

Resolução – Lista 9 (Projeto e Análise de Algoritmos)

Março - 2023 / Leticia Bossatto Marchezi – 791003

Questão 1

Defina matematicamente o que é um emparelhamento estável.

Resolução:

Emparelhamento estável é um problema referente à distribuição dos vértices de um grafo bipartido.

Há os conjuntos X e Y , que idealmente têm a mesma quantidade de vértices para obter um emparelhamento perfeito. Cada vértice possui uma lista de preferência. Sendo G um gráfico bipartido:

$$G = (V, E) \quad (1.1)$$

E $n + 2n$ listas de preferência

$$|X| = |Y| = n + 2n \quad (1.2)$$

de forma que as listas de preferência têm o seguinte formato:

$$\forall m \in M \exists r(m) = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

$$\forall w \in W \exists r(w) = [m_1, m_2, \dots, m_n]$$

A estabilidade acontece quando há a maximização dos ganhos (de acordo com o rank de prioridades) para os vértices de forma que não seja possível realizar alterações de atribuições de vértices que aumentem o ganho.

Ou seja, a distribuição dos indivíduos é a melhor possível para que estejam satisfeitos sem que possam assumir novos pares com indivíduos de maior preferência, pois de acordo com a estabilidade alguns indivíduos estarão mais satisfeitos que outros, e a alteração de um conjunto estável estará piorando a maximização dos ganhos.

Questão 2

Mostre que todo emparelhamento retornado pelo Gale-Shappley é estável.

Resolução:

A demonstração de que o resultado do emparelhamento do algoritmo Gale-Shappley é estável pode ser feito a partir da prova por contradição.

Para isso, supomos que há alguma instabilidade no emparelhamento final entre homens e mulheres feita pelo algoritmo.

Assumindo um predicado ternário $P(w, m, m')$ em que w prefere m em comparação com m' e $P(m, w, w')$, porém o resultado do emparelhamento foi $[w, m']$ e $[m, w']$, então há uma instabilidade.

Assim, se no fim w foi emparelhada com m' , então ele foi o último a ser pedido por w .

Por consequência, w deve ter proposto para m anteriormente, já que está melhor posicionado em sua lista de preferência. Porém, para não ter ficado com m , o ranking de preferência de m deveria ser $P(m, w', w)$, dando prioridade a w' em relação à w . Assim gerando uma contradição, pois é diferente do ranking inicial e não é possível haver dois rankings diferentes de preferência ao mesmo tempo.

Ou seja, como é impossível haver uma instabilidade no sistema final demonstrado pela prova por absurdo, o algoritmo sempre torna um emparelhamento estável.

Questão 3

Mostre que o algoritmo de Gale-Shappley com o conjunto dos homens dominante sempre emparelha um homem m com sua best valid partner (bvp) w , ou seja, não importa a ordem de escolha dos homens, ele sempre terminará com sua bvp. Qual a importância desse resultado?

Resolução:

A prova de que em um emparelhamento com o conjunto de homens dominantes sempre resultará na escolha com a melhor parceira disponível pode ser feita à partir da prova por contradição.

Tomando um emparelhamento estável S com o conjunto de homens dominantes e um indivíduo m não foi emparelhado com sua bvp que é w , ele deve ter proposto para w em algum momento já que ela está no topo de seu ranking e deve ter sido rejeitado.

Assim, há duas possibilidades: w rejeitou a proposta de m pois já estava com um parceiro melhor m' , ou w terminou com m após receber uma proposta de um parceiro melhor m' .

Então, de qualquer jeito w está emparelhada com m' pois ele é mais desejado por ela do que m : $P(w, m', m)$.

Em um emparelhamento estável S' deve haver o par (m, w) . Mas qual seria o par de w' ? com outra mulher w' , que não é $mpv(m)=w$.

Segundo os passos anteriores, m foi rejeitado para que m' tenha finalizado com w , logo m' não foi rejeitado por ninguém. Então, m' prefere w em comparação com w' , pois w foi sua primeira opção: $P(m', w, w')$.

Assim, como temos que $P(w, m', m)$ e $P(m', w, w')$ mas não existe o par (m', w) em S' , logo há uma instabilidade no sistema e chegamos numa contradição.

Por fim, a importância desta constatação é que sempre haverá o mesmo resultado final independente de quem começa a escolher primeiro, logo não é possível obter vantagem no emparelhamento devido à ordem de escolha, colocando os membros em igualdade.

Questão 4

Dado o conjunto de rapazes (B – boys) e moças (G - girls) a seguir, encontre um emparelhamento estável utilizando o algoritmo de Gale-Shappley. Mostre o passo a passo do algoritmo. Considere que os rapazes propõem

Resolução:

i	m	w	engaged
1	B1	G3	yes
2	B2	G1	yes
3	B3	G4	yes
4	B4	G1	no
5	B4	G3	yes
6	B5	G1	yes
7	B2	G2	yes
8	B1	G2	no
9	B1	G5	yes

Table 1: emparelhamento passo a passo com Gale-Shappley

$$\begin{aligned}
S^{(0)} &= \{\} \\
S^{(1)} &= \{(B1, G3)\} \\
S^{(2)} &= \{(B1, G3), (B2, G1)\} \\
S^{(3)} &= \{(B1, G3), (B2, G1), (B3, G4)\} \\
S^{(4)} &= \{(B1, G3), (B2, G1), (B3, G4)\} \\
S^{(5)} &= \{(B2, G1), (B3, G4), (B4, G3)\} \\
S^{(6)} &= \{(B3, G4), (B4, G3), (B5, G1)\} \\
S^{(7)} &= \{(B2, G2), (B3, G4), (B4, G3), (B5, G1)\} \\
S^{(8)} &= \{(B2, G2), (B3, G4), (B4, G3), (B5, G1)\} \\
S^{(9)} &= \{(B1, G5), (B2, G2), (B3, G4), (B4, G3), (B5, G1)\}
\end{aligned}$$

Questão 5

Encontre um emparelhamento estável para o problema a seguir:, em que as listas de preferências são dadas em termos da inicial de cada nome.

Resolução:

(a) Homens propõem

i	m	w	engaged
1	A	S	yes
2	B	S	no
3	B	V	yes
4	C	S	no
5	C	U	yes
6	D	U	no
7	D	V	yes
8	B	U	no
9	B	T	yes

Table 2: Emparelhamento passo a passo com Gale-Shappley: Homens Propõem

$$\begin{aligned}
S^{(0)} &= \{\} \\
S^{(1)} &= \{(A, S)\} \\
S^{(2)} &= \{(A, S)\} \\
S^{(3)} &= \{(A, S), (B, V)\} \\
S^{(4)} &= \{(A, S), (B, V)\} \\
S^{(5)} &= \{(A, S), (B, V), (C, U)\} \\
S^{(6)} &= \{(A, S), (B, V), (C, U)\} \\
S^{(7)} &= \{(A, S), (D, V), (C, U)\} \\
S^{(8)} &= \{(A, S), (D, V), (C, U)\} \\
S^{(8)} &= \{(A, S), (B, T), (D, V), (C, U)\}
\end{aligned}$$

(b) Mulheres propõem

i	m	w	engaged
1	S	D	yes
2	T	A	yes
3	U	C	yes
4	V	A	no
5	V	C	no
6	V	D	yes
7	S	A	yes
8	T	D	no
9	T	C	no
10	T	B	yes

Table 3: Emparelhamento passo a passo com Gale-Shappley: Mulheres propõem

$$S^{(0)} = \{\}$$

$$S^{(1)} = \{(S, D)\}$$

$$S^{(2)} = \{(S, D), (T, A)\}$$

$$S^{(3)} = \{(S, D), (T, A), (U, C)\}$$

$$S^{(4)} = \{(S, D), (T, A), (U, C)\}$$

$$S^{(5)} = \{(S, D), (T, A), (U, C)\}$$

$$S^{(6)} = \{(V, D), (T, A), (U, C)\}$$

$$S^{(7)} = \{(V, D), (S, A), (U, C)\}$$

$$S^{(8)} = \{(V, D), (S, A), (U, C)\}$$

$$S^{(9)} = \{(V, D), (S, A), (U, C)\}$$

$$S^{(10)} = \{(V, D), (S, A), (U, C), (T, B)\}$$