3 Potentiel électrostatique

3.1 Potentiel électrostatique créé par une charge

Considérons une charge q placée en un point O, qu'on prendra comme origine d'un repère de l'espace muni d'une base sphérique. Comme on l'a vu à la section 1, cette charge créé dans l'espace un champ électrostatique qui s'écrit $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ pour tout point $M \neq O$ repéré par $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$.

Soit $K \in \mathbb{R}$ une constante, posons $V_K(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K$ pour tout point $M \neq O$ repéré par $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. Calculons le gradient de cette fonction scalaire V_K (en coordonnées sphériques) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}\, V_K(M) &= \frac{\partial V_K}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V_K}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V_K}{\partial \phi}\vec{u}_\phi \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r \\ &= -\vec{E}(M).\end{aligned}$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par une charge ponctuelle est donc un champ de gradient, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme le gradient d'une fonction scalaire. Une telle fonction se nomme *potentiel électrostatique*. On dit que le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique.

La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ est à connaitre et à savoir utiliser, il s'agit de la définition des fonctions potentiels électrostatiques.

Le potentiel électrostatique V créé au point M par une charge q placée en O est défini à une constante additive K près par la relation

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K, \qquad \text{avec } r = ||\overrightarrow{OM}||. \tag{5}$$

Généralement, on prend comme convention que le potentiel est nul à très grande distance de la charge qui le crée, c'est-à-dire qu'on pose

$$\lim_{r\to+\infty} V_K(r) = 0, \qquad \text{donc } K = 0.$$

Ce potentiel électrostatique est défini en tout point M de l'espace, sauf au point O où se trouve la charge q. L'unité du potentiel électrostatique dans le système international est le Volt (de symbole V).

L'équation (5) est à connaitre et à savoir retrouver, et le raisonnement permettant de trouver la constante K en fonction d'où on a placé l'origine des potentiels est également à connaitre et à savoir adapter au problème considéré.

3.2 Potentiel électrostatique créé par une distribution

Distributions discrètes. Considérons une distribution discrète Σ de N charges q_i placées en des points A_i de l'espace, créant dans l'espace le champ électrostatique $\vec{E}_\Sigma$. Ce champ est-il également un champ de gradient ?

Par le théorème de superposition (cf section 1.4), on a $\vec{E}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \vec{E}_{q_i}$, où $\vec{E}_{q_i}$ est le champ créé par la charge q_i. Chaque champ $\vec{E}_{q_i}$ est, comme vu précédemment, un champ de gradient, dérivant des potentiel électrostatique $V_{K_i}^{q_i} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + K_i$ (où $r_i = ||\overrightarrow{A_iM}||$), défini à une constante K_i près (et qui vérifie donc $\vec{E}_{q_i} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_{K_i}^{q_i}$). Ainsi, on a :

$$\vec{E}_\Sigma = \sum_{i=1}^N \vec{E}_{q_i} = \sum_{i=1}^N -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_{K_i}^{q_i} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\sum_{i=1}^N V_{K_i}^{q_i}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_K^\Sigma,$$

où on a simplement écrit :

$$\sum_{i=1}^{N} V_{K_i}^{q_i} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + K_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \right) + K = V_K^{\Sigma}$$

avec $K = \sum_{i=1}^{N} K_i$. Ainsi, par le théorème de superposition, le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges ponctuelles est également un champ de gradient.

Le potentiel électrostatique V créé au point M par une distribution discrète Σ de N charges q_i placées en des points A_i de l'espace est défini à une constante additive K près par la relation

$$V_K^{\Sigma}(M) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \right) + K, \quad \text{avec } r_i = ||\overrightarrow{A_i M}||. \tag{6}$$

Généralement, on prend comme convention que le potentiel est nul à très grande distance de la distribution de charges qui le crée, c'est-à-dire qu'on prend $K = 0$.

L'équation (6) est à connaitre et à savoir retrouver (notamment à l'aide du principe de superposition), et le raisonnement permettant de trouver la constante K en fonction d'où on a placé l'origine des potentiels est également à connaitre et à savoir adapter au problème considéré.

Distributions continues. Soit $\mathcal{D}$ une distribution continue de charges, d'extension finie (donc par exemple un patatoïde de révolution, mais pas un plan infini ou un fil infini). Soient P un point de cette distribution et $\mathrm{d}q(P)$ une charge élémentaire centrée autour de P. Cette charge élémentaire crée en un point M le potentiel électrostatique élémentaire :

$$\mathrm{d}V_P(M) = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 ||\overrightarrow{PM}||} + K,$$

avec K une constante. Comme $\mathcal{D}$ est d'extension finie, il n'y a pas de charge à l'infini, donc on peut faire le choix $K = 0$ (encore une fois en prenant comme convention que le potentiel est nul très loin de la distribution). Le potentiel électrostatique total créé en M est la somme des potentiels électrostatiques élementaires créés en M lorsque P parcourt la distribution. On a donc :

$$\bullet \text{ si } \mathcal{D} \text{ est une distribution volumique } (\mathcal{D} = \mathcal{V}), V_{\mathcal{V}}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0 \, PM} \, \mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

$$\bullet \text{ si } \mathcal{D} \text{ est une distribution surfacique } (\mathcal{D} = \mathcal{S}), V_{\mathcal{S}}(M) = \iint_{P \in \mathcal{S}} \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0 \, PM} \, \mathrm{d}S, \tag{8}$$

$$\bullet \text{ si } \mathcal{D} \text{ est une distribution linéique } (\mathcal{D} = \mathcal{L}), V_{\mathcal{L}}(M) = \int_{P \in \mathcal{L}} \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0 \, PM} \, \mathrm{d}l. \tag{9}$$

Les équations (7), (8) et (9) sont à connaitre et à savoir retrouver à l'aide du principe de superposition.

3.3 Énergie potentielle d'une charge ponctuelle q dans un champ électrostatique extérieur

Un champ électrostatique $\vec{E}$ règne dans l'espace. Une charge ponctuelle q placée en M subit donc la force $\vec{f}(M) = q\vec{E}(M)$. Cette force dérive d'une énergie potentielle $E_p(M) = qV(M)$, puisque

$$\vec{f}(M) = q\vec{E}(M) = -q \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, V(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} \, (qV(M)) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} \, E_p(M).$$