XII. VA réelle: espérance

- **Espérance :** L'espérance d'une VA X, que l'on note $\mathbb{E}[X]$ est la moyenne statistique de X. C'est à dire la somme de toutes les valeurs que X peut prendre multipliées par leurs probabilités d'apparition

Définition : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace probabilisé fondamental et X une VA définie sur Ω. L'espérance de X, $\mathbb{E}[X]$, sous réserve d'existence, est définie par

$$E[X] = \sum_{n \in I} x_n P(X = x_n)$$

EX. L'exemple de lancer deux fois un dé et définissons la VA X comme la somme des deux faces résultantes et calculons E(X) .

Dans cette exemple, l'univers des possibilités peut être spécifié précisément. En effet

$$\Omega = \{(i,j), 1 \leq i,j \leq 6\} \Rightarrow \mathrm{Card}(\Omega) = 36 \quad \text{et} \quad X(\Omega) = \{2,3,\ldots 12\} \Rightarrow \mathrm{Card}(X(\Omega)) = 11$$

Comme Ω est bien défini, alors

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k P_X(\{k\}) = \sum_{k=2}^{12} k P(X = k) = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + \cdots = \frac{252}{36} = 7$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

XII. VA réelle: espérance

Propriétés de l'espérance : Pour une VA X réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on a les propriétés suivantes:

1. **Linéarité :** Soit X et Y deux VAs définies sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et admettant des espérances alors
$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y], \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. L'espérance est positive : si $X \geq 0$ est d'espérance finie, alors $E[X] \geq 0$. En particulier, si $X \leq Y$ et X et Y sont d'espérance finie, alors $E[X] \leq E[Y]$.
3. Si X = α pour tout α dans $\mathbb{R}$, alors E(X)=α

4. Si $|Y| \leq X$ et X est d'espérance finie, alors Y est d'espérance finie.

XII. VA réelle: moments d’ordre k

- **Définition :** **Un moment d’ordre k** d’une variable aléatoire discrète X est définie par

$$E[X^k] = \sum_{a \in X(\Omega)} a^k P_X(a) = \sum_{a \in X(\Omega)} a^k P(X = a)_X(a)$$

→ L’espérance n’est rien que **le moment d’ordre un** de la VA considérée.

XII. VA réelle: moments d’ordre k

- **Définition : Un moment d’ordre k** d’une variable aléatoire discrète X est définie par

$$E[X^k] = \sum_{a \in X(\Omega)} a^k P_X(a) = \sum_{a \in X(\Omega)} a^k P(X = a)_X(a)$$

- **Proposition:** Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq q$. Si X admet un moment d’ordre q, alors X admet un moment d’ordre p.

- **Inégalité de Cauchy-Schwartz :** Si X et Y admettent des moments d’ordre 2, alors XY est d’espérance finie et

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]\mathrm{E}[\mathrm{Y}^2]$$

XIII.VA réelle: variance

Définition :

La variance d'une VA X est définie, sous réserve d'existence, comme **le moment centré d'ordre 2** de X.

- **Dans le cas où X est une VA discrète**

$$\mathrm{V}[X] = \sum_{a \in X(\Omega)} (a - m_X)^2 P_X(a) = \sum_{a \in X(\Omega)} (a - m_X)^2 P(X = a)$$

Notons que la variance représente la dispersion de la VA X autour de sa valeur moyenne.

XIII.VA réelle: variance

Propriétés de la variance:

Soit X une VA définie sur (Ω, $\mathcal{F}$,P) admettant **un moment d'ordre 2**, alors on a:

1. $\mathrm{V}[X]=0$ alors X est presque sûrement constante
2. Invariance par translation : $V[X+\lambda]=V[X]$
3. $\mathrm{V}[X]\geq 0$
4. $\mathrm{V}[X]=\mathrm{E}[X^2]-m_X^2$
5. $\mathrm{V}[\alpha X]=\alpha^2\mathrm{V}[X]$

Définition:

Si X est une VA de carré intégrable et d'espérance E(X) et d'écart-type σ_X , alors la variable aléatoire $\frac{X - E[X]}{s_X}$ est d'espérance nulle et d'écart-type égale à 1. Nous dirons que cette VA est **centrée réduite.**

XIII.Convergence des variables aléatoires

- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires X_n **converge presque sûrement** vers une variable aléatoire X, si, pour presque tout événement $\omega \in \Omega$:

$$X_n(\omega) \to X(\omega)$$

- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires X_n **converge en probabilités** vers une variable aléatoire X, si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires X_n **converge en moyenne d'ordre r**, $r > 0$ vers une variable aléatoire X, si :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) = 0$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

XIV.Lois des grands nombres

❑ Loi faible des grands nombres

Théorème : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes deux à deux, identiquement distribuées. Soit m leur espérance commune. On note :

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers m en probabilité.

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \mathbb{E}[X]| \geq \delta) = 0$$

XIV.Lois des grands nombres

- **Loi <u>faible</u> des grands nombres**

Théorème : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes deux à deux, identiquement distribuées. Soit m leur espérance commune. On note :

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers m en probabilité.

- **Loi <u>forte</u> des grands nombres**

Théorème : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes deux à deux, identiquement distribuées. Soit m leur espérance commune. On note :

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers m **presque sûrement**.

XV. Fonction de répartition

Définition:

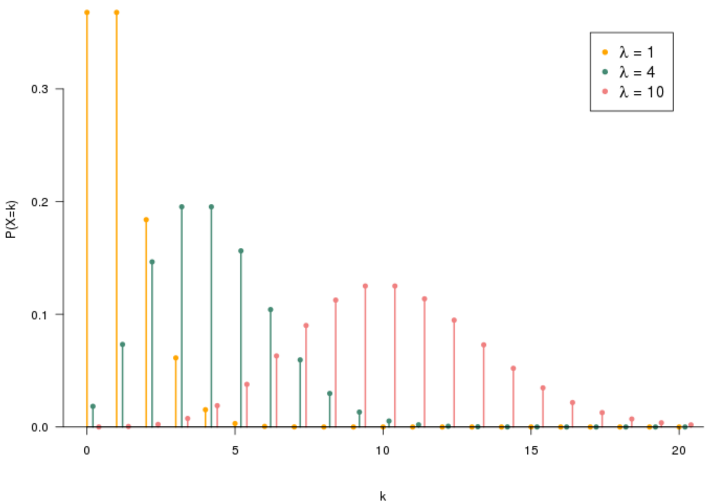
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace probabilisé fondamental et X une VA réelle définie sur Ω. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie par

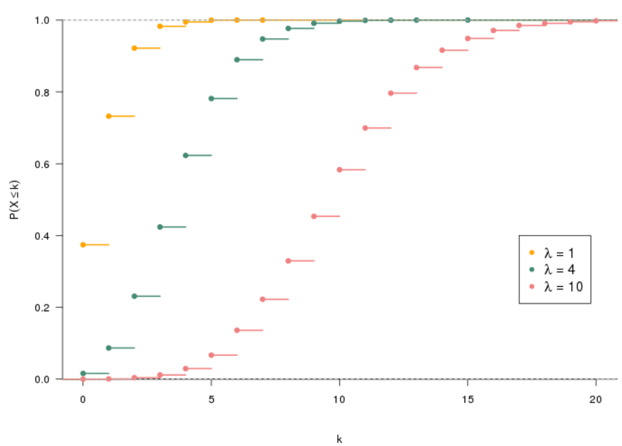
$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \mathrm{P}(X \leq t)$$

Autrement dit, $F_X(t) = p_X(]-\infty, t])$

Exemples:

Loi de Poisson : $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$





XV. Fonction de répartition

Proposition:

Soit X une VA réelle définie sur l'espace probabilisé fondamental.

1. F_X est une fonction croissante
2. On a $\lim_{t\to-\infty} F_X(\mathrm{t}) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F_X(\mathrm{t}) = 1$
3. F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$
4. Si X est discrète, F_X est une fonction en escalier. L'ensemble des points de discontinuité est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X. En un point t_0 de discontinuité, le saut de F_X est $\mathrm{P}(X = t_0)$.

(Remarquez que les points 1.+2.+3. impliquent que $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{F_X} \leq \mathbf{1}$)

*presque-partout: une propriété est dite vraie presque partout si l'ensemble des points où elle est fausse est négligeable (de mesure nulle).