Cálculo Numérico I – Ejercicios Tema 2 – 18 de Febrero, 2018

2. Método SVD

1. Complete la prueba del siguiente teorema (visto en clase).

   Teorema 1 (SVD). *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r.*
   Siempre existen dos bases ortonormales

   - $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$,
   - $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *de* $\mathbb{R}^m$,

   y números reales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, *tal que*

   $$Av_i = \sigma_i u_i \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq r.$$

   Además, los v_j son eigenvectores de $A^T A$, los u_i son eigenvectores de AA^T, y los $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$ son los eigenvalores no nulos de $A^T A$ (y de AA^T).

   (Sugerencia: ver también el Lema 3 del Laboratorio SVD.)

2. Demuestre que si $A = U\Sigma V^\top$ es una SVD de A, entonces los vectores singulares por la izquierda son eigenvectores de $AA^\top$.

3. Demuestre que los eigenvalores positivos de $A^\top A$ y $AA^\top$ coinciden.
   (Pista: Lema 3 en Laboratorio SVD)

4. Encontrar los valores singulares y vectores singulares por la izquierda de la matriz

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

   Escriba la descomposición SVD $A = U\Sigma V^T$, identificando cada una de las matrices.

5. Encontrar los valores y vectores singulares de la matriz

   $$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

   ¿Cuál es el rango de A?
   Escriba la descomposición SVD $A = U\Sigma V^T$, identificando cada una de las matrices.

   Escribe la aproximación de rango 1 de esa matriz A.

6. Calcular la norma $\|A\|_2$ de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. *a*) Encontrar el subespacio de dimensión 1 (generado por el vector u_1) que mejor aproxima los siguientes datos: $(3, 2)$, $(2, 4)$, $(-2, -1)$, $(-3, -5)$. Representar gráficamente los datos y el subespacio. Nota: te puedes ayudar de Matlab para calcular los valores y vectores singulares.

   b) Encontrar la proyección de los datos sobre ese subespacio, que es la matriz $A_1 \in \mathbb{R}^{2\times 4}$. Calcular la suma de los errores (al cuadrado) que se comete al aproximar los datos por sus proyecciones. Nota: el subespacio minimiza ese error, por tanto debería ser "pequeño".