2^o LABORATORIO – EDP

Hemos visto que discretizar la ecuación de onda de forma estable con orden 2 requiere una condición de CFL, es decir, $|\sigma| \leq 1$ donde $\sigma = c^2k^2/h^2$.

Para asegurar que una implementación es correcta requerimos soluciones exactas.
Una vez que la implementación es correcta (verificada), podemos

- ver que pasa cuando la condición de CFL no se cumple.
- aproximar soluciones desconocidas.

Este Laboratorio les presenta soluciones exactas y instruye como implementar y simular.

1. Soluciones exactas

Es fácil mostrar que algunas soluciones de la EDP $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ son dadas por

$$u(x,t) = a\cos\lambda(x+ct) + b\cos\lambda(x-ct)\,,$$

con λ, a, b constantes arbitrarias. **Múestrelo**.

Por lo tanto, podemos escoger λ y los cosenos (o senos también) que satisfagan las condiciones a la frontera. Por ejemplo, si el dominio es $x \in [0, L]$, y las condiciones son de Dirichlet homogéneas, podemos tomar

$$u_n(x,t) = \sin(\lambda_n x)\cos(c\lambda_n t) \quad \text{con} \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}\,.$$

Si las condiciones son de Neumann homogéneas, entonces podemos tomar:

$$u_n(x,t) = \cos(\lambda_n x)\cos(c\lambda_n t)\,.$$

Muestre que ambas soluciones satisfacen la EDP y las C.F. respectivas.

Podemos cambiar los cosenos por senos y de modo general obtenemos

$$u_n(x,t) = \Big[a_n \sin(c\lambda_n t) + b_n \cos(c\lambda_n t)\Big]\sin(\lambda_n x)\,.$$

Observe que

$$u_n(x,0) = b_n \sin(\lambda_n x) \qquad \text{y} \qquad \partial_t u(x,0) = c\, a_n \lambda_n \sin(\lambda_n x)\,.$$

Incluyendo otras variaciones las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$ y $\partial_t u(x,0) = g(x)$ se pueden escribir como una serie de Fourier en intervalos cerrados.

Ejemplo 1. La solución exacta del PVIF para la cuerda:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,, & x \in (0,L),\, t>0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0\,, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin\dfrac{2\pi x}{L} - 3\sin\dfrac{5\pi x}{L}\,, & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = 0\,, & x \in [0,L]. \end{cases}$$

es

$$u(x,t) = \sin(\frac{2\pi x}{L})\cos(\frac{2\pi t}{L}) - 3\sin(\frac{5\pi x}{L})\cos(\frac{5\pi t}{L})\,.$$

2. Consejos para implementar

Como definir matrices (sparse). Lean

```
help spdiags
```

Como se puede ver un método, p. ej. suponemos C.F. de tipo Dirichlet

```
function [W] = mWave_dirichlet(Ix, It, M, N, ec)
% Purpose: esquema explicito (Forward Time - Central Space)
% In : Ix  ...  interval del espacio [a, b]
%      It  ...  interval del tiempo  [0, T]
%      M   ...  numero de pasos en el espacio
%      N   ...  numero de pasos en el tiempo
%      ec  ...  (estructura) con
%                ec.c   ... velocidad de la onda
%                ec.ic  ... (function handle) condicion inicial u(x,0)
%                ec.g   ... (function handle) condicion inicial u_t(x,0)
%                ec.bcL ... (function handle) condicion de frontera Left
%                ec.bcR ... (function handle) condicion de frontera Right
%
% Out:  W  ... (M+1)x(N+1) matrix con la aproximacion numerica
%

end
```

Como hacer un *plot* de la solución numérica:

```
...
W = mWave_dirichlet(Ix, It, M, N, ec);

for j=1:pasosTotales
    plot(spaceGrid, uex(spaceGrid,T(j)), spaceGrid, W(:,j)', '--rs', ...
        'MarkerEdgeColor', 'k', 'MarkerFaceColor', 'g', 'MarkerSize', 8);
    axis([0, L, minY, maxY]);
    pause(0.1);
end
```

donde `uex(x,t)` es la solución exacta, `W` es la aproximación numérica y

```
maxY = max(abs(uex(x,0)));
minY = -maxY;
```

Ojo: ¿Cómo debe ser cuando $g(x) = u_t(x,0) \neq 0$*?*

3. Simulación

Toma $L = 10$, note que $c^2 = 1$, entonces k^2/h^2 debe ser acotado por 1.

1. Resuelve el Ejemplo 1 (arriba) numéricamente. Para eso toma una malla espacial fija (M fijo) que sea aceptable y $T > 0$ fijo. Utiliza tu método en $[0, T]$ para varios pasos del tiempo k tal que
$$\sigma \in \{0.6,\, 0.8,\, 1.0,\, 1.2\}\ .$$

2. Repite el ejercicio con el siguiente canal de agua:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}\,, & x \in (0, L),\ t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0\,, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 2\cos\dfrac{2\pi x}{L} - 4\cos\dfrac{4\pi x}{L} + \cos\dfrac{8\pi x}{L}\,, & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = 0\,, & x \in [0, L]. \end{cases}$$
al encontrar la solución exacta y mostrar que lo es.

   Ojo: Las condiciones de la frontera son de Neumann ahora.

   Observación: La solución de este problema es periódica en el espacio. Por lo tanto, se tiene $w_{-1}^j = w_1^j$ *y se puede usar el* stencil *también en la frontera. Un pequeño argumento teórico muestra que en caso de utilizar esa periodicidad la condición de Neumann se satisface automáticamente y como conclusión se tiene convergencia cuadrática.*

   Pregunta: ¿Eso funciona cuando
$$u(x, 0) = 2\cos\frac{3\pi x}{L} - 4\cos\frac{\pi x}{L} + \cos\frac{8\pi x}{L}\,, \quad x \in [0, L]\,?$$