XVI.Fonction caractéristique

- **Définition :** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé fondamental et X une VA réelle définie sur Ω. On appelle fonction caractéristique de X la fonction Φ_X définie sur R par :

$$\forall \nu \in \mathbb{R} \ \ \Phi_X(\nu) = \mathrm{E}(e^{i\nu \mathrm{X}})$$

$$\Phi_X(\nu) = \mathrm{E}\left(e^{i\nu \mathrm{X}}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\nu X} P(X = k)$$

La fonction caractéristique est une manière efficace de **caractériser la loi de probabilité** de la VA. Il est claire que cette fonction est, par définition, directement liée à la loi de probabilité de la VA considérée. Connaître la fonction caractéristique permet **alors** de déterminer la loi de probabilité de la VA.

XVI. Fonction caractéristique

- **Théorème :** Soient X et Y deux VAs ayant les mêmes fonctions caractéristiques, alors X et Y admettent les mêmes lois de probabilité. $\Phi_X = \Phi_Y \Leftrightarrow p_X = p_Y$

→ **La fonction caractéristique caractérise la loi d'une VA.**

Exemple : Si X et Y sont indépendantes à fonctions caractéristiques Φ_X et Φ_Y connues alors $\Phi_{X+Y} = \Phi_X \, \Phi_Y$ → on a caractérisé X+Y

- **Théorème :** Soit X une VA réelle admettant un moment d'ordre n $(n \geq 1)$, alors Φ_X est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et:

$$\forall k \leq n, \, \mathrm{E}(X^k) = (-i)^k \, \Phi_X^{(k)}(0)$$

Il est alors évident le lien direct entre la fonction caractéristique et le moment d'ordre k d'une VA réelle

XV. Convergence des variables aléatoires

- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires X_n **converge presque sûrement** vers une variable aléatoire X, si, pour presque tout événement $\omega \in \Omega$:

$$X_n(\omega) \to X(\omega)$$

- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires X_n **converge en probabilités** vers une variable aléatoire X, si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires X_n **converge en moyenne d'ordre r**, $r > 0$ vers une variable aléatoire X, si :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) = 0$$

- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires X_n de fonction de répartition F_{X_n} **converge en loi** pout tout x vers une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X, si :

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$$

XVI.Loi de probabilité conjointe

Si X et Y deux VAs discrètes, la distribution de probabilité décrivant leur comportement simultané est appelée **loi de probabilité conjointe**, parfois appelée la loi bivariée (distribution bivariée)

Définition : La loi de probabilité conjointe de deux VAs **discrètes** X et Y vérifie les propriétés suivantes

$$1)\ P_{X,Y}(x,y) \geq 0$$

$$2)\ \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{X,Y}(x,y) = 1$$

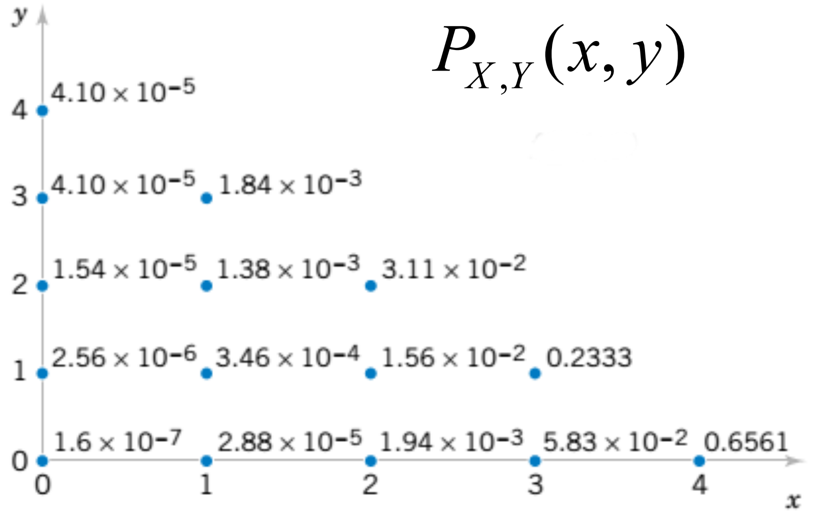
$$3)\ P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

XVI.Loi de probabilité conjointe

Ex. Dans un système de communications, un nouveau récepteur est en cours de fabrication. Chaque bit reçu pourra avoir les possibilités suivantes :

1. Accepté avec probabilité 0.9
2. Suspect avec probabilité 0.08
3. Erroné avec probabilité 0.02

Dans l’envoi de 4 bits, on définit les VA suivantes:
X : no. de bits acceptés
Y : no. de bits suspects



ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

XVI.Loi de probabilité conjointe

Loi marginale d'une VA : Si X et Y deux VAs discrètes de loi de probabilité conjointe $P_{X,Y}(x,y)$, alors les lois marginales de X et de Y sont :

$$1)\ P_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{X,Y}(x,y)$$

$$2) P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P_{X,Y}(x,y)$$

Ex. La loi marginale de X est définie lorsqu'on est capable de déterminer la probabilité de chaque valeur de X:

$$P(X=1) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) + P(X=1, Y=4)$$