1 Champ électrostatique et distributions de charges

1.1 Charge électrique

À toute particule, on peut affecter une grandeur scalaire appelée charge électrique, dont l'unité est le Coulomb (de symbole C, $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A\,s}$ en unités SI). Cette charge caractérise les actions électromagnétiques exercées ou subies par la particule.

Propriétés de la charge électrique :
- La charge totale d'un système fermé et isolé est constante (conservation de la charge).
- La charge d'un système a la même valeur dans tous les référentiels.
- Il existe un quantum de charge, qui vaut $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

1.2 Loi de Coulomb

Lorsqu'on place deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 dans le vide en des points M_1 et M_2 distincts, ces deux charges sont en interaction électrique. La charge q_1 exerce sur la charge q_2 la force :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{||\overrightarrow{M_1M_2}||^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{u}_{1\to 2} \quad \text{avec} \quad r = ||\overrightarrow{M_1M_2}|| \quad \text{et} \quad \vec{u}_{1\to 2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{||\overrightarrow{M_1M_2}||}. \tag{1}$$

Réciproquement, la charge q_2 exerce sur la charge q_1 la force $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$.

L'équation (1) constitue la définition de la force de Coulomb exercée par une charge q_1 sur une charge q_2. C'est une définition du cours, à connaître.

La grandeur ε_0 s'appelle *permittivité diélectrique du vide*, et on a $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\,\mathrm{m\,F^{-1}}$ (en unités SI, $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{m^{-2}\,kg^{-1}\,s^4\,A^2}$). Lorsqu'on ne travaille pas dans le vide mais dans certains matériaux isolants (nommés milieux diélectriques linéaires isotropes), on a $\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{||\overrightarrow{M_1M_2}||^3}$ où ε_r s'appelle la *permittivité relative* ou *constante diélectrique* du matériau. Dans ce cours, on se placera toujours dans le vide.

Comme on le voit sur le schéma figure 1, lorsque q_1 et q_2 sont de signes différents (donc $q_1 q_2 < 0$), les charges s'attirent. Inversement, lorsque q_1 et q_2 sont de même signe (donc $q_1 q_2 > 0$), les charges se repoussent.

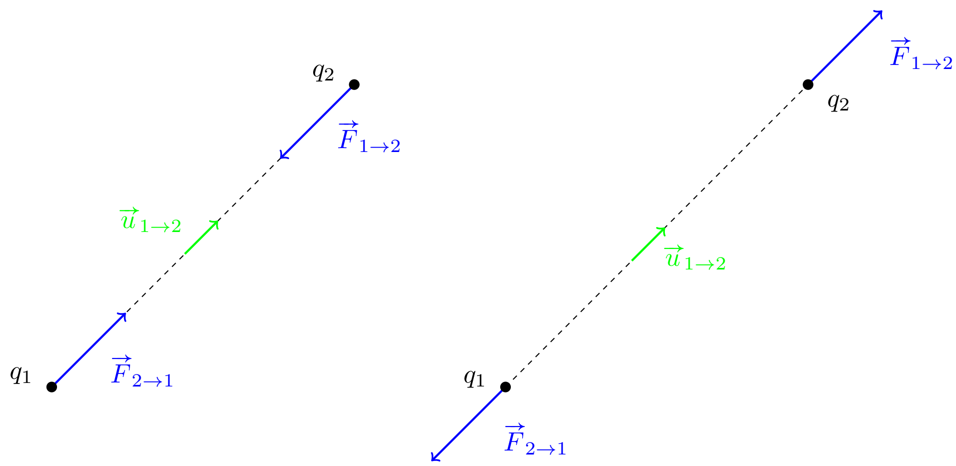


Figure 1 – Forces de Coulomb entre deux charges q_1 et q_2 dans le vide.

1.3 Champ électrostatique créé par une charge

La force exprimée dans l'équation (1) peut se réécrire en mettant la charge q_2 en facteur :

$$\vec{F}_{1\to 2} = q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{1\to 2}\right).$$

On constate que la quantité entre parenthèses ne dépend que de q_1 et des coordonnées de l'espace : elle peut donc être interprétée comme une quantité créée par la charge q_1 autour d'elle, et qui préexiste à une éventuelle charge q_2 que l'on viendrait positionner. On nomme cette quantité le *champ électrique* ou *champ électrostatique* $\vec{E}$ créé par la charge q_1.

Ainsi, le champ électrostatique créé dans l'espace par une charge ponctuelle q située en un point O s'écrit, au point M repéré par $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$, comme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r. \tag{2}$$

Ce champ électrostatique est défini en tout point M de l'espace, sauf au point O où se trouve la charge q. L'unité du champ électrostatique dans le système international est le Volt par mètre (de symbole $\mathrm{V\,m^{-1}}$).

L'équation (2) constitue la définition du champ électrostatique créé par une charge q située en un point O de l'espace, en tout point M repéré par $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$. C'est une définition du cours, à connaître.

1.4 Distributions de charges et principe de superposition

La charge ponctuelle représente le cas le plus simple de source de champ électrique. Elle permet une bonne modélisation des particules fondamentales constituant la matière, pour des distances supérieures au picomètre (10^{-12} m). Les champs électriques que l'on rencontre dans des situations macroscopiques sont eux créés par des ensembles de charges, voire par un très grand nombre de charges. On parle alors de distribution de charges électriques.

Distributions discrètes. Considérons une distribution discrète Σ de N charges q_i (i de 1 à N), placées en des points A_i de l'espace. La force $\vec{F}_{\Sigma\to q}$ excercée par cette distribution de charges sur une charge q placée en un point $M \neq A_i$ est la somme des forces exercées par chacune des charges q_i :

$$\vec{F}_{\Sigma\to q} = \sum_{i=1}^{N}\frac{qq_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{A_iM}}{||\overrightarrow{A_iM}||^3} = q\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{A_iM}}{||\overrightarrow{A_iM}||^3}.$$

Par le même raisonnement qu'à la section 1.3, le champ $\vec{E}_\Sigma(M)$ créé en M par la distribution Σ est donc :

$$\vec{E}_\Sigma(M) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{A_iM}}{||\overrightarrow{A_iM}||^3} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i(M).$$

Ce résultat est appelé *principe de superposition* : le champ électrostatique $\vec{E}_\Sigma(M)$ créé en un point M par une distribution de charges Σ est la somme des champs créés par chacune des charges de la distribution au point M. C'est simplement l'expression de la linéarité de la relation fondamentale (2) qui définit le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle. Ce champ $\vec{E}_\Sigma(M)$ est défini en tout point de l'espace privé des points A_i où sont placées les charges q_i.

Il faut connaitre le principe de superposition, et surtout savoir l'appliquer pour retrouver la force exercée par une distribution de charges sur une autre charge et le champ créé par une distribution de charges, que ce soit dans le cas discret ou dans le cas continu.

Remarque. On remarquera que la charge totale Q_{tot} d'une distribution discrète Σ de N charges q_i, avec i allant de 1 à N, vaut :

$$Q_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} q_i.$$

Il faut être capable de calculer la charge totale d'une distribution discrète de charges.

Distributions continues. Lorsqu'on s'intéresse à des objets macroscopiques, le nombre de charges présentes est tellement grand qu'il n'est plus possible de les dénombrer. On considère dans ce cas des distributions continues adaptées à la dimensionalité de l'objet.

Lorsqu'un corps contient un grand nombre de charges réparties dans un volume $\mathcal{V}$ (on parle alors de distribution volumique), on définit la densité volumique de charges au point P par :

$$\rho\,(P) = \frac{\mathrm{d}q\,(P)}{\mathrm{d}\tau} \qquad (\text{unité : C}\,\text{m}^{-3}),$$

où $\mathrm{d}\tau$ est un volume élémentaire entourant le point P, et $\mathrm{d}q\,(P)$ est la charge contenue dans ce volume (voir le schéma figure 2). Attention : l'expression $\rho\,(P) = \dfrac{\mathrm{d}q\,(P)}{\mathrm{d}\tau}$ désigne le rapport d'une charge sur un volume. Il ne s'agit pas de la dérivée de la charge par rapport au volume !

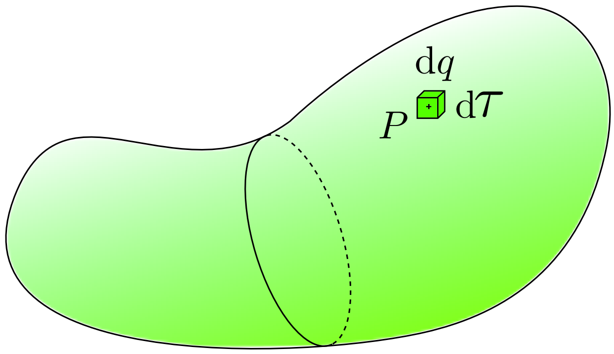


Figure 2 – Une distribution volumique de charges de forme patatoïdale.

Le choix de $\mathrm{d}\tau$ est important, car les atomes sont essentiellement constitués de vide. Or on cherche ici à avoir une modélisation continue d'un objet macroscopique chargé, pas à reproduire une distribution discrète de charges par une modélisation continue. On se place donc à l'échelle *méso-scopique* : on choisit $\mathrm{d}\tau$ très petit à l'échelle macroscopique de la distribution, mais très grand à l'échelle microscopique des charges individuelles.

Remarque. Dans ce cas, la charge totale Q_{tot} de la distribution volumique de charges contenue dans le volume $\mathcal{V}$ vaut :

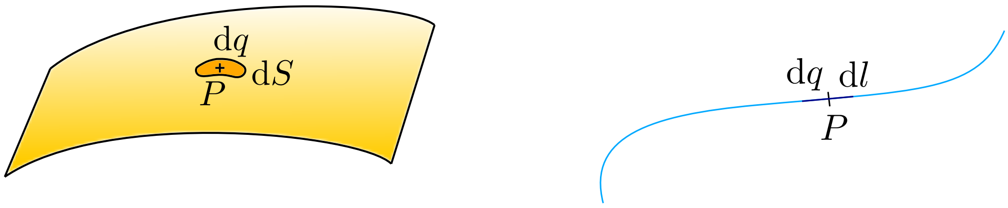
$$Q_{\text{tot}} = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \mathrm{d}q\,(P) = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \rho(P)\,\mathrm{d}\tau.$$

Il faut être capable de calculer la charge totale d'une distribution volumique de charges.

Il peut arriver que les charges soient réparties sur une nappe d'épaisseur négligeable devant ses deux autres dimensions spatiales. Dans ce cas, on utilise une modélisation surfacique, comme schématisé sur la figure 3a. On définit la densité surfacique de charges au point P par :

$$\sigma\,(P) = \frac{\mathrm{d}q\,(P)}{\mathrm{d}S} \qquad (\text{unité : C}\,\text{m}^{-2}),$$

où $\mathrm{d}S$ est une surface élémentaire entourant le point P, et $\mathrm{d}q\,(P)$ est la charge contenue dans cette surface élémentaire.



(a) Distribution surfacique.

(b) Distribution linéique.

FIGURE 3 – Distributions surfaciques et linéiques de charges.

Enfin, lorsque les charges sont réparties en volume dans un tube pour lequel le rayon de la section est très inférieur à la longueur du tube,on utilise une modélisation linéique, et on définit la densité linéique de charge au point P par :

$$\lambda\left(P\right) = \frac{\mathrm{d}q\left(P\right)}{\mathrm{d}l} \qquad \text{(unité : C m}^{-1}\text{)},$$

où $\mathrm{d}l$ est une longueur élémentaire entourant le point P, et $\mathrm{d}q\left(P\right)$ est la charge contenue sur cette longueur $\mathrm{d}l$ (voir figure 3b).

Remarque. Dans le cas surfacique, la charge totale Q_{tot} de la distribution surfacique de charges contenue dans la surface $\mathcal{S}$ vaut :

$$Q_{\text{tot}} = \iint_{P\in\mathcal{S}} \mathrm{d}q\left(P\right) = \iint_{P\in\mathcal{S}} \sigma(P)\,\mathrm{d}S.$$

Dans le cas linéique, la charge totale Q_{tot} de la distribution linéique de charges contenue dans la ligne $\mathcal{L}$ vaut :

$$Q_{\text{tot}} = \int_{P\in\mathcal{L}} \mathrm{d}q\left(P\right) = \int_{P\in\mathcal{L}} \lambda(P)\,\mathrm{d}l.$$

Il faut être capable de calculer la charge totale d'une distribution surfacique ou linéique de charges.

Dans le cas continu comme dans le cas discret, on peut utiliser le théorème de superposition pour obtenir les formules donnant le champ créé par de telles distributions de charges. Soit $\mathcal{D}$ une distribution continue de charges, chaque charge élémentaire $\mathrm{d}q\left(P\right)$ centrée en un point P de cette distribution crée, en un point M de l'espace, le champ électrostatique élémentaire :

$$\mathrm{d}\vec{E}_P\left(M\right) = \frac{\mathrm{d}q\left(P\right)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{||\overrightarrow{PM}||^3}.$$

Le champ électrostatique total $\vec{E}_{\mathcal{D}}\left(M\right)$ créé en M par $\mathcal{D}$ est la somme des champs élémentaires $\mathrm{d}\vec{E}_P\left(M\right)$ lorsque P parcourt la distribution. Ainsi :

- Le champ créé par une distribution volumique de charges $\mathcal{V}$ en un point M de l'espace s'écrit :

  $$\vec{E}_{\mathcal{V}}\left(M\right) = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \frac{\rho\left(P\right)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{||\overrightarrow{PM}||^3}\,\mathrm{d}\tau.$$

  Il est défini en tout point M de l'espace.

- Le champ créé par une distribution surfacique de charges $\mathcal{S}$ en un point M de l'espace s'écrit :

  $$\vec{E}_{\mathcal{S}}\left(M\right) = \iint_{P\in\mathcal{S}} \frac{\sigma\left(P\right)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{||\overrightarrow{PM}||^3}\,\mathrm{d}S.$$

  Il n'est pas défini aux points M où la densité surfacique de charges est non nulle.

- Le champ créé par une distribution linéique de charges $\mathcal{L}$ en un point M de l'espace s'écrit :

$$\vec{E}_{\mathcal{L}}(M) = \int_{P\in\mathcal{L}} \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{||\overrightarrow{PM}||^3}\,\mathrm{d}l.$$

  Il n'est pas défini aux points M où la densité linéique de charge est non nulle.

Il faut soit connaitre ces trois formules, soit être capable de les retrouver en s'aidant du principe de superposition.

1.5 Champ et force électrostatiques

Dans le cas d'une charge ponctuelle et d'une distribution discrète de charges, on a défini le champ électrostatique via la force qu'il pouvait exercer sur une charge ponctuelle q. D'une façon générale, il s'agit de la définition du champ électrostatique.

Soit Σ une répartition de charges dans l'espace. Si on plaçait par la pensée une charge q en un point M de l'espace, cette charge subirait la force $\vec{f}_{\Sigma\to q}$ venant de Σ. On définit le champ électrostatique $\vec{E}_{\Sigma}(M)$ créé par Σ en M par :

$$\vec{E}_{\Sigma}(M) = \frac{1}{q}\vec{f}_{\Sigma\to q}. \tag{3}$$

Si il règne dans l'espace un champ électrostatique $\vec{E}$ dont on ne connait ou ne précise pas l'origine, alors une charge q placée en un point M de l'espace subit une force électrostatique $\vec{f}$ qui s'écrit :

$$\vec{f} = q\vec{E}(M), \tag{4}$$

où $\vec{E}(M)$ est la valeur du champ $\vec{E}$ au point M.

Les relations (3) et (4) sont à connaitre.