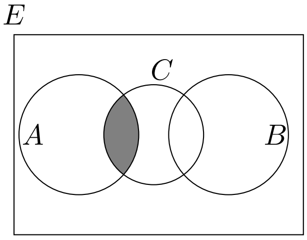
# Solutions 1 : Ensembles

**Solution de l'exercice 1**

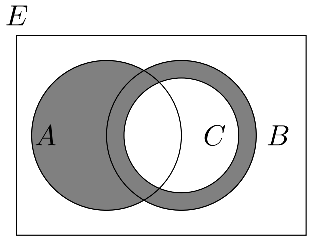
Il peut y avoir plusieurs façons de déterminer la zonne grisée. Nous en donnons quelques-unes.

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. $(E \setminus B) \cup A = E \setminus (B \setminus A)$.
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
6. $A \cap B \cap C$.
7. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
8. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
9. $(A \cap C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (C \setminus B)$.

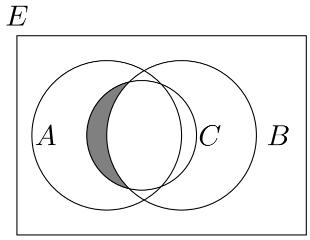
**Solution de l'exercice 2**




$(C \cap \overline{B}) \cap A$




$(B \cup A) \setminus C$




$(A \setminus B) \cap C$

**Solution de l'exercice 3**

1. On remarque que l'on a $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$ et $64 = 2^6$. Comme $1 = 2^0$, on peut donc écrire $A = \{2^k,\ k \in \{0, ..., 6\}\}$.
2. Il faut remarquer que $14 = 1 \times 2 \times 7$, donc 1, 2, 7 et 14 sont tous les diviseurs positifs de 14. Donc $B = \{q \in \mathbb{N},\ q \text{ divise } 14\}$.

**Solution de l'exercice 4**

1. $A$ est l'ensemble des réels $x$ vérifiant $x(x + 5) = 14$. C'est donc l'ensemble des solutions du trinôme $x^2 + 5x - 14 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 5^2 + 4 \times 14 = 25 + 56 = 81 = 9^2$. Les deux racines sont donc 2 et $-7$. Donc $A = \{-7, 2\}$.
2. $B$ est l'ensemble des **entiers naturels** $n$ vérifiant $n(2n + 3) = 14$. C'est donc l'ensemble des solutions **entières** du trinôme $2n^2 + 3n - 14 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 3^2 + 4 \times 2 \times 14 = 9 + 112 = 121 = 11^2$. Les deux racines sont donc $-\frac{7}{2}$ et 2. On ne considère que les racines entières donc $B = \{2\}$.

**Solution de l'exercice 5**

1. $E \cap F$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à $E$ et à $F$ donc $E \cap F = \{2, 4, 5\}$. De même $E \cap G = \{3, 5\}$, $F \cap G = \{1, 5\}$ et $E \cap F \cap G = \{5\}$.
2. $E \cup F \cup G$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un des trois ensembles $E$, $F$ ou $G$ donc $E \cup F \cup G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$.
3. $E \cap G$ n'est pas inclus dans $F$ car 3 est dans $E \cap G$ mais n'est pas dans $F$.

**Solution de l'exercice 6**

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. $A \cap B = \{4, 5\}$.
3. $A \cap C = \{4, 5\}$.
4. $\overline{B}$ est le complémentaire de $B$, c'est donc l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $B$. Donc $\overline{B} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$.
5. $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de $A$ qui ne sont pas 'eléments de $B$ donc $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$.
6. $B \setminus A = \{6, 7\}$.

**Solution de l'exercice 7**

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$),
   $\mathbb{Z}$ est celui des entiers relatifs ($\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$),
   $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions rationnelles ($\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\,;\, p \in \mathbb{Z}, q \in N \setminus \{0\}\}$
   $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.
   On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. Toutes les inclusions sont strictes car $-1 \in \mathbb{Z}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

**Solution de l'exercice 8**

1. Non, par exemple si $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2\}$ et $C = \{0\}$.
2. Non, par exemple si $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2\}$ et $C = \{1, 2\}$.
3. Non, par exemple si $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2\}$ et $C = \{1, 2\}$.

**Solution de l'exercice 9**

1. $(A \cap B) \cup \overline{B} = (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cup \overline{B}) \cap E = A \cup \overline{B}$.
   $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$ d'après ci dessus avec $A$ et $\overline{B}$.
2. On calcule

$$
\begin{aligned}
(C \setminus D) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup D &= [(C \setminus D) \cup D] \cup \left[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A \cap B}\right] \\
&= C \cup D \cup \overline{C} \cup \overline{A \cap B} \\
&= E \cup D \cup \overline{A \cap B} \\
&= E
\end{aligned}
$$

**Solution de l'exercice 10**

1. On calcule

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B} &= [(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)]\cap[(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]\\ &= [(A\cup\overline{A})\cap B)]\cap[(A\cup\overline{A})\cap\overline{B})] \text{ par distributivité}\\ &= B\cap\overline{B} \text{ car } A\cup\overline{A}=E\\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}) &= [(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)]\cup[(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})],\\ &= B\cup\overline{B},\\ &= E.\end{aligned}$$

   Ou on peut remarquer que c'est le complémentaire de la question précédente.

3. On calcule

$$\begin{aligned}[(\overline{A}\cup\overline{C})\cap(\overline{B}\cup\overline{C})]\cup[(A\cup B)\cap C] &= [(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\overline{C}]\cup[(A\cup B)\cap C],\\ &= [\overline{(A\cup B)\cap C}]\cup[(A\cup B)\cap C],\\ &= E.\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 11**

Puisque $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{b\}\}$, on déduit que $E=\{a,b\}$.

**Solution de l'exercice 12**

1. On a $E=\{1,2,3\}$. Donc

$$\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},E\}$$

2. Comme $E=\{1\}$, il a 1 élément, les sous-ensembles de $E$ ont soit 0 élément, soit 1 élément donc $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{1\}\}$.
   Ainsi $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},\{\emptyset,\{1\}\}\}$.
   Attention : $\emptyset$ est l'ensemble vide, donc un ensemble ne contenant pas d'élément, alors que $\{\emptyset\}$ est un ensemble contenant un élément (qui est l'ensemble vide).
3. Comme $E=\emptyset$, il n'a pas d'élément et $E$ n'a pas d'autre sous-ensemble que lui-même, donc $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset\}$. Ainsi $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

**Solution de l'exercice 13**

On montre par récurrence sur $n$ que $\mathcal{P}(E)$ à $2^n$ éléments.

**Solution de l'exercice 14**

On va montrer que si $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ alors $E \subset F$. Or $E$ est un sous-ensemble de $E$, donc $E \in \mathcal{P}(E)$. Comme $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, on a $E \in \mathcal{P}(F)$ donc $E \subset F$.
Par symétrie on a, si $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E)$ alors $F \subset E$ donc si $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$ alors $E = F$. La réciproque est évidemment vraie.

**Solution de l'exercice 15**

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{b\}\}$.
2. $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{b\}, \{1, 2\}, \{1, b\}, \{2, b\}, \{1, 2, b\}\}$.
3. Attention $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ! Mais on a toujours $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

**Solution de l'exercice 16**

1. Non, 4 n'appartient à aucune partie, or l'union des parties doit être égale à $E$.
2. Non, les parties ne sont pas disjointes ($\{1, 5, 7\} \cap \{3, 5, 6\} = \{5\} \neq \emptyset$-.
3. Oui.
4. Non, 10 n'appartient pas à $E$, or l'union des parties doit être égale à $E$..

**Solution de l'exercice 17**

1. Par définition, $E_a$, $E_e$, $E_i$, $E_o$ et $E_u$ sont inclus dans $E$. Tous les mots de $E$ contiennent une voyelle et il n'y a pas d'autres voyelles que $a$, $e$, $i$, $o$ et $u$ en langue française donc $E = E_a \cup E_e \cup E_i \cup E_o \cup E_u$.
2. Non car *oiseau* $\in E_a \cap E_e$. Il appartient d'ailleurs à $E_a \cap E_e \cap E_i \cap E_o \cap E_u$.

**Solution de l'exercice 18**

1. 0, 3 et 6 appartiennent à $E_0$, 1, 4 et 7 appartiennent à $E_1$ et 2, 5 et 8 appartiennent à $E_2$.
2. Oui, ils sont bien non vides d'après la question précédente. Si on effectue la division euclidienne d'un entier naturel par 3, le reste est soit 0, soit 1, soit 2. Donc ces 3 ensembles sont disjoints deux à deux et leur union est bien $\mathbb{N}$ tout entier.

**Solution de l'exercice 19**

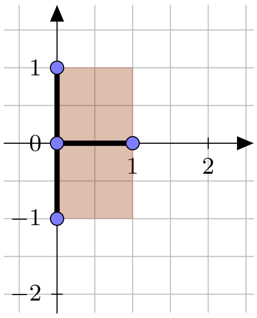
Si on prend les complémentaires des ensembles dans la propriété $P_1$, on obtient $\overline{A_1} \neq \emptyset$, $\overline{A_2} \neq \emptyset$ et $\overline{A_3} \neq \emptyset$.
Si on prend les complémentaires des ensembles dans la propriété $P_2$, on obtient $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \emptyset$.
Et Si on prend les complémentaires des ensembles dans la propriété $P_3$, on obtient $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = E$. Ce qui prouve que $\{\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}\}$ est une partition de $E$.

**Solution de l'exercice 20**

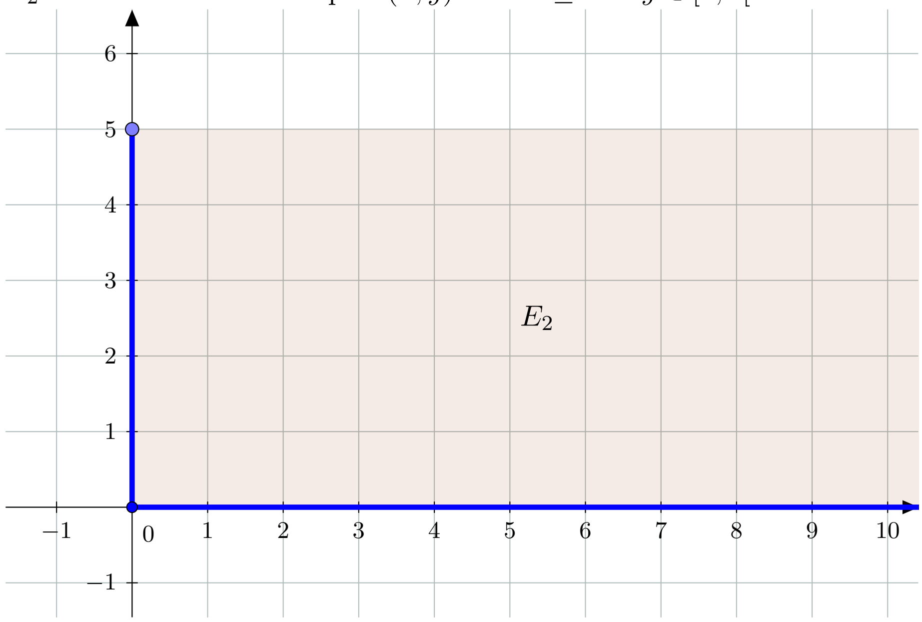
1. $E \times F = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ et
   $F \times E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$.
2. $E \times F$ et $F \times E$ ont le même nombre d'éléments (6) mais sont différents car, par exemple, $\{2,1\} \in E \times F$ mais $\{2,1\} \notin F \times E$.

**Solution de l'exercice 21**

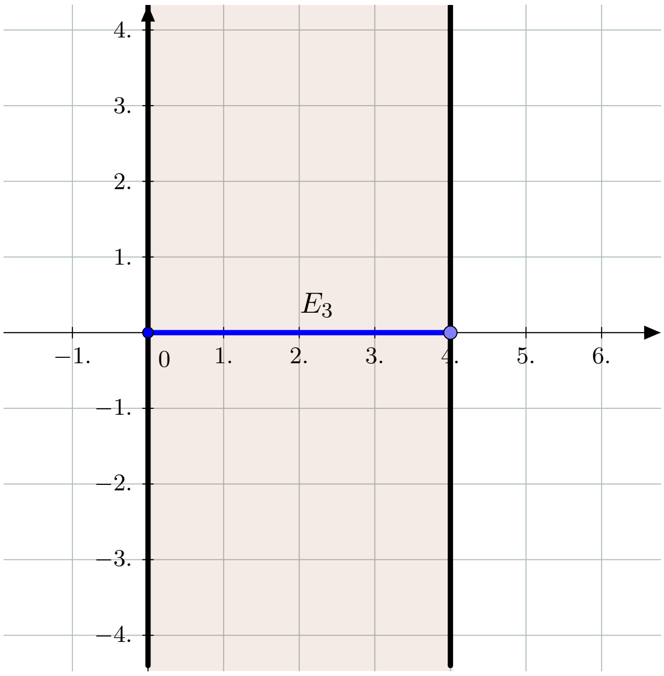
1. $E_1$ est l'ensemble des couples $(x,y)$ avec $x \in [0,1]$ et $y \in [-1,1]$.




2. $E_2$ est l'ensemble des couples $(x,y)$ avec $x \geq 0$ et $y \in [0,5[$.




3. $E_3$ est l'ensemble des couples $(x,y)$ avec $|x-2| \leq 2$ et $y \in \mathbb{R}$.
   Or $|x-2| \leq 2 \iff -2 \leq x-2 \leq 2 \iff 0 \leq x \leq 4$.
   Donc $E_3$ est l'ensemble des couples $(x,y)$ avec $x \in [0,4]$ et $y \in \mathbb{R}$.




**Solution de l'exercice 22**
Non, par exemple soient $E = F = \{0, 1\}$ et $X = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

**Solution de l'exercice 23**

1. L'égalité est vraie, la démonstration repose sur les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } y \in C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times C\end{aligned}$$

2. Ceci est faux. Par exemple $E = F = \{0, 1\}$, $A = C = \{0\}$ et $B = D = \{1\}$. La vraie formule est la suivante

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D).$$