Obliczenia wałów
przy pomocy metod numerycznych

Leszek Dubicki

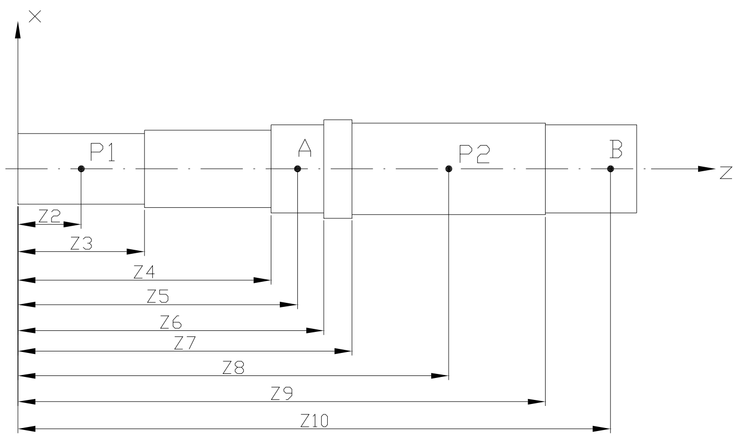
30 sierpnia 2005 r.

Niniejszy tekst napisałem żeby zilustrować sposób, w jaki obliczyłem wały w swoim projekcie z przedmiotu Podstawy Konstrukcji Maszyn. Może on być dowolnie wykorzystywany, prezentowany czy zamieszczany w innych dokumentach, przy czym chciałbym zaznaczyć że nie jest to praca naukowa tylko czyste rozważania teoretyczne.

Koncepcję takiego podejścia do obliczeń wałów zaczerpnąłem z książki "Podstawy Konstrukcji Maszyn"pod red. Marka Dietrycha.

Program (a właściwie biblioteka) wykorzystujący przedstawiony algorytm został napisany w języku Python (**http://www.python.org**) przy użyciu bibliotek
Numarray (**http://sourceforge.net/projects/numpy**) i
Matplotlib (**http://matplotlib.sf.net/goals.html**). Jego kod źródłowy można dostać u mnie ale tu również chciałbym zaznaczyć, że jest to praktycznie wersja robocza pozbawiona jakjegokolwiek interfejsu użytkownika czy dokumantacji, więc potencjalny użytkownik musi znać składnię pythona i wykazać się dużą cierpliwością. Ponadto program uruchamiałem tylko w środowisku Linux, i nie wiem, czy będzie działać w innym systemie.

1 Wały dwupodporowe



Rysunek przedstawia typowy wał dwupodporowy (nawiasem mówiąc wał nr 1 w moim projekcie jest identyczny)

Aby ułatwić obliczenia przy pomocy komputera założyłem, że w każdym punkcie granicznym k działa jakaś siła poprzeczna F_k oraz jakiś moment skupiony M_k (na rys. w punktach P_1 ($z = Z_2$),

A $(z = Z_5)$, P_2 $(z = Z_8)$ i B $(z = Z_{10})$ wielkości te są różne os zera, w pozostałych punktach są równe zeru).

Takie podejście pozwala konstruować pojedyncze macierze dla całego wału.

Zakładam, że reakcje podpór zostały wcześniej obliczone przy użyciu równań statyki.

Równanie różniczkowe linii ugięcia dla i-tego przedziału ma następującą postać:

$$EI_i x_i'' = -M_i(z)$$

$$x_i' = -1 \cdot \frac{1}{EI_i} \int M_i(z)\, dz$$

$$x_i = -1 \cdot \frac{1}{EI_i} \int \left[\int M_i(z)\, dz \right] dz$$

$$M_i(z) = -1 \cdot \sum_{k=1}^{i} \left[F_k \cdot (z - Z_k) + M_k \right]$$

Przy założeniu (umownym), że siła skierowana przeciwnie do osi x jest dodatnia. Mamy więc:

$$M_i(z) = -1 \cdot \sum_{k=1}^{i} F_k \cdot z + \sum_{k=1}^{i} F_k \cdot Z_k - \sum_{k=1}^{i} M_k$$

$$M_i(z) = m_i \cdot z + b_i$$

gdzie:

$$m_i = -\sum_{k=1}^{i} F_k \cdot z; \quad b_i = \left[\sum_{k=1}^{i} F_k \cdot Z_k - \sum_{k=1}^{i} M_k \right]$$

Podstawiając to do równań różniczkowych linii ugięcia:

$$EI_i x_i'' = -(m_i \cdot z + b_i)$$

$$x_i' = \frac{-1}{EI_i} \left(\frac{m_i}{2} \cdot z^2 + b_i \cdot z + c_{i1} \right)$$

$$x_i = \frac{-1}{EI_i} \left(\frac{m_i}{6} \cdot z^3 + \frac{b_i}{2} \cdot z^2 + C_{i1} \cdot z + C_{i2} \right)$$

Stałe całkowania oblicza się z warunków brzegowych wymaga to rozwiązania układu $2n$ równań , gdzie n to ilość przedziałów Układ ten w postaci macierzowej wygląda następująco:

$$A \cdot C = D$$

Gdzie:

$$C = \begin{bmatrix} C_{1_1} \\ C_{1_2} \\ C_{2_1} \\ C_{2_2} \\ \vdots \\ C_{10_1} \\ C_{10_2} \end{bmatrix}$$

A to macierz współczynników stojących przy niewiadomych (stałych całkowania) o wymiarze $(2n\ x\ 2n)$, a D to macierz wyrazów wolnych o wymiarze $(2n\ x\ 1)$

Macierze A i D można rozbić na trzy bloki odpowiadające grupom warunków brzegowych:

1.1 Warunek zerowych ugięć w podporach.

Macierze A_1 i D_1 o wymiarach (2x2n) i (2x1)

Równanie dla j-tego przedziału przybierze postać:

$$x_j = \frac{-1}{EI_j}\left(\frac{m_j}{6}\cdot z_j^3 + \frac{b_j}{2}\cdot z_j^2 + C_{j1}\cdot z_j + C_{j2}\right) = 0$$

a po przeniesieniu niewiadomych na jedną stronę:

$$C_{j1}\cdot z_j + C_{j2}\cdot 1 = \frac{m_j}{6}\cdot z_j^3 + \frac{b_j}{2}\cdot z_j^2$$

gdzie j - numer przedziału na początku którego występuje podpora

W ogólnym przypadku macierze A_1 i D_1 mają więc postać:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & z_a & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & z_b & 1 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -\frac{m_{ja}}{6}\cdot z_a^3 - \frac{b_{ja}}{2}\cdot z_a^2 \\ -\frac{m_{jb}}{6}\cdot z_b^3 - \frac{b_{jb}}{2}\cdot z_b^2 \end{bmatrix}$$

W moim przykładzie podpory są w punktach $z = Z_5$ i $z = Z_{10}$, więc: $x(z = Z_5) = 0$ i $x(z = Z_{10}) = 0$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & Z_5 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & Z_{10} & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -\frac{m_5}{6}\cdot Z_5^3 - \frac{b_5}{2}\cdot Z_5^2 \\ -\frac{m_{10}}{6}\cdot Z_{10}^3 - \frac{b_{10}}{2}\cdot Z_{10}^2 \end{bmatrix}$$

1.2 Warunek równości kątów obrotu na granicach przedziałów.

Macierze A_2 i D_2 o wymiarach (n-1x2n) i (n-1x1)

$$x'_j(z = Z_{j+1}) = x'_{j+1}(z = Z_{j+1})$$

Równanie dla j-tego przedziału przybierze postać:

$$\frac{-1}{EI_j}\left(\frac{m_j}{2}\cdot z_{j+1}^2 + b_j\cdot z_{j+1} + C_{j1}\right) = \frac{-1}{EI_{j+1}}\left(\frac{m_{j+1}}{2}\cdot z_{j+1}^2 + b_{j+1}\cdot z_{j+1} + C_{(j+1)_1}\right)$$

a po przeniesieniu niewiadomych na jedną stronę:

$$\frac{1}{I_j}\cdot C_j - \frac{1}{I_{j+1}}\cdot C_{j+1} = \frac{1}{I_{j+1}}\cdot\left(\frac{m_{j+1}}{2}\cdot z_{j+1}^2 + b_{j+1}\cdot z_{j+1}\right) - \frac{1}{I_j}\cdot\left(\frac{m_j}{2}\cdot z_{j+1}^2 + b_j\cdot z_{j+1}\right)$$

gdzie j - numer przedziału

W ogólnym przypadku macierze A_2 i D_2 mają więc postać:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & \frac{-1}{I_2} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & \frac{-1}{I_3} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{I_j} & 0 & \frac{-1}{I_{j+1}} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{I_{n-1}} & 0 & \frac{-1}{I_n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{I_1}(\frac{m_1}{2}z_2^2 + b_1 z_2) + \frac{1}{I_2}(\frac{m_2}{2}z_2^2 + b_2 z_2) \\ \frac{-1}{I_2}(\frac{m_2}{2}z_3^2 + b_2 z_3) + \frac{1}{I_3}(\frac{m_3}{2}z_3^2 + b_3 z_3) \\ \cdots \\ \frac{-1}{I_j}(\frac{m_j}{2}z_{j+1}^2 + b_j z_{j+1}) + \frac{1}{I_{j+1}}(\frac{m_{j+1}}{2}z_{j+1}^2 + b_{j+1} z_{j+1}) \\ \cdots \\ \frac{-1}{I_{n-1}}(\frac{m_{n-1}}{2}z_n^2 + b_{n-1} z_n) + \frac{1}{I_n}(\frac{m_n}{2}z_n^2 + b_n z_n) \end{bmatrix}$$

W przykładowym wale, gdzie liczba przedziałów równa się 10:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & \frac{-1}{I_2} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & \frac{-1}{I_3} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{I_9} & 0 & \frac{-1}{I_{10}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{I_1}(\frac{m_1}{2}Z_2^2 + b_1 Z_2) + \frac{1}{I_2}(\frac{m_2}{2}Z_2^2 + b_2 Z_2) \\ \frac{-1}{I_2}(\frac{m_2}{2}Z_3^2 + b_2 Z_3) + \frac{1}{I_3}(\frac{m_3}{2}Z_3^2 + b_3 Z_3) \\ \cdots \\ \frac{-1}{I_9}(\frac{m_9}{2}Z_{10}^2 + b_9 Z_{10}) + \frac{1}{I_{10}}(\frac{m_{10}}{2}Z_{10}^2 + b_{10} Z_{10}) \end{bmatrix}$$

1.3 Warunek równości ugięć wału na granicach przedziałów.

Macierze A_3 i D_3 o wymiarach (n-1x2n) i (n-1x1)

$$x_j(z = Z_{j+1}) = x_{j+1}(z = Z_{j+1})$$

Równanie dla j-tego przedziału przybierze postać:

$$\frac{-1}{EI_j}\left(\frac{m_j}{6} \cdot z_{j+1}^3 + \frac{b_j}{2} \cdot z_{j+1}^2 + C_{j1} \cdot z_{j+1} + C_{j2}\right) = \frac{-1}{EI_{j+1}}\left(\frac{m_{j+1}}{6} \cdot z_{j+1}^3 + \frac{b_{j+1}}{2} \cdot z_{j+1}^2 + C_{(j+1)_1} \cdot z_{j+1} + C_{(j+1)_2}\right)$$

a po przeniesieniu niewiadomych na jedną stronę:

$$\frac{z_{j+1}}{I_j} \cdot C_j 1 + \frac{1}{I_j} \cdot C_j 2 - \frac{1}{I_{j+1}} \cdot C_{(j+1)_1} - \frac{1}{I_{j+1}} \cdot C_{(j+1)_2} = \frac{1}{I_{j+1}} \cdot \left(\frac{m_{j+1}}{6} \cdot z_{j+1}^3 + \frac{b_{j+1}}{2} \cdot z_{j+1}^2\right) - \frac{1}{I_j} \cdot \left(\frac{m_j}{6} \cdot z_{j+1}^3 + \frac{b_j}{2} \cdot z_{j+1}^2\right)$$

gdzie j - numer przedziału

W ogólnym przypadku macierze A_3 i D_3 mają więc postać:

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{z_2}{I_1} & \frac{1}{I_1} & -\frac{z_2}{I_2} & -\frac{1}{I_2} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_3}{I_2} & \frac{1}{I_2} & -\frac{z_3}{I_3} & -\frac{1}{I_3} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{z_{k+1}}{I_k} & \frac{1}{I_k} & \frac{-z_{k+1}}{I_{k+1}} & -\frac{1}{I_{k+1}} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{z_n}{I_{n-1}} & \frac{1}{I_{n-1}} & -\frac{z_n}{I_n} & -\frac{1}{I_n} \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{I_1}(\frac{m_1}{6}z_2^3 + \frac{b_1}{2}z_2^2) + \frac{1}{I_2}(\frac{m_2}{6}z_2^3 + \frac{b_2}{2}z_2^2) \\ \frac{-1}{I_2}(\frac{m_2}{6}z_3^3 + \frac{b_2}{2}z_3^2) + \frac{1}{I_3}(\frac{m_3}{6}z_3^3 + \frac{b_3}{2}z_3^2) \\ \cdots \\ \frac{-1}{I_j}(\frac{m_j}{6}z_{j+1}^3 + \frac{b_j}{2}z_{j+1}^2) + \frac{1}{I_{j+1}}(\frac{m_{j+1}}{6}z_{j+1}^3 + \frac{b_{j+1}}{2}z_{j+1}^2) \\ \cdots \\ \frac{-1}{I_{n-1}}(\frac{m_{n-1}}{6}z_n^3 + \frac{b_{n-1}}{2}z_n^2) + \frac{1}{I_n}(\frac{m_n}{6}z_n^3 + \frac{b_n}{2}z_n^2) \end{bmatrix}$$

W przykładowym wale, gdzie liczba przedziałów równa się 10:

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{Z_1}{I_1} & \frac{1}{I_1} & \frac{-Z_2}{I_2} & \frac{-1}{I_2} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Z_2}{I_2} & \frac{1}{I_2} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{Z_9}{I_9} & \frac{1}{I_9} & \frac{-Z_{10}}{I_{10}} & \frac{-1}{I_{10}} \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{I_1}(\frac{m_1}{6}Z_2^3 + \frac{b_1}{2}Z_2^2) + \frac{1}{I_2}(\frac{m_2}{6}Z_2^3 + \frac{b_2}{2}Z_2^2) \\ \frac{-1}{I_2}(\frac{m_2}{6}Z_3^3 + \frac{b_2}{2}Z_3^2) + \frac{1}{I_3}(\frac{m_3}{6}Z_3^3 + \frac{b_3}{2}Z_3^2) \\ \cdots \\ \frac{-1}{I_9}(\frac{m_9}{6}Z_{10}^3 + \frac{b_9}{2}Z_{10}^2) + \frac{1}{I_{10}}(\frac{m_{10}}{6}Z_{10}^3 + \frac{b_{10}}{2}Z_{10}^2) \end{bmatrix}$$

Po złożeniu bloków A_1, A_2 i A_3 oraz D_1, D_2 i D_3 mamy:

$$A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline A_3 \end{array}\right] \; i \; D = \left[\begin{array}{c} D_1 \\ \hline D_2 \\ \hline D_3 \end{array}\right]$$

2 Wały wielopodporowe

Jak wiadomo wały wielopodporowe różnią się od dwupodporowych (jeśli chodzi o obliczenia) tylko (i aż) tym, że nie znamy wszystkich sił działających na wały, a mianowicie reakcji. Trzeba je obliczyć równolegle ze stałymi całkowania.

Dlatego nasza macierz niewiadomych C będzie składała się z dwóch części:

$$C = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \\ C_{11} \\ C_{12} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ \vdots \\ C_{n1} \\ C_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_R \\ \hline C_C \end{bmatrix}$$

gdzie p to ilość podpór a n to ilość przedziałów (wliczając te, które są związane z podporami), więc liczba niewiadomych jest równa $p + 2n$

W związku z tym każdy z bloków macierzy A odpowiadających określonym warunkom brzegowym również będzie składał się z dwóch części, np:

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_{1R} & A_{1C} \end{array} \right]$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia dla i-tego przedziału ma następującą postać:

$$EI_i x_i'' = -M_i(z)$$

$$x_i' = -1 \cdot \frac{1}{EI_i} \int M_i(z)\, dz$$

$$x_i = -1 \cdot \frac{1}{EI_i} \int \left[\int M_i(z)\, dz \right] dz$$

$$M_i(z) = -1 \cdot \sum_{k=1}^{i} \left[F_k \cdot (z - Z_k) + M_k \right] - \sum_{k_R=1}^{i_R} \left[R_{k_R} \cdot (z - Z_{k_R}) \right]$$

Gdzie wyrażenie:

$$\sum_{k_R=1}^{i_R} \dots$$

oznacza sumę reakcji (lub wyrażeń związanych z reakcjami) występujących od początku wału do początku przedziału o indeksie i włącznie.

Ponownie wprowadzamy wielkości zastępujące obciążenia (ale tym razem bez podpór):

$$M_i(z) = -1 \cdot \sum_{k=1}^{i} F_k \cdot z + \sum_{k=1}^{i} F_k \cdot Z_k - \sum_{k=1}^{i} M_k - \sum_{k_R=1}^{i_R} \left[R_{k_R} \cdot (z - Z_{k_R}) \right]$$

$$M_i(z) = m_i \cdot z + b_i - \sum_{k_R=1}^{i_R} \left[R_{k_R} \cdot (z - Z_{k_R}) \right]$$

gdzie:

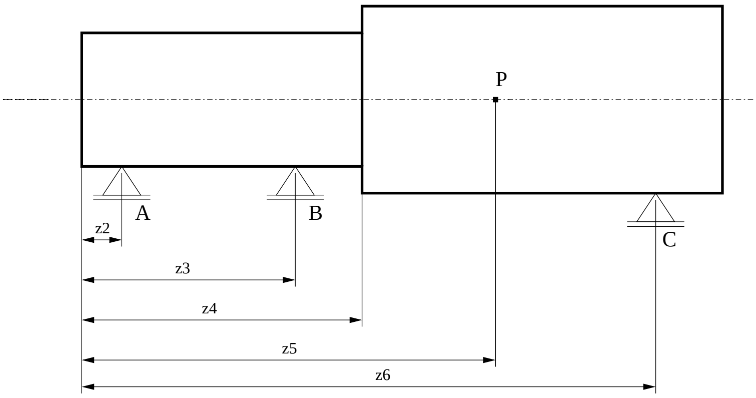
$$m_i = -\sum_{k=1}^{i} F_k \cdot z; \quad b_i = \left[\sum_{k=1}^{i} F_k \cdot Z_k - \sum_{k=1}^{i} M_k \right]$$

Podstawiając to do równań różniczkowych linii ugięcia:

$$EI_i x_i'' = -\left\{ m_i \cdot z + b_i + \sum_{k_R=1}^{i_R} \left[R_{k_R} \cdot (z - Z_{k_R}) \right] \right\}$$

$$x_i' = \frac{-1}{EI_i} \left\{ \frac{m_i}{2} \cdot z^2 + b_i \cdot z + \sum_{k_R=1}^{i_R} \left[R_{k_R} \cdot z \left(\frac{z}{2} - Z_{k_R} \right) \right] + C_{i1} \right\}$$

$$x_i = \frac{-1}{EI_i} \left\{ \frac{m_i}{6} \cdot z^3 + \frac{b_i}{2} \cdot z^2 + \sum_{k_R=1}^{i_R} \left[R_{k_R} \cdot \frac{z^2}{2} \left(\frac{z}{3} - Z_{k_R} \right) \right] + C_{i1} \cdot z + C_{i2} \right\}$$



Tym razem przykładowy wał widoczny na rysunku jest bardzo prosty aby ułatwić konstrukcję macierzy.

2.1 Równania statyki

Zbudujemy dwa równania statyki dla dwóch dowolnych podpór, np A i B:

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (z_i - Z_A) + \sum_{i=1}^{n} M_i + \sum_{i_R=1}^{p} R_{i_R} \cdot (z_{i_R} - Z_A)$$

$$\sum_{i_R=1}^{p} R_{i_R} \cdot (z_{i_R} - Z_A) = -\left[\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (z_i - Z_A) + \sum_{i=1}^{n} M_i \right]$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (z_i - Z_B) + \sum_{i=1}^{n} M_i + \sum_{i_R=1}^{p} R_{i_R} \cdot (z_{i_R} - Z_B)$$

$$\sum_{i_R=1}^{n} R_{i_R} \cdot (z_{i_R} - Z_B) = -\left[\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (z_i - Z_B) + \sum_{i=1}^{n} M_i \right]$$

Macierz A_{1R} będzie miała postać:

$$A_{1R} = \begin{bmatrix} Z_A - Z_A & Z_B - Z_A & Z_C - Z_A & \cdots \\ Z_A - Z_B & Z_B - Z_B & Z_C - Z_B & \cdots \end{bmatrix}$$

wymiar - (2 x p)
Natomiast macierz A_{1C} jest macierzą zerową o wymiarze (2x2n).
Macierz D_1 :

$$D_1 = \begin{bmatrix} -\left[\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (z_i - Z_A) + \sum_{i=1}^{n} M_i\right] \\ -\left[\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (z_i - Z_B) + \sum_{i=1}^{n} M_i\right] \end{bmatrix}$$

wymiar - (2 x 1)
W przykładowym wałku macierze te będą wygląły następująco:

$$A_{1R} = \begin{bmatrix} 0 & Z_3 - Z_2 & Z_6 - Z_2 \\ Z_2 - Z_3 & 0 & Z_6 - Z_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{1C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -\left[F_5 \cdot (Z_5 - Z_2) + M_5\right] \\ -\left[F_5 \cdot (Z_5 - Z_3) + M_5\right] \end{bmatrix}$$

2.2 Zerowe ugięcia w podporach gdy podpora jest na początku przedziału

Równanie dla j-tego przedziału przybierze postać:

$$x_j = \frac{-1}{EI_j}\left(\frac{m_j}{6} \cdot z_j^3 + \frac{b_j}{2} \cdot z_j^2 - \sum_{k_R=1}^{j}\left[R_{k_R} \cdot \frac{z_j^2}{2} \cdot \left(\frac{z_j}{3} - Z_{k_R}\right)\right] + C_{j1} \cdot z_j + C_{j2}\right) = 0$$

a po przeniesieniu niewiadomych na jedną stronę:

$$C_{j1} \cdot z_j + C_{j2} \cdot 1 - \sum_{k_R=1}^{j}\left[R_{k_R} \cdot \frac{z_j^2}{2} \cdot \left(\frac{z_j}{3} - Z_{k_R}\right)\right] = \frac{m_j}{6} \cdot z_j^3 + \frac{b_j}{2} \cdot z_j^2$$

gdzie j - numer przedziału na początku którego występuje podpora
W ogólnym przypadku macierze A_{2R} i A_{2C} mają więc postać:

$$A_{2R} = \begin{bmatrix} -\frac{Z_A^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_A}{3} - Z_A\right) & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -\frac{Z_B^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_B}{3} - Z_A\right) & -\frac{Z_B^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_B}{3} - Z_B\right) & 0 & \vdots & 0 \\ -\frac{Z_C^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_C}{3} - Z_A\right) & -\frac{Z_C^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_C}{3} - Z_B\right) & -\frac{Z_C^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_C}{3} - Z_C\right) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{Z_P^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_P}{3} - Z_A\right) & -\frac{Z_P^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_P}{3} - Z_B\right) & -\frac{Z_P^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_P}{3} - Z_C\right) & \vdots & -\frac{Z_P^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_P}{3} - Z_P\right) \end{bmatrix}$$

wymiar - (p x p)

$$A_{2C} = \begin{bmatrix} \vdots & Z_A & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & Z_B & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & Z_P & 1 & \vdots \end{bmatrix}$$

wymiar - (p x 2n)

$$D_2 = \begin{bmatrix} -\frac{m_{jA}}{6} \cdot Z_A^3 - \frac{b_{jA}}{2} \cdot Z_A^2 \\ -\frac{m_{jB}}{6} \cdot Z_B^3 - \frac{b_{jB}}{2} \cdot Z_B^2 \\ \cdots \\ -\frac{m_{jP}}{6} \cdot Z_P^3 - \frac{b_{jP}}{2} \cdot Z_P^2 \end{bmatrix}$$

wymiar - (p x 1)
gdzie P - indeks ostatniej podpory, p - ilość podpór
W przykładowym wałku macierze te będą wyglądały następująco:

$$A_{2R} = \begin{bmatrix} -\frac{Z_2^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_2}{3} - Z_2\right) & 0 & 0 \\ -\frac{Z_3^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_3}{3} - Z_2\right) & -\frac{Z_3^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_3}{3} - Z_3\right) & 0 \\ -\frac{Z_6^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_6}{3} - Z_2\right) & -\frac{Z_6^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_6}{3} - Z_3\right) & -\frac{Z_6^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_6}{3} - Z_6\right) \end{bmatrix}$$

$$A_{2C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_5 \cdot \frac{Z_6^3}{6} + (M_5 + F_5) \cdot Z_5 \cdot \frac{Z_6^2}{2} \end{bmatrix}$$

2.3 Zerowe ugięcia w podporach gdy podpora jest na końcu przedziału

Równanie dla j-tego przedziału przybierze postać:

$$x_{j-1} = \frac{-1}{EI_{j-1}} \left(\frac{m_{j-1}}{6} \cdot z_j^3 + \frac{b_{j-1}}{2} \cdot z_j^2 - \sum_{k_R=1}^{j-1} \left[R_{k_R} \cdot \frac{z_j^2}{2} \cdot \left(\frac{z_j}{3} - Z_{k_R} \right) \right] + C_{(j-1)_1} \cdot z_j + C_{(j-1)_2} \right) = 0$$

a po przeniesieniu niewiadomych na jedną stronę:

$$C_{(j-1)_1} \cdot z_j + C_{(j-1)_2} \cdot 1 - \sum_{k_R=1}^{j-1} \left[R_{k_R} \cdot \frac{z_j^2}{2} \cdot \left(\frac{z_j}{3} - Z_{k_R} \right) \right] = \frac{m_{j-1}}{6} \cdot z_j^3 + \frac{b_{j-1}}{2} \cdot z_j^2$$

W ogólnym przypadku macierze A_{2R} i A_{2C} mają więc postać:

$$A_{3R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -\frac{Z_B^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_B}{3} - Z_A\right) & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -\frac{Z_C^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_C}{3} - Z_A\right) & -\frac{Z_C^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_C}{3} - Z_B\right) & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{Z_P^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_P}{3} - Z_A\right) & -\frac{Z_P^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_P}{3} - Z_B\right) & -\frac{Z_P^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_P}{3} - Z_C\right) & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

wymiar - (p x p)

$$A_{3C} = \begin{bmatrix} \vdots & Z_A & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & Z_B & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & Z_P & 1 & \vdots \end{bmatrix}$$

wymiar - (p x 2n), przy czym part Z_{iR}, 1 zajmują inne pozycje niż w macierzy A_{2C} (wszystkie o dwa miejsca wcześniej), zakładam, że wał nie zaczyna się od podpory

$$D_3 = \begin{bmatrix} -\frac{m_{jA-1}}{6} \cdot Z_A^3 - \frac{b_{jA-1}}{2} \cdot Z_A^2 \\ -\frac{m_{jB-1}}{6} \cdot Z_B^3 - \frac{b_{jB-1}}{2} \cdot Z_B^2 \\ \cdots \\ -\frac{m_{jP-1}}{6} \cdot Z_P^3 - \frac{b_{jP-1}}{2} \cdot Z_P^2 \end{bmatrix}$$

wymiar - (p x 1)
gdzie P - indeks ostatniej podpory, p - ilość podpór
W przykładowym wałku macierze te będą wygląły następująco:

$$A_{3R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Z_3^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_3}{3} - Z_2\right) & 0 & 0 \\ -\frac{Z_6^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_6}{3} - Z_2\right) & -\frac{Z_6^2}{2} \cdot \left(\frac{Z_6}{3} - Z_3\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3C} = \begin{bmatrix} Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_5 \cdot \frac{Z_6^3}{6} + (M_5 + F_5) \cdot Z_5 \cdot \frac{Z_6^2}{2} \end{bmatrix}$$

2.4 Warunek równości kątów obrotu na granicach wszystkich przedziałów

$$x'_j(z = Z_{j+1}) = x'_{j+1}(z = Z_{j+1})$$

Równanie dla j-tego przedziału przybierze postać:

$$\frac{-1}{EI_j}\left(\frac{m_j}{2}\cdot z_{j+1}^2+b_j\cdot z_{j+1}+\sum_{k_R=1}^{j}\left[R_{k_R}\cdot z_{j+1}\cdot\left(\frac{z_{j+1}}{2}-Z_{k_R}\right)\right]+C_{j1}\right)=$$

$$=\frac{-1}{EI_{j+1}}\left(\frac{m_{j+1}}{2}\cdot z_{j+1}^2+b_{j+1}\cdot z_{j+1}+\sum_{k_R=1}^{j+1}\left[R_{k_R}\cdot z_{j+1}\cdot\left(\frac{z_{j+1}}{2}-Z_{k_R}\right)\right]+C_{(j+1)_1}\right)$$

a po przeniesieniu niewiadomych na jedną stronę:

$$\frac{1}{I_j}\cdot\left\{C_j+\sum_{k_R=1}^{j}\left[R_{k_R}\cdot z_{j+1}\cdot\left(\frac{z_{j+1}}{2}-Z_{k_R}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{I_{j+1}}\cdot\left\{C_{j+1}+\sum_{k_R=1}^{j+1}\left[R_{k_R}\cdot z_{j+1}\cdot\left(\frac{z_{j+1}}{2}-Z_{k_R}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{I_{j+1}}\cdot\left(\frac{m_{j+1}}{2}\cdot z_{j+1}^2+b_{j+1}\cdot z_{j+1}\right)-\frac{1}{I_j}\cdot\left(\frac{m_j}{2}\cdot z_{j+1}^2+b_j\cdot z_{j+1}\right)$$

gdzie j - numer przedziału

Macierze A_{4R}, A_{4C} i D_4 mają więc postać:

$$A_{4R}=\begin{bmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-z_3\cdot\left(\frac{z_3}{2}-Z_A\right)\left(-\frac{1}{I_3}\right) & 0 & 0 & 0 & \vdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-z_5\cdot\left(\frac{z_5}{2}-Z_A\right)\left(\frac{1}{I_4}-\frac{1}{I_5}\right) & -z_5\cdot\left(\frac{z_5}{2}-Z_B\right)\left(-\frac{1}{I_5}\right) & 0 & 0 & \vdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-z_8\cdot\left(\frac{z_8}{2}-Z_A\right)\left(\frac{1}{I_7}-\frac{1}{I_8}\right) & -z_8\cdot\left(\frac{z_8}{2}-Z_B\right)\left(\frac{1}{I_7}-\frac{1}{I_8}\right) & -z_8\cdot\left(\frac{z_8}{2}-Z_C\right)\left(-\frac{1}{I_8}\right) & 0 & \vdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}$$

Wymiar: (n-1 x p)

$$A_{4C}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{I_1} & 0 & \frac{-1}{I_2} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & \frac{-1}{I_3} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{I_j} & 0 & \frac{-1}{I_{j+1}} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{I_{n-1}} & 0 & \frac{-1}{I_n} & 0
\end{bmatrix}$$

Wymiar: (n-1 x 2n)

$$D_4=\begin{bmatrix}
\frac{-1}{I_1}(\frac{m_1}{2}z_2^2+b_1z_2)+\frac{1}{I_2}(\frac{m_2}{2}z_2^2+b_2z_2)\\
\frac{-1}{I_2}(\frac{m_2}{2}z_3^2+b_2z_3)+\frac{1}{I_3}(\frac{m_3}{2}z_3^2+b_3z_3)\\
\cdots\\
\frac{-1}{I_j}(\frac{m_j}{2}z_{j+1}^2+b_jz_{j+1})+\frac{1}{I_{j+1}}(\frac{m_{j+1}}{2}z_{j+1}^2+b_{j+1}z_{j+1})\\
\cdots\\
\frac{-1}{I_{n-1}}(\frac{m_{n-1}}{2}z_n^2+b_{n-1}z_n)+\frac{1}{I_n}(\frac{m_n}{2}z_n^2+b_nz_n)
\end{bmatrix}$$

Wymiar: (n-1 x 1)
W przykładowym wałku macierze te będą wyglądały następująco:

$$A_{4R} = \begin{bmatrix} -Z_2 \cdot \left(\frac{Z_2}{2} - Z_2\right) \cdot \left(-\frac{1}{I_2}\right) & 0 & 0 \\ -Z_3 \cdot \left(\frac{Z_3}{2} - Z_2\right) \cdot \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right) & -\frac{Z_3}{2} \cdot (Z_3 - Z_3) \cdot \left(-\frac{1}{I_3}\right) & 0 \\ -Z_4 \cdot \left(\frac{Z_4}{2} - Z_2\right) \cdot \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_4}\right) & -\frac{Z_4}{2} \cdot (Z_4 - Z_3) \cdot \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_4}\right) & 0 \\ -Z_5 \cdot \left(\frac{Z_5}{2} - Z_2\right) \cdot \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_5}\right) & -\frac{Z_5}{2} \cdot (Z_5 - Z_3) \cdot \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_5}\right) & 0 \\ -Z_6 \cdot \left(\frac{Z_6}{2} - Z_2\right) \cdot \left(\frac{1}{I_5} - \frac{1}{I_6}\right) & -\frac{Z_6}{2} \cdot (Z_6 - Z_3) \cdot \left(\frac{1}{I_5} - \frac{1}{I_6}\right) & -\frac{Z_6}{2} \cdot (Z_6 - Z_6) \cdot \left(-\frac{1}{I_6}\right) \end{bmatrix}$$

$$A_{4C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & -\frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & -\frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & -\frac{1}{I_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_5} & 0 & -\frac{1}{I_6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_5}\left[F_5 \cdot \frac{Z_5^2}{2} + (M_5 + F_5) \cdot Z_5 \cdot Z_5\right] \\ \left(\frac{1}{I_6 - \frac{1}{I_5}}\right)\left[F_5 \cdot \frac{Z_6^2}{2} + (M_5 + F_5) \cdot Z_5 \cdot Z_6\right] \end{bmatrix}$$

2.5 Warunek równości ugięć na granicach przedziałów, które nie zaczynają się od podpory

Przedziały zaczynające się od podpory są wykluczone, ponieważ dla uproszczenia wprowadziłem macierze A_2 i D_2 i tym samym dodatkowe p równań, i teraz musze zmniejszyć liczbę równań odpowiadających temu warunkowi.

$$x_j(z = Z_{j+1}) = x_{j+1}(z = Z_{j+1})$$

Równanie dla j-tego przedziału przybierze postać:

$$\frac{-1}{EI_j}\left\{\frac{m_j}{6} \cdot z_{j+1}^3 + \frac{b_j}{2} \cdot z_{j+1}^2 + C_{j1} \cdot z_{j+1} + C_{j2} + \sum_{k_R=1}^{j}\left[R_{k_R} \cdot \frac{z_{j+1}^2}{2} \cdot \left(\frac{z_{j+1}}{3} - Z_{k_R}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{-1}{EI_{j+1}}\left\{\frac{m_{j+1}}{6} \cdot z_{j+1}^3 + \frac{b_{j+1}}{2} \cdot z_{j+1}^2 + +C_{(j+1)_1} \cdot z_{j+1} + C_{(j+1)_2} + \sum_{k_R=1}^{j+1}\left[R_{k_R} \cdot \frac{z_{j+1}^2}{2} \cdot \left(\frac{z_{j+1}}{3} - Z_{k_R}\right)\right]\right\}$$

a po przeniesieniu niewiadomych na jedną stronę:

$$\frac{1}{I_j} \cdot \left\{C_{j1} \cdot z_{j+1} + C_{j2} + \sum_{k_R=1}^{j}\left[R_{k_R} \cdot \frac{z_{j+1}^2}{2} \cdot \left(\frac{z_{j+1}}{3} - Z_{k_R}\right)\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{I_{j+1}}\cdot\left\{C_{(j+1)_1}\cdot z_{j+1}+C_{(j+1)_2}+\sum_{k_R=1}^{j+1}\left[R_{k_R}\cdot\frac{z_{j+1}^2}{2}\cdot\left(\frac{z_{j+1}}{3}-Z_{k_R}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{I_{j+1}}\cdot\left(\frac{m_{j+1}}{2}\cdot z_{j+1}^2+b_{j+1}\cdot z_{j+1}\right)-\frac{1}{I_j}\cdot\left(\frac{m_j}{2}\cdot z_{j+1}^2+b_j\cdot z_{j+1}\right)$$

gdzie j - numer przedziału, k_R - numer przedziału zaw. podporę

Macierze A_{5R}, A_{5C} i D_5 mają więc postać:

$$A_{5R}=\begin{bmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{z_3^2}{2}\cdot\left(\frac{z_3}{3}-Z_A\right)\left(\frac{1}{I_2}-\frac{1}{I_3}\right) & 0 & 0 & 0 & \vdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{z_5^2}{2}\cdot\left(\frac{z_5}{3}-Z_A\right)\left(\frac{1}{I_4}-\frac{1}{I_5}\right) & -\frac{z_5^2}{2}\cdot\left(\frac{z_5}{3}-Z_B\right)\left(\frac{1}{I_4}-\frac{1}{I_5}\right) & 0 & 0 & \vdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{z_8^2}{2}\cdot\left(\frac{z_8}{3}-Z_A\right)\left(\frac{1}{I_7}-\frac{1}{I_8}\right) & -\frac{z_8^2}{2}\cdot\left(\frac{z_8}{3}-Z_B\right)\left(\frac{1}{I_7}-\frac{1}{I_8}\right) & -\frac{z_8^2}{2}\cdot\left(\frac{z_8}{3}-Z_C\right)\left(\frac{1}{I_7}-\frac{1}{I_8}\right) & 0 & \vdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

Wymiar: (n-1-p x p)

$$A_{5C}=\begin{bmatrix}\frac{z_2}{I_1} & \frac{1}{I_1} & -\frac{z_2}{I_2} & -\frac{1}{I_2} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{z_3}{I_2} & \frac{1}{I_2} & -\frac{z_3}{I_3} & -\frac{1}{I_3} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{z_{j+1}}{I_j} & \frac{1}{I_j} & \frac{-z_{j+1}}{I_{j+1}} & -\frac{1}{I_{j+1}} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{z_n}{I_{n-1}} & \frac{1}{I_{n-1}} & -\frac{z_n}{I_n} & -\frac{1}{I_n}\end{bmatrix}$$

Wymiar: (n-1-p x 2n)

$$D_5=\begin{bmatrix}\frac{-1}{I_1}\left(\frac{m_1}{6}z_2^3+\frac{b_1}{2}z_2^2\right)+\frac{1}{I_2}\left(\frac{m_2}{6}z_2^3+\frac{b_2}{2}z_2^2\right)\\ \frac{-1}{I_2}\left(\frac{m_2}{6}z_3^3+\frac{b_2}{2}z_3^2\right)+\frac{1}{I_3}\left(\frac{m_3}{6}z_3^3+\frac{b_3}{2}z_3^2\right)\\ \cdots\\ \frac{-1}{I_j}\left(\frac{m_j}{6}z_{j+1}^3+\frac{b_j}{2}z_{j+1}^2\right)+\frac{1}{I_{j+1}}\left(\frac{m_{j+1}}{6}z_{j+1}^3+\frac{b_{j+1}}{2}z_{j+1}^2\right)\\ \cdots\\ \frac{-1}{I_{n-1}}\left(\frac{m_{n-1}}{6}z_n^3+\frac{b_{n-1}}{2}z_n^2\right)+\frac{1}{I_n}\left(\frac{m_n}{6}z_n^3+\frac{b_n}{2}z_n^2\right)\end{bmatrix}$$

Wymiar: (n-1-p x 1)

W przykładowym wałku macierze te będą wyglądały następująco:

$$A_{5R}=\begin{bmatrix}-\frac{Z_4^2}{2}\cdot\left(\frac{Z_4}{3}-Z_2\right)\cdot\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_4}\right) & -\frac{Z_4^2}{2}\cdot\left(\frac{Z_4}{3}-Z_3\right)\cdot\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_4}\right) & 0\\ -\frac{Z_5^2}{2}\cdot\left(\frac{Z_5}{3}-Z_2\right)\cdot\left(\frac{1}{I_4}-\frac{1}{I_5}\right) & -\frac{Z_5^2}{2}\cdot\left(\frac{Z_5}{3}-Z_3\right)\cdot\left(\frac{1}{I_4}-\frac{1}{I_5}\right) & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{5C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_4}{I_3} & \frac{1}{I_3} & -\frac{1}{I_4} & -\frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_5}{I_4} & \frac{1}{I_4} & -\frac{z_5}{I_5} & -\frac{1}{I_5} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I_5}\left[F_5 \cdot \frac{Z_5^3}{6} + (M_5 + F_5) \cdot Z_5 \cdot \frac{Z_5^2}{2}\right] \\ \left(\frac{1}{I_6} - \frac{1}{I_5}\right)\left[F_5 \cdot \frac{Z_6^3}{6} + (M_5 + F_5) \cdot Z_5 \cdot \frac{Z_6^2}{2}\right] \end{bmatrix}$$

Po zestawieniu wszystkiego macierze A i D mają postać:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{1R} & A_{1C} \\ \hline A_{2R} & A_{2C} \\ \hline A_{3R} & A_{3C} \\ \hline A_{4R} & A_{4C} \\ \hline A_{5R} & A_{5C} \end{array}\right] \; i \; D = \left[\begin{array}{c} D_1 \\ \hline D_2 \\ \hline D_3 \\ \hline D_4 \\ \hline D_5 \end{array}\right]$$

3 Jak to wygląda w programie

Zrozumienie tego rozdziału być może będzie wymagało znajomości podstawowych terminów z dziedziny programowania, zwłaszcza obiektowego.

Stworzyłem klasę przechowującą dane pojedynczego wału. Dane wejściowe do konstruktora obiektu (będącego realizacją tej klasy) można podzielić na dwie grupy:

1. Obciążenia:

   Podaje się tutaj wszystkie obciążenia i podpory w kolejności, oraz odległóści między nimi.

2. Kształt:

   Podaje się średnice i długości segmentów wału

Dodatkowo podaje się odległość pierwszego punktu przyłożenia obciążenia od czoła wału, oraz własności materiału takie jak modół Yanga E, k_{go}, k_{gj}, k_{so} i k_{sj}.

Konstruktor obiektu (funkcja tworząca obiekt) korzystając z tych danych najpierw tworzy "mapę" przedziałów wału, czyli wektory współrzędnych z, wszystkich obciążeń i średnic przy każdej zmianie którejkolwiek z wielkości wału.

Następnie buduje opisane wcześniej macierze, oblicza wszystkie niewiadome i wszystko to zapisuje jako swoje tzw. pola (czyli zachowuje to w przydzielonym sobie obszarze pamięci). Teraz przy użyciu tzw. metod obiektu (funkcji związanych z obiektem, które oczywiście wsześniej trzeba zdefiniować) można obliczyć dowolną wielkość badanego wału, np. ugięcie, moment gnący czy skręcający, w dowolnym punkcie z, a także wygenerować wykres dowolnej wielkości dla dowolnego zakresu z.