III.5 VERIFICAR EL ORDEN DE MÉTODOS

Supongamos que tenemos un método (o concepto) para resolver un PVI.
Entonces, evaluar el orden numéricamente sirve para

- ver si el método converge y ganar una intuición sobre el orden del método.
- ver si el método esta bien implementado
- comparar la eficiencia de dos (o más) métodos

1. Como evaluar el orden

Dado un método M convergente y un PVI tal que el método no es exacto para la solución, podemos suponer que un error de truncamiento es de la forma $0 < E_M \approx Ch^q$, para constantes C y q fijos. Por lo tanto

$$0 < E_M \approx Ch^q \iff \ln E_M \approx \ln C + q \ln h \tag{1}$$

El error puede ser el local (con $q = p + 1$) o el global ($q = p$). Al orden también le llaman *radio de convergencia*, en Ingles, *rate of convergence*.

Bajo esta hipótesis hay dos formas de verificar el orden.

1.1. Evaluar el orden de un método. Dado dos errores E_1 y E_2 usando pasos h_1 y h_2, respectivamente, podemos restar las dos expresiones logarítmicas

$$\ln E_1 - \ln E_2 \approx q(\ln h_1 - \ln h_2)\,,$$

y definir radio experimental de convergencia, o *experimental rate of convergence (erc)*:

$$erc := \frac{\ln(E_1/E_2)}{\ln(h_1/h_2)} \approx q\,.$$

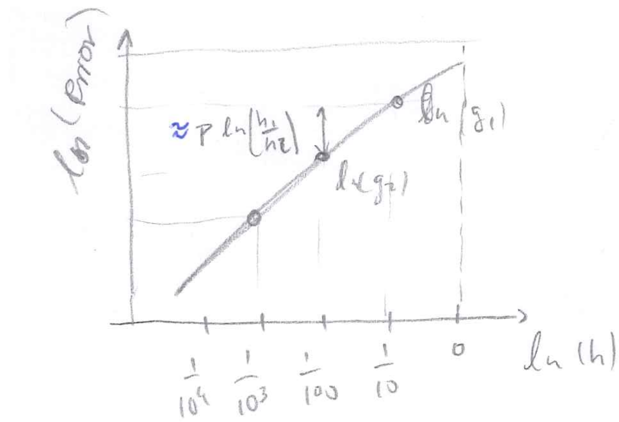
Estos números se encuentran en tablas de varias publicaciones.

1.2. Visualizar el orden de un o más métodos. Graficando varios errores del mismo método $\ln(E_i)$ contra el $\ln(h_i)$ para distintos tamaños de pasos h. Para h pequeño, los puntos deben parecerse a una recta con pendiente q, puesto que

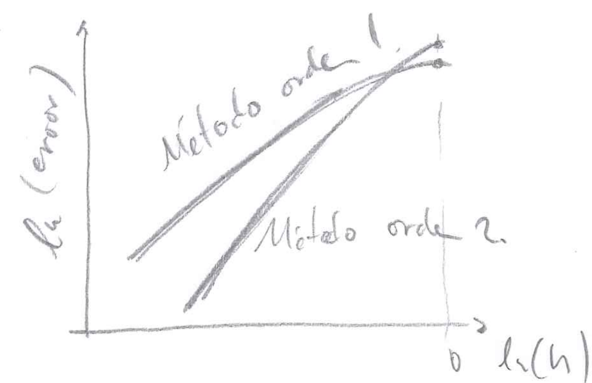
$$\ln(E_i) \approx \ln C + q \ln(h_i)\,.$$

o alternativamente a una recta con pendiente $-q$ cuando graficamos $\ln(E_i)$ contra el $\ln(1/h_i)$, pues

$$\ln E_i \approx \ln C - q \ln\left(h_i^{-1}\right).$$



Comparar varios métodos funciona con la misma técnica, por ejemplo, calculamos errores $E_{M1,i}$ y $E_{M2,i}$ $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ y graficamos en el mismo *plot*.



LABORATORIO – EDO (1)

1. Extensión a sistemas

Los métodos de un paso visto en clase sirven para sistemas

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \\ \quad \boldsymbol{y}' = f(t, \boldsymbol{y}) \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{y},\, \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n\,.$$

Por ejemplo, considera la ecuación matricial siguiente

$$\boldsymbol{y}'(t) = A(t)\boldsymbol{y}(t) \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \text{ y } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{para cada } t\,.$$

Así, el Euler explícito es simplemente:

$$\begin{cases} \quad \boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{w}_{j+1} = \boldsymbol{w}_j + hA(t_j)\boldsymbol{w}_j\,, \quad j = 0, 1, 2, \dots\,, \end{cases}$$

donde hemos usado $f(t, \boldsymbol{y}) = A(t)\boldsymbol{y}$.

Ejemplo 1. Definimos una función anónima que da un vector como resultado. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = y_2^2 - 2y_1 \\ y_2' = y_1 - y_2 - ty_2^2 \end{array}\right\} \iff \boldsymbol{y}' = f(t, \boldsymbol{y})$$

la función f se puede escribir (en MatLab y Octave) como sigue

Matlab/Octave code

```
f = @(t, y)  [y(2)^2 -2y(1);  y(1)-y(2)-t*y(2)^2];
```

se tiene que considerar que `y` es un vector y `t` es un escalar.

2. Implementación

2.1. Euler explícito. Implementa ese método para cualquier $f(t, \boldsymbol{y})$ en una función encabezada:

```
function [T, W] = mEE(f, y0, I, m)
```

Los argumentos son el lado derecho de la EDO f, un vector inicial `y0`, el intervalo $I = [t_0, t_m]$ y el numero m de intervalos equi-espaciados. La función debe devolver la malla en la variable T y las aproximaciones en la variable W.

2.2. Trapecio explícito. Implementa ese método para cualquier $f(t, \boldsymbol{y})$ en una función encabezada:

```
function [T, W] = mTrapE(f, y0, I, m)
```

donde los argumentos y resultados son como arriba.

2.3. Euler implícito. Para esta tarea, sea $f(t, \boldsymbol{y}) = A(t)\boldsymbol{y}$. Implementa ese método en una función encabezada:

```
function [T, W] = mEI(A, y0, I, m)
```

donde los argumentos y resultados son como arriba, excepto que f es cambiado por A.

2.4. Trapecio implícito (para el sistema arriba). Para esta tarea, sea $f(t, \boldsymbol{y}) = A(t)\boldsymbol{y}$. Implementa ese método en una función encabezada:

```
function [T, W] = mTrapI(A, y0, I, m)
```

donde los argumentos y resultados son como arriba, excepto que f es cambiado por A.

3. Verificar la implementación

3.1. En una dimensión. Aplica tus métodos con pasos $h \in \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{50}\right\}$ al PVI:

$$y' = 2(t+1)y\,, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

en el intervalo $[0, 1]$.

1. haz un *plot* de la solución exacta y su aproximación, *i.e.*

```
plot(T, y(T), '-g');
hold on
plot(T, W, '.k');
hold off;
legend('y (exact)', 'w (aprox.)')
```

2. Lista los valores de la solución numérica w_i para $i = 0, 1, \ldots, 10$.

3. Dada la familia de soluciones

$$z(t) = w_j\, e^{t^2 - t_j^2 + 2(t - t_j)} \tag{2}$$

- encuentra el error global en $t = 1$ usando la solución exacta.
- calcula el máximo de los errores **locales**, *i.e.* $\max_i |e_i|$.
- dibuja una gráfica log-log del error **global** del método de Euler en $t = 1$ como función de $h = 0.1 \times 2^{-k}$ para $k = 0, 1, \ldots, 5$.
- produce una tabla con las columnas como abajo, que contiene en la fila k los valores asociados al paso $h_k := 0.1 \times 2^{-k}$ donde $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

k	paso	máximo de los errores **locales** del método de Euler	`erc`
1	...		
⋮	...		

- Interpreta la gráfica y la tabla. ¿Cómo se relacionan los resultados con la teoría? Nota: Guarda la gráfica en un archivo con formato PDF (o EPS) de preferencia.

3.2. En dos dimensiones. Considera el PVI:

$$\begin{cases} x' = (x - y)/\sqrt{2} \\ y' = (x + y)/\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

1. Dibujar el campo vectorial para $x, y \in [-2, 2]$ (a mano).
2. Calcular una aproximación de la solución exacta

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \exp\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

y hacer un *plot* de la aproximación y la solución exacta para $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}]$.