MATHS4-CUPGE 2

Ahmad Karfoul

Université de Rennes

ESIR ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE RENNES

ahmad.karfoul @univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Ce module

I. **Partie 1** (20h CM, 16h TD, 4h TP)

- Probabilités : 10h CM+8h TD+2hTP (A. Karfoul + V. Boussot)
- Statistiques : 10h CM+8h TD+2hTP (B. Uguen)

II. **Partie 2** (4h CM, 8h TD, 4hTP) (J. Coloigner)

- Méthodes numériques : interpolation polynomiale, calcul intégral et calcul matriciel

III. **Partie 3** (10 CM, 8h TD, 2h TP) (A. Karfoul+V. Boussot)

- Equations différentielles

Sommaire

I. Introduction: historique

- **L'origine de la probabilité se trouve dans les jeux de hasard.**

- Le mot **hasard** est une traduction espagnole du mot arabe « **az-zahr** » qui signifie «**dé à jouer** ».

- La mathématisation de la théorie de probabilité date du **17^{ième} siècle** grâce à Pascal et Fermat.

Pascal

Fermat

I. Introduction: historique

- Après les travaux de Pascal et Fermat et à partir du **18ième siècle**, de nombreux mathématiciens se sont intéressés à la théorie de la probabilité.

Poisson

Poincaré

Borel

Kolmogorov

- C'est Kolmogorov qui est considéré comme le fondateur de la théorie axiomatique moderne des probabilités en 1933.

I. Introduction: quelques définitions

- **Une expérience :** une activité dont les résultats sont observables (ex. lancer un dé).
- **Une expérience aléatoire :** une expérience dont le résultat ne peut être annoncé avec certitude, c'est-a-dire avant la réalisation de cette expérience.

  EX. : Lancer un dé équilibré (même probabilité de chute).

- **Un essai :** une réalisation d'une expérience (répétition de l'expérience).
- **Une éventualité (possibilité) :** Le résultat issue d'un essai .

  EX. Lancer un dé : une éventualité = 1 ou 2 ou 3 ou …… ou 6

- **L'espace fondamental Ω :** (parfois appelé l'univers de possibilités/espace fondamental) est un ensemble de toutes les éventualités/résultats possibles de l'expérience aléatoire.

  EX. : Lancer deux fois une pièce équilibrée (pile (p) et face (f) équiprobables).

$$\Omega = \{(p,p),(p,f),(f,p),(f,f)\}$$

I. Introduction: quelques définitions

- **Remarque 1 :** La notion d'éventualité est directement liée à ce qui intéresse l'examinateur.

EX. Lancer un dé :

✓ **Si on est intéressé par le résultat de la face supérieur, alors Ω = {1,2,3,4,5,6}.**

✓ **Si on est intéressé par la parité de la face supérieure, alors Ω = {Pair, Impair}.**

- **Remarque 2 :** L'univers Ω n'est pas nécessairement dénombrable (fini ou infini).
- **Remarque 3 :** Une expérience aléatoire est dite discrète si l'espace fondamental est dénombrable (fini ou infini). Par contre elle est continue si l'espace fondamental est infini non dénombrable (ex. R^3).
- **Un évènement :** Un ensemble de résultats ou un sous-ensemble de l'espace fondamental Ω (partie de Ω).

EX. : Lancer deux fois une pièce équilibrée et considérer l'évènement A qui consiste à «observer une face lors du premier jet».

L'espace fondamental : $\Omega = \{(p,p),(p,f),(f,p),(f,f)\}$

$$\Rightarrow A = \{(f,f),(f,p)\} \Rightarrow A \subset \Omega$$

$B = \{(f,p)\}$ est un évènement élémentaire

II. Espaces probabilisés: quelques définitions

- Soit A un évènement $A \subset \Omega$. L'évènement A se réalise **si et seulement si** le résultat de l'expérience aléatoire est un élément λ de A.

- L'espace fondamental Ω contient toutes les possibilités → Ω est l'évènement **certain.**

- L'ensemble $\emptyset$ ne contient aucune possibilité → $\emptyset$ est l'évènement **impossible**.

- **L'évènement contraire :** On dit que l'évènement $A \subset \Omega$ admet un évènement contraire à lui que l'on note $\bar{A}$ si $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (l'ensemble des éléments appartenant à Ω et non à A).

- Soient A et B deux évènements tels que $A, B \subset \Omega$:
  - l'évènement $A \cap B \subset \Omega$ est réalisé si $A \,\mathrm{et}\, B$ se réalisent.
  - l'évènement $A \cup B \subset \Omega$ est réalisé si $A \,\mathrm{ou}\, B$ se réalise.
  - Si $A \cap B = \emptyset$, on dit alors que $A \,\mathrm{et}\, B$ sont des évènements incompatibles (disjoints).

II. Espaces probabilisés: quelques définitions

- **Remarque 4:** Les opérations sur les ensembles s'interprètent, en termes d'évènement, comme indiqué ci-dessous :

Ensemble	Évènement
L'espace fondamental Ω	Évènement certain
L'ensemble vide ∅	Évènement impossible
Un singleton $\{\lambda\}$ où $\lambda \in \Omega$	Un évènement élémentaire
Un sous-ensemble *A* de Ω	Un évènement
$\lambda \in A$	λ est une réalisation possible de *A*
$A \subset B$	Si *A* est réalisé alors *B* l'est
Le complementaire $\bar{A} = \Omega \setminus A$	Évènement contraire de *A*
$A \cap B$	Réalisation simultanée de *A* et *B*
$A \cup B$	Réalisation de *A* ou *B*
$A \cap B = \varnothing$	Les évènements *A* et *B* sont incompatibles
$(A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de Ω	$(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements

II. Espaces probabilisés: les tribus

- **Une tribu :** On appelle tribu sur Ω toute partie $\mathfrak{F}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω) telle que :

  1. $\Omega \in \boldsymbol{F}$
  2. $\forall A \in \boldsymbol{F}$,$\bar{A} \in \boldsymbol{F}$ (**stable** par passage au complémentaire)
  3. **Si** $(A_{n\in\mathbb{N}})$ est une suite d'éléments de $\mathfrak{F}$, alors $\bigcup_{n\in\bullet} A_n \in \boldsymbol{F}$ (**stable** par union dénombrable)

- **Remarque 5 :** A partir de la définition précédente, une tribu est stable par intersection dénombrable. **Justification?**

Formule de **De Morgan:** $\bigcap_{n\in N} A_n \equiv \overline{\bigcup_{n\in N} \bar{A}_n}$

EX. : Donner une tribu associée a l'expérience aléatoire définie par « lancer une seule fois une pièce équilibrée ».

- l'espace fondamental : $\Omega = \{p, f\}$
- Une tribu $\mathfrak{F} = \{\varnothing, \{p\}, \{f\}, \{p, f\}\}$

II. Espaces probabilisés: les tribus

- **Remarque 6 :** Pour n'oublier aucun évènement et dans le cas où Ω est un ensemble fini, on prend $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

- **Remarque 7:** Si une expérience aléatoire comporte n possibilités, alors il existe 2^n évènements.

- **Remarque 8 :** Si Ω contient au moins deux évènements, alors $\mathcal{F} = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}, \quad A, \bar{A} \subset \Omega$ est la plus petite tribu de Ω contenant A. On dit alors que $\mathcal{F}$ est une tribu engendrée par A.

- Dans le cas où Ω représente un ensemble non-dénombrable (ex. $\Omega \in \mathbb{R}^+$) et pour ne pas oublier un évènement, la tribu sur Ω doit contenir au moins les intervalles inclus dans $\mathbb{R}^+$. Il faut donc considérer la plus petite tribu sur Ω engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}^+$. Cette tribu doit contenir toutes les intervalles qui peuvent être obtenues par une suite d'intersection ou unions dénombrable et passage au complémentaire à partir des intervalles de $\mathbb{R}^+$. Cette tribu est en réalité engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^+$.

- Une tribu $\mathcal{F}$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^+$ est appelée une tribu **Borélienne** de $\mathbb{R}^+$

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr | LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

II. Espaces probabilisés: les tribus Boréliennes

Définition : Une tribu Borélienne de $\mathbb{R}^d$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Tout élément de cette tribu est noté comme Borélien de $\mathbb{R}^d$.

- **Proposition :** Une tribu Borélienne de $\mathbb{R}^d$ est la tribu engendrée par le pavé

$$]-\propto, a_1]\times]-\propto, a_2]\times\cdots]-\propto, a_d]$$

- **Définition :** Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, on dit alors que le couple (**Ω**, $\mathcal{F}$) est un espace probabilisable (espace mesurable)

- **Théorème:** Si (**Ω**, $\mathcal{F}$) est un espace probabilisable, on a alors :
  1. $\varnothing \in \boldsymbol{F}$
  2. Si $A,B \subset \boldsymbol{F} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sont aussi dans $\boldsymbol{F}$
  3. Si $(A_{n\in\mathbb{N}})$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ est stable par intersection dénombrable)

II. Espaces probabilisés: la mesure de probabilité

- **Définition :** **Une probabilité** ou mesure de probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{F})$ est toute application $P : F \to [0,1]$ telle que :
  1. $P(\Omega) = 1$
  2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **d'évènements deux à deux incompatibles** dans $\mathfrak{F}$ $(A_n \cap A_m = \phi, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m)$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ est convergente et vérifie:

$$P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

- **Remarque 9 :** L'axiome 2 de la définition précédente est appelée propriété de **б -additivité**

- **Définition :** **Un espace probabilisé $(\Omega,\mathfrak{F},P)$** est un espace probabilisable $(\Omega,\mathfrak{F})$ muni d'une mesure de probabilité P (mesure la capacité d'un évènement à se produire).

- **Question :** Pourquoi dit-on rien sur la probabilité de $\emptyset$ (l'évènement impossible) et celle de $\bar{A}$ (l'évènement complémentaire) dans la définition précédente???

II. Espaces probabilisés: la mesure de probabilité

Proposition:

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace probabilisé. Alors pour tout A, B et $A_n \in \mathfrak{F}$ on a :

1. $P(\varnothing) = 0$

2. Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (P est une fonction croissante) et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

3. $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. Si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite d'évènements deux a deux incompatibles, on a alors

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

7. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = 1$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

II. Espaces probabilisés: la mesure de probabilité

8. Si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet d'évènements, on a alors pour tout A dans $\mathcal{F}$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap A_k)$$

9. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements dans $\mathcal{F}$ $(A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N})$

$$P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

10. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements dans $\mathcal{F}$ $(A_{n+1} \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N})$

$$P(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

II. Espaces probabilisés: loi de probabilité discrète

- Soit Ω un univers dénombrable (fini ou infini) → $\Omega = \{x_n ; n \in I\}$.
- Soit $(P_n)_{n \in I}$ une suite de nombres vérifiant $\sum_{n \in I} P_n = 1,\ P_n \geq 0 \rightarrow P_n \in [0,1]$.

→ On peut construire une mesure de probabilité sur la tribu $\mathcal{F}(\Omega)$ en prenant comme évènement élémentaire $\{x_n\}$ auquel on associe la probabilité $P_n = P(\{x_n\})$.

→ La probabilité d'un évènement $A \subset \Omega$ peut s'écrire comme

$$P(A) = \sum_{n \in I, x_n \in A} P(x_n)$$

→ La propriété de б-additivité est vérifiée par construction et on a bien

$$P(\Omega) = \sum_{n \in I, x_n \in \Omega} P_n = 1$$

→ On a bien définit une probabilité sur $\mathcal{F}(\Omega)$ appelée loi de probabilité discrète sur Ω.

II. Système complet d'évènement

Définition: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (finie ou infinie dénombrable) d'évènements de $\mathcal{F}$. On dit que les A_n forment un **système complet d'évènements** si :

1. Les A_n sont deux à deux incompatibles
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$

Ex. Dans une urne, on a des cubes et des boules rouges et verts. On tire un des ces objets :Soit

1. A_1="L'objet tiré est un cube" et A_2="L'objet tiré est une boule". Alors (A_1,A_2) est un système complet d'événements.
2. Soit B_1="L'objet tiré est rouge" et B_2="L'objet tiré est vert". Alors (B_1,B_2) est un système complet d'événements.
3. Soit C_1="L'objet tiré est une boule rouge", C_2="L'objet tiré est un cube rouge" et C_3="L'objet tiré est vert". Alors, (C_1,C_2,C_3) est un système complet d'événements.

III. Probabilité conditionnelle et formule de Bayes

Considérons une expérience aléatoire schématisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Intéressons nous maintenant à la probabilité pour que «un évènement A se produise **sachant qu'**un autre évènement B s'est déjà produit». Autrement dit, la probabilité **conditionnelle** de A sachant que B est réalisée, qu'on la note $\boldsymbol{P(A|B)}$ ou $\boldsymbol{P_B(A)}$.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soit B un élément de $\mathcal{F}$ tel que $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle d'un évènement A sachant B est définie par :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

III. Probabilité conditionnelle

❑ **L'arbre pondéré**

Dans un arbre pondéré :

➢ la probabilité de l'événement correspondant à un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin (règle de produit)

➢ La somme des probabilité des branches issues d'un même nœud est égale à 1 (règle de la somme)