Compléments de Mathématiques 2 (CMA2)

CPGE et L2-Post-PACES

Interpolation polynomiale

Julie Coloigner

Cours bâti à partir du polycopié de cours de Marie-Pierre Lebaud disponible à l'adresse https://perso.univ-rennes1.fr/marie-pierre.lebaud/agint/ecrit/analyse-reelle/interpolation/X-interpolation.pdf

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

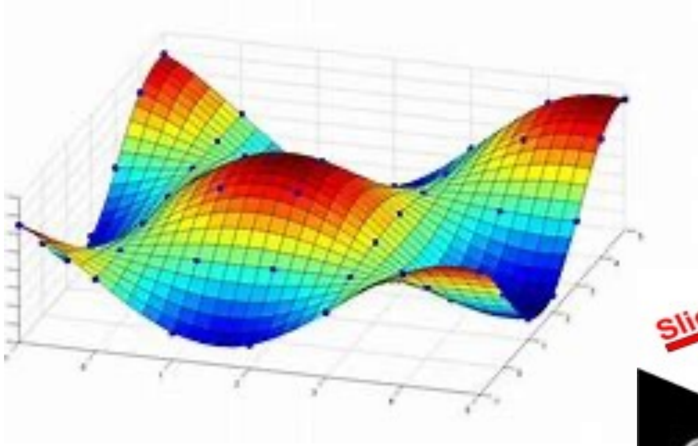
1. Généralités

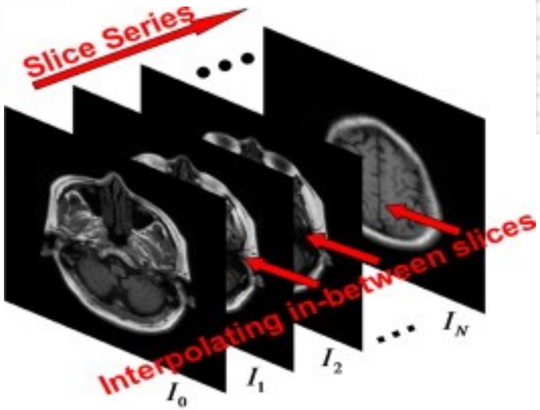
- En analyse numérique, une fonction f inconnue explicitement est souvent
  - connue seulement en certains points points $x_0, x_1, \dots, x_N$
  - ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code coûteux.
- Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, ...) sur la fonction f
- Remplacer une fonction f plus ou moins compliqué par une fonction plus simple, qui coïncide avec la première en un nombre fini de points données au départ.

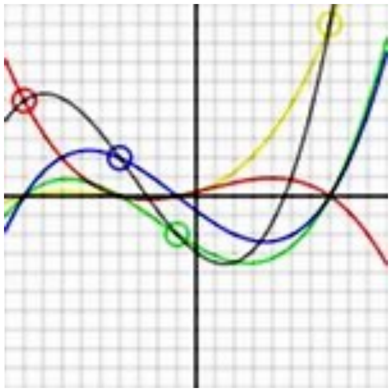
1. Généralités

- Agrandir une image avec Photoshop.

- Prédire la température d'un jour de la semaine connaissant les températures des jours précédents et suivants.

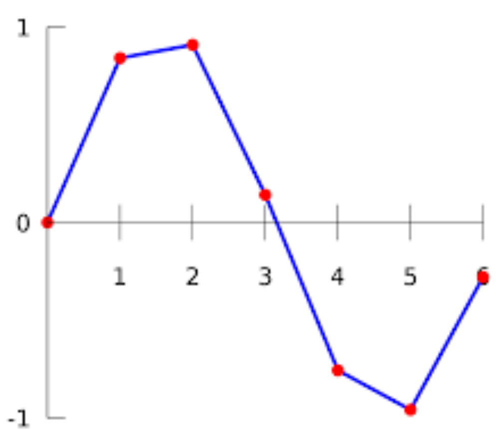


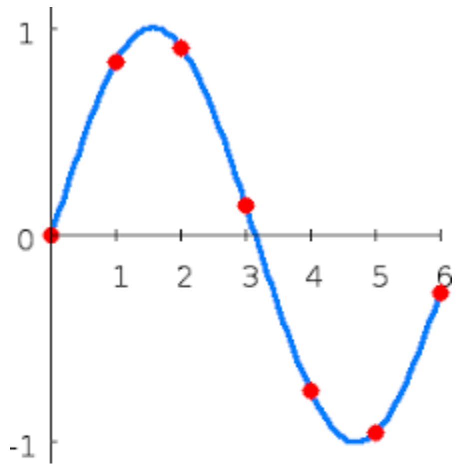




1. Généralités

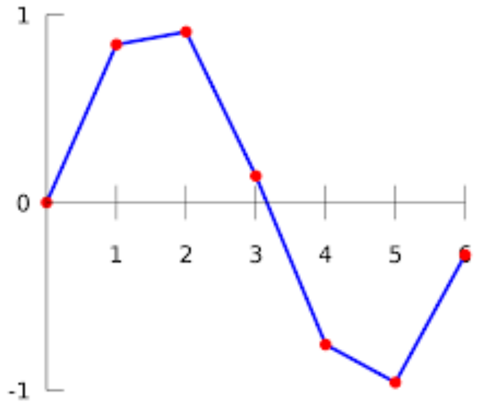
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ et on connait $f(x_i)$ pour tout $i\epsilon\{0,\dots,N\}$ et on veut trouver un polynôme P tel que $P(x_i)$=$f(x_i)$
- P est le polynôme d'interpolation en les points $x_0, x_1, \dots, x_N$
- Il existe différents types d'interpolation : **Interpolation linéaire, interpolation polynomiales, interpolation de Lagrange…**





1. Généralités

- **Interpolation linéaire :** consiste à "joindre les points" données par des segments de droite. Entre deux points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2), l'interpolation est donnée par la formule suivante :

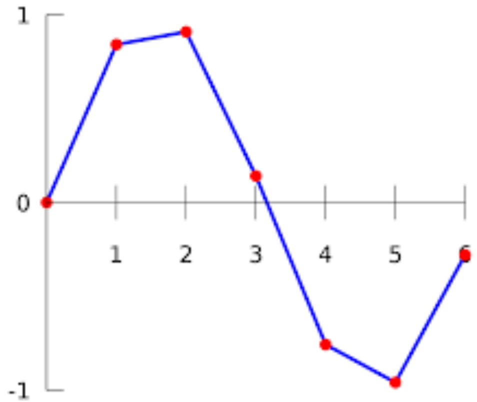


1. Généralités

- **Interpolation linéaire :** consiste à "joindre les points" données par des segments de droite. Entre deux points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2), l'interpolation est donnée par la formule suivante :

$$y = p \times (x - x_1) - y_1$$

avec la pente $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



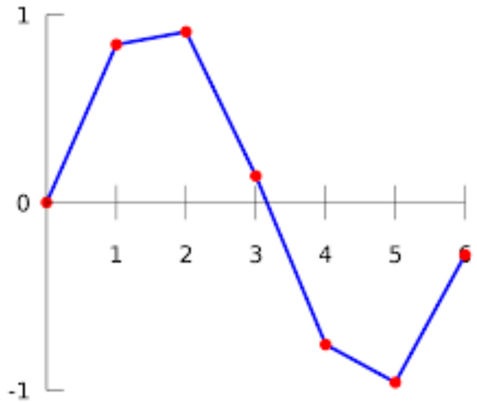
1. Généralités

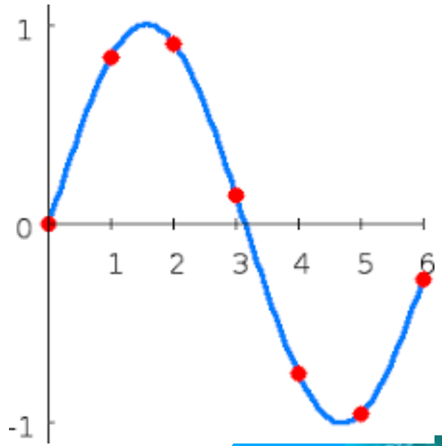
- **Interpolation linéaire :** consiste à "joindre les points" données par des segments de droite. Entre deux points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2), l'interpolation est donnée par la formule suivante :

$$y = p \times (x - x_1) + y_1$$

avec la pente $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- **Interpolation polynômiale :** consiste à utiliser un polynôme unique (et non des tronçons comme précédemment), de degré aussi grand que nécessaire pour estimer localement la courbe d'interpolation.





2. Interpolation polynomiale

- Etant donnés n+1 points d'abscisses distinctes $M_i = (x_i, f(x_i)), i = 0,1, \dots, n$, le problème de **l'interpolation polynomiale** consiste à trouver un polynôme de degré inferieur ou égal à n dont le graphe passe par les N+1 points.
- Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à n.
- Trouver un polynôme $\mathrm{p} \in \mathcal{P}_n$ tel que $p(x_i) = f(x_i), \forall\, i = 0,1 \dots, n$
- p est le polynôme d'interpolation en les points $x_0, x_1, \dots, n$

2. Interpolation polynomiale

- **Cas N=1 (2 points) :** Soient 2 points $M_0 = (x_0, f(x_0))$ et $M_1 = (x_1, F(x_1))$ d'abscisses différentes $x_0 \neq x_1$, on pose $p(x) = \alpha x_1 + \beta$ et on cherche α et β tel que $p(x_0) = f(x_0)$ et $p(x_1) = f(x_1)$ et on obtient simplement :

$$\alpha = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\beta = f(x_0) - \alpha x_0$$

$$p(x) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{1-x_0}(\mathrm{x} - x_0) + f(x_0)$$

- **Cas N=2 (3 points) :** Lorsque 3 points d'abscisses 2 à 2 distinctes et que l'on cherche un polynôme de $\mathcal{P}_2$, le polynôme cherché est une parabole. Mais dans le cas où les 3 points sont alignés, le graphe du polynôme est une droite (cas N=1).

2. Interpolation polynomiale

- **Théorème :** Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ un ensemble de n+1 réels distincts, il existe un et un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $p(x_i) = f(x_i)$, $\forall i = 0, \dots, n$

- **Preuve** : On décompose p dans la base canonique $e_0, e_1, \dots, e_n$ de $\mathcal{P}_n$ définie par $e_i(x) = x^i$ pour tout $i = 0,1, \dots, n$

  On cherche le polynôme p sous la forme p$(x_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$

  On sait alors que p vérifie $p(x_i) = f(x_i), \forall i = 0,1, \dots, n$ ssi

$$\sum_{j=0}^{N} a_j x_i^j = f(x_i), \ \forall i \ \in \{0, \dots, n\}$$

  On obtient un système à $n + 1$ équations et $n + 1$ inconnues $x_0, x_1, \dots, x_n$

2. Interpolation polynomiale

Démonstration :

De façon équivalente, le vecteur des coefficients $a = (a_j)_{j=1,\dots,n}$ est solution du système $Va = y$ où $y = (f(x_j))_{j=0,\dots,N}$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Ce système admet une solution si $\det(V)$ est non nul.

$$\det(\mathrm{V}) = \prod_{n>i>j>0} (x_i - x_j)$$

C'est équivalent à dire que le abscisses d'interpolation x_i sont toutes distinctes.

2. Interpolation de Lagrange

Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ réels donnés **distincts**. On définit $n+1$ polynômes l_i pour $i = 0$ à n par

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Le numérateur de chacun de ces polynômes est un produit de n termes $(x - x_k)$ et est donc un polynôme de degré n. Le dénominateur est une constante. On a donc

i) l_i est un polynôme de degré n
ii) $l_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ et $0 \leq k \leq n$
iii) $l_i(x_i) = 1$.

Montrer que : (ii) $l_i(x_i) = 1$
(iii) $l_i(x_k) = 0$

2. Interpolation de Lagrange

Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ réels donnés **distincts**. On définit $n+1$ polynômes l_i pour $i=0$ à n par

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

Le numérateur de chacun de ces polynômes est un produit de n termes $(x-x_k)$ et est donc un polynôme de degré n. Le dénominateur est une constante. On a donc

i) l_i est un polynôme de degré n
ii) $l_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ et $0 \leq k \leq n$
iii) $l_i(x_i) = 1$.

Théorème 1 : il n'existe qu'un seul polynôme vérifiant les trois propriétés i), ii) et iii).

Théorème 2 : Les *n+1* polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Interpolation de Lagrange

Soit f une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ réels donnés distincts.

Interpoler la fonction f par un polynôme de degré n aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ consiste à résoudre le problème suivant

Problème (1.3) $\begin{cases} \text{Trouver un polynôme } p \text{ de degré } \leq n \text{ tel que} \\ p(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq n. \end{cases}$

Si un tel polynôme existe, il s'écrit de manière unique

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i(x)$$

car les l_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En prenant $x = x_k$ pour $0 \leq k \leq n$ et en utilisant que $l_i(x_k) = 0$ si $k \neq i$ et $l_k(x_k) = 1$, on obtient

$$\alpha_k = p(x_k) = f(x_k).$$

2. Interpolation de Lagrange

Théorème 3 : l'unique solution du problème (3) est donc $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$.

Ce polynôme s'appelle l'interpolant de la fonction *f* de degré *n* aux points x_0, x_1, …, x_n.

Remarque - Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_0, $x_1, \ldots, x_n$ d'un polynôme de degré $\leq n$ est lui-même.

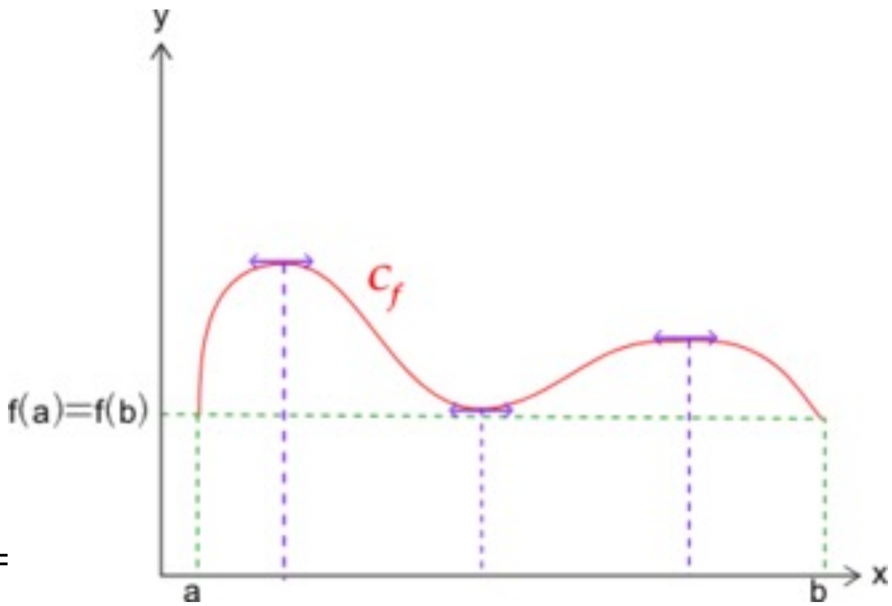
Si l'on prend pour f le polynôme constant égal à 1, d'après la remarque précédente, f est égale à son interpolant et on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

2. Interpolation de Lagrange

Le but de l'interpolation est de remplacer une fonction f plus ou moins compliquée par une fonction plus simple car polynômiale, mais pour justifier cet échange, il nous faut une estimation de l'erreur commise. On rappelle le théorème de Rolle :

Théorème de Rolle : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Exercice : Calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points suivants : $M_0 = [-1,4], M_1 = [2,3]$ et $M_2 = [3,8]$

2. Interpolation de Lagrange

On considère $x, y \in \mathbb{R}^4$ donnés par : $x = [-2, 0, 1, 2]$ et $y = [4, 0, 0, 4]$. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation P aux points x, y (justifiez votre réponse) ?

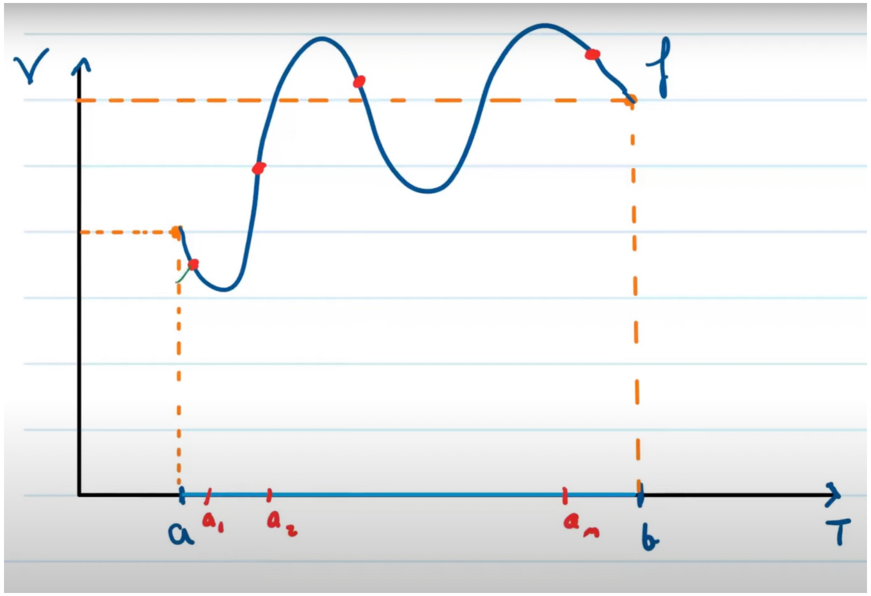
1. $P_1(X) = X^4 - \frac{2}{3}X^3 - 3\,X^2 + \frac{8}{3}X$
2. $P_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$
3. $P_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X.$

2. Interpolation de Lagrange

Estimation de l’erreur d’interpolation

Théorème : On suppose $f \in C^n([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ alors

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi \in [a,b],\ f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

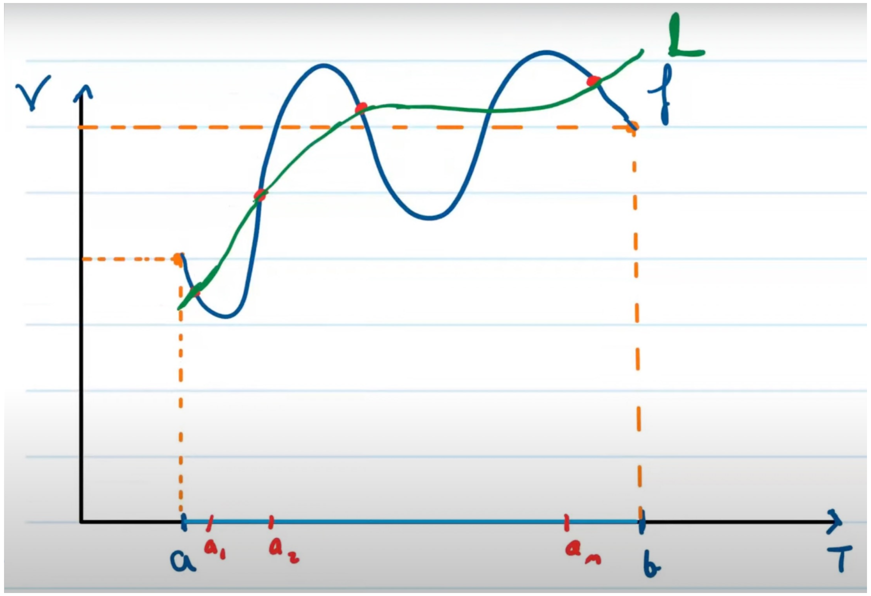


2. Interpolation de Lagrange

Estimation de l’erreur d’interpolation

Théorème : On suppose $f \in C^n([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ alors

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi \in [a,b],\ f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

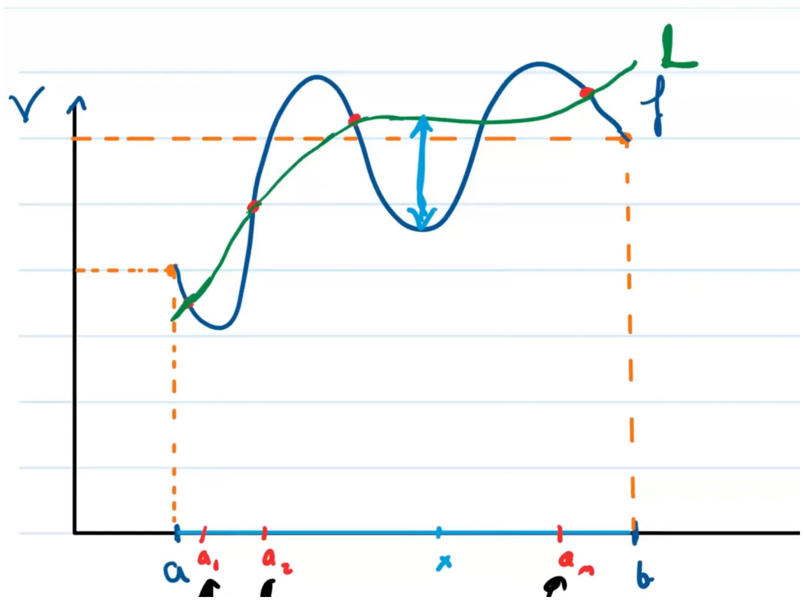


2. Interpolation de Lagrange

Estimation de l'erreur d'interpolation

Théorème : On suppose $f \in C^n([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ alors

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi \in [a,b],\ f(x) - p(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$



2. Interpolation de Lagrange

Estimation de l'erreur d'interpolation

Si $x = x_i$, $f(x_i) = p(x_i)$
Si $x \neq x_i$ posons $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ et

$\mathrm{W}(t) = f(t) - p(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - p(x))$

La fonction W est de classe C^n comme f et s'annule pour $t = x, x_0, x_1, \dots, x_n$, elle admet donc au moins n+2 zéros.

Corollaire : Soit $f \in \mathrm{C}^n([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$, si f admet au moins n+2 zéros distincts sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ alors $f^{(n+1)}$ a au moins un zéro sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

D'après ce corollaire, il existe $\xi \in [a, b]$, $W^{(n+1)}(\xi) = 0$

$$W^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - \frac{(n+1)!}{q(x)}\big(f(x) - q(x)\big)$$

$$W^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{q(x)}\big(f(x) - q(x)\big) = 0$$

2. Interpolation de Lagrange

Estimation de l'erreur d'interpolation

Théorème 4. Si $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, alors on a :

$$\forall x \in [a,b],\ \mid f(x) - P(x) \mid \leq \frac{\mid (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \mid}{(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} \mid f^{(n+1)}(x) \mid .$$

Cette majoration montre que pour une fonction à interpoler f donnée, si nous avons le choix des points d'interpolation dans $[a, b]$, nous avons intérêt à choisir des points de telle sorte que la quantité $|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$ soit minimale. Ceci est réalisé quand les x_i sont les zéros du **polynôme de Chebytshev** d'ordre n. On les appelle les **points de Chebytshev.**

3. Polynômes de Chebyshev

Définition. On appelle polynôme de Chebyshev de degré n le polynôme T_n défini sur $[-1,1]$ par

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)).$$

Considérons la formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$. Pour $\theta \in [0,\pi]$, posons $x = \cos\theta$, alors $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$. On en déduit que

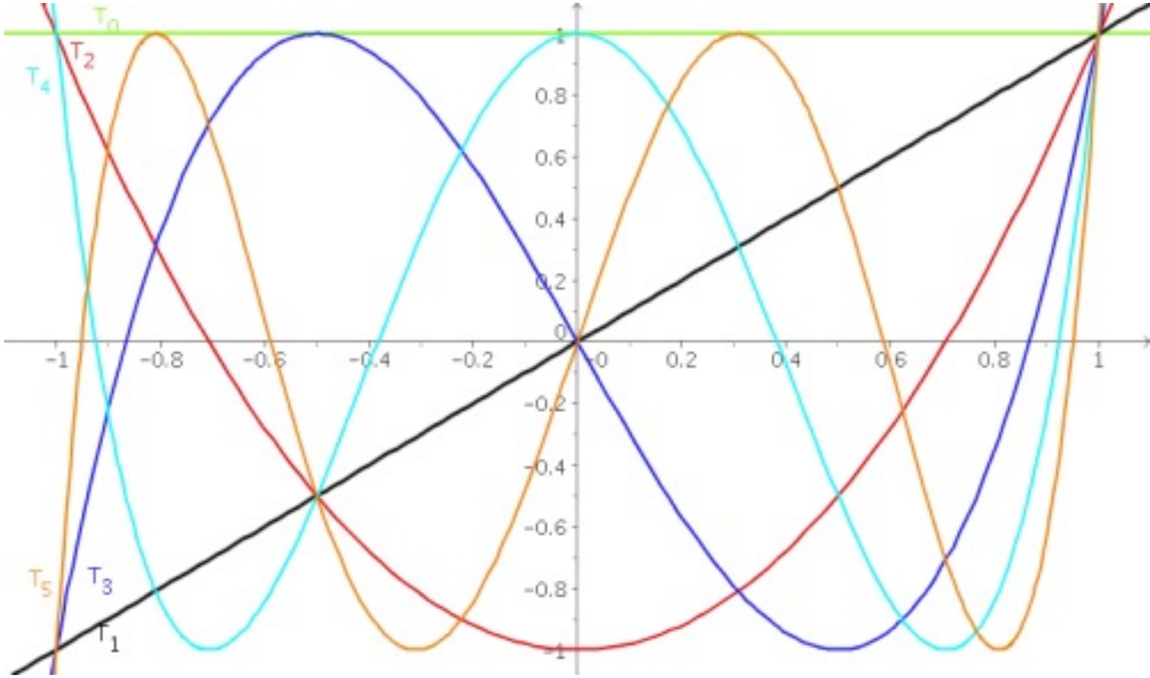
$$\cos n\theta = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^{2i}(-1)^i x^{n-2i}(1-x^2)^i.$$

En particulier T_n est un polynôme de degré n.

3. Polynômes de Chebyshev

Polynôme de Chebychev

n	T_n
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$



3. Polynômes de Chebyshev

Théorème 8. Les polynômes de Chebychev vérifient la relation de récurrence suivante :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Preuve :

$$\cos(n\theta) + \cos\big((n+2)\big) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$$

$$T_n(cos\theta) + T_{n-2}(cos\theta) = 2\cos(\theta)\, T_{n-1}(\theta)$$

Le coefficient du terme en x^n de T_n est 2^{n-1}.

3. Polynômes de Chebyshev

Théorème 13 – T_n a des zéros simples aux n points

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

T_n atteint son extremum sur l'intervalle $[-1, 1]$ aux $n+1$ points

$$x'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

pour lesquels il prend alternativement les valeurs 1 et -1.

3. Polynômes de Chebyshev

Théorème 6. L'erreur d'interpolation minimale est obtenue en prenant les points d'interpolation de Chebychev :

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \text{ pour } k = 0, \ldots, n$$

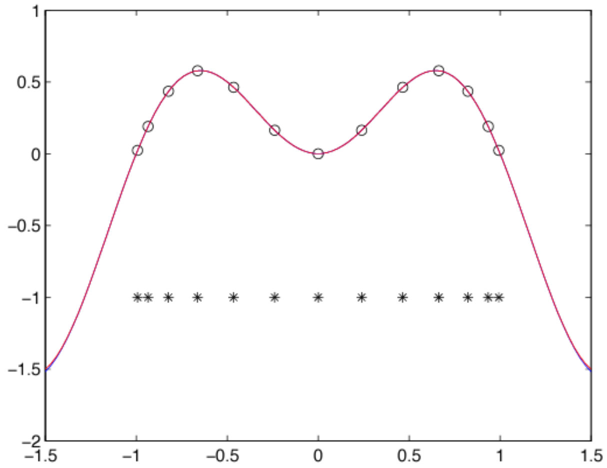
et peut être quantifiée à l'aide de l'inégalité suivante :

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2^n} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

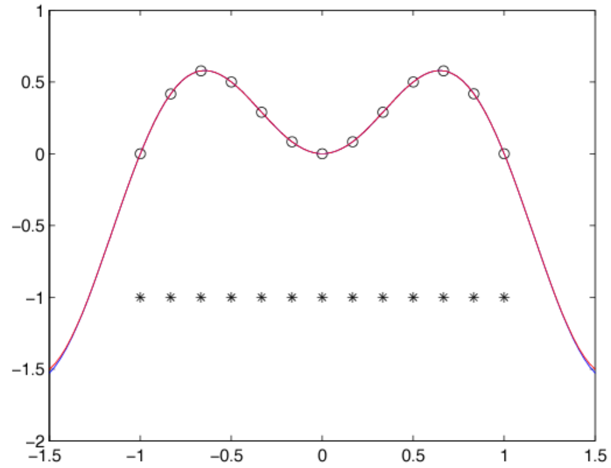
Cette majoration est la plus fine que l'on puisse obtenir.

3. Polynômes de Chebyshev

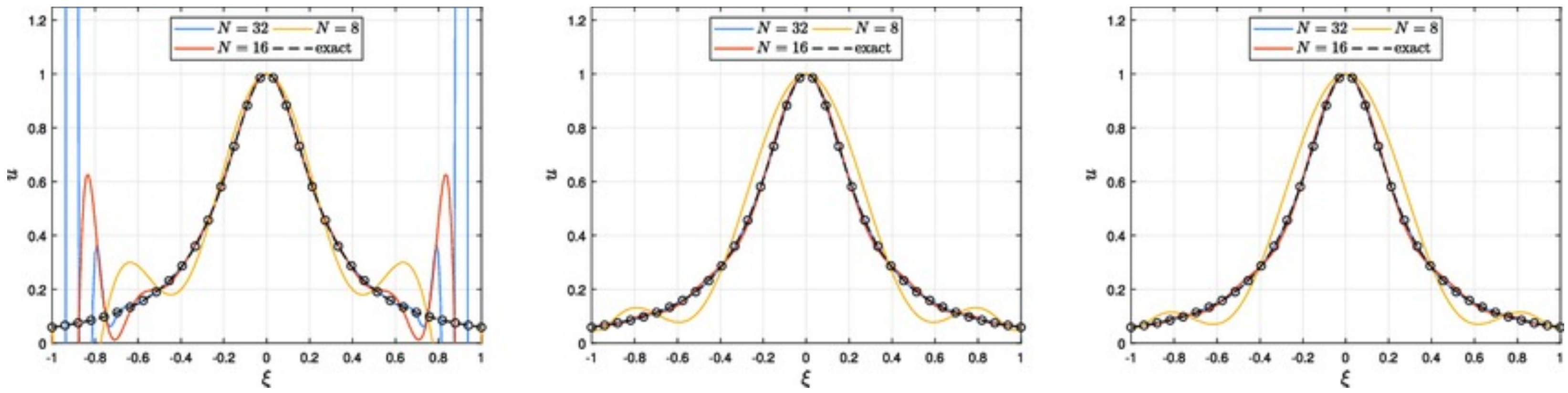
Chebyshev



Équidistants

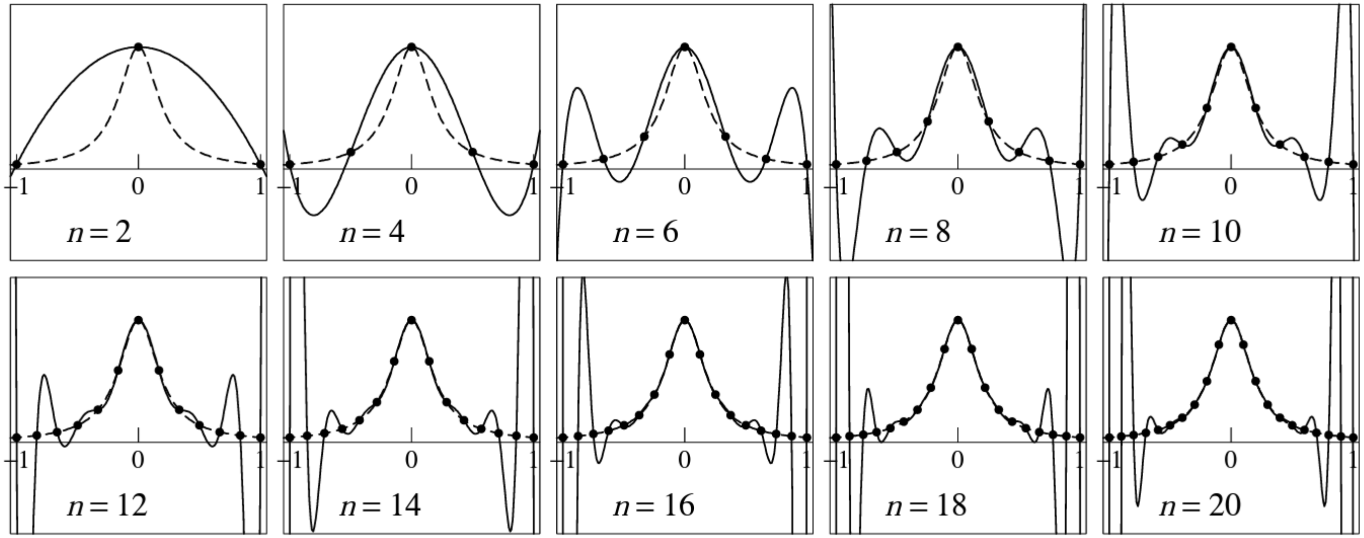


3. Polynômes de Chebyshev



3. Polynômes de Chebyshev

- **Effet de Runge**



4. Polynômes orthogonaux

On se donne une fonction w définie sur $]a, b[$, intégrale sur $[a, b]$ et à valeurs positives ou nulles. Cette fonction est appelée **poids**.
On définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ par la relation

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,dt.$$

A ce produit scalaire, on associe la norme $\|f\|^2 = \int^b [f(t)]^2 w(t)\,dt.$

Définition. On appelle **polynômes orthogonaux** relativement au poids w la suite des polynômes P_0, $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ ayant les propriétés suivantes
1 – Pour tout n, P_n est de degré n et le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.
2 – $(P_0, \ldots, P_n)$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
On admet la proposition suivante

Théorème 7. Quelle que soit la fonction poids *w*, il existe une et unique suite de polynômes orthogonaux.

4. Polynômes orthogonaux

- On prend $a = 1$, b$= -1$ et

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Questions : Montrer que les polynômes de Chebyshev avec la fonction de poids $w(x)$.

4. Polynômes orthogonaux

Exemples : Voici quelques exemples classiques de fonctions poids ω, et le nom des polynômes orthogonaux associés.

- $\star$ $I = [-1,1]$, $\omega(x) = 1$ — *Legendre* — $\mathcal{L}_n(x) = c_n \dfrac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$;
- $\star$ $I =]-1,1[$, $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — *Tchebycheff (1ère espèce)* — $T_n(x) = c_n \cos\big(n\arccos(x)\big)$;
- $\star$ $I =]-1,1[$, $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ — *Tchebycheff (2ème espèce)* — $U_n(x) = c_n \dfrac{\sin\big((n+1)\arccos(x)\big)}{\sin\big(\arccos(x)\big)}$;
- $\star$ $I = [0,+\infty[$, $\omega(x) = e^{-x}$ — *Laguerre* — $L_n(x) = c_n e^x \dfrac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x}x^n\Big)$;
- $\star$ $I = \mathbb{R}$, $\omega(x) = e^{-x^2}$ — *Hermite* — $H_n(x) = c_n(-1)^n e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2/2}\Big)$.