Quantificateurs

- **Un prédicat :** Une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction d'une (ou plusieurs) variable(s)
- **Le quantificateur universel « pour tout $\forall$ » :** la proposition « Pour tout les éléments x de $\mathbb{K}$, la proposition $P(x)$ est vraie », s'écrit en abrégé: $\forall x \in \mathbb{K}, P(x)$
- **Le quantificateur existentiel « il existe $\exists$ » :** la proposition « il existe au moins un élément x de $\mathbb{K}$ tel que la proposition $P(x)$ est vraie », s'écrit en abrégé: $\exists x \in \mathbb{K}, P(x)$
- **Le quantificateur de la valeur unique « $\exists!$ » :** la proposition « il existe un et un seul élément x de $\mathbb{K}$ tel que la proposition $P(x)$ est vraie », s'écrit en abrégé: $\exists! \, x \in \mathbb{K}, P(x)$
  - **Exemple :** la proposition « f est la fonction nulle » (f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

  - **Exemple :** la proposition « la fonction f s'annule une fois sur $\mathbb{R}$ »

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

Remarque : Montrer qu'il existe un élément x de $\mathbb{K}$ vérifiant une certaine propriété, c'est fournir explicitement un tel élément.

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Quantificateurs

❖ **Théorème :** Soient $\mathbb{K}$ un ensemble et $P(x)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction de $x \in \mathbb{K}$. Alors:

1. $\overline{(\forall x \in \mathbb{K}, P(x))} \Leftrightarrow \left(\exists x \in \mathbb{K}, \overline{P(x)}\right)$
2. $\overline{(\exists x \in \mathbb{K}, P(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{K}, \overline{P(x)})$

Remarque : la négation de ∀ est ∃, et la négation de ∃ est ∀.

- **Exemple :** la négation de :

   1. "$\exists z \in \mathbb{C}, z^2 + z + 1 = 0$" est "$\forall z \in \mathbb{C}, z^2 + z + 1 \neq 0$"

   2. "$\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \in \mathbb{Z}$" est "$\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \notin \mathbb{Z}$"

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Quantificateurs

❖ **Théorème :** Soient $\mathbb{K}$ un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dont les valeurs de vérité sont fonction $x \in \mathbb{K}$. Alors:

1. $\big(\forall x \in \mathbb{K}, P(x) \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow \Big(\big(\forall x \in \mathbb{K}, P(x)\big) \wedge \big(\forall x \in \mathbb{K}, Q(x)\big)\Big)$

2. $\big(\forall x \in \mathbb{K}, P(x) \vee Q(x)\big) \underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} \Big(\big(\forall x \in \mathbb{K}, P(x)\big) \vee \big(\forall x \in \mathbb{K}, Q(x)\big)\Big)$

3. $\big(\exists x \in \mathbb{K}, P(x) \wedge Q(x)\big) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \Big(\big(\exists x \in \mathbb{K}, P(x)\big) \wedge \big(\exists x \in \mathbb{K}, Q(x)\big)\Big)$

4. $\big(\exists x \in \mathbb{K}, P(x) \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow (\big(\exists x \in \mathbb{K}, P(x)\big) \vee (\exists x \in \mathbb{K}, Q(x)))$

- **Remarque :**
  - "∀" est distribuable sur "∧" et "∃" est distribuable sur "∨"
  - "∀" n'est pas distribuable sur "∨" et "∃" n'est pas distribuable sur "∧"

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

Quantificateurs

- **Exercice :** Ecrire avec les quantificateurs les proposition suivantes:

  - Tout entier naturel est pair ou impair.
  - La fonction f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
  - La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$

❖ **Théorème :** Soient $\mathbb{K}$ un ensemble et $P(x, y)$ une proposition dont les valeurs de vérité sont fonction de deux variables x et y de $\mathbb{K}$. Alors:

1. $\big((\forall x \in \mathbb{K}), (\forall y \in \mathbb{K}), P(x, y)\big) \Leftrightarrow \big((\forall y \in \mathbb{K}),\ (\forall x \in \mathbb{K}), P(x, y)\big)$

2. $\big((\exists x \in \mathbb{K}), (\exists y \in \mathbb{K}), P(x, y)\big) \Leftrightarrow \big((\exists y \in \mathbb{K}),\ (\exists x \in \mathbb{K}), P(x, y)\big)$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Quantificateurs

❖ **Théorème :** Soit $P(x, y)$ une proposition dont les valeurs de vérité dépendent de deux variables x, y de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\exists x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}, P(x, y) \nLeftrightarrow \forall y \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, P(x, y)$$

- **Remarque :**
  - Permutation possible entre quantificateurs de même nature
  - Permutation impossible entre quantificateurs de natures différentes

- **Remarque :**
  - $\exists x \in \mathbb{K}, \forall y \in \mathbb{K}$ signifie que l'élément x de $\mathbb{K}$ est fourni une fois pour toutes les éléments y de $\mathbb{K}$. Dans ce cas, x est constant quand y varie.
  - $\forall y \in \mathbb{K}, \exists x \in \mathbb{K}$ signifie que l'élément x est fourni pour chaque y. Dans ce cas, x varie quand y varie.

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Quantificateurs

- **Exercice :** Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des enfants d'une colonie de vacances et $\mathbb{D}$ l'ensemble des desserts proposés. Ecrire en langage courant les propositions suivantes :

   1) $\forall e \in \mathbb{E}, \exists d \in \mathbb{D}, e$ aime d (Signification ???)

   2) $\exists e \in \mathbb{E}, \forall d \in \mathbb{D}, e$ aime d (Signification ???)

   3) $\forall d \in \mathbb{D}, \exists e \in \mathbb{E}, e$ aime d (Signification ???)

   4) $\forall d \in \mathbb{D}, \forall e \in \mathbb{E}, e$ aime d (Signification ???)

- **Exercice :** Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
  - La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$ (f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
  - La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$
  - $\mathbb{A} = \Phi$ ($\mathbb{A}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, Φ est l'ensemble vide)
  - $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ ($\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont sous-ensembles de $\mathbb{N}$)

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Raisonnement

- **Raisonnement direct :** Pour montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie et on cherche à montrer que Q est vraie.

- **Exercice :** Montrer que "$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$" ($\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels)

Solution :

- P : "$a, b \in \mathbb{Q}$“ , Q: "$a + b \in \mathbb{Q}$"
- $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = \frac{p_1}{q_1}$, $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = \frac{p_2}{q_2}$ avec $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}^*$
- $a + b = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$
- mais comme $p_1 q_2 + p_2 q_1 \in \mathbb{Z}$ et $q_1 q_2 \in \mathbb{N}^*$, alors $a + b \in \mathbb{Q}$ donc la proposition Q est vraie.
- Conclusion, l'assertion "$a, b \in \mathbb{Q}$" $\Rightarrow$ "$a + b \in \mathbb{Q}$" est vraie.

- **Exercice :** Montrer l'assertion suivante: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x \Rightarrow |x| = x$"

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

Raisonnement

- **Raisonnement par contraposition :** Pour montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, nous montrons que l'assertion $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie.

  - **Remarque :** le raisonnement par contraposition est basé sur le fait que les assertions "$P \Rightarrow Q$" et "$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$" ont la même valeur de vérité. En plus, il est utilisé lorsque le "$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$" est plus facile à démontrer que "$P \Rightarrow Q$" ou encore lorsque l'assertion $\bar{Q}$ est plus facile à formaliser.

  - **Exercice :** Montrer l'assertion suivante: "$\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 est\ impair \Rightarrow n\ est\ impair$"

- **Raisonnement par l'absurde :** Pour montrer qu'une assertion P est vraie, à partir de certaines hypothèses, nous supposons que l'assertion P est fausse (donc $\bar{P}$ est vraie) et nous essayons de trouver, avec les hypothèse de départ, une contradiction.

  - **Exercice :** Montrer que c'est impossible de diviser par zéro.

  - **Exercice :** Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$ avec $a, b \geq 0$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Raisonnement

- **Raisonnement par disjonction de cas :** Pour montrer la véracité d'une assertion P pour tout x dans un ensemble $\mathbb{K}$, on montre l'assertion pour une partie $\mathbb{A}$ de $\mathbb{K}$, puis pour tout x n'appartient pas à $\mathbb{A}$.
  - **Remarque :** le raisonnement par disjonction de cas est souvent utilisé pour vérifier des assertions dépendant des valeurs absolues (cad., le raisonnement dépend du signe de la quantité à l'intérieur de la valeur absolue)

  - **Exercice :** Montrer l'assertion suivante: "$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x\hat{}2 - x + 1$"

Solution :

1. On montre l'inégalité pour $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$:

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - x + 1 = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| \leq x^2 - x + 1 \text{ pour } x \geq 1$$

Raisonnement

- **Raisonnement par disjonction de cas :** Pour montrer la véracité d'une assertion P pour tout x dans un ensemble $\mathbb{K}$, on montre l'assertion pour une partie $\mathbb{A}$ de $\mathbb{K}$, puis pour tout x n'appartient pas à $\mathbb{A}$.
  - **Remarque :** le raisonnement par disjonction de cas est souvent utilisé pour vérifier des assertions dépendant des valeurs absolues (cad., le raisonnement dépend du signe de la quantité à l'intérieur de la valeur absolue)

- **Exercice :** Montrer l'assertion suivante: "$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$"

Solution :

1. On montre l'inégalité pour $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$:

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - x + 1 = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| \leq x^2 - x + 1 \text{ pour } x \geq 1$$

2. On montre l'inégalité pour $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$:

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + x - 1 = x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| \leq x^2 - x + 1 \text{ pour } x < 1$$

Donc, $|x-1| \leq x^2 - x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Raisonnement

- **Raisonnement par récurrence:** Il est applicable lorsque l'assertion considérée dépend d'un entier naturel, $n \in \mathbb{N}$. Les démarches à suivre sont les suivantes:

  1. Etablir que l'assertion est vraie aux faibles rangs (cad., pour $n = 0, 1, 2$ selon le cas)

  2. Montrer que si l'assertion est vraie au rang n, alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$

  3. Si les étapes 1 et 2 sont vérifiées, alors conclure que l'assertion proposée est vraie pour tout rang n.

- **Exercice :** Montrer l'assertion suivante: " $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \; \forall n \in \mathbb{N}^*$ "

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

Bibliographie

- R. David, K. Nour, C, Raffalli, *Introduction à la logique – théorie de la démonstration*, Dunod, 2001.
- M. Ben-Ari, *Mathematical logic for computer science*. Springer Science & Business Media, 2012.
- H. B. Enderton, *A mathematical introduction to logic* (1st edition). Academic Press Second edition, 2001
- Le cours de Sophie Pinchinat (https://people.irisa.fr/Sophie.Pinchinat/)

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu