Cours 1 : Ensembles

1 Ensembles et sous-ensembles

Définition - Un ensemble E est une « collection d'objets », appelés éléments de E. Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Notations :

1. On note entre $\{\ \}$ les éléments d'un ensemble.
2. On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est à dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.
3. Un ensemble $E = \{e\}$ qui n'a qu'un seul élément est appelé un singleton.

Deux façons de définir un ensemble :

1. en extension : on donne la liste de tous ses éléments.
2. en compréhension : on donne une propriété qui caractérise ses éléments : $A = \{x \in E / P(x)\}$.

Définition - On dit que deux ensembles sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

Définition - Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, si tout élément de E est un élément de F. On note $E \subset F$ et on dit que E sous-ensemble de F ou encore une partie de F. On a donc :

$$\boxed{E \subset F \iff (\forall x \in E,\ x \in F).}$$

Remarques :

1. Soit E un ensemble, on a toujours :

$$\boxed{\emptyset \subset E \text{ et } E \subset E).}$$

2. Soient E et F deux ensembles, si $E \subset F$ et $E \neq F$, alors on note aussi parfois $E \subsetneq F$ et on dit que l'inclusion est stricte.

Proposition - Soient E, F et G trois ensembles. On a :

$$\boxed{E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E).}$$

$$\boxed{E \subset F \subset G \Rightarrow\ E \subset G.}$$

Définition - Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. On le note $\mathscr{P}(E)$.

Remarque :
Soit E un ensemble, on a

1. $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
2. $(x \in E) \iff (\{x\} \subset E) \iff (\{x\} \in \mathscr{P}(E))$.

Proposition - Soient E et F deux ensembles. On a :

$$\boxed{E \subset F \Rightarrow \mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F).}$$

$$\boxed{E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F).}$$

Proposition - Si E est un ensemble à n éléments, où n est un entier naturel, alors $\mathscr{P}(E)$ a 2^n éléments.

2 Intersection et union

Définition - Soient E et F deux ensembles, alors :

1. L'intersection de E et F est l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans E et dans F. On la note $E \cap F$. Lorsque $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.
2. L'union de E et F est l'ensemble constitué des éléments qui sont dans E ou dans F. On la note $E \cup F$.

Remarques : Soient E et F deux ensembles, on a donc :

1. $x \in E \cap F \iff (x \in E \text{ et } x \in F)$
2. $x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ ou } x \in F)$.

Proposition - Soient E et F deux ensembles. On a :

1. $E \cap F \subset E \subset E \cup F$.
2. Si $E \subset F$, alors $E \cap F = E$ et $E \cup F = F$.

Proposition - Soient E, F et G trois ensembles. On a :

1. Commutativité :
   $E \cap F = F \cap E \quad \text{et} \quad E \cup F = F \cup E$.
2. Associativité :
   $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G) \quad \text{et} \quad (E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$.

Proposition - Soient E, F et G trois ensembles. On a :

1. Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:
$$\boxed{E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G).}$$
2. Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:
$$\boxed{E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G).}$$

Proposition - Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a :

1. $A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \emptyset = A$.
2. $A \cap E = A \quad \text{et} \quad A \cup E = E$.

Définition - Soient E un ensemble et A_1, A_2, ..., A_n des sous-ensembles de E, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. On dit que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de E forme une partition de E, si

1. $A_i \neq \emptyset$, pour tout i.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, pour tous $i \neq j$.
3. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$.

3 Différence et complémentaire

Définition - Soit E un ensemble.

1. Soit F un ensemble. La différence de E par F est l'ensemble constitué des éléments de E qui ne sont pas dans F. On la note $E \setminus F$.

$$\boxed{E \setminus F = \{x \in E,\ x \notin F\}.}$$

2. Soit A un sous-ensemble de E. Le complémenatire de A dans E est l'ensemble $E \setminus A$. On le note $C_E(A)$, ou A^C ou encore $\overline{A}$ lorsque l'ensemble E est fixé.

$$\boxed{C_E(A) = \{x \in E,\ x \notin A.\}}$$

Proposition - Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a :

1. $C_E(\emptyset) = E$ et $C_E(E) = \emptyset$.
2. $C_E(C_E(A)) = A$.
3. Si $A \subset B$, alors $C_E(B) \subset C_E(A)$.
4. $A \setminus B = A \cap C_E(B)$.

Proposition - Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On a :

$$\boxed{C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).}$$

$$\boxed{C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B).}$$

Définition - Soient E et F deux ensembles. La différence symétrique de E par F est l'ensemble constitué des éléments qui sont soit dans E, soit dans F, mais pas dans les deux. On la note $E \triangle F$. On a donc :

$$\boxed{E \triangle F = (E \cup F) \setminus (E \cap F) = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).}$$

Proposition - Soient E et F deux ensembles disjoints, alors $E \triangle F = E \cup F$.

4 Produit cartésien

Définition - Soients E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E par F est l'ensemble constitué des couples (x, y), où x est un élément de E et y un élément de F. On le note $E \times F$.

$$\boxed{E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}.}$$

Remarque :

1. On généralise au produit cartésien de n ensembles E_1, E_2, ..., E_n, pour $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$\boxed{E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in E_i,\ \text{pour tout} 1 \leq i \leq n.}$$

2. Lorsque $F = E$, on note $E \times E = E^2$.
   On appelle diagonale de E^2 l'ensemble $D = \{(a, a), a \in E\}$.
   Et pour tout $n \in \mathbb{N}, n > 0$, on note $E \times ... \times E = E^n$.

Remarques :

1. Soit E un ensemble, alors $E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$.
2. Soient E et F deux ensembles, alors $\forall (x, y) \in E \times F,\ \forall (x', y') \in E \times F$:
$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$
3. Soient E et F deux ensembles, en général $E \times F \neq F \times E$.

Proposition - Soient E et F deux ensembles, alors :

$$E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset \quad \text{ou} \quad F = \emptyset).$$