Exercices 1 : Ensembles

Exercice n°1

Déterminer les ensembles correspondants aux régions grisées.

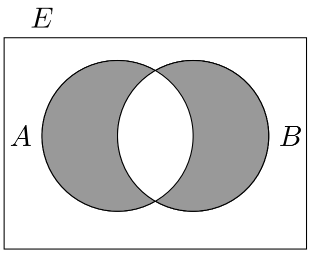


Figure 1

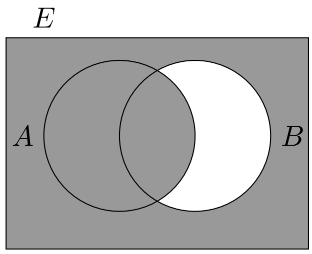


Figure 2

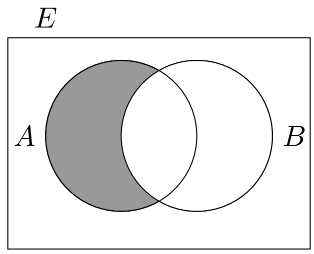


Figure 3

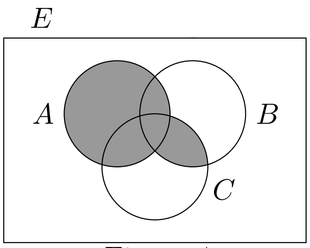


Figure 4

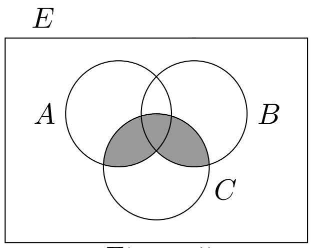


Figure 5

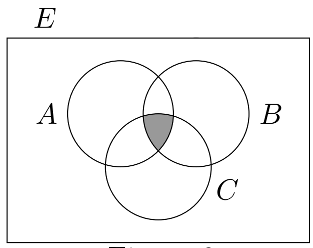


Figure 6

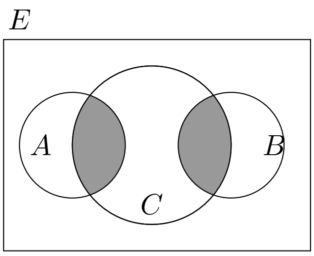


Figure 7

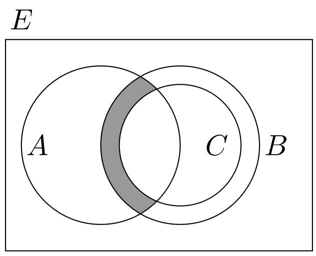


Figure 8

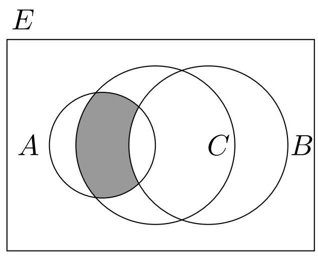
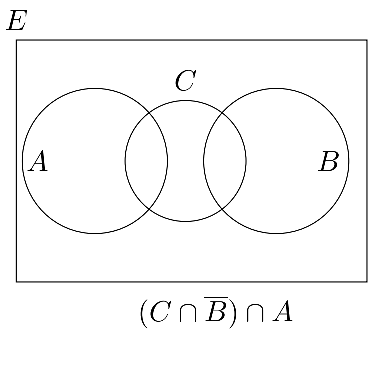


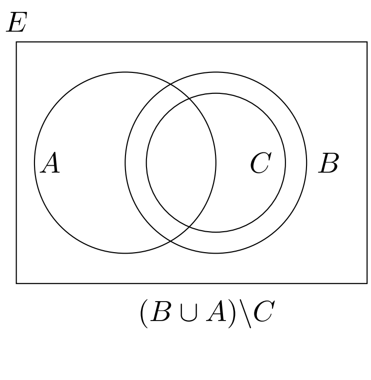
Figure 9

Exercice n°2

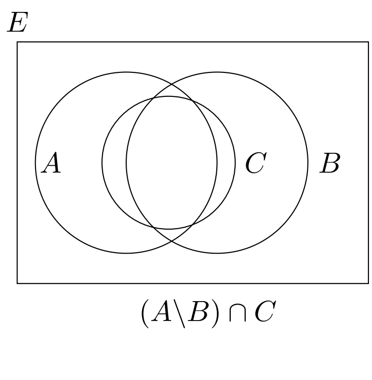
Hachurer les régions correspondant aux expressions données.



$(C \cap \overline{B}) \cap A$



$(B \cup A) \backslash C$



$(A \backslash B) \cap C$

Exercice n°3

Définir les ensembles suivants en compréhension :

1) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ **2)** $B = \{1, 2, 7, 14\}$

Exercice n°4

Définir les ensembles suivants en extension :

1) $A = \{x \in \mathbb{R},\, x(x+5) = 14\}$ **2)** $B = \{x \in \mathbb{N},\, x(2x+3) = 14\}$

Exercice n°5

On considère les ensembles $E = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ et $G = \{1, 3, 5, 9, 11\}$.

1) Expliciter les ensembles $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$.

2) Expliciter $E \cup F \cup G$.

3) A-t-on $E \cap G \subset F$?

Exercice n°6

On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, et les trois parties de E suivantes : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ et $C = \{4, 5, 8, 9\}$. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $\overline{B}$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

Exercice n°7

On considère les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

1) Quelles sont les différentes inclusions entre les ensembles ci-dessus ?

2) Les inclusions sont-elles strictes ? Justifier.

Exercice n°8

Soit E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E.

1) A-t-on $(A \backslash C = B \backslash C) \Longrightarrow A = B$?

2) A-t-on $(A \cap C = B \cap C) \Longleftrightarrow A = B$?

3) A-t-on $(A \cup C = B \cup C) \Longrightarrow A = B$?

Exercice n°9

Soient A, B, C et D des sous-ensembles d'un ensemble E.

1) Montrer que l'on a $(A \cap B) \cup \overline{B} = A \cup \overline{B}$ et $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

2) En déduire que l'on a $E = (C \setminus D) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup D$.

Exercice n°10

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

2) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

3) $[(\overline{A} \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})] \cup [(A \cup B) \cap C]$.

Ensemble des parties

Exercice n°11

Soit E un ensemble. On sait que $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{b\}\}$. Décrire l'ensemble E en extension.

Exercice n°12

Soit E un ensemble. On rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

1) On suppose que $E = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

2) On suppose que $E = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

3) On suppose que $E = \emptyset$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice n°13

Soient E un ensemble à n éléments, où n est un entier naturel. Combien d'éléments a $\mathcal{P}(E)$?

Exercice n°14

Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que, si $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$, alors $E \subset F$.
2. En déduire que, $E = F \iff \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.

Exercice n°15

Soient E un ensemble, A et B les sous-ensembles de E définis par $A = \{1, 2\}$ et $B = \{b\}$.

1) Déterminer $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

2) Déterminer $\mathcal{P}(A \cup B)$.

3) Comparer les ensembles obtenus.

Partitions

Exercice n°16

Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Déterminer parmi les familles d'ensembles suivantes celles qui sont des partitions de E.

(1) $\{\{1, 3, 6\}, \{2, 8\}, \{5, 7, 9\}\}$

(2) $\{\{1, 5, 7\}, \{2, 4, 8, 9\}, \{3, 5, 6\}\}$

(3) $\{\{2, 4, 5, 8\}, \{1, 9\}, \{3, 6, 7\}\}$

(4) $\{\{1, 2, 7\}, \{3, 5\}, \{4, 8, 9\}, \{10, 6\}\}$

Exercice n°17

On considère l'ensemble $E = \{abracadabra, mistigri, oiseau, panda, loto, urubu\}$ et ses sous-ensembles

$$E_a = \{\text{mots de } E \text{ qui contiennent la voyelle } a\}$$
$$E_e = \{\text{mots de } E \text{ qui contiennent la voyelle } e\}$$
$$E_i = \{\text{mots de } E \text{ qui contiennent la voyelle } i\}$$
$$E_o = \{\text{mots de } E \text{ qui contiennent la voyelle } o\}$$
$$E_u = \{\text{mots de } E \text{ qui contiennent la voyelle } u\}$$

A-t-on $E = E_a \cup E_e \cup E_i \cup E_o \cup E_u$? Les ensembles E_a, E_e, E_i, E_o, E_u forment-ils une partition de E ?

Exercice n°18

On note E_0 l'ensemble des entiers naturels multiples de 3, E_1 l'ensemble des entiers naturels dont le reste dans la division par 3 est 1 et E_2 l'ensemble des entiers naturels dont le reste dans la division par 3 est 2.

1) Donner des éléments de E_0, de E_1, de E_2.

2) Les ensembles E_0, E_1, E_2 forment-ils une partition de $\mathbb{N}$?

Exercice n°19

Soient E un ensemble non vide et A_1, A_2, A_3 trois sous-ensembles de E. On suppose que ces sous-ensembles vérifient les conditions suivantes :
P_1 : $A_1 \neq E \quad A_2 \neq E \quad A_3 \neq E$
P_2 : $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_3 = A_2 \cup A_3 = E$
P_3 : $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$
Montrer que la famille $\{\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}\}$ est une partition de l'ensemble E.

Produit cartésien

Exercice n°20

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 2\}$.

1) Déterminer les ensembles $E \times F$ et $F \times E$.

2) Ces ensembles ont-ils le même nombre d'éléments ? Sont-ils égaux ?

Exercice n°21

Dessiner les ensembles suivants

1) $E_1 = [0, 1] \times [-1, 1]$

2) $E_2 = \mathbb{R}_+ \times [0, 5[$

3) $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 2| \leq 1\}$

Exercice n°22

Soient E et F deux ensembles. Un sous-ensemble X de $E \times F$ est-il toujours de la forme $A \times B$, où A appartient à $\mathcal{P}(E)$ et B appartient à $\mathcal{P}(F)$?

Exercice n°23

Soient E et F deux ensembles, A et B deux sous-ensembles de E, et C et D deux sous-ensembles de F. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Sinon, donner un contre-exemple.)

1) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.