MATHS-S1
CUPGE – ESIR
Calcul propositionnel, quantificateurs et raisonnement

Ahmad Karfoul

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Les grandes lignes

- **Vocabulaires usuels**

- **Introduction au calcul propositionnel**

- **Quantificateurs**

- **Raisonnement**

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Vocabulaires usuels

- **Axiome :** un énoncé supposé évidemment vrai et que l'on ne cherche pas à démontrer (ex. les axiomes d'Euclid, les axiomes de Pano, etc.)

- **Proposition (assertion):** un énoncé qui met en relation des objets mathématiques et on ne peut pas connaître à priori s'il est vraie ou faux.

- **Théorème :** une proposition vraie (connue dans le monde scientifique).

  Remarque : Dans la pratique des mathématiques, le mot proposition est souvent utilisé, par abus de langage, pour désigner un théorème intermédiaire et parfois théorème.

- **Corollaire :** un corollaire à un théorème est une conséquence de ce théorème.

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Vocabulaire usuel

- **Lemme :** un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

- **Conjecture :** une proposition supposée vraie sans parvenir à la démontrer (ex. conjecture de Fermat, conjecture de Bertrand en 1845, etc.).

- **Définition :** un énoncé décrivant la particularité d'un objet (elle énonce comment l'objet est construit).

- **Syntaxe:** un langage non-ambigu pour écrire un énoncé ou un formule

- **Sémantique:** connaître ce qu'il signifie l'énoncé

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **Le calcul propositionnel possède :**
  - **Une syntaxe :** ordre dans lequel les symboles apparaissent
  - **Une sémantique :** interprétation du sens d'un ensemble

- **Proposition élémentaire (atomique) :** une phrase simple dont on peut déterminer dans un contexte si elle est varie ou fausse

- **Variable propositionnelle :** une variable propositionnelle est représentée par une lettre $(a, b, p, q, \cdots)$ qui peut prendre l'une des deux valeurs : **vrai** ou **faux**

- **Connecteur logique:** Cinq connecteurs logiques de base sont définis :
  - $\vee$: la disjonction (l'opérateur ou)
  - $\wedge$: la conjonction (l'opérateur et)
  - $\neg$ (ou $\bar{\ }$) : la négation (l'opérateur non)
  - $\Longrightarrow$: l'implication (l'opérateur si $\cdots$ alors)
  - $\Longleftrightarrow$: l'équivalence

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- Le calcul propositionnel est formé de :

  - Variables propositionnelles (propositions)

  - Connecteurs logiques

  - Symboles auxiliaire (ex. parenthèses (,))

- Les propositions atomiques sont des propositions

- Si A est une proposition, alors $\bar{A}$ (non A) est une proposition

- Si A et B sont des propositions, alors :
  1) $(A \land B)$ (cad. A et B) conjonction
  2) $(A \lor B)$ (cad. A ou B) disjonction
  3) $(A \Rightarrow B)$ (cad. Si A alors B) implication
  4) $(A \Leftrightarrow B)$ (cad. A si et seulement si B) équivalence

  sont aussi des propositions.

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **Exemple :**

  P : S'il fait beau et qu'je n'ai pas un examen à préparer alors je pars à la plage

  - La propositions peut être modélisée sous la forme suivante:
    - Variable propositionnelle A= il fait beau
    - Variable propositionnelle B= j'ai un examen
    - Variable propositionnelle C= je pars à la plage

    La proposition P s'écrit alors : $(A \wedge \bar{B}) \Rightarrow C$

- **Exemple :**

  P : Si je fais du vélo alors c'est une journée sans pluie

  - La propositions peut être modélisée sous la forme suivante:
    - Variable propositionnelle A= je fais du vélo
    - Variable propositionnelle B= journée sans pluie

    La proposition P s'écrit alors : $A \Rightarrow B$

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

Remarque : les symboles auxiliaires (parenthèses et espace) sont utilisés pour lever les éventuelles ambiguïtés

Remarque : on convient de l'ordre de priorité suivant entre les connecteurs :

$\neg$ (ou $\overline{}$) précède $\wedge$ précède $\vee$ précède $\Rightarrow$

- **Exemple :** la proposition $\bar{A} \vee B \wedge \bar{C}$ signifie $(\bar{A}) \vee (B \wedge \bar{C})$

Remarque : Parfois les symboles $\perp$ et $\top$ désignant respectivement faux et vrai sont utilisés (mais il ne sont pas indispensables).

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **Sous-formule :** une proposition atomique de la formule considérée; ou une formule allant d'une parenthèse ouvrante à la fermante qui lui correspond.
  - Les sous-formules immédiates de $(X \wedge Y), (X \vee Y), (X \Rightarrow Y)$ et $(X \Leftrightarrow Y)$ sont X et Y
  - La seule sous-formule immédiate de $\bar{X}$ est X

- **Exemple :** Quelles sont les sous-formules de la proposition suivante

$$F = (p \vee \bar{q}) \wedge \top$$

Solution: $\{F, (p \vee \bar{q}), \top, p, q, \bar{q}\}$

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **Valuation :** Une manière de déterminer la valeur de vérité (vrai ou faux) des variables propositionnelles

  - La valeur de vérité d'une formule complexe n'est fonction que des valeurs de vérités de ses sous-formules

  - La table de vérité est un moyen efficace pour calculer la vérité d'une proposition considérée.

  - **La négation** $(non\ (\neg\ (ou\ \overline{\ })))$:

    Exemple : la proposition $P{:}\ \bar{A}$

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Vrai = 1
Faux = 0

Remarque : $\bar{\bar{A}} \equiv A$ (la double négation)

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **La jonction** ($et\ (\wedge)$) :

  Exemple : la proposition $P: A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **La disjonction** ($ou(\wedge)$) :

  Exemple : la proposition $P: A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

❖ Propriétés des connecteurs ∨ et ∧ : Prenons trois propositions A, B et C quelconques

- Idempotence :

$$A \vee A \equiv A$$
$$A \wedge A \equiv A$$

- Associativité :

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$
$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

- Commutativité :

$$A \vee B \equiv B \vee A$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

- Distributivité :

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- Lois de De Morgan :

$$\overline{(A \vee B)} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$$
$$\overline{(A \wedge B)} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$$

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **L'implication** ($\Rightarrow$) : l'implication signifie que si A (l'hypothèse) alors B (la conclusion).

Exemple : la proposition $P: A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Remarque : l'implication n'est fausse que à la condition : la proposition A (l'hypothèse) est vraie et la proposition B (la conclusion) est fausse.

- **Exemple :** l'énoncé « si tu gagnes le tournoi alors j'arrête mon entraînement » n'est faux que si tu gagnes le tournoi et que je n'arrête pas mon entraînement (c'est-à-dire si $A \wedge \bar{B}$)
- **Exemple :** l'énoncé « si $1 + 0 = 2$ alors la terre est plate » est naturellement vrai puisqu'il faut que $1 + 0 = 2$.

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- Un zoom sur implication

A	B	$\boxed{A \Rightarrow B}$	$\overline{A \Rightarrow B}$	
0	0	1	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A \wedge \bar{B}$
1	1	1	0	

$\overline{A \Rightarrow B} \equiv A \wedge \bar{B}$ alors, $\overline{\overline{A \Rightarrow B}} \equiv \overline{A \wedge \bar{B}}$, alors $A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$

A	B	$\bar{A}$	$\boxed{\bar{A} \vee B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **L'équivalence** ($\Leftrightarrow$) : la proposition A équivaut à B, cad. $A \Leftrightarrow B$ (ou A si et seulement si B), est vraie lorsque les deux propositions A et B sont vraies ou fausses simultanément.

Exemple : La proposition P: $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Exercice :** Montrer que $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

- La contraposition : $A \Rightarrow B \equiv \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (Démonstration???)

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

Remarque : Quand la proposition "$P \Rightarrow Q$" est vraie, on dit que P est une condition suffisante pour Q (il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie). On dit aussi que Q est une condition nécessaire pour P (il faut que Q soit vraie pour que P soit vraie).

Remarque : Quand la proposition "$P \Leftrightarrow Q$« est vraie, on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q soit vraie.

- **Exemple :** le quadrilatère ABCD est un losange ⇒ le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

❑ **Modèle d'une proposition :** un modèle d'une proposition P est une valuation notée ν telle que $\nu(P) = vrai$ (ou $\nu \vDash P$). La notation $mod(P)$ désignera l'ensemble des modèles de P.

- **Exercice :** Soient p, q et s trois variables propositionnelles. Trouver l'ensemble $mod((p \vee s) \wedge (q \vee \bar{s}))$

Remarque : les formules A et B sont équivalentes, $(A \equiv B)$, lorsqu'ils ont les mêmes modèles, $mod(A) = mod(B)$.

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **Une tautologie :** La tautologie est une proposition composée (formule) qui est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions simples qui la composent. La notation $\vDash P$ signifie que la proposition P est une tautologie.

  - **Exemple :** les propositions suivantes sont des tautologies:

$$\bar{\bar{A}} = A\,, \qquad \overline{(A \wedge \bar{A})}, \qquad (A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A), \qquad (A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$$

- Une formule P est dite satisfaisable s'il existe une valuation, ν, qui le rend vraie. On note $v \vDash P$.

- Une formule P est dite falsifiable s'il existe une valuation, ν, qui le rend fausse.

- Une formule P est dite valide s'il existe une valuation, ν, qui satisfait P.

- Une formule P est dite contradictoire s'elle n'est pas satisfaisable.

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Calcul propositionnel

- **Exemple :**

Formule	**Satisfaisable**	**Valide**	**Falsifiable**	**Contradictoire**
$A \vee B$	Oui	Non	Oui	Non
$A \vee \bar{A}$	Oui	Oui	Non	Non
$A \wedge \bar{A}$	Non	Non	Oui	Oui

ahmad.karfoul@univ-rennes.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu