Exo 1:

1. $7y'+2y=2x^3-5x^2+4x-1$

Solution homogène :

$7y_h'+2y_h=0$

$y_h'=\frac{-2}{7}y_h$

$\frac{dy_h}{dx}=\frac{-2}{7}y_h$

$\frac{dy_h}{y_h}=\frac{-2}{7}dx$

$\ln(|y_h|)=-\frac{2}{7}x+C$

$|y_h|=e^{-\frac{2}{7}x}e^C$

$y_h=\lambda e^{-\frac{2}{7}x}$

Solution particulière :

Par identification, $y_p=ax^3+bx^2+cx+d$

$7y_p'+2y=(21ax^2+14bx+7c)$
$+(2ax^3+2bx^2+2cx+2d)$
$=2ax^3+(21a+2b)x^2+(14b+2c)x+(7c+2d)$
$=2x^3-5x^2+4x-1$

$$\begin{cases}2a=2\\21a+2b=-5\\14b+2c=4\\7c+2d=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-13\\c=93\\d=-326\end{cases}$$

$y_p=x^3-13x^2+93x-326$

Solution générale :

$y=y_h+y_p=\lambda e^{-\frac{2}{7}x}+x^3-13x^2+93x-326$

2. $xy'+y=x\sin(x)$

Cas $x=0$:

$y=0$

Cas $x\neq0$:

$y'+\frac{y}{x}=\sin(x)$

Solution homogène :

$y_h'+\frac{y_h}{x}=0$

$y_h'=-\frac{y_h}{x}$

$\frac{dy_h}{dx}=-\frac{y_h}{x}$

$\frac{dy_h}{y_h}=-\frac{dx}{x}$

$\ln(|y_h|)=-\ln(|x|)+C$

$\ln(|y_h|)=\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)+C$

$|y_h|=\frac{e^C}{|x|}$

Cas $x<0$:

$|y_h|=\frac{e^C}{-x}$

$y_h=\frac{\lambda_1}{x}$

Cas $x>0$:

$|y_h|=\frac{e^C}{x}$

$y_h=\frac{\lambda_2}{x}$

Solution particulière :

Cas $x<0$:

$y_p=\frac{\lambda_1}{x}$

Par variation de la constante :

$y_p'+\frac{y_p}{x}=\sin(x)$

$\frac{\lambda_1'}{x}-\frac{\lambda_1}{x^2}+\frac{\lambda_1}{x^2}=\frac{\lambda_1'}{x}=\sin(x)$

$\lambda_1'=x\sin(x)$

$\lambda_1=\int x\sin(x)\,dx$
$=-x\cos(x)+\int\cos(x)\,dx$
$=-x\cos(x)+\sin(x)$

$y_p=\frac{\lambda_1}{x}=-\cos(x)+\frac{\sin(x)}{x}$

$y_p=-\cos(x)+\mathrm{sinc}(x)$

Cas $x>0$:

$y_p=\frac{\lambda_2}{x}$

De la même manière que pour $x<0$, on trouve

$y_p=-\cos(x)+\frac{\sin(x)}{x}$
$=-\cos(x)+\mathrm{sinc}(x)$

Solution générale :

$y = y_h + y_p$

$$y = \begin{cases} -\cos(x) + \mathrm{sinc}(x) + \frac{\lambda_1}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\cos(x) + \mathrm{sinc}(x) + \frac{\lambda_2}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

3. $y' = \cos(x)\sin(x)\,y$

$\frac{dy}{y} = \cos(x)\sin(x)\,dx$

$\ln(|y|) = \int \sin(x)\cos(x)\,dx$

$= \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,dx$

$= \sin^2(x) - \ln(|y|) + C$

$2\ln(|y|) = \sin^2(x)$

$\ln(|y|) = \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{C}{2}$

$|y| = e^{\frac{\sin^2(x)}{2}} e^{\frac{C}{2}}$

$y = \lambda e^{\frac{\sin^2(x)}{2}}$

Exo 2 :

$y'' - 2y' + y = \sin^2(x)$

Solution homogène :

$\Delta = 4 - 4 = 0$

$r = -\frac{b}{2a} = 1$

$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x$

Solution particulière :

$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ (formule trigo)

$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{-4}$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + \frac{1}{2}$

$\sin^2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

On utilise le principe de superposition :

$y_{p1}'' - 2y_{p1}' + y_{p1} = \frac{1}{2}$

Par identification, $y_{p1} = \alpha$

$y_{p1} = \frac{1}{2}$

$y_{p2}'' - 2y_{p2}' + y_{p2} = -\frac{\cos(2x)}{2}$

Par identification, $y_{p2} = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$

$y_{p2}' = 2\alpha\cos(2x) - 2\beta\sin(2x)$

$y_{p2}'' = -4\alpha\sin(2x) - 4\beta\cos(2x)$

$y_{p2}'' - 2y_{p2}' + y_{p2} = (-2\beta - 3\alpha)\sin(2x) + (2\alpha - 3\beta)\cos(2x)$

$$\begin{cases} 4\beta - 3\alpha = 0 & (1) \\ -4\alpha - 3\beta = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$3(1) + 4(2)$

$-25\alpha = -2$

$\alpha = \frac{2}{25}$ $\quad$ (1) $\beta = \frac{3}{4}\alpha = \frac{3}{50}$

$y_{p2} = \frac{2}{25}\sin(2x) + \frac{3}{50}\cos(2x)$

$y_p = \frac{1}{2} + \frac{2}{25}\sin(2x) + \frac{3}{50}\cos(2x)$

Solution générale :

$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2} + \frac{2}{25}\sin(2x) + \frac{3}{50}\cos(2x)$