Resolução – Lista 8 (Projeto e Análise de Algoritmos)

Março - 2023 / Leticia Bossatto Marchezi – 791003

Questão 1

A rotulação das arestas no grafo a seguir representa um fluxo válido? Justifique sua resposta

Resolução:

Apesar das arestas respeitarem sua capacidade e o fluxo de saída da fonte ser o mesmo fluxo de entrada do bebedouro(output source = 0, input sink = 0), a rotulação das arestas não é um fluxo válido pois fere a condição de conservação de fluxo:

$$\forall v \in V - \{s, t\} \tag{1.1}$$

$$\sum_{e \in I(v)} f(e) = \sum_{e \in O(v)} f(e) \tag{1.2}$$

Da fonte s há um total de fluxo de saída 0, entretanto os vértices 1, 3, 4, 5, 6 e 7 possuem fluxo de saída maior do que 0, enquanto não há um fluxo positivo de entrada(o que já é impossível de acontecer dado que não há fluxo proveniente da fonte). Pela condição de conservação do fluxo, a quantidade de fluxo de entrada deve ser idêntica ao fluxo de saída, lógica que não é válida para o grafo acima.

Questão 2

A primitiva Augment, que melhora um fluxo f através de um caminho aumentado P é dada por: Mostre que o resultado da operação f' = Augment(f, P) é um fluxo válido.

Resolução:

A primitiva Augment sempre gera um fluxo válido pois usa o gráfico residual(que garante que o algoritmo sempre terá o melhor resultado pois não depende do caminho escolhido) e respeita as 3 propriedades:

1. O novo fluxo gerado pela primitiva não excederá a capacidade dos vértices em direção favorável à sink, pois é garantido que todo o acréscimo de fluxo não excederá a capacidade da aresta com menor limite. $f'(e) = f(e) + b$ sendo que $b \leq c(e) - f(e)$

2. O novo fluxo não será menor do que zero para casos em vértices em direção oposta à sink, pois o pior caso é em que $b = f(e)$, ou seja, a capacidade mínima das arestas é correspondente à própria quantidade de fluxo, gerando no pior caso então $f'(e) = f(e) - b = 0$, mas nunca um valor negativo pois não é possível que b seja maior do que o fluxo original $f(e)$.

3. Há a conservação de fluxo, em que a mesma quantidade de fluxo que entra na aresta também estará saindo dela. Isso se dá pois nos casos em que há 2 arestas Forward-Edge ou Backward-Edge há a soma ou a subtração de mesma quantidade de fluxo b na entrada e saída, e quando há uma aresta Forward-Edge e outra Backward-Edge, é somado e subtraído o fluxo b na entrada(F.E.) ou na saída(B.E.), mantendo a estabilidade da conservação de fluxo.

Questão 3

Seja f um fluxo s-t e (A, B) um corte s-t. Mostre que v (f)=f out(A)f in (A) , ou seja, o valor do fluxo depende diretamente do corte: é tudo que sai de A menos tudo que entra em A

Resolução:

Primeiramente, tem-se que $f^{in}(s) = 0$, pois a fonte do grafo não possui fluxo de entrada, logo, seu fluxo pode ser descrito por $f(s) = f^{out}(s) - f^{in}(s)$.

Analisando para um vértice intermediário v qualquer pertencente ao grafo, é garantido pela lei da conservação de fluxo que $f^{in}(v) = f^{out}(v)$, logo $f^{out}(v) - f^{in}(v) = 0$

Então, o fluxo total é definida pelo somatório do fluxo de todos os vértices (que são nulos exceto pela fonte):

$v(f) = \sum_{v \in A}(f^{out}(v) - f^{in}(v)$

Entretanto, há 4 possibilidades de arestas. Em arestas que ocorrem dentro do corte A(1) o fluxo se anula, e para arestas fora de A(2), o fluxo não é computado.

Porém, para arestas que partem de vértices em A para B(3), e arestas que partem de vértices de B para A(4) seus fluxos são computados.

Assim, os valores não nulos na expressão são dos casos 3 e 4, que respectivamente representam um fluxo +f(e) em $f^{out}(u)$ e -f(e) em $f^{in}(u)$.

Dessa forma, é possível concluir que:

$v(f) = \sum_{e \in O(A)} f(e) - \sum_{e \in I(A)} f(e) = f^{out}(A) - f^{in}(A)$

Questão 4

Seja um fluxo s-t qualquer e (A, B) um corte s-t. Mostre que $v(f) \leq c(A, B)$.

Resolução:

Como mostrado anteriormente, tem-se que $v(f) = f^{out}(A) - f^{in}(A)$. Pela lógica, é concebível que $f^{out}(A) - f^{in}(A) \leq f^{out}(A)$.

Respeitando a condição de capacidade de arestas, o fluxo transmitido tem que ser menor ou igual à capacidade.

Logo $f^{out}(A) = \sum_{e \in O(A)} f(e) \leq \sum_{e \in O(A)} c(e)$.

E o somatório da capacidade das arestas é a capacidade de fluxo total do corte $\sum_{e \in O(A)} c(e) = c(A, B)$, então chegamos em:

$$v(f) \leq c(A, B) \tag{4.1}$$

Questão 5

Prove o Teorema Min-Cut/Max-Flow

Resolução:

Tomando $G_f = (V_f, E_f)$ um grafo residual de G em sua última etapa(o terminal não é mais alcançável pela fonte), pode-se dividir os vértices entre atingíveis(1) e não atingíveis por s(2).

Para as arestas conectadas com s e que saem de A*, com certeza estas estão saturadas, então pode-se concluir:

$$\forall e \in O(A*) \tag{5.1}$$

temos que f(e)=c(e)

Para as arestas que chegam em A* e não há Backward Edge, seu fluxo é nulo, senão haveria outra aresta com o fluxo residual. Logo pode-se considerar que:

$$\forall e \in O(A*) \tag{5.2}$$

temos que f(e')=0

Assim, o valor do fluxo pode ser calculado como:

$$v(f) = f^{out}(A^*) - f^{in}(A^*) = \sum_{e \in O(A^*)} c(e) = c(A^*, B^*) \tag{5.3}$$

Questão 6

O grafo G = (V, E) a seguir mostra uma rede em que um fluxo s-t foi gerado. A capacidade de cada aresta eE é o número que aparece ao lado da linha que representa a aresta, fora das caixas. Os números dentro das caixas representam os respectivos fluxos em cada aresta e. Se não há caixa na aresta, significa ausência de fluxo. Responda:

(a) A rotulação define um fluxo válido? Prove sua resposta.

Resolução:

i. Restrição de capacidade:

$\forall e \in E$, $f(e) \leq c(e)$

É observável que para todos os fluxos existentes, a capacidade da aresta está sendo respeitada.

ii. Fluxo gerado na fonte é igual ao fluxo consumido no terminal:

$$v(f) = \sum_{e \in O(s)} f(e) = \sum_{e \in I(s)} \tag{6.1}$$

$v(f) = 6 + 3 + 1 = 10$ e $f(e) = 5 + 5$ Assim:

$$v(f) = f(e) = 10 \tag{6.2}$$

Logo, a condição ii foi satisfeita.

iii. Conservação do fluxo $\forall v \in V - \{s, t\}$

$$\sum_{e \in I(v)} f(e) = \sum_{e \in O(v)} f(e) \tag{6.3}$$

Verificando a condição para todos os vértices internos:

- Vértice s é a fonte.

- Vértice a:

$\sum_{e \in I(a)} f(e) = 6$ e $\sum_{e \in O(a)} f(e) = 1 + 5 = 6$. OK.

- Vértice b:

$\sum_{e \in I(b)} f(e) = 3 + 1 + 1 = 5$ e $\sum_{e \in O(b)} f(e) = 5$. OK.

- Vértice d:

$\sum_{e \in I(d)} f(e) = 1$ e $\sum_{e \in O(d)} f(e) = 1$. OK.

- Vértice c:

$\sum_{e\in I(c)} f(e) = 5$ e $\sum_{e\in O(c)} f(e) = 5$. OK.

- Vértice t é o terminal

Assim, a condição da conservação de fluxo foi respeitada.

Por isso, pode-se concluir que o fluxo é válido, já que satisfaz as 3 condições acima.

(b) Qual o valor deste fluxo s-t em G? Este fluxo s-t é máximo em G? Se for explique porquê, e se não for, obtenha o fluxo máximo

Resolução:

O valor do fluxo s-t em G é 10 e não é o fluxo máximo. Construindo o grafo residual obtem-se o seguinte resultado:

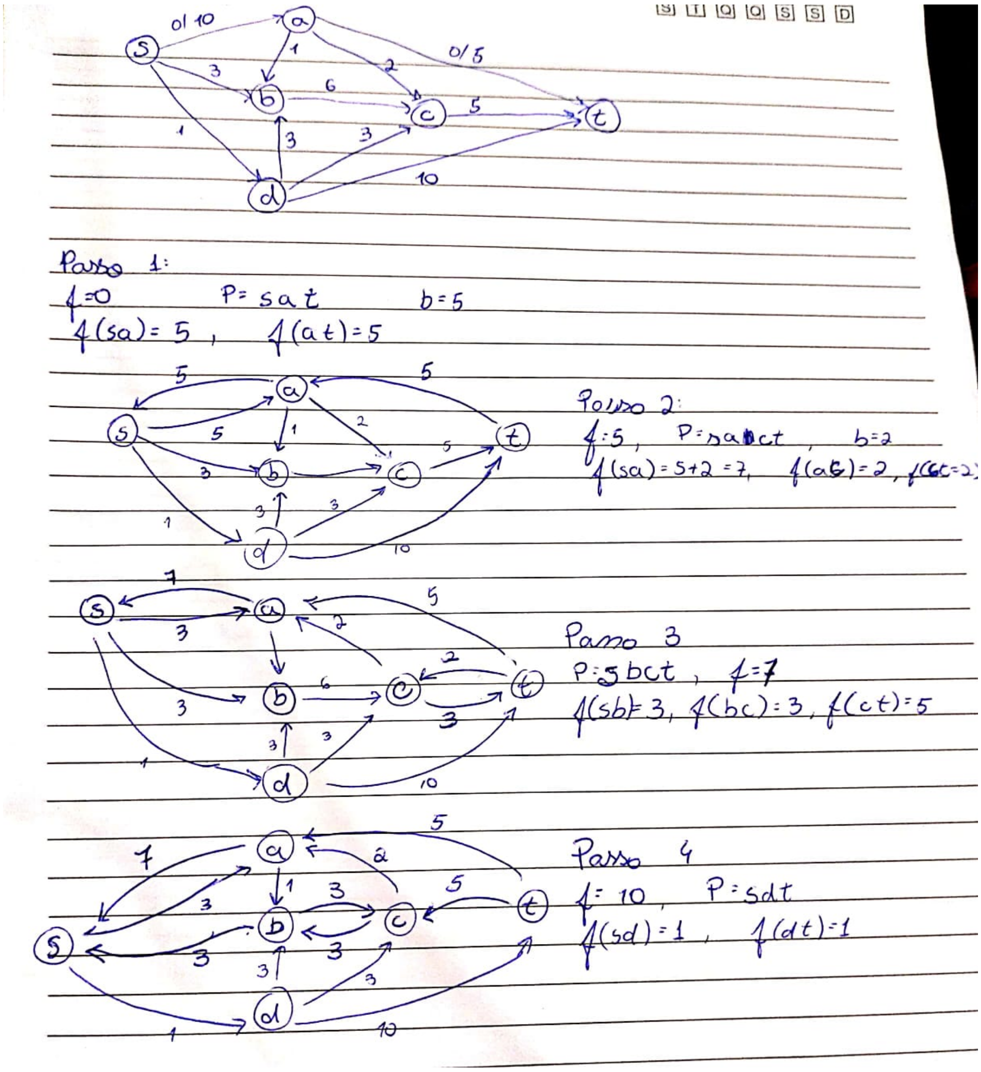

Figure 1: Algoritmo Augment

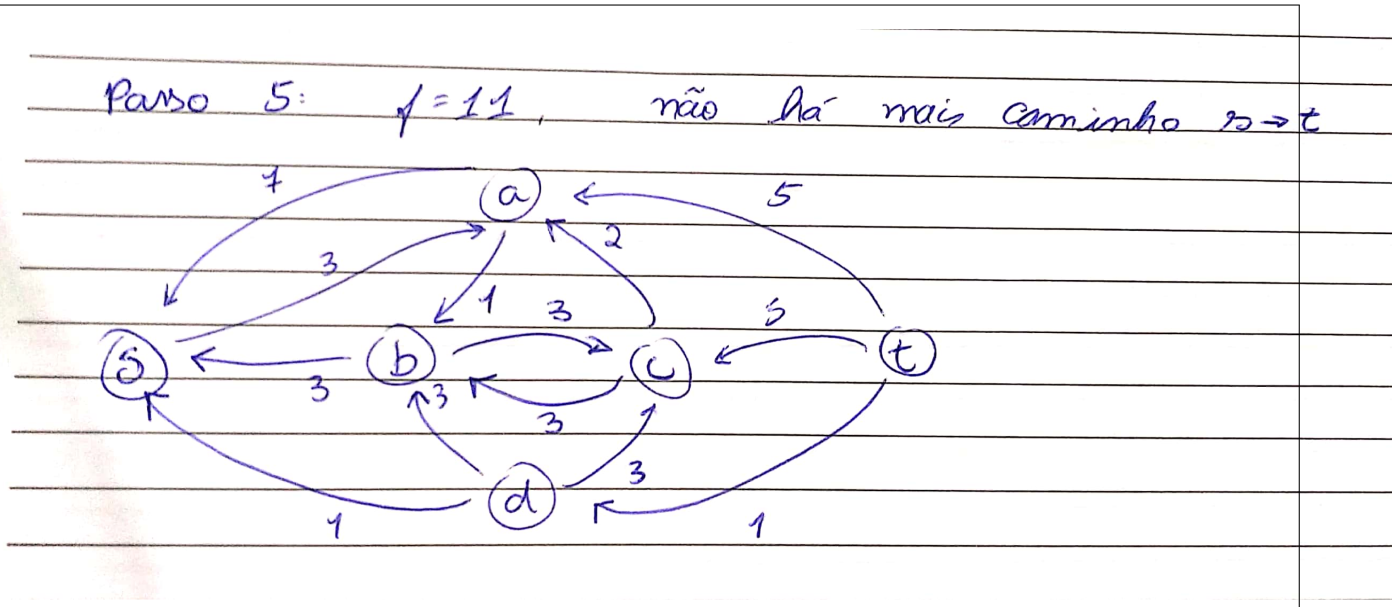

Figure 2: Grafo residual gerado

Assim, aplicando a primitiva Augment somando os fluxos do grafo residual até o terminal, obtém-se f=11.