Ejercicios Tema 5 – Cálculo Numérico I – 21 de Abril, 2018

1. Intro PDE

1. Considere la EDP
$$2u_x + 3u_z = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \,.$$
Determine el orden de la EDP y muestre que las siguientes funciones son soluciones
    a) $u(x, y, z) = y^5 \cos y$
    b) $u(x, y, z) = y^{-1} \cos y$
    c) $u(x, y, z) = f(y)$ para casi todo $f(y)$ ¿Que debe satifacer?
    d) $u(x, y, z) = \exp(3x - 2z)$
    e) $u(x, y, z) = \exp(z - \frac{3}{2}x)$
2. Encuentre todas las soluciones $u(x, y)$ de
    a) $u_x = x^2 + y^2$
    b) $x_{xx} = 12xy$

2. Formulas de diferencias finitas

1. Demuestre la formula
$$\frac{u(x, y - 2\Delta y) - 4u(x, y - \Delta y) + 3u(x, y)}{2\Delta y} = u_y(x, y) + O(\Delta y^2) \,.$$

3. Ecuación del calor

1. Dada la ecuación del **Calor**, $u_t = u_{xx}$, $0 < x < a$, $t > 0$, define condiciones iniciales de tipo Dirichlet y condiciones de frontera de tipo Neumann tales que la solución exacta del problema es $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cos \pi x$.

2. Dada la ecuación del **Calor** con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad 0 < x < a, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \\ u(0,t) &= u(a,t) = g(t)\,, \end{aligned}$$

queremos aplicar el esquema **explícito** para resolverla. Conteste:

- ¿Cuál es el error de discretización y el orden del método?
- ¿Cuáles derivadas ocurren en el error de la discretización?
- ¿Y para cuáles soluciones este esquema es exacto en los puntos?

3. Considera el Problema de Valores Iniciales y de Frontera (PVIF)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \operatorname{sen}(\pi x), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0. \end{aligned}$$

   a) Aplica el esquema **explícito** derivado en clase al problema, usando $\Delta x = 1/4$ y $\Delta t = 0.02$. Calcula (a mano) la solución aproximada en el tiempo $t = 0.04$, avanzando de un paso de tiempo al siguiente.
   b) Busca (o resuevle) la solución exacta del problema (en un libro, en Internet) y compara con tu solución numérica.

4. Aplica el esquema **explícito** a la ecuación del **calor** con condiciones de frontera de Neumann

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad 0 < x < 4, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \cos\left(\frac{2\pi x}{4}\right), \\ u_x(0,t) &= u_x(4,t) = 0. \end{aligned}$$

   a) Usa $\Delta x = 1$ y $\Delta t = 1/3$ y avanza la solución hasta $t = 2/3$. Aproxima los términos u_x usando un esquema que tenga un error de truncamiento consistente con el del esquema de la EDP.
   b) Busca la solución exacta del problema (en un libro, en Internet) y compara con tu solución numérica.

5. La idea de este ejercicio es derivar un esquema.

   a) Discretizar la EDP del calor y derivar el esquema implícito:

   $$-\sigma w_{i-1}^{j} + (1+2\sigma) w_i^j - \sigma w_{i+1}^{j} = w_i^{j-1} \quad \text{con} \quad \sigma := D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

   b) ¿Cuál es el tamaño asintótico del error de consistencia en el tiempo?

   c) ¿Cuál es el tamaño asintótico del error de consistencia en el espacio?

   d) Dibujar el "stencil" computacional.

   e) Escribe un paso del algoritmo en forma matricial (solo para C.F. de tipo Dirichlet) y conteste lo siguiente. ¿Qué hay que hacer en el paso j-ésimo para obtener los valores en los nodos desconocidos a partir de los conocidos? ¿Qué condición hay que pedir al sistema lineal resultante, para poder resolverlo?

6. (Lab) Given the problem

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\pi} u_{xx} && \text{in } \ (-1,1)\times(0,2] \\ u(x,0) &= \cos \pi x && \text{for } \ x \in [-1,1] \\ \partial_x u(-1,t) = \partial_x u(1,t) &= 0 && \text{for } \ t > 0 \end{aligned}$$

implement finite differences of 2^{nd} order for the heat equation (above) and verify that the experimental rate of convergence (erc) equals two.
Hint: First prove a finite difference formula similar to the one in exercise 2.1 (above).
Hint: You need an exact solution. Then, you could measure the error in a point $x = 0.3, y = 2$ on a sequence of meshes that have this point (3 meshes are sufficient).

4. Ecuación de Onda

1. Aproxima la solución de la ec. de la **Onda** con pasos $\Delta x = \Delta t = \frac{1}{4}$.

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}$$

   donde las condiciones de frontera y iniciales son

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, & u(1,t) &= 0, \\ u(x,0) &= \sin \pi x, & \partial_t u(x,0) &= 0\,. \end{aligned}$$

   a) Dibuje una malla con los nodos.
   ¿Cuál es N, M?
   ¿Cuáles valores conocemos y cuáles son los desconocidos?
   b) Discretiza la condición inicial de tipo Neumann como en clase.
   c) Calcule los desconocidos, es decir, haz dos pasos avanzando la solución hasta $T = 1/2$.

5. Ecuación de Laplace

1. Escribe las ecuaciones en forma matricial (solo para los valores incógnitos) para la aproximación del problema potencial

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} &= 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) &= 0, \\ u_y(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

   usando el esquema visto en clase

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right)$$

   con $\Delta x = \Delta y = 1/3$. (Simplificación: puedes discretizar la condición de Neumann en $y = 0$ con una diferencia finita que te ocurre.)

2. Dado el problema del potencial

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

   con condiciones de frontera de tipo Dirichlet.

   Aplicamos el esquema visto en clase con $\Delta x = \Delta y$, i.e.

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right)\,.$$

   - ¿Cuál es el error de discretización y el orden del método?
   - ¿Cuáles derivadas occuren en el error de la discretización?
   - ¿Y para cuáles soluciones este esquema es exacto en los puntos?

3. Dada la solución exacta de la ecuación de **Laplace** $u(x,y) = e^{-\pi y}\cos \pi x$, define las siguientes condiciones de frontera del rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$:

$$u(0,y) = \qquad\qquad u(1,y) =$$
$$\partial_y u(x,0) = \qquad\qquad u(x,1) =$$

4. Aproxima la solución $u(x,y) = xy^2$ de la ec. de **Laplace** en el rectángulo $\Omega = \left(0, \frac{3}{2}\right) \times (0,1)$ con pasos $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{2}$ y condiciones de frontera tipo Dirichlet.

   a) La solución numérica es exacta en cada punto (ignorando errores de redondeo). ¿Por qué?

   b) ¿Cuál es N, M y la malla?

   c) ¿Cuáles valores conocemos? Calcule los desconocidos.

5. Aproxima la solución $u(x,y) = xy^2$ de la ec. de **Laplace** en el rectángulo $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ con pasos $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{2}$. Para eso, primero define las siguientes condiciones mixtas de frontera:

$$u(0,y) = \qquad\qquad u(1,y) =$$
$$\partial_y u(x,0) = \qquad\qquad u(x,1) =$$

   a) Dibuje una malla con los nodos.
   ¿Cuál es N, M?
   ¿Cuáles valores conocemos y cuáles son los desconcidos?

   b) Derive y use una formula similar a la del ejercicio anterior para discretizar la condición de frontera de tipo Neumann.

   c) Decide (con argumentos) si el método es exacto en cada punto (ignorando errores de redondeo).

   d) Calcule los desconocidos.