3.2.3. Resumen.

Algoritmo: Método de la potencia

Entradas: vector inicial $\boldsymbol{q}$, matriz A, cota de iteraciones k.
Salida: eigenpar dominante $(\sigma_k, \boldsymbol{w}_k)$, cuando A tiene uno.
Pseudo code:

$\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{q}/\|\boldsymbol{q}\|_2$
For $i = 1, \dots, k$
· $\boldsymbol{u}_i = A * \boldsymbol{w}_{i-1}$
· $\sigma_i = \langle \boldsymbol{w}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i \rangle$
· $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i/\|\boldsymbol{u}_i\|_2$
end

Comentario (importante).

- El método también funciona para matrices "defectivas" y cuando los eigenvectores no son ortogonales.
- Es común introducir un criterio de parada con error relativo, *i.e.*,

$$\|A\boldsymbol{w}_{i-1} - \sigma_i \boldsymbol{w}_{i-1}\| \leq \mathrm{TOL} \cdot \|A\boldsymbol{w}_{i-1}\| \, .$$

  Este criterio también funciona cuando la secuencia $\{\boldsymbol{w}_i\}$ oscila entre elementos de span $\{\boldsymbol{v}_1\}$.

Nota 6. Antes de resolver problemas reales, es común verificar la implementación con (al menos) un ejemplo conocido. ¿Cómo verificar la implementación?

De la demostración (y Ejercicio 2) vemos lo siguiente. Cuando λ_1 es real y positivo y además $\lambda_1 > |\lambda_2| > |\lambda_3|$, la secuencia converge linealmente (con radio $r = |\lambda_2/\lambda_1|$) hacia $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1/\|\boldsymbol{v}_1\|_2$. Por lo tanto, verificar el radio de convergencia es una buena medida, pues vemos con cual velocidad la secuencia $\{\boldsymbol{w}_i\}$ se acerca a $\boldsymbol{w}$. Viendo Ejercicio 2 definimos el radio experimental de convergencia (en. experimental rate of convergence *erc*) por

$$erc_i := \frac{\|\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}\|}{\|\boldsymbol{w}_{i-1} - \boldsymbol{w}\|} \to r = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| . \tag{3}$$

3.3. Relativos del método de la potencia.

3.3.1. El método de potencia inversa.

Definición 7. Cuando la matriz A es invertible definimos:

"método de la potencia inversa" = "método de la potencia aplicado a A^{-1}"

Lema 7. *Sea A invertible. Entonces*

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \iff \lambda^{-1}\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}\,,$$

$$A \text{ es semisimple } \iff A^{-1} \text{ es semisimple }.$$

Corolario 8. *Si A^{-1} es semisimple y tiene un eigenvalor dominante, digamos, μ_1, es decir,*

$$|\mu_1| > |\mu_2| \geq \ldots \geq |\mu_n|\,,$$

entonces, el método de la potencia tiende al eigenpar $(\mu_1, \boldsymbol{w}_1) = (\lambda_n^{-1}, \boldsymbol{v}_1)$, donde λ_n es el eigenvalor de A de menor magnitud.

¿Cómo implementar un paso?

Un paso: del método de la potencia inversa

- $\boldsymbol{u}_i = A^{-1}\boldsymbol{w}_{i-1} \qquad \iff \qquad A\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{w}_{i-1}$
- $\sigma_i = \langle \boldsymbol{w}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i \rangle$
- $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i / \|\boldsymbol{u}_i\|_2$

Ejercicio 3.

- ¿Hacia cuál valor converge la secuencia σ_i?
- ¿Bajo cuáles hipótesis hacia A y el vector inicial $\boldsymbol{q}$ se puede demostrar que el radio de convergencia del método es (similar a Ejercicio 2)?

$$r = \left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right| = \left|\frac{\lambda_{n-1}^{-1}}{\lambda_n^{-1}}\right| = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|.$$

Comentario. La convergencia es rápida si $|\lambda_n| \ll |\lambda_{n-1}|$.

Ejercicio 4 (Laboratorio 1).

1. **Atención:** El limite en ecuación (3) (ver Nota 6) es teórico (con precisión infinita). En la computadora los erc_i primero bajan hasta casi r, pero a partir de un i suficiente grande se puede observar que numéricamente $erc_i \to 1$. ¿Por qué?

2. Escribe una función que implementa el método de la potencia llamada

   `mPowerIt(A, q, k)`

   La función debe regresar una aproximación del eigenpar dominante $(\lambda_1, \boldsymbol{v}_1)$.

3. Extiende tu código del apartado anterior por el criterio relativo de parada y simplifica tu código de manera que solo requieres una multiplicación del tipo "matriz * vector".

4. Dados

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

   verificamos nuestro código.
   (*Ayuda:* el método `eig` de MatLab/Octave nos da eigenpares "exactos".)

   - Tu función tiene un limite de iteraciones. Tomando $k = 1$, podemos calcular cada aproximación de la secuencia $\{\boldsymbol{w}_i\}$. Utilizando esa idea, escribe un *script* que calcula los primeros 10 erc_i para $i = 1, 2, \ldots$ (ver Nota 6).

   - ¿Después de cuántas iteraciones termina tu método con tolerancia $TOL = 0.1^{10}$?

   - Compara el eigenpar final con el resultado del método `eig` de Matlab/Octave.

   - ¿Bajo cuál hipótesis podemos quitar el limite de iteraciones, es decir, cuándo funciona el criterio relativo?

5. Escribe una función que implementa el método de la potencia inversa llamada

   `mPowerItInv(A, q, k, tol)`

   La función debe regresar una aproximación del eigenpar $(\lambda_n, \boldsymbol{v}_n)$ de la matriz A.
   (*Ayuda*: usa tu código del apartado 3 (con el criterio de parada), cambia la **única** ocurrencia de A por A^{-1} y elimina la inversa del código. Luego, piensa hacia cual valor tiende la secuencia $\{\sigma_i\}$). Después, repite el apartado 4 para esta versión.