Thème 4 – Potentiel électrostatique

I- Champ dipolaire

En coordonnées sphériques, le potentiel s'écrit : $V(M)=\dfrac{(p\vec{u}_z).(r\vec{u}_r)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

On en déduit le champ créé par la molécule : $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}(V)=-\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$, soit encore

$$\vec{E}(M)=\left|\begin{array}{l} E_r=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p\cos\theta}{r^3}. \\ E_\theta=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p\sin\theta}{r^3} \\ E_\varphi=0 \end{array}\right.$$

II- Circulation d'un champ électrostatique

Le champ créé par la charge ponctuelle q s'écrit : $\vec{E}(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$. Ce champ dérive du potentiel scalaire électrostatique : $V(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

1- Le long du trajet (1) $A\to B$, sa circulation s'écrit : $C_{(1)}=\displaystyle\int_A^B\vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell}=\int_{r_A}^{r_B}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r.\mathrm{d}r\vec{u}_r=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A}-\dfrac{1}{r_B}\right)$.

Le long du trajet (2) $B\to C$, elle s'écrit : $C_{(2)}=\displaystyle\int_B^C\vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell}=\int_{\theta_B}^{\theta_C}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B^2}\vec{u}_r.r_B\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta=0$.

2- Ce champ est à circulation conservative, ce qui signifie que sa circulation entre deux points est indépendante du chemin suivi. Le long du trajet (3) $A\to C$, sa circulation est donc : $C_{(3)}=C_{(1)}+C_{(2)}$.

3- La circulation élémentaire du champ $\vec{E}$ est : $\mathrm{d}C=\vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell}=-\mathrm{d}V$. On en déduit que $C_{(3)}=\displaystyle\int_A^C\vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell}=V(A)-V(C)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A}-\dfrac{1}{r_B}\right)$ puisque $r_B=r_C$.

III- Champ et potentiel électrostatiques

$\vec{E}(O)=\vec{0}$ par raison de symétrie et $V(O)=\dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ au centre du cercle.

IV- Cercle uniformément chargé

L'élément de longueur $\mathrm{d}\ell_P=R\mathrm{d}\theta$ entourant le point P du cercle, de charge $\mathrm{d}q_P=\lambda\mathrm{d}\ell_P$, crée en M le potentiel scalaire électrostatique élémentaire : $\mathrm{d}V(M)=\dfrac{\mathrm{d}q_P}{4\pi\varepsilon_0 r}$ où $r=\sqrt{R^2+z^2}$.

Le potentiel créé par l'ensemble du cercle uniformément chargé est donc :

$$V(M)=\frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{+2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}.$$