QE for RCF by CAD

富永 直弥

2023 年 7 月 3 日

1 CAD アルゴリズム

CAD とは, ユークリッド空間の分割で, 各分割の上で複数の多項式を符号不変にするものである. Collins により提唱された CAD アルゴリズムについてかく.

定義 1.1. $\mathbb{R}^n$ の有限部分集合族 $\mathfrak{D}$ が,

- 任意の $D \in \mathfrak{D}$ は空でない弧状連結集合,
- 任意の $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ について, $D_1 \neq D_2$ ならば $D_1 \cup D_2 = \emptyset$,
- $\bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D = \mathbb{R}^n$

を満たすとき, $\mathfrak{D}$ を $\mathbb{R}^n$ の分割という.

定義 1.2. $F \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ を有限部分集合とする.

$D \subset \mathbb{R}^n$ が F-符号不変であるとは, 任意の $f \in F$ に対し, f の符号が D 上一定であることと定義する.

さらに. $\mathbb{R}^n$ の分割 $\mathfrak{D}$ が, 任意の $D \in \mathfrak{D}$ に対して, D が F-符号不変となるとき, $\mathfrak{D}$ を $\mathbb{R}^n$ の F-符号不変な分割という.

1.1 描画可能

定義 1.3. $F \subset \mathbb{R}^n[x_1, \dots, x_n]$ を有限部分集合とする. 空でない弧状連結部分集合 $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ が F-描画可能であるとは,

- 任意の $x \in S$ に対し, F の解の個数, すなわち $\{y \in \mathbb{R} \mid$ ある $f \in F$ に対し f(x,y) = 0$\}$ の元の個数が一定であり,
- 各 $x \in S$ の F の解を $f_1(x) < f_2(x) < \cdots < f_k(x)$ と書くとき, 各 f_i は S 上の実数値連続関数

であることと定義する.

命題 1.1. $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ を空でない弧状連結部分集合とし, $F \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ を有限部分集合とする. 次の 3 条件を満たすとき, S は F-描画可能である.

- 任意の $f \in F$ に対し, S 上 f の複素数根の数は重複度込みで一定である.
- 任意の $f \in F$ に対し, S 上 f の相異なる複素数根の数は一定である.

- 相異なる任意の $f, g \in F$ に対し, S 上 f, g に共通する複素数根の数は重複度込みで一定である.

この命題を示すために次の二つの補題を用意する.

補題 1.1. $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ を空でない弧状連結部分集合とし, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ が次を満たすとする.

- 各 $i = 1, 2$ に対し, S 上 f_i の重複度込みの複素数根の数は一定.
- 各 $i = 1, 2$ に対し, S 上 f_i の相異なる複素数根の数は一定.
- S 上 f_1, f_2 の重複度込みの複素数共通根の数は一定.

このとき, S 上 f_1, f_2 の相異なる複素数共通根の数は一定.

証明. 方針: $S_k = \{a \in S \mid f_1(a), f_2(a)$ の相異なる複素数共通根が k 個 $\}$ が開集合であることを示す. (多項式の解の, 係数についての連続性から示せる.)

□

補題 1.2. $A \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ とし, $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ を弧状連結部分集合とする.

- S 上 A の重複度込みの複素数根の数は一定.
- S 上 A の相異なる複素数根の数は一定.

この時, S は $\{A\}$-描画可能である.

証明. 方針: 次の二つのことを示さなければならない.
1. S 上実根の数は一定.
2. S 上実根は連続である.
いずれも多項式の根の係数に対する連続性から示せる. □

命題 1.1. の証明. 補題 1.2. より, 各 $f \in F$ に対して, S は $\{f\}$-描画可能である. よって,S 上の連続関数 $\alpha_{1,f}(a) < \ldots \alpha_{n_f,f}(a)$ を, 各 $a \in S$ で $f(a)(x) \in \mathbb{R}[x]$ の解であるようにとれる.

主張. $f, g \in F$ が, $f \neq g$ であるとする, ある $a \in S$ において $\alpha_{k,f}(a) = \alpha_{l,g}(a)$ であるならば, 任意の $a \in S$ に対して $\alpha_{k,f}(a) = \alpha_{l,g}(a)$ である.

この主張は, S が弧状連結であることと, 補題 1.1. から従う. この主張より, F の解の個数は S 上一定である. よって, 命題が示された. □

系 1.1. $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ を弧状連結部分集合とし, $F \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ を有限部分集合とする. 次が成り立つとき, S は F-描画可能である.

- 任意の $f \in F$ に対し, $\deg(f(a))$ が一定 $(a \in S)$.
- 任意の $f \in F$ に対し, $\deg(\gcd(f(a), \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)))$ が一定 $(a \in S)$.
- 任意の $f, g \in F$ に対し, $\deg(\gcd(f(a), g(a)))$ が一定 $(a \in S)$.

1.2 主部分終結式係数 (Principal Subresultant Coefficient)

ここで書くこと. $\gcd(f(a), g(a))$ の次数が $\mathrm{psc}(f(a), g(a))$ から決まるということ.

1.3　符号不変な分割の存在と CAD アルゴリズム

符号不変な分割の存在を示し，CAD アルゴリズムについて明記する．