quad \text{para} \quad \sigma_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, \min\{m, n\})$$

La forma matricial de estas relaciones se define como sigue. Sean

$$V := \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}, U := \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \dots & \boldsymbol{u}_m \end{bmatrix},$$

las matrices ortonormales (cuyas columnas son elementos de las bases respectivas) y Σ es la matriz "diagonal" $m \times n$ (extendida por ceros cuando $m \neq n$) cuyas entradas son los σ_i, es decir,

$$\Sigma \overset{m\leq n}{=} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \mathcal{O}_{m\times(n-m)} \\ & & \sigma_m & \end{pmatrix}, \quad \Sigma \overset{m=n}{=} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \end{pmatrix}, \quad \Sigma \overset{m\geq n}{=} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & \mathcal{O}_{(m-n)\times n} & \end{pmatrix}.$$

La siguiente factorización se llama descomposición (de A) en valores/vectores singulares:

$$A = U\Sigma V^\top.$$

Nota. La descomposición en valores/vectores singulares generaliza:

- el concepto de matrices diagonalizables, pues $\Sigma = U^\top A V$.
- el concepto de valores/vectores propios (evita valores/vectores propios complejos).

Lema 3. *Supongamos que A, U, V, Σ son matrices como en Definición 2 que satisfacen*

$$A = U\Sigma V^\top.$$

Entonces, las columnas de V y U son eigenvectores de $A^\top A$ y $AA^\top$, respectivamente.

Demostración. Usando la factorización obtenemos

$$A^\top A V = (U\Sigma V^\top)^\top U\Sigma V^\top V = V\Sigma^\top U^\top U\Sigma = V(\Sigma^\top\Sigma),$$

lo cual es la definición de eigenvectores para V, puesto que $\Sigma^\top\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonal.
El enunciado para U queda como ejercicio. □

Ejercicio 1. Muestre el enunciado para U en el Lema 3,

Ejemplo 1. Calcular la SVD usando valores/vectores propios de $A^\top A$ (o $AA^\top$). Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución: Como $A^\top A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $AA^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ trabajamos con

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 9 = \sigma_1^2,\ \lambda_2 = \frac{1}{4} = \sigma_2^2$$

Por lo tanto, los valores singulares son $\sigma_1 = 3 \geq \sigma_2 = 1/2$ y los vectores singulares por la derecha (vectores propios de $A^\top A$) son $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2$. Los vectores singulares por la izquierda son vectores propios de $AA^\top$, pero es más fácil usar $A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i \boldsymbol{u}_i$, *i.e.*

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\boldsymbol{v}_1 = 2\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

y completar el conjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, es decir, unir un vector $\boldsymbol{u}_3 \in \{\boldsymbol{e}_3, -\boldsymbol{e}_3\}$. Juntamos todo para obtener:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = U\Sigma V^\top.$$

↑ día 9