Exercices 2 : Applications

Exercice n°1

On considère la relation qui à chaque habitant de Rennes associe son nombre de frères et soeurs. Définit-on ainsi une application de l'ensemble des habitants de Rennes dans $\mathbb{N}$? Si oui est-elle injective ? surjective ?

Exercice n°2

Dans chacun des cas, donner un exemple d'ensembles A et B non vides et d'application $f\colon A \to B$ vérifiant simultanément les propriétés énoncées.

1. A et B ont chacun deux éléments et f n'est pas surjective.
2. A et B ont chacun deux éléments et f n'est pas injective.
3. A a trois éléments, B a quatre éléments et f est injective.
4. A a trois éléments, B a deux éléments et f est surjective.

Exercice n°3

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$\textbf{1)} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad\qquad \textbf{2)} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$

Exercice n°4

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de l'application f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Exercice n°5

Dessiner les graphes des applicationss suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice n°6

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = |x|, \text{ si } x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[\text{ et } f(x) = 1, \text{ sinon}$$

et l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = x + 2, \text{ si } x \in]-\infty, -1[\text{ et } g(x) = x^2, \text{ si } x \in [-1, +\infty[.$$

1) Tracer le graphe de f et celui de g dans deux dessins différents.

2) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

3) Par lecture du graphe, déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f([-2, 2])$.

4) L'application g est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

5) Par lecture du graphe, déterminer $g(]-\infty, 0])$ et $g^{-1}([-2, 1])$.

Exercice n°7

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, et A, B deux parties de E.

1) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2) Donner un exemple où $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

3) Montrer que, si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice n°8

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice n°9

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ et $g(x, y) = xy - x^2$.

1) Montrer que f est bijective.

2) Exhiber une application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $g \circ h = Id_{\mathbb{R}}$. L'application g est-elle surjective ?

3) L'application g est-elle injective ? Existe-t-il une application $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $i \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$?

Exercice n°10

1) Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $f \circ g$ ne soit pas surjective.

2) Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.

3) Dessiner si possible le graphe d'une application surjective f et d'une application g surjective dont la composée $g \circ f$ ne soit pas surjective.

4) Reprendre les questions précédentes avec « injective »au lieu de « surjective ».