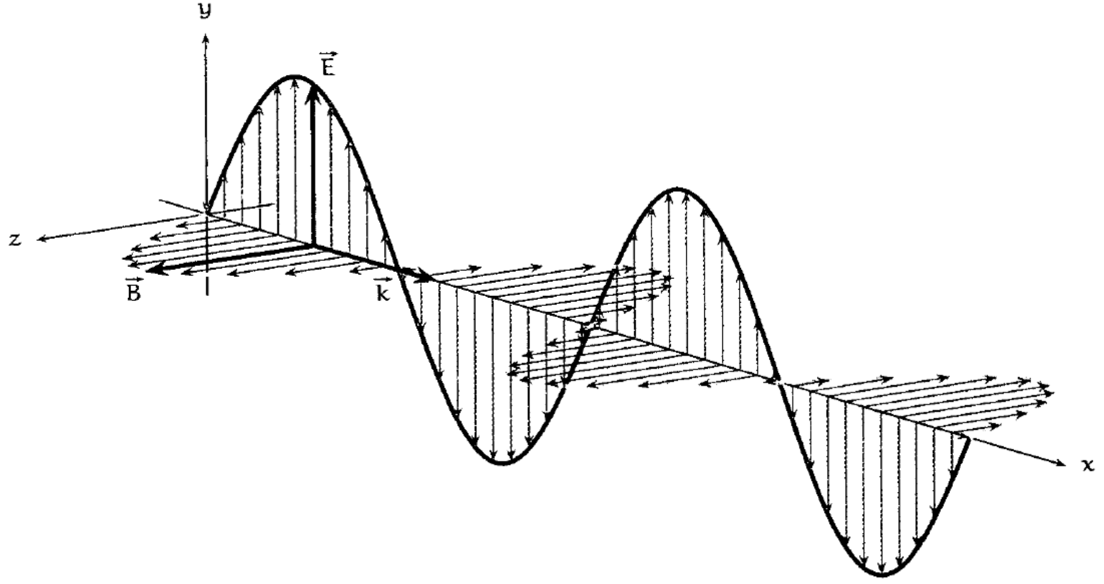
Optique

Chapitre 2 : Ondes électromagnétiques en notation complexe

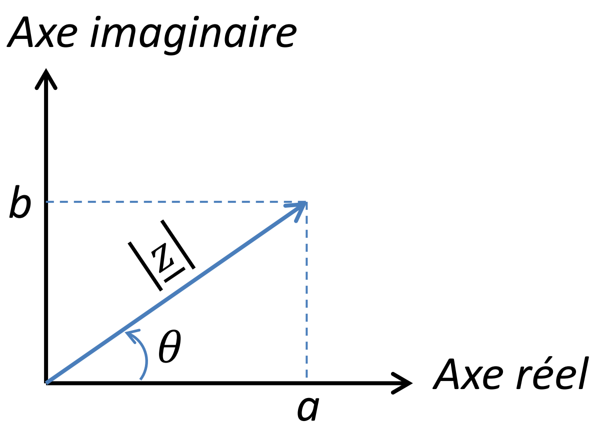


CUPGE 2 – 2025 – V1
Prof. Robert Georges – Université de Rennes

Chapitre 2

1. Rappels mathématiques sur les nombres complexes
2. Notation complexe d’un champ électrique
3. Opérateurs et équation de d’Alembert

1. Rappels mathématiques sur les nombres complexes



- $\underline{z} = a + ib$
- $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\arg(\underline{z}) = \theta = \arctan(b/a)$
- $\underline{z} = |\underline{z}|e^{i\theta} = |\underline{z}|(\cos\theta + i\sin\theta)$
- Par identification : $\cos\theta = \frac{a}{|\underline{z}|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|\underline{z}|}$
- $\underline{z}^* = a - ib$ est le conjugué de $\underline{z}$

- <u>Application</u> : que vaut le module d'une expression du type $\underline{z} = \frac{c}{(\alpha+i\beta)}$ (où c, α, β sont réels) ?

Il faut se rappeler que $|\underline{z}|^2 = \underline{z} \times \underline{z}^*$

D'où $|\underline{z}| = \sqrt{\frac{c}{(\alpha+i\beta)} \times \frac{c}{(\alpha-i\beta)}} = \frac{c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

1. Rappels mathématiques sur les nombres complexes

- Produit

$$\underline{z}_1\underline{z}_2 = |\underline{z}_1|e^{i\theta_1}|\underline{z}_2|e^{i\theta_2} = |\underline{z}_1\underline{z}_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{ avec } |\underline{z}_1\underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2|$$

- Rapport

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{|\underline{z}_1|e^{i\theta_1}}{|\underline{z}_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \text{ avec } \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} = \left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right|$$

- <u>Application</u> : Carré du module d'une somme de nombres complexes

$$|\underline{z}_1 + \underline{z}_2|^2 = (\underline{z}_1 + \underline{z}_2)(\underline{z}_1 + \underline{z}_2)^* = (\underline{z}_1 + \underline{z}_2)(\underline{z}_1^* + \underline{z}_2^*)$$

$$|\underline{z}_1 + \underline{z}_2|^2 = |\underline{z}_1|^2 + |\underline{z}_2|^2 + \underline{z}_1\underline{z}_2^* + \underline{z}_1^*\underline{z}_2 = |\underline{z}_1|^2 + |\underline{z}_2|^2 + 2Re(\underline{z}_1\underline{z}_2^*)$$

où $Re(\underline{z}_1\underline{z}_2^*) = Re(\underline{z}_1^*\underline{z}_2) = a_1a_2 + b_1b_2$

2. Notation complexe d’un champ électrique

2.1 Convention

La notation complexe est bien adaptée à l’étude des vibrations sinusoïdales. Elle permet de simplifier les opérations trigonométriques.

- Onde plane progressive harmonique : $\vec{E}(\vec{r},t) \; = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0\right)$

- Ecriture complexe :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0\right)} = \left(E_0 e^{i\phi_0}\vec{e}_0\right) e^{-i\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r}\right)}$$

soit

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-i\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r}\right)}$$

avec $\underline{\vec{E}}_0 = E_0 e^{i\phi_0}\vec{e}_0$

$\underline{\vec{E}}_0$ est l’amplitude complexe de l’onde. Elle est indépendante de l’espace et du temps. Elle contient à la fois l’information sur l’amplitude E_0, la polarisation $\vec{e}_0$ et la phase à l’origine ϕ_0.

(NB : on aurait également pu choisir la convention $\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{+i\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r}\right)}$)

2. Notation complexe d'un champ électrique

2.2 Retour au champ réel

$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-i(\omega t \pm \vec{k}\vec{r})} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0)}$

- En utilisant la formule d'Euler

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\left(\cos\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0\right) - i\sin\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0\right)\right)$$
$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left(\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)\right) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0\right)$$

- En utilisant $Re\left(\underline{z} = a + ib\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{z} + \underline{z}^*\right) = \frac{1}{2}(a + ib + a - ib) = a$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left(\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_0 e^{-i(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0)} + \vec{E}_0 e^{+i(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0)}\right)$$

3. Opérateurs et équation de d'Alembert

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-i\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r}\right)} = \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t \pm \vec{k}\vec{r} - \phi_0\right)}$$

3.1 Dérivation par rapport au temps

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}(\vec{r},t)}{\partial t} = -i\omega\, \underline{\vec{E}}(\vec{r},t)$$

Cela revient donc à remplacer l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ par $(-i\omega\ \times)$

- Application à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta\underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

L'équation de d'Alembert prend la forme d'une équation de Helmholtz

3. Opérateurs et équation de d’Alembert

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}_0} e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = \vec{E}_0 \underline{f}(\vec{r},t)$$

3.1 Dérivation spatiale

En coordonnées cartésiennes :

$$\underline{f}(\vec{r},t) = \underline{f}(x,y,z,t) = e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = e^{-i\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right)}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\underline{f}(\vec{r},t) = \overrightarrow{grad}\underline{f}(\vec{r},t) &= \frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \underline{f}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \underline{f}}{\partial z}\vec{e}_z \\ &= +i\left(k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z\right) e^{-i\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right)} \\ &= i\,\vec{k}\,\underline{f}(\vec{r},t)\end{aligned}$$

Cela revient donc à remplacer l’opérateur $(\vec{\nabla})$ ou $(\overrightarrow{grad})$ par $(i\vec{k}\,\times)$
Et par suite, à remplacer l’opérateur laplacien (∇^2) ou (Δ) par $(-k^2\,\times)$

NB : Cette équivalence n’est valable que pour une OPPH

3. Opérateurs et équation de d’Alembert

- Application à l’équation de d’Alembert :

$$\underline{E}_x(z,t) = \underline{E}_{0x} e^{-i(\omega t - kz)}$$

Dans cet exemple, E_x est la composante du champ $\vec{E}$ suivant l’axe x. L’onde progressive se propage suivant l’axe z.

$$\Delta \underline{E}_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow -k^2 \underline{E}_x + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}_x = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\underline{E}_x = 0$$

Ce qui permet de retrouver rapidement la relation de dispersion dans le vide déjà vue :

$$k = \frac{\omega}{c} \text{ (ou encore } \lambda = cT\text{)}$$

On remarque au passage que k (et donc λ) est une fonction de ω (et donc de T). Cette relation n’est valable que dans le vide.