III.3 Sobre el error local y global

Hemos visto que las soluciones numéricas se alejan en cada paso de la sol. exacta por un error local. Acumulando esos errores obtenemos después de varios pasos el error global.

El siguiente resultado ayuda entender:

Teo. III.3 (Estabilidad de soluciones)

Sea f una función Lipschitz en la variable y en el rectángulo $R : [a,b] \times [\alpha, \beta]$. Sean $y(t)$, $z(t)$ soluciones de la EDO

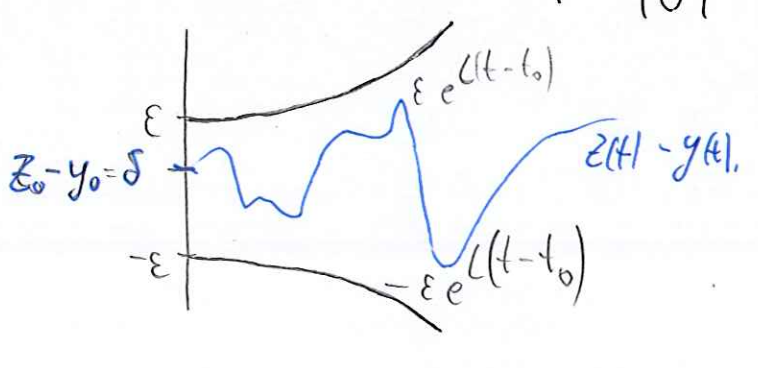
$$y' = f(t,y)$$

con condiciones iniciales $y(t_0) = y_0 \in [\alpha,\beta]$, $z(t_0) = z_0 \in [\alpha,\beta]$, respect. Entonces

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-t_0)} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in I,$$

con L siendo constante de Lipschitz.

Interpretación: Sea $z_0 := y_0 + \delta$ una cond. cerca de y_0, entonces el mayor cambio en la sol. al tiempo t es lineal en $|\delta| \leq \varepsilon$.



Si $\varepsilon \to 0$, la solución $Y(t; t_0, y_0)$ es continua en el parametro y_0.

Para demostrar Teo III.3 vamos a usar el siguiente Lema:

Lema de Gronwall (1919) (versión diferencial).
Sea $I = [a, b)$ un intervalo $(a<b)$ y sean $w, \beta : I \to \mathbb{R}$ continuas, supongamos que

$$w' \leq \beta(t)\, w \quad \text{para } t \in I^\circ,$$

entonces w es acotada por la solución de la EDO $y' = \beta(t) y$, es decir,

$$w(t) \leq w(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)\, ds\right) \quad \text{para } t \in I.$$

Demo. Define $v(t) := \exp\left(\int_a^t \beta(s)\, ds\right)$, $t \in I$.

Note que

$$v'(t) = \beta(t)\, v(t) \quad \forall\, t \in I^\circ.$$

Con $v(a) = 1$ y $v(t) > 0$ $\forall\, t \in I$. podemos aplicar la regla del cociente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{w(t)}{v(t)} = \frac{w' v - w v'}{v^2} = \frac{[w'(t) - \beta(t) w(t)]\, v(t)}{v^2}$$

$$= \frac{w'(t) - \beta(t) w(t)}{v} \overset{\text{Hipó.}}{\leq} 0 \qquad t \in I^\circ$$

Por tanto, la función $\frac{w}{v}$ es decreciente y acotada por su valor inicial, es decir,

$$\frac{w(t)}{v(t)} \leq \frac{w(a)}{v(a)} = w(a) \qquad t \in I.$$

Despejando w obtenemos el resultado. $\blacksquare$

Dem Teo III.3 La func. f y las. C.I. satisfacen los hipótesis de Teo. III.1, por lo cual tenemos dos soluciones únicas $y, z : I \to \mathbb{R}$ que no se cruzan. (ya que empezando en donde se cruzan tuviéramos dos soluciones posibles).

S.p.g. tenemos que

$$w(t) = y(t) - z(t) > 0 \quad \text{para } t \in I.$$

y derivando

$$w'(t) = y'(t) - z'(t) = f(t,y) - f(t,z) .$$

Puesto que f es Lipschitz, $\exists L > 0$ tal que

$$w'(t) \leq |w'(t)| \leq L \cdot |y(t) - z(t)| = L\, w(t).$$

De aquí el Lema de Grönwall implica

$$w(t) \leq w(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} L \, ds\right)$$

$$\iff$$

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-t_0)} |y_0 - z_0| \quad \text{para } t \in I$$

$\boxtimes$