Cours 3 : Relations dans un ensemble

1 Relations dans un ensemble

Définition - Rappel - Soit E un ensemble non vide. On appelle relation dans E la donnée d'un sous-ensemble Γ du produit cartésien $E \times E$.

Définitions - Soit (E, Γ) une relation dans un ensemble non vide E. On dit que :

1. la relation est réflexive, si $\forall x \in E, x\Re x$.
2. la relation est symétrique, si $\forall x \in E, \forall y \in E,\ x\Re y \Rightarrow y\Re x$.
3. la relation est antisymétrique, si $\forall x \in E, \forall y \in E,\ (x\Re y \text{ et } y\Re x) \Rightarrow x = y$.
4. la relation est transitive, si $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E,\ (x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow x\Re z$.

Remarques :

1. La propriété 3 n'est pas la négation de la propriété 2. Une relation peut n'être ni symétrique, ni antisymétrique.
2. La relation d'égalité est la seule relation qui soit à la fois réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. Son graphe Γ est la diagonale de $E \times E$: $\Gamma = \{(x, x), x \in E\}$.
3. Une relation est réflexive si et seulement si la diagonale est un sous-ensemble de son graphe.

2 Relation d'ordre

Définitions - Soit $(E, \Re)$ un ensemble non vide muni d'une relation.

1. On dit que $\Re$ est une relation d'ordre, si elle est à la fois **réflexive, antisymétrique et transitive**. On dit alors que E est un ensemble ordonné et on note $\preceq$ la relation $\Re$. Lorsque x et y deux éléments de E sont en relation par une relation d'ordre on dit qu'ils sont comparables.
2. Une relation d'ordre dans un ensemble E est dite d'ordre total si :

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

   Sinon, on dit que la relation est d'ordre partiel.

Définitions - Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

1. Un élément a de E est un majorant (resp. minorant) de A, si :

$$\forall x \in A,\ x \preceq a \text{ (resp. } \ a \preceq x).$$

   On dit alors que A est majorée (resp. minorée). Si A est une partie majorée et minorée, on dit qu'elle est bornée.
2. Un élément a de A est un plus grand élément (resp.un plus petit élément) de A, si a est un majorant (resp. minorant) de A.

Proposition - Si A admet un plus grand élément (resp. plus petit élément), alors celui-ci est unique. On dit alors que c'est **le** plus grand élément (resp. plus petit élément) de A.

Théorème - Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. (On dit que $\mathbb{N}$ est *bien ordonné*).

Définitions - Soient $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

1. Lorsque l'ensemble des majorants de A n'est pas vide et admet un plus petit élément, alors celui-ci est appelé borne supérieure de A. On le note $Sup(A)$.
2. Lorsque l'ensemble des minorants de A n'est pas vide et admet un plus grand élément, alors celui-ci est appelé borne inférieure de A. On le note $Inf(A)$.

Théorème - Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. (Propriété de la borne supérieure.)

3 Relation d'équivalence

Définitions - Soit $(E, \Re)$ un ensemble non vide muni d'une relation. On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence, si elle est à la fois **réflexive, symétrique et transitive**. Soit x un élément de E. On appelle alors classe d'équivalence de x pour $\Re$ l'ensemble $C(x) = \{y \in E, y\Re x\}$. Tout élément y de E appartenant à la classe d'équivalence de x est appelé représentant de la classe de x.

Proposition - Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'équivalence $\Re$ et soient x et y deux éléments de E, alors $(x\Re y \iff C(x) = C(y) \iff C(x) \cap C(y) \neq \emptyset)$.

Théorème - Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'équivalence. Alors l'ensemble des classes d'équivalence forment une partition de E. En particulier :

$$E = \bigcup_{x \in E} C(x)$$

Définitions - Soit $(E, \Re)$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence de E pour $\Re$ est appelé quotient de E par $\Re$ et noté $E/\Re$. L'application $\pi : E \to E/\Re$ qui à x associe sa classe $C(x)$ est appelée application canonique de E dans $E/\Re$.

Définition - Soit $(E, \Re)$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence. On appelle système de représentants de $E/\Re$ tout sous-ensemble F de E vérifiant :

$$\forall \alpha \in E/\Re, \ \exists! y \in F, \ \pi(y) = \alpha.$$

Remarque :
On vérifie facilement, qu'un sous-ensemble F de E est un système de représentants de $E/\Re$, si la restriction de l'application canonique π à F est bijective.

4 Exemple : $(\mathbb{Q}, +, \times)$

Proposition - Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. La relation définie dans E par :

$$\forall (n, m) \in E, \ \forall (n', m') \in E, \ (n, m) \ \Re \ (n', m') \iff n \times m' = m \times n'$$

est une relation d'équivalence dans E.

Définition - On définit l'ensemble $\mathbb{Q}$ comme le quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par la relation $\Re$:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\Re}$$

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés nombres rationnels (ou fractions rationnelles) et on note $\frac{n}{m}$ la classe de (n, m), $\forall (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Proposition - L'ensemble $I = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^* / pgcd(n,m) = 1\} \cup \{(0,1)\}$ est un système de représentants de $\mathbb{Q}$. Si $(n,m) \in I$, on dit que $\frac{n}{m}$ est mis sous forme irréductible.

Définition - Soient x et y appartenant à $\mathbb{Q}$. Soient $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(n',m') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{n}{m}$ et $y = \frac{n'}{m'}$.

1. On définit l'addition dans $\mathbb{Q}$ par

$$x + y = \frac{n \times m' + m \times n'}{m \times m'}$$

2. On définit la multiplication dans $\mathbb{Q}$ par

$$x \times y = \frac{n \times n'}{m \times m'}$$

Proposition - L'application $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par $i(n) = \frac{n}{1}$, est injective et compatible avec l'addition et avec la multiplication. On notera simplement n au lieu de $\frac{n}{1}$.