Ejercicios Tema 4 – Cálculo Numérico I – Primavera, 2018

1. Tema 4 – Problemas con Valores en la Frontera

Aquí abreviamos esos problemas con BVP, por sus siglas en inglés.

1. Considere el BVP
$$y'' = -4y \quad \text{con} \quad y(a) = y_a\,,\ y(b) = y_b\,.$$
   - Encuentra dos soluciones linealmente independientes de la EDO (sin condición de frontera). *Pista: Dos soluciones son linealmente independiente cuando una no es múltiplo de la otra.*
   - Supongamos que $a = 0$ y $b = \pi$. ¿Qué condiciones deben satisfacer y_a, y_b para que exista una solución del BVP?
   - ¿Qué condiciones deben satisfacer a y b para que la solución del BVP sea única?

2. Muestre que las soluciones de los siguientes BVPs
$$a)\quad \begin{aligned} y'' &= 2 - 4y \\ y(0) &= 0 \\ y(\tfrac{\pi}{2}) &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} y'' &= \frac{3}{2}y^2 \\ y(1) &= 4 \\ y(2) &= 1 \end{aligned}$$
son a) $\quad y(t) = \sin^2 t \quad$ y b) $\quad y(t) = 4t^{-2}$.

3. Encuentre un s^+ y s^- para los BVPs en el apartado 2 tales que
$$y(b; s^-) < y_b < y(b; s^+)\,.$$

4. **(Laboratorio)** Implementa el algoritmo *simple shooting (bisection)* para el BVP:
$$y'' = 4y \quad , \qquad y(0) = 1 \quad , \qquad y(1) = 3$$
utilizando los pendientes iniciales $[s^-, s^+] = [-1, 0]$ y un método para EDO para aproximar la solución del PVI (sistema) y una tolerancia 10^{-3} o 10^{-6}.
Sugerencia: Verifique si la aproximación numérica se parece a la solución exacta?
Sugerencia: Usando s^-, s^+ del apartado 3, haz lo mismo.
¿Dónde puedes ahorrar trabajo?
Sugerencia: Haga su algoritmo más eficiente.

5. **(Laboratorio)** Implementa el algoritmo llamado *shooting method* utilizando la iteración de Newton visto en clase, ecuación (IV.5) y aplique el algoritmo a los problemas del ejercicio anterior.

6. **(Laboratorio)** Aplica tu *shooting method* al problema siguiente
$$y'' = \frac{-2}{y^5}\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y(2) = 7^{1/3}\,,$$
cuyo solución exacta es $y(t) = (3t+1)^{1/3}$.

7. **(Laboratorio, avanzado por si el resto es aburrido)** Aplicación del *shooting method* a un problema *stiff*: Sea

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -100.1 & 99.9 \\ 99.9 & -100.1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,,$$

con condición inicial $\boldsymbol{x}(0) = (1, \cdot)^T$ y final $\boldsymbol{x}(1) = (\cdot, 0)^T$. Los puntos indican que no conocemos los valores (queremos determinarlos).

Aquí, como el problema es *stiff* debes usar un método adaptativo o un método implícito (Trapecio) para resolver la EDO. Para ver problemas, puedes intentar Euler explícito o RK45 (con paso "grande")

Para el método implícito los pasos son equiespaciados del tamaño h. Fijando la tolerancia del "shooting", puedes reducir h para asegurar que el "shooting" no falla.

También, podrías aplicar diferencias finitas (hay que pensar).