Mécanique des Fluides

Eléments d'introduction

Yann GUEGUEN

yann.gueguen@univ-rennes1.fr

Université de Rennes

18 janvier 2023

Quelques outils mathématiques nous seront utiles pour la mécanique des fluides :

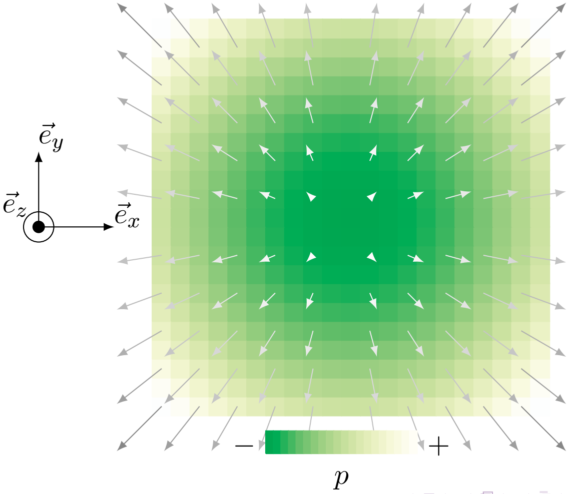
- Le gradient d'une fonction scalaire ;
- Le gradient d'un champ vectoriel ;
- Le rotationnel d'un champ vectoriel ;
- La divergence d'un champ vectoriel.

Considérons un champ scalaire quelconque, c'est à dire une fonction scalaire exprimée dans un référentiel orthonormé direct, comme la pression ($p(x,y,z)$) ou la température ($T(x,y,z)$). Son gradient est défini comme :

$$\vec{grad}\,(p(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}$$

C'est un champ vectoriel représentant la variation de la fonction suivant les 3 directions de l'espace.

Exemple, en 2D du gradient d'une fonction : le champ vectoriel "pointe" vers les hautes valeurs.



Considérons un champ de vecteur (la vitesse d'un fluide par exemple) $\vec{v}(x, y, z)$. Le rotationnel d'un champ vectoriel se note :

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}(x, y, z)$$

où :

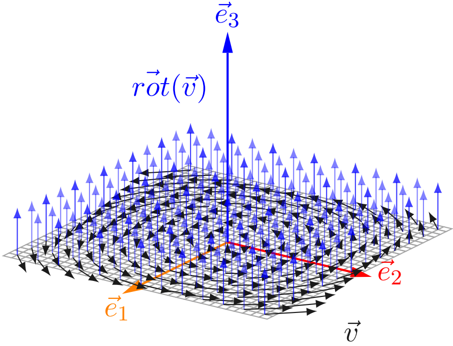
$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \times \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \times \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z}$$

$\vec{\nabla}$ est équivalent à $\vec{grad}$, mais on préfère écrire $\vec{\nabla}$ quand on ne met rien "derrière".

Il quantifie la rotation local d'un champ vectoriel, sous forme de vecteurs, donc la direction est l'axe de rotation, et la norme est l'intensité.

Expression du rotationnel et exemple :

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$



Bon à savoir...

- Si :

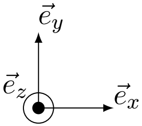
$$\vec{v}(x, y, z) = v_x(x)\ \vec{e}_x + v_y(y)\ \vec{e}_y + v_z(z)\ \vec{e}_z$$

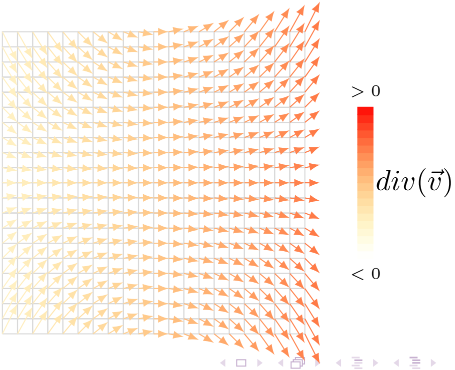
Alors : $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Outils mathématiques
Divergence

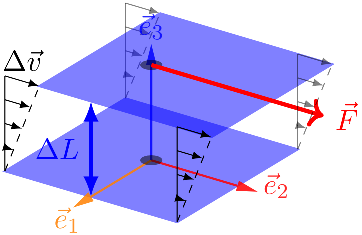
La divergence d'un champ vectoriel quantifie si le flux de ce champ converge ($div < 0$) vers un point ou diverge ($div > 0$) depuis ce point :

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$





Viscosité ?



Plaque inférieure fixe, plaque supérieure à force constante. Un fluide est prisonnier entre les plaques. $\Delta \vec{v}$ la différence de vitesse entre le bas et le haut du fluide.

S : surface des plaques bleues encadrant un fluide.

$$\sigma = \frac{||\vec{F}||}{S}, \ \dot{\gamma} = \frac{||\Delta \vec{v}||}{\Delta L}$$

Viscosité

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \text{ Pa.s}$$

Opposition à la création d'un gradient de vitesse.

Mécanique des Fluides
Y.Gueguen

Outils mathématiques
Gradient
Rotationnel
Divergence

Vocabulaire
Viscosité
Fluide
Fluide parfait
Compressibilité
Ecoulement

Point de vue

Débit

Fluide ?

On appelle *fluide* un système déformable sans forme propre.

$\tau >$ qq jours

$\tau \sim$ temps pour changer de forme,
t_O durée d'observation.
Nombre de Deborah :

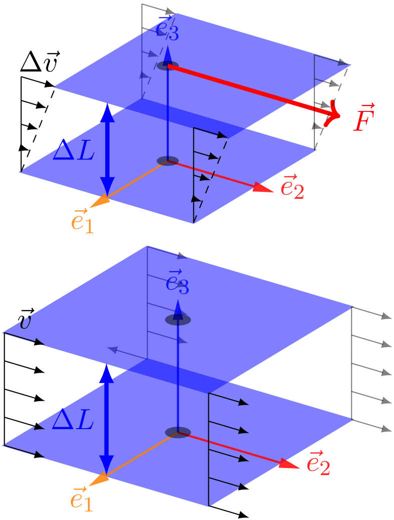
$$N_D = \frac{\tau}{t_O}$$

Fluide

$$N_D << 1 \rightarrow t_O >> \tau$$

Tous les fluides ne sont pas des liquides.

Fluide parfait ?



$$\sigma = \frac{||\vec{F}||}{S}, \; \dot{\gamma} = \frac{||\Delta\vec{v}||}{\Delta L}$$

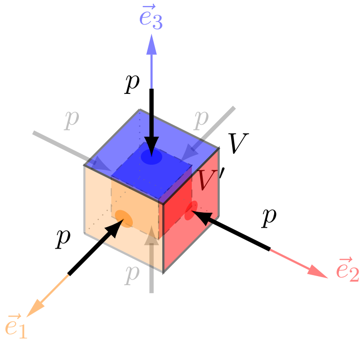
$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \text{ Pa.s}$$

Fluide parfait

$$\eta = 0 \rightarrow \sigma = 0$$

Aucune force/contrainte **tangentielle** ne peut lui être appliquée.

Liquide et gaz ?

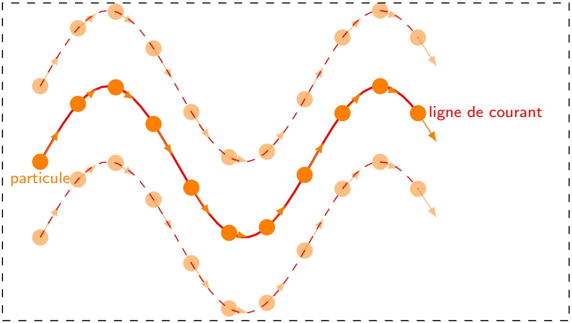


Compressibilité=Variation de volume à T° constante :

$$X_T = -\frac{1}{p} \times \frac{V' - V}{V}$$

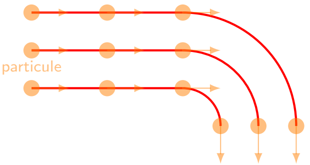
Liquide : $X_T \sim 0$
(eau : $X_T < 10^{-9}$ Pa^{-1}, V varie de 0.004% par bar)

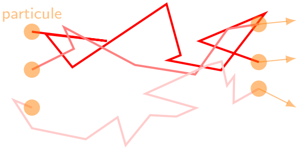
Gaz : X_T non négligeable
(air : $X_T \sim 10^{-5}$ Pa^{-1}, V varie de 1% par 0.01 bar)



Ligne de courant : trajectoire suivie par une particule, ligne tangente au vecteur vitesse.
Tube de courant : ensemble de lignes de courant.

Type d'écoulements





Laminaire

Les lignes de courant sont parallèles.

Turbulent

Les lignes de courant sont aléatoires, chaotiques. Formation de tourbillons.

MMC ?

La mécanique des fluides fait partie de la Mécanique des Milieux Continus (MMC).

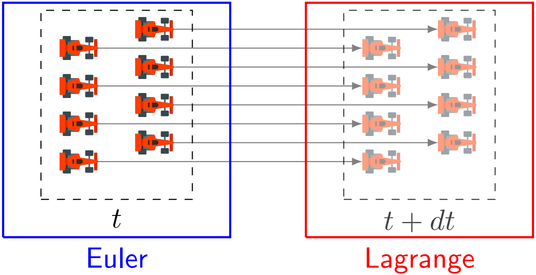
- **Particule fluide** : Volume minimal de fluide représentatif des propriétés du fluide. $\neq$ une molécule (plutôt une dizaine de milliards de molécules...)

Point de vue ?

En MMC, on peut traiter un problème avec 2 points de vue. Celui d'Euler et celui de Lagrange (= le point de vue "habituel").

Point de vue ?

Faisons l'analogie entre des particules de fluides et des voitures :



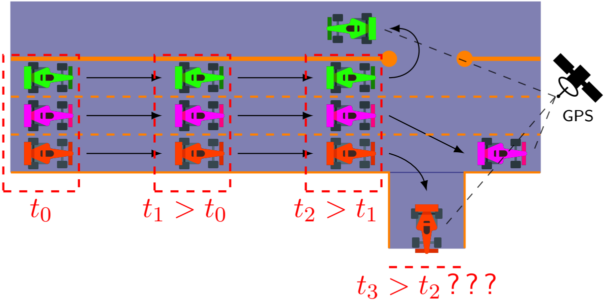
Euler

Euler surveille une portion de la route avec un radar fixe.

Lagrange

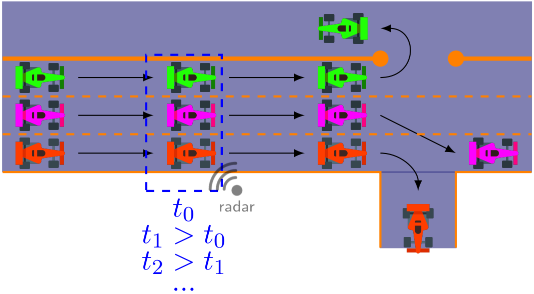
Lagrange suit les voitures via leurs GPS.

Lagrange



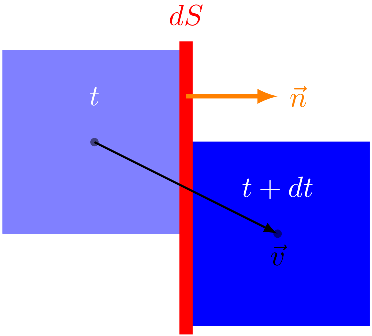
- Avantage : $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$
- Inconvénient majeur : Les contours du système ne sont rapidement plus identifiables !

Euler



- Avantage : Les contours du système sont fixes.
- Inconvénient : $\vec{a} \neq \frac{\vec{v}(t_1)-\vec{v}(t_0)}{t_1-t_0}$ Les vitesses $\vec{v}(t_0)$ et $\vec{v}(t_1)$ ne sont pas celles d'une même particule !

Le débit est le flux de fluide à travers une surface.



Le flux est donnée par $\vec{v}.\vec{n}\ dS$. C'est le volume traversant la surface dS par unité de temps.

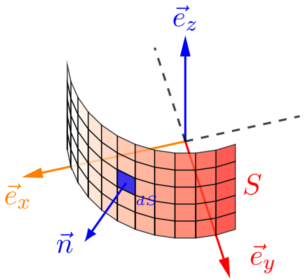
Débit

Débit volumique à travers dS :
c'est le flux, $q_V = \vec{v}.\vec{n}\ dS$
Débit volumique à travers S :

$$q_V = \int_S \vec{v}(x,y,z).\vec{n}(x,y,z)\ dS$$

Cas simple : si la vitesse est la même partout sur la surface, et la surface plane :

$$q_V = \vec{v}.\vec{n}\ S$$



Le sens de $\vec{n}$ est un choix, qui définit le signe du débit (débit entrant ou sortant).