VII. Evénements indépendants

Définition : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et A et B sont deux évènements dans $\mathcal{F}$.
On dit que les deux évènements sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Si deux évènements A et B ont indépendants, alors la réalisation de A ne porte aucune information sur la réalisation de B et n'a aucune influence sa probabilité de se réaliser et vice versa. D'où P(A|B)=P(A), P(B|A)=P(B).

Définition : Les évènements $A_1,\ldots,A_n$ sont dits mutuellement indépendants dans leur ensemble si, pour tout sous-ensemble $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Ex . Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois un nombre pair?

Solution : Soit A_i (i=1,2) l'évènement d'obtenir un nombre paire au $i^{\text{ème}}$ jet. Les deux évènements sont indépendants, alors

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

VIII. Les expériences combinées

Supposons deux expériences E1 et E2

- E1 : lancer un dé non-truqué
- E2 : lancer une pièce de monnaie

➢ **Espaces de possibilités associés :**

- $\Omega_1 = \{1,2,\cdots,6\}$
- $\Omega_2 = \{p, f\}$

➢ **Probabilité individuelle:**

- $P_1(k) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in \{1,\cdots,6\}$
- $P_2(k) = \frac{1}{2} \quad \forall k \in \{p, f\}$

➢ **E1 et E2 sont réalisées simultanément $\Rightarrow$ quelle est la probabilité d'obtenir $\mathbf{A} = (\mathbf{2}, \boldsymbol{f})$?**

VIII.Les expériences combinées

- **Nouvel espace de possibilités :**
  - $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(1,p),(2,p),\cdots,(6,p),(1,f),(2,f),\cdots,(6,f)\}$
  - $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}(\Omega_1) \times \text{Card}(\Omega_2) = 6 \times 2 = 12$
- **Deux expériences indépendantes**
  - $P(A = (2,p)) = P(2)P(p) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
  - Cas équiprobable $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{12}\ \forall A \in \Omega$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr | LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

VIII.Les expériences combinées

- **Généralité : cas de N expériences combinées**

  - **Espaces de possibilités associés :**

    - $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$

    - $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(\Omega_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(\Omega_N) = C_1 \times \cdots \times C_N$

VIII. Les expériences combinées

- **Généralité : cas de N expériences combinées**

  - **Espaces de possibilités associés :**

    - $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$

    - $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}(\Omega_1) \times \cdots \times \text{Card}(\Omega_N) = C_1 \times \cdots \times C_N$

  - **Deux expériences indépendantes**

    - Cas équiprobable $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{C_1 \times \cdots \times C_N} \; \forall A \in \Omega$

VIII.Les essais répétés

- **Epreuve de Bernoulli :** on appelle épreuve de Bernoulli une épreuve n'ayant que deux issues :succès (S) et échec (E).
  - La loi de Bernoulli de paramètre p associe à l'issue succès (S) la probabilité p et à l'issue échec (E) la probabilité $(1-p)$

- **Schéma de Bernoulli :** la répétition n fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli.
  - Suppose que la probabilité d'un événement A dans l'expérience $\mathcal{E}$ est égale à $P(A)$. On répète $\mathcal{E}$ N fois $\Rightarrow \Omega = \Omega_{\mathcal{E}} \times \cdots \times \Omega_{\mathcal{E}}$ et on cherche la probabilité, $P_N(k)$, que l'événement A apparaisse k fois.
  - Suppose $P(A) = p$ et $P(\overline{A}) = 1 - p = q$
  - On peut montrer que

$$P_N(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

Démonstration???

V. Variables aléatoires discrètes

Définition : On appelle variable aléatoire discrète une application X de Ω dans E telles que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et, pour tout, $x \in \mathrm{E}, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}(\Omega)$. On dit que X est une variable aléatoire discrète réelles si $E = \mathbb{R}$

Exemples:

- Jeter deux dés et s'intéresser à la somme des faces obtenues → $X = (i + j) \in \mathbb{R}$
- L'erreur de mesure d'une balance $X \in \mathbb{R}$

- Soit X une variable aléatoire discrète et notons $X(\Omega) = \{x_n; n \in I\}$ où I est fini ou dénombrable . **La loi de probabilité** de X est la suite $(p_n)_{n\in I}$ où pour tout $n \in I$, $p_n = P(X = x_n)$
- Soit $(\Omega_1, \mathcal{F}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}(\Omega_2), P_2)$ deux espaces de probabilités. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies respectivement sur Ω_1 et Ω_2. On dit que X et Y ont la même loi si $X(\Omega_1) = Y(\Omega_2)$ et si, pour tout $x \in \mathrm{X}(\Omega_1), P(X = x) = P_2(Y = x)$

V. Variables aléatoires discrètes

Définition : On appelle couple de variables aléatoires discrètes un couple (X, Y) où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes. La loi conjointe du couple (X, Y) est la loi de (X, Y) vue comme variable aléatoire.

$$\forall(x, y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) \Rightarrow P(X = x, Y = y)$$

Proposition : Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$, on a

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposition : Soit $(X_n)_{n\in\mathrm{I}}$ une famille de variables aléatoires, où I est fini ou dénombrable. On dit que les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathrm{I}}$ sont mutuellement indépendantes lorsque, pour toute partie finie $J = \{i_1, \cdots, i_p\} \subset I$ pour tout $\left(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\right) \in \mathrm{X}_{i_1}(\Omega)\times\cdots\times \mathrm{X}_{i_p}(\Omega)$ on a :

$$P\left(X_{i_1} = x_{i_1}, \cdots, X_{i_p} = x_{i_p}\right) = P(X_{i_1} = x_{i_1})\cdots P\left(X_{i_p} = x_{i_p}\right)$$

II. loi de probabilité discrète

Loi de Bernoulli:

Expérience à deux issues: 1 ou 0, $\mathrm{P}(X=1)=1-\mathrm{P}(X=0)=p\in[0,1]$

Ex: jeter une pièce

Loi binomiale:

La loi du nombre de succès obtenus à l'issue de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètres *p:* $\mathrm{P}(X=k)=C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}, p\in[0,1], k\in\{0,1\dots,n\}$

Ex: jeter une pièce *n* fois

Loi de Poisson:

Il décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé. Si le nombre moyen d'occurrences dans un intervalle de temps fixé est λ, alors la probabilité qu'il existe exactement *k* occurrences est $\mathrm{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k\in\mathbb{N}, \lambda>0$

II. loi de probabilité discrète

Loi géométrique : La loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ est la loi de la variable aléatoire Y qui compte le nombre de répétions indépendantes d'un épreuve de Bernoulli (de paramètre p) jusqu'au premier succès.

$$X \sim \mathcal{G}(p): P(X = k) = p(1-p)^{k-1}; k = 1, \cdots, n$$

II. loi de probabilité discrète

Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Proposition : Soit X_n une variable aléatoire discrète suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p_n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$, $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$, $(p_n \sim \frac{\lambda}{n})$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Démonstration??

II. loi de probabilité discrète

❑ Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Proposition : Soit X_n une variable aléatoire discrète suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p_n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$, $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$, $(p_n \sim \frac{\lambda}{n})$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

En pratique: on peut faire cette approximation lorsque $p < 0.1, n \geq 30$ et $np < 15$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr | LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu