Physique MECANIQUE

(Transparents et Eléments relatif au Cours traité en amphithéâtre)

ESIR (Cycle Prépa - CUPGE 1A-S1)

UnivRennes1

univ-rennes1.fr

B. BÊCHE Pr., IETR CNRS – ESIR UR1

bruno.beche@univ-rennes1.fr

https://www.ietr.fr/bruno-beche

Remarques :

Lorsque le symbole apparaitra, une démonstration plus conséquente sera nécessaire au tableau et sur votre cahier / feuilles en terme de prise de notes.

Le symbole mérite une attention particulière.

CHAPITRE III)
FORMULATION INTEGRALE OU APPROCHES ENERGETIQUES : TRAVAIL, PUISSANCE, ENERGIE, POTENTIEL

- Travail le long d'une trajectoire, puissance, les énergies, énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique
- Energie potentielle et notion de forces à circulation conservative (champ de forces conservatif), propriétés, notions de champs et de potentiels, énergie mécanique totale et loi de conservation, notions de barrières et de puits de potentiel en physique, diagramme d'énergie, le théorème du viriel
- Notions et conditions d'équilibre et de stabilité, petits mouvements autour de la position d'équilibre, vers l'oscillateur harmonique en mécanique

III.1) Travail le long d'une trajectoire, puissance, les énergies, énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

III.1.1) Cas d'une trajectoire rectiligne: travail d'une force le long d'une trajectoire (notion de déplacement), théorème et définition

▪ **Les principes ou formulations intégrales énergétiques (scalaire), ou théorèmes de l'énergie** sont 'cachés' /inclus dans la 2d loi de Newton (PFD, vectoriel).

Trajectoire rectiligne => Résultante force $\vec{F}$ colinéaire à $\vec{v}(t=0)$.

C.I. $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases}$

PFD : $a = \ddot{x} = \frac{F}{m}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} t = (v - v_0)\frac{m}{F} \\ x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$

$$\boxed{W = (x - x_0)F = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = E_c(x) - E_c(x_0) = \Delta E_c} \quad \text{(III-1)}$$

Concernant les dimensions et unités : [W] = [F].[L]=M.L^2.T^{-2}=[E]. Son unité *kg.m^2.s^{-2} = J*, le *Joule.* Remarque conversion : 1 eV= 1.6×10^{-19} J (très faible) et 1 calorie = 4.18 J.

Question: Dans un référentiel terrestre 'considéré galiléen', quelle est l'altitude maximale atteinte par un tir de projectile à la verticale à la vitesse initiale de 100 m/s?

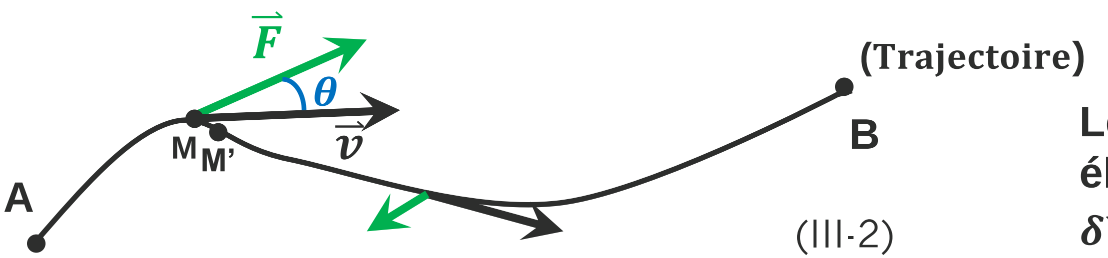
Réponse : *h = (v^2/2g)*= 510 m

***Question*: Avec cette formule, estimer la hauteur que peut franchir un perchiste si il court à une vitesse de 10 m/s.**

- **La Puissance** **sera définie par :** $P_{moy.} = \frac{W}{\Delta t}$ **,** $P_{inst.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$**. *L'unité* sera le *Watt (W)*.**

Remarques: Le minimum de perception de l'œil humain se situe vers 10^{-15} W, le plein soleil sur une surface de $1m^2$ représente 10^2 W, une centrale d'électricité (nucléaire, énergie provenant de la fission d'atomes 'lourds') produit des tranches de 10^{10} W.

III.1.2) Cas d'une trajectoire quelconque ($\vec{F}$ non colinéaire à $\vec{v}$): travail et circulation d'une force, théorème de l'énergie cinétique



Le travail élémentaire sur un élément $d\vec{r}$ (de M à M') sera : $\delta W = \vec{F}.d\vec{r}$ (projection $F dr \cos\theta$)

(III-2)

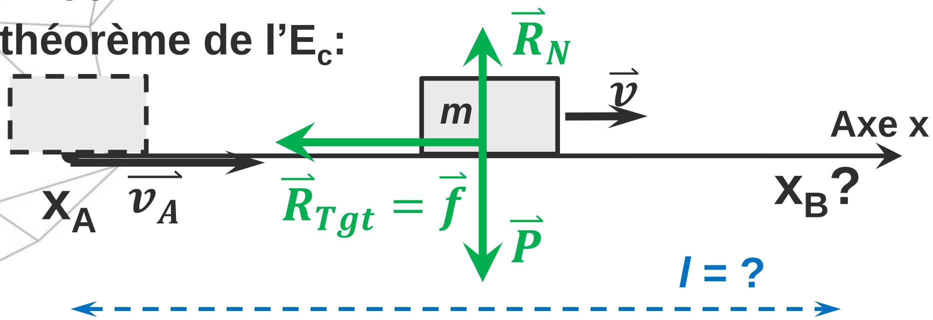
Son intégration sur l'arc $\widehat{AB}$ donne $\boxed{W = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.d\vec{r}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.\vec{v}.dt$ **; il s'agit d'une *intégrale* curviligne *de circulation* de la grandeur vectorielle $\vec{F}$ le long de la trajectoire $\widehat{AB}$.**

Décrire une situation et force ne travaillant pas.

$$\text{PFD : } \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow{.d\vec{r} \text{ et } \int} W = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.\vec{v}.dt = \int_{\widehat{AB}} m\, d\vec{v}.\vec{v} = \int_{\widehat{AB}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \Delta E_c \qquad \text{(III-1bis)}$$

▪ **Théorème de l'Energie Cinétique :** Relativement à un référentiel galiléen, ***la somme (algébrique) des travaux (W) des forces (résultante $\vec{F}$) qui s'exercent sur un point matériel (mobile, objet…) entre deux instants est égale à la variation de son énergie cinétique entre ces deux instants*.**

▪ ***Application***: Calcul du travail d'une force de frottement $W_{\vec{f}}$ et utilisation du théorème de l'E_c:



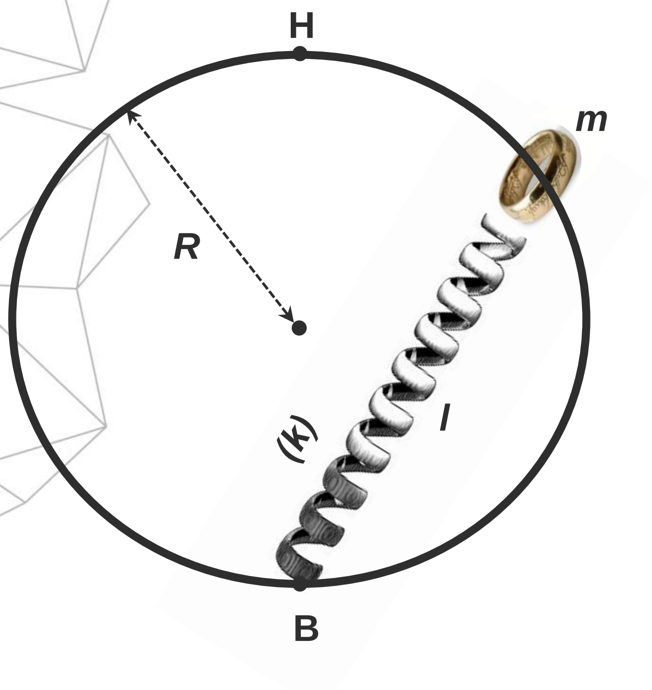
C.I. à t=0 $\begin{cases} x(t=0) = x_A \\ v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_A \end{cases}$

Question : Au bout de quelle distance $l = (x_B - x_A)$ le mobile de masse *m* s'arrête t'il ?

Réponse : $l = (x_B - x_A) = \dfrac{{v_A}^2}{2\mu_d g}$

▪ ***Application***: Calcul des travaux de forces poids puis tension de ressort ($W_{\vec{P}}, W_{\vec{Fr}}$) et utilisation du théorème de l'E_c:

Un système mécanique (voir schéma infra) est constitué d'un anneau (de masse *m*) coulissant sur une armature circulaire (ou cercle) de rayon *R*. Cet anneau est relié à un ressort de raideur *k* (de longueur *l* variant, voir dessin), lui-même attaché au point B ou bas du cercle. L'anneau est ainsi soumis respectivement à son poids puis à la traction du ressort (de norme $\|\vec{F}_r\| =$ *k.l* sur la position du dessin). L'anneau est positionné au point H ou haut du cercle sans vitesse initiale ($v_H = 0$), puis lâché.



Comprendre le schéma ; calculer l'expression de la vitesse v_B au point B de l'anneau (on considérera que le ressort se rétracte jusqu'au point B)

Réponse **:** $v_B = 2.\sqrt{gR + \frac{k.R^2}{m}}$

Ce résultat pourra aussi se déduire plus loin par un transfert complet de l'énergie potentielle de l'anneau en énergie cinétique…

III.2) Forces (ou champs de force) à circulation conservative, énergie potentielle

III.2.1) Mathématique et gradient d'une fonction scalaire, propriétés des champs de force conservatifs

+ Lecture, voir sous Moodle *Opérateur Gradient d'une fonction scalaire_chap 3.pdf*

- **Théorème mathématique :** $\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{grad}(f).d\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} df = f_B - f_A \equiv \Delta f$ (III-3)

· Si un objet se déplaçant dans l'$\mathcal{E}$space est soumis à un *champ de force* $\vec{F}(\vec{r})$dont l'intensité et la direction ne dépendent que de la position $\vec{r}$ de l'objet, alors cet objet de déplace dans un champ de force *conservatif* (ou à circulation conservative).

+ Discussions sur les champs de force électrostatique, gravitationnel, la force de Lorentz, les forces de frottement… conservatifs ou non ?

· **Définition :** *Un champ de force $\vec{F}(\vec{r})$est conservatif* (ou à circulation conservative) si *'il dérive'* d'un potentiel, c'est-à-dire *si il existe une fonction scalaire énergie potentielle 'd'interaction' $E_P(\vec{r})$ telle que :* $\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}\, E_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_P(\vec{r})$ (III-4)

Vecteur Nabla

· **Autres propriétés** (équivalence à démontrer):

Un champ de force $\vec{F}(\vec{r})$est conservatif, alors :

· $\Delta E_p = -W$ (le travail état une perte d'énergie potentielle) (III-5)

Ainsi le *travail W, d'une force conservative F* le long d'un trajet (lacet, chemin…) $\widehat{AB}$, est égal à *l'opposé de la variation de l'énergie potentielle* entre A et B:

$$\boxed{W_F} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{grad}\, E_p.d\vec{r} = -\int_A^B dE_p \equiv \boxed{-\Delta E_p} \quad \text{(III-5)}$$

Le travail dépendait à priori du chemin suivi, mais dans le cas des forces conservatives, le voilà indépendant avec la possibilité de le calculer avec la borne finale et initiale de la dite intégrale.

▪ Il y a commutativité des dérivées partielles secondes sur l'énergie potentielle (relations nécessaires et suffisantes / théorème de H. Schwarz, W. H. Young et A. Clairaut), en coord. Cartésiennes avec $E_p(x,y,z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{(III-6)}$$

▪ Le champ de force $\vec{F}(\vec{r})$ est dit *'irrotationnel'* c'est-à-dire $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r})$ (III-7)

(Théorème mathématique : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,f = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\,\mathrm{f} = \vec{0}$)

Vecteur Nabla

Produit vectoriel

III.2.2) Un exemple de champ de force conservatif : la gravitation

▪ $\vec{F}(r,\theta,\varphi) = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$, champ de force conservatif à symétrie central (schéma) $\rightarrow$

$E_p(r,\cancel{\theta,\varphi}) = -G\frac{Mm}{r} + cste_{/r,\theta\ et\ \varphi}$

▪ Pesanteur à la surface de la Terre : schéma, $\vec{P} = mg\vec{k} \rightarrow E_p(\cancel{x,y},z) = mgz + cste$

▪ *Application* : exprimer l'énergie potentielle élastique E_p (d'un ressort) connaissant sa force de rappel élastique (et conservative) décrite par $\vec{F}_r = -kx.\vec{u}_x$.

Réponse: on prendra un déplacement élémentaire $d\vec{l} = dx.\vec{u}_x$ et l'on calculera le travail…

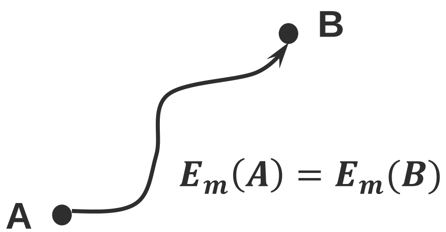
III.3) Energie mécanique totale E_m, loi de conservation, notion de potentiel et diagramme d'énergie

III.3.1) Cas des champs de forces conservatifs

▪ Dans ce cadre, deux résultats s'appliquent (le *théorème de l'E_c* valable pour l'ensemble des forces puis la relation travail⇔énergie potentielle valable pour les forces conservatives) :

$$\left.\begin{aligned}\delta W &= dE_c \\ \delta W &= -dE_p\end{aligned}\right\} \Rightarrow dE_c + dE_p = d\underbrace{\left(E_c + E_p\right)}_{= E_m} = 0 \qquad \text{(III-8)}$$

▪ **Le principe de conservation de l'énergie mécanique totale** signifie alors qu'au cours du temps l'énergie mécanique totale ne varie point, il y a donc possibilité de *transfert d'énergie entre la partie cinétique et potentielle de l'énergie*, la somme restant constante:



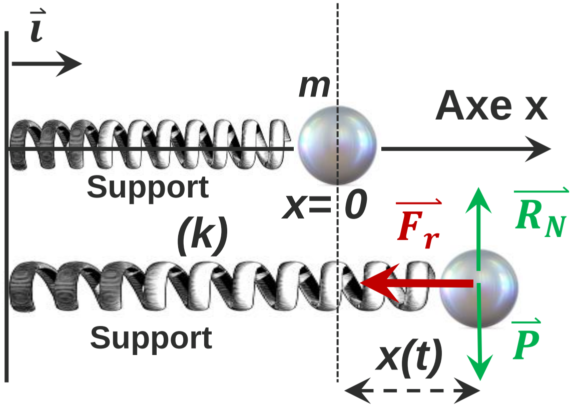
$$\boxed{\frac{d(E_m)}{dt} = 0} \Leftrightarrow \boxed{E_m = cste} \qquad \text{(III-8 bis)}$$

Intégrale première du mouvement

▪ ***Application* de la formulation énergétique et conservation de l'énergie mécanique totale : « vers l'oscillateur harmonique en mécanique »**

Calcul du travail $W_{\vec{F}r}$ d'une force de rappel d'un ressort (force conservative), déduction de l'énergie potentielle associée et utilisation du principe de conservation de l'énergie mécanique totale.

Un système mécanique (voir schéma infra) constitué d'un ressort oscillant (de raideur *k*) 'idéalement' à l'horizontale selon l'axe *x* sur un support et sans aucun frottement.



- Bilan des forces
- Calcul des travaux des forces (III.2) ou de l'énergie potentielle (III.4)
- Ecriture de la fonction scalaire à deux variables $E_m(x, \dot{x})$ et application du principe de conservation (III.8 bis), savoir différencier d/dt une fonction à deux variables x et $\dot{x}$ …

***- Réponse* :**

L'équation de l'oscillateur harmonique (2^d ordre):

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \qquad \text{(III-9)}$$

La conservation de l'énergie mécanique totale a des conséquences sur les mouvements et leurs 'limites'. Considérons un mouvement à un degré de liberté, c'est-à-dire selon une seule dimension spatiale selon *x* pour simplifier (1D).

▪ ***Remarque*** **: La relation (III-8 et bis) fixe $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = cste.$ Le calcul de la vitesse $v^2 = \dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left[E_m - E_p(x)\right]$ n'aura de sens (toujours positive) ou le mouvement dynamique existera et apparaitra avec la condition $\left[E_m - E_p(x)\right] > 0$.**

(III-10)

▪ ***Remarque*** **: A partir de $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E_m - E_p(x)\right]}$, il est possible par séparation des variables ($\dot{x}$, et *t*), d'obtenir** ***l'équation différentielle du 1er ordre du mouvement*** **par ce principe en énergie :**

$$\boxed{t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{m}{2\left[E_m - E_p(x)\right]}}\,.dx} \quad \text{(III-10bis)}$$

avec, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x)$

Cette équation différentielle générique du mouvement donne le temps *t* comme fonction de *x*, il suffira donc de considérer ensuite la fonction inverse *x(t)*.

(le PFD, voir Chapitre II, est quant à lui une équation du second ordre avec l'accélération $a = \frac{d^2x}{dt^2}$)

▪ *Application :* **Utiliser la formulation intégrale (III.10) pour résoudre le problème du mouvement rectiligne (1D) d'une force constante ($dE_p = -F.dx$ ou force dite conservative).**

Soit $E_p = -F.x$ en prenant une constante d'intégration nulle, en fixant de plus pour simplifier l'origine des instants (temps) *t_0=0* et spatial *x_0=0*, (III.10bis) s'intègrera en :

$$\left[\frac{2}{F}.\sqrt{E_m - F.x}\right]_0^x = \sqrt{\frac{2}{m}}.t \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{F}{m}\right)}_{=a} t^2 + \underbrace{\left(\frac{2E_m}{m}\right)^{\frac{1}{2}}}_{=v_0}.t$$

Car $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + F.x$, vaut en (*x=0* et *t=0)* :

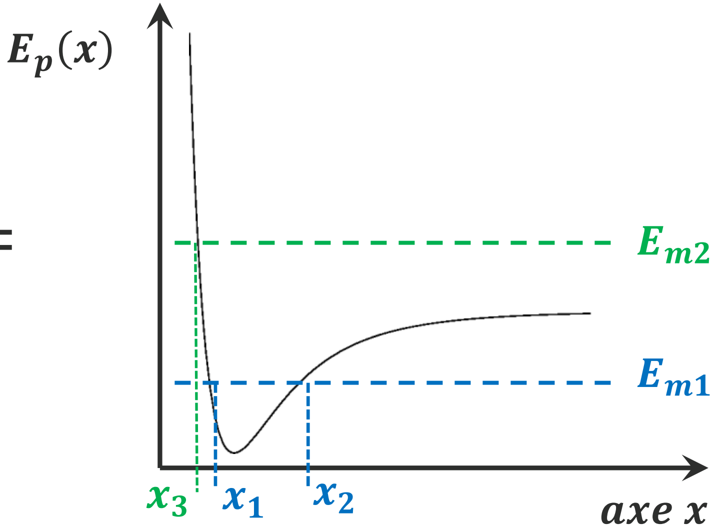
$$E_m(t=0, x=0) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

Soit l'équation $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ (avec $x_0 = 0$) l'équation caractéristique d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré $(a \propto F)$

III.3.2) Notions de barrières et de puits de potentiel (1D), diagramme d'énergie et dynamique du mouvement qualitative associée

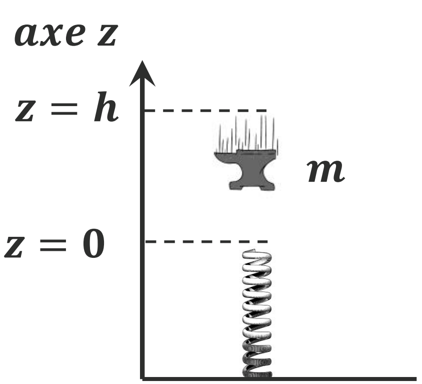
▪ *Discussion* : les potentiels en physique (gravitationnel, mais aussi moléculaire, en physique quantique concernant les particules, application en physique des semi-conducteurs et composants…)

▪ *Discussion* sur la dynamique associée au diagramme, le mouvement, la notion d'états liés, niveaux d'énergie, quantification, notion d'états libres, notion d'équilibre... $\Leftarrow$



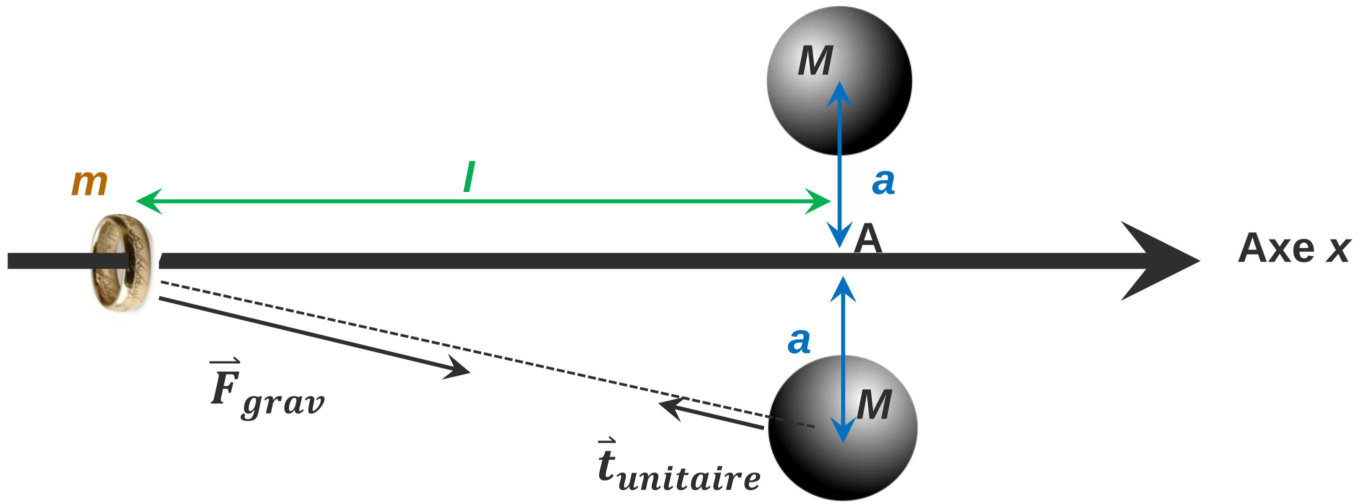
▪ *Application :* Enfoncement d'un ressort et diagramme d'énergie potentielle d'un ressort.

Un objet de masse *m* est lâché d'une hauteur *h* sur un ressort de raideur *k*.
Tracer le diagramme d'énergie potentielle $E_p(z)$ du ressort. De combien s'enfonce le ressort ?



Réponse : $E_p(z) = mgz\ (z \geq 0)$; $E_p(z) = mgz + \frac{1}{2}kz^2\ \ (z < 0)$. A tracer. Le ressort s'enfonce de *u* tel que $mgh = mgu + \frac{1}{2}ku^2$ $\Rightarrow$ discriminant $> 0,\ u < 0\ \ et\ |u| = \frac{1}{k}\left[mg + \sqrt{mg.(mg + 2kh)}\right]$.

- *Application :* Attraction gravitationnel d'un anneau de masse *m* ('coulissant selon un axe *x* sans frottement') par deux masses *M* situées symétriquement à une distance *a*, de part et d'autre de l'axe *x* (voir schéma).



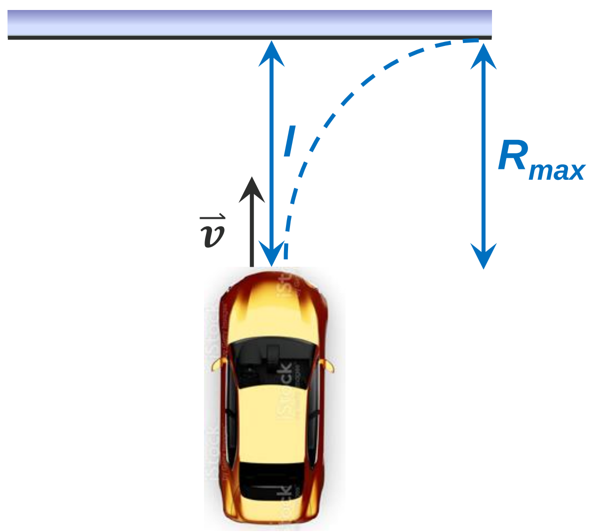
L'anneau est lâché sans vitesse initiale à une distance *l* du point O. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la vitesse v_A de l'anneau au point A suite à l'attraction gravitationnelle du dispositif ?

Réponse **:** $\Delta E_C = W_{grav}$ **; l'anneau de masse m est à une distance de** $u = \sqrt{a^2 + l^2}$ **d'une masse M au début puis à une distance *u*=*a* à la fin au point O. Il y a de plus *2* masses *M*. Donc** $W_{grav} = 2\int_{u=\sqrt{a^2+l^2}}^{u=a} F_{grav}\, du$

$$\vec{F}_{grav} = -G\frac{Mm}{u^2}\vec{t} \quad \xrightarrow{\int} \quad G\frac{Mm}{u}$$

Soit : $v_A{}^2 = 4GM.\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right]$

▪ ***Application :*** **Une voiture arrive avec une vitesse $\vec{v}$ à une distance *l* du mur (voir schéma). Le conducteur ne dérape pas.**



En utilisant un théorème de l'énergie, pensez-vous qu'il sera plus facile de freiner en ligne droite ou bien d'effectuer un virage de rayon R_{max} pour éviter de percuter le mur ?

Réponse **: Voir schéma, $R_{max} = l$. Nous pouvons comparer les forces nécessaires à déployer pour les deux situations.**
Concernant l'option freinage, on considérera v_{finale} nulle (conducteur stoppe) avec $\Delta E_C = W = F.l$, soit $F = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{l}$.
Concernant l'option de tourner, la force centrifuge se quantifie en $F = ma_r = m\frac{v^2}{R_{max}} = m\frac{v^2}{l}$, soit deux fois plus.

III.3.3) Notions sur l'équilibre et la condition de stabilité

(forces conservatives et vision 1D)

En dimension une ou un degré de liberté selon x, nous avons $F(x) = -\frac{d}{dx}E_p$. Ainsi, les positions d'équilibre sont naturellement données par $F\left(x_{fixés}\right) = 0$ (à savoir pas de force) et donc sur la recherche d'extremum de la fonction énergie potentielle:

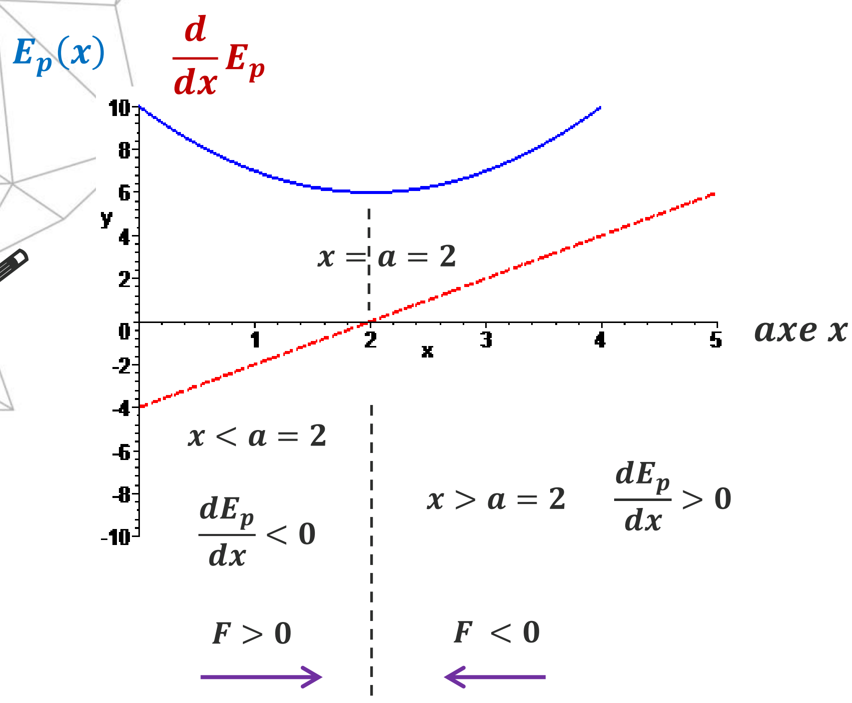
$$\left(\frac{d}{dx}E_p(x)\right)_{x_i\, fixés} = 0 \qquad \text{(III-11)}$$

La dérivée seconde $\frac{d^2}{dx^2}E_p$ donnera les informations sur l'aspect convexe/concave

$$\left(\frac{d}{dx}E_p(x)\right)_{x=a} = 0$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Cuvette de potentiel ou minimum

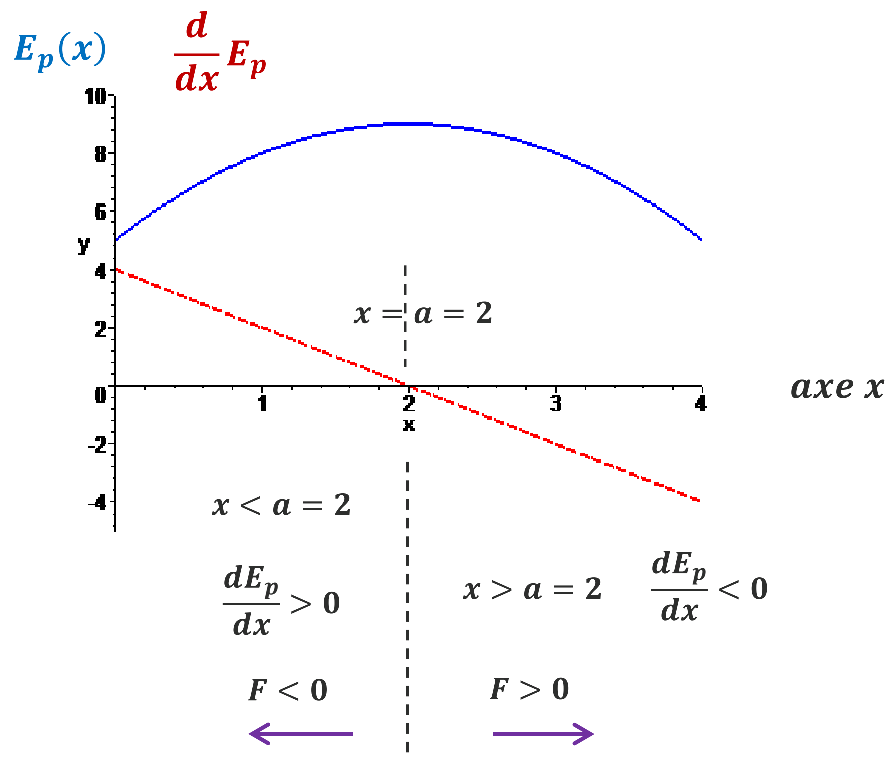


La force 'localisera' la particule vers a=2 minimum

+

Equilibre stable car $\frac{d^2}{dx^2}E_p$ >0 (convexe)

Montagne de potentiel ou maximum



La force éloignera la particule hors a=2 maximum

+

Equilibre instable car $\frac{d^2}{dx^2}E_p$ <0 (concave)

III.4) Ouverture vers d'autres aspects : moyenne et théorème du viriel pour une particule, énergie et forces non conservatives

III.4.1) Théorème du viriel

Ce théorème est utile pour obtenir certains résultats pratiques sur un moyenne temporelle. Il ne se substitue pas aux importants principes de conservation (de l'énergie précédemment ou du moment cinétique du chapitre V).

▪ En introduisant la grandeur scalaire $A = m\vec{v}.\vec{r}$ relative à la dynamique d'une masse constante *m* qui se déplace ($\vec{r}$ et $\vec{v}$) sous l'action une force résultante $\vec{F}$, il est possible de définir la relation par opérateur temporel *d/dt* puis <moyenne> :

$$\boxed{\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_{moy} = \left\langle \vec{F}.\vec{r} \right\rangle_{moy} + 2\langle E_c \rangle_{moy}} \qquad \text{(III-12)}$$

Si sur la <moyenne> dans le temps de quantité variationelle $\frac{dA}{dt}$, le temps d'intégration τ est très grand, $\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_{moy} = \frac{A(\tau)-A(t=0)}{\tau}$, en fixant donc un encadrement borné des valeurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ associées à la particule, alors $\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_{moy} = 0$, soit :

$$\boxed{\langle E_c \rangle_{moy} = -\frac{1}{2}\left\langle \vec{F}.\vec{r} \right\rangle_{moy}} \qquad \text{(III-13)}$$

(quantité dénommé le viriel de la particule)

Le théorème de viriel adopte une forme spéciale quand les forces sont centrales et dérivent d'un potentiel à savoir $\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)\vec{u}_r$, soit:

$$\boxed{\langle E_c \rangle_{moy} = \frac{1}{2}\left\langle r\frac{dE_p}{dr}\right\rangle_{moy}} \qquad \text{(III-14)}$$

Ce résultat traduit une relation entre les moyennes temporelles des énergies cinétiques et potentielle de la dite particule.

III.4.2) Energie et forces non conservatives

La *loi de conservation de l'énergie mécanique totale*, très pratique pour l'étude des mouvements (approche formulation intégrale et scalaire pour déterminer les équations différentielles régissant le mouvement) n'est cependant valable que pour des objets, particules, points matériels et systèmes soumis à des forces conservatives.
Ainsi, concernant les forces non conservatives (de frottements, forces de Stokes, force de Lorentz toutes proportionnelles à une fonction de la vitesse), il existera *d'autres énergies* en jeu comme la dissipation de la chaleur et thermique, la thermodynamique, la physique des rayonnements (électromagnétiques, particulaires…). On utilisera donc au sein de ces disciplines physiques concernées, les dites expressions de telles énergies de manière à étendre la *conservation de l'énergie globale* de différentes origines.

+ Lecture, voir sous Moodle *Les développements de Taylor DL_chap 3.pdf*