5 Théorème de Gauss

Comme vous avez pu le constater au chapitre précédent, la détermination en tout point de l'espace des champ et potentiel électriques créés par une distribution de charges à partir des lois élémentaires n'est pas chose aisée, même dans les situations les plus symétriques. Heureusement, il existe des méthodes plus efficaces pour résoudre ce problème, parfois même avec très peu de calcul. L'une de ces méthodes repose sur un théorème introduit autour de 1830 par Carl Friedrich Gauss.

5.1 Flux du champ électrostatique

Soit P un point appartenant à une surface S et $\mathrm{d}\vec{S}\,(P)$ le vecteur surface élémentaire en P. On appelle flux élémentaire du champ électrostatique au point P, noté $\mathrm{d}\Phi\,(P)$, la quantité :

$$\mathrm{d}\Phi\,(P) = \vec{E}\,(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,(P)\,.$$

Le flux du champ électrostatique à travers une surface S, noté Φ, est la somme des flux élémentaires $\mathrm{d}\Phi\,(P)$ lorsque P parcourt la surface S :

$$\Phi = \iint_{P\in S} \mathrm{d}\Phi\,(P) = \iint_{P\in S} \vec{E}\,(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,(P)\,.$$

Dans le cadre de l'application du théorème de Gauss, on s'intéressera à des surfaces fermées, c'est-à-dire à des surfaces qui délimitent un volume. On prend dans ce cas la convention dite *de la normale sortante* : on oriente $\mathrm{d}\vec{S}$ *de l'intérieur vers l'extérieur* du volume (voir figure 13). On notera par ailleurs la double intégrale avec un rond, pour rappeler que la surface est fermée. Dans ce cas, on a :

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_{P\in S} \mathrm{d}\Phi\,(P) = \oint\!\!\!\oint_{P\in S} \vec{E}\,(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,(P)\,.$$

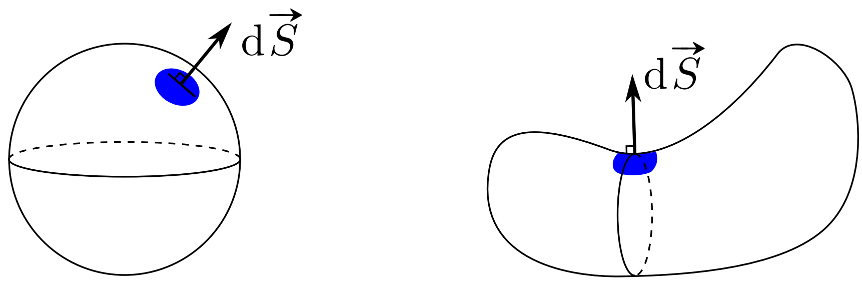


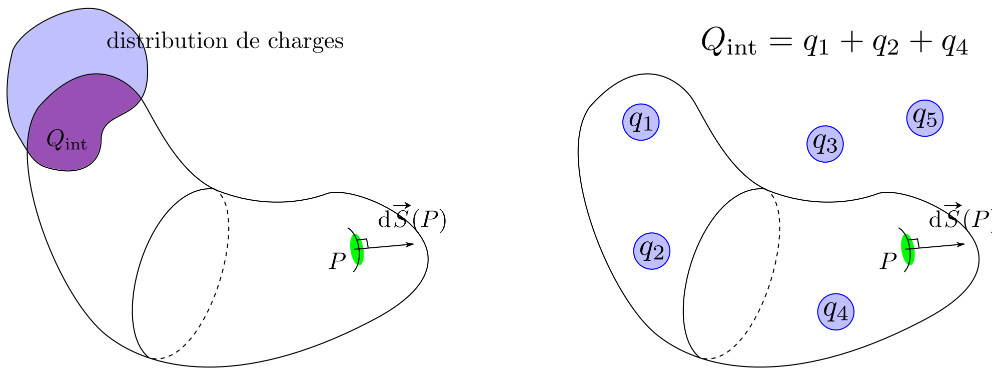
Figure 13 – Surfaces fermées, délimitant chacune un volume, illustration de la convention de la normale sortante.

5.2 Énoncé du théorème

Soit S une surface fermée. Le théorème de Gauss affirme que le flux du champ électrostatique créé à travers S par une distribution de charges est égal à la charge contenue à l'intérieur de S, divisée par ε_0 :

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_{P\in S} \vec{E}\,(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,(P) = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0},$$

où Q_{int} est la charge électrique contenue dans le volume délimité par S. On donne deux exemples, sur la figure 14, de détermination de la charge Q_{int}.



(a) Charge répartie en volume, non intégralement contenue dans la surface choisie.

(b) Charges ponctuelles dont certaines sont comprises dans la surface choisie.

Figure 14 – Exemples de surfaces fermées contenant des charges.

5.3 Méthode générale d'application

Le théorème de Gauss va nous permettre de calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace pour des distributions de charges présentant beaucoup de symétries : boule, fil infini, plan, etc. On parle de systèmes de haute symétrie.

La méthode à suivre pour appliquer le théorème de Gauss est la suivante :

1. Étudier les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de charge qui passent par le point M de l'espace où on cherche à calculer le champ. Cela nous permettra de déterminer la direction du champ.
2. Étudier les invariances de la distribution de charges. Cela nous permettra de déterminer les variables d'espace dont dépend le champ.
3. Utiliser le théorème de Gauss :
   - Choisir une *surface de Gauss* : il s'agit d'une surface mathématique (c'est-à-dire qu'elle n'a pas besoin d'avoir de réalité physique) fermée, passant par le point M de l'espace où on cherche à calculer le champ. Généralement, il faut choisir une surface qui respecte les symétries de la distribution de charges, et on se trouve souvent dans un des deux cas de figure suivant : soit $\mathrm{d}\vec{S}\,(P)$ et $\vec{E}\,(P)$ sont colinéaires, soit ils sont orthogonaux. Dans les deux cas, $\vec{E}\,(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,(P)$ s'évalue facilement.
   - Calculer $\Phi = \oiint_{P \in S} \vec{E}\,(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,(P)$, ce qui sera facilité par le choix de la surface de Gauss.
   - Calculer $\Phi = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.
   - Écrire que $\Phi = \Phi$, c'est-à-dire que $\oiint_{P \in S} \vec{E}\,(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,(P) = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

Le théorème de Gauss est un résultat important d'électrostatique, qu'il faut connaitre et savoir appliquer via la méthode d'application décrite.

5.4 Exemple : cas d'une boule uniformément chargée

On considère une boule de rayon R uniformément chargée en volume, de densité volumique de charge ρ. On cherche à déterminer l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution de charges.

Pour utiliser le théorème de Gauss, on commence par faire l'étude des symétries et invariances de la distribution de charges. Pour cela, on pose nos notations avec un schéma.

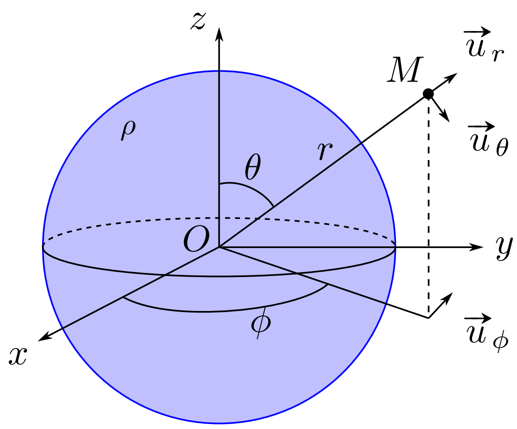


Figure 15 – Schéma introduisant les notations.

- Tout plan passant par le point M et le point O au centre de la boule est plan de symétrie de la distribution, donc $\vec{E}(M)$ appartient à chacun de ces plans, donc $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de tous ces plans. Cela donne $\vec{E}(M) = E(M)\,\vec{u}_r$.
- La distribution est invariante par toute rotation d'angle θ ou ϕ, donc $\vec{E}(M)$ qui vaut a priori $\vec{E}(r,\theta,\phi)$ se réduit à $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

Ainsi, par étude des symétries et des invariances de la distribution, on sait au final que

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r.$$

Le théorème de Gauss nous dit que pour S_G une surface fermée, on a

$$\Phi = \oiint_{P\in S_G} \vec{E}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0},$$

où Q_{int} est la charge contenue dans la surface fermée S_G. On choisit comme surface de Gauss S_G une sphère de rayon r, comme sur le schéma.

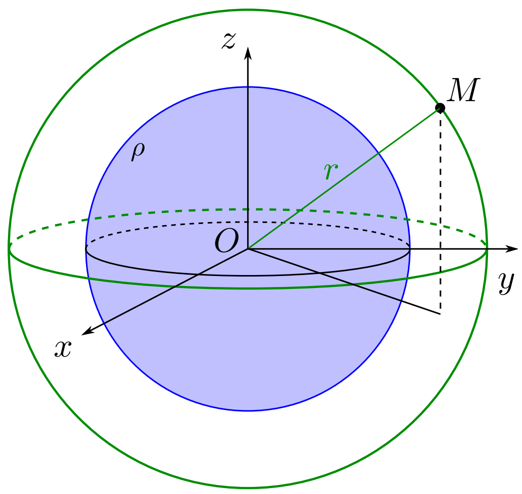


Figure 16 – Surface de Gauss.

On a alors :

- D'une part

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{P\in S_G} \vec{E}\,(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}\\ &= \oiint_{P\in S_G} E(r)\,\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_r.\end{aligned}$$

En effet, tout point P situé sur la surface choisie est soumis au champ $\vec{E}(P) = E(r)\,\vec{u}_r$, et on a pris la convention de la normale sortante. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{P\in S_G} \vec{E}\,(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}\\ &= \oiint_{P\in S_G} E(r)\,\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_r\\ &= \oiint_{P\in S_G} E(r)\,\mathrm{d}S\\ &= \oiint_{P\in S_G} E(r) r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \big(E(r)r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\big)\\ &= r^2 E(r)\left(\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right),\ \text{donc}\\ \Phi &= 4\pi r^2 E(r).\end{aligned}$$

- D'autre part

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{1}{\varepsilon_0} \quad \text{si } r > R, \text{ et}$$

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{1}{\varepsilon_0} \quad \text{si } r < R.$$

Ainsi, si $r > R$, on obtient

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{1}{\varepsilon_0},\ \text{c'est-à-dire}$$

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2},$$

et si $r < R$, on obtient

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{1}{\varepsilon_0},\ \text{c'est-à-dire}$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$