Cours 2 : Applications

1 Relations binaires et fonctions

Définitions - Soient E et F deux ensembles non vides. Une relation binaire $\Re$ de E vers F est la donnée d'un sous-ensemble Γ du produit cartésien $E \times F$. On dit que E est la source, F le but et Γ est le graphe de la relation. Lorsque $E = F$, on dit que $\Re$ est une relation dans E.
Soient $x \in E$ et $y \in F$, lorsque $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\Re y$.
On a donc :

$$\boxed{\Gamma = \{(x, y) \in E \times F / \ x\Re y\}.}$$

Notations :
On note (E, F, Γ) ou simplement $(E\Re F)$ la relation de E vers F définie par Γ. Lorsque $E = F$, on note (E, Γ) ou $(E, \Re)$ la relation dans E définie par Γ.

Définitions - Soient E et F deux ensembles non vides. Une fonction f de E dans F est la donnée d'une relation (E, F, Γ) de E vers F qui vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } E\text{, il existe } \textbf{au plus} \text{ un élément } y \text{ de } F \text{ tel que } (x, y) \in \Gamma.}$$

On dit alors que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f. On dit aussi que E est l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de F. On appelle ensemble de définition de la fonction f l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f. On le note $\mathcal{D}_f$.
On a donc

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \{x \in E, \exists\ y \in F / \ (x, y) \in \Gamma\}}$$

Notations :
Soit $x \in E$ et $y \in F$ tels que $(x, y) \in \Gamma$, on note alors $y = f(x)$, et la fonction f de E dans F se note

$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

ou parfois simplement $f : x \longmapsto f(x)$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \{x \in E, \exists\ y \in F / \ y = f(x)\}}$$

Définition - Soient E et F deux ensembles non vides, f une fonction de E dans F et E' un sous-ensemble de E. La restriction de f à E' est la fonction qui à tout élément x de E' associe l'élément $f(x)$. On la note $f_{|E'}$.

Définition - Soient E, F et G trois ensembles non vides tels que $E \subset G$. Soient f une fonction de E dans F et g une fonction de G dans F. On dit que la fonction g est le prolongement de la fonction f à G si la fonction f est la restriction de g à E : $g_{|E} = f$.

2 Applications

Définition - Soient E et F deux ensembles non vides. Une fonction f de E dans F est une application de E dans F si elle vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de } E, \text{ il existe } \textbf{un unique} \text{ élément } y \text{ de } F \text{ tel que } y = f(x).}$$

Remarques :

1. Une application est une fonction dont le domaine de définition est égal à l'ensemble de départ. Ainsi la restriction d'une fonction à son domaine de définition est une application. (Ce qui fait que l'on identifie parfois les deux notions.)
2. Soit E un ensemble non vide, l'application de E dans E définie par $f(x) = x$, $\forall x \in E$, est appelée « idéntité » de E et notée $Id_{|E}$.
3. Deux applications f et g sont égales, si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F et si $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Définition - Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G. On appelle composée des applications f et g l'application de E dans G, notée $g \circ f$, définie par

$$\boxed{\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).}$$

Remarque :
Même lorsque $E = F = G$, on a en général $g \circ f \neq g \circ f$.

Proposition - Soit $f : E \to F$ une application, on a :

$$\boxed{Id_{|F} \circ f = f \quad \text{et} \quad f \circ Id_{|E} = f.}$$

Proposition - Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications, on a :

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.}$$

Remarques :

1. On peut donc noter $h \circ g \circ f$ sans utiliser de parenthèse.
2. On définit f^n pour tout entier naturel n par récurrence sur n :
   a) Si $n = 0$, alors $f^n = Id_{|E}$.
   b) Si $n \geq 1$, alors $f^n = f \circ f^{n-1}$.

3 Image directe, image réciproque

Définition - Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. L'image directe de A par f, notée $f(A)$, est l'ensemble des images pas f des éléments de A.

$$\boxed{f(A) = \{y \in F/\ \exists x \in A/\ y = f(x)\} \ = \ \{f(x), x \in A\}.}$$

Proposition - Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. $f(\emptyset) = \emptyset$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \ \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap B) \ \subset f(A) \cap f(B)$.

Remarque :
En général on n'a pas $f(A) \cap f(B) \ \subset f(A \cap B)$.

Définition - Soit B un sous-ensemble de F. L'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est l'ensemble des antécédents pas f des éléments de B.

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E/\ f(x) \in B\}.}$$

Proposition - Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $\forall A \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(C_F(A)) = C_E(f^{-1}(A))$.
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(F)^2,\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(F)^2,\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Remarques :

1. $f(A)$ est un sous-ensemble de F et $f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E.
2. L'image d'un singleton est un singleton : si $x \in E$, alors $f(\{x\}) = \{f(x)\}$. Mais pour $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ peut avoir plusieurs éléments.

Proposition - Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.

4 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définitions - Soient E et F deux ensembles non vides. Une application f de E dans F :

1. est injective, si deux éléments dixtincts de E ont des images distinctes dans F.
$$\boxed{\forall (x,x') \in E \times E,\ (x \neq x') \ \Rightarrow (f(x) \neq f(x')).}$$
2. est surjective, si tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E.
$$\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E/\ y = f(x).}$$
3. est bijective, si elle est à la fois injective et surjective. C'est à dire, si tout tout élément de F a un unique antécédent par f dans E.
$$\boxed{\forall y \in F,\ \exists \text{ un unique } x \in E/\ f(x) = y.}$$

Remarques :

1. f est injective ssi $\forall (x,x') \in E \times E,\ (f(x) = f(x')) \ \Rightarrow (x = x')$. (Contraposée)
2. f est surjective ssi $f(E) = F$.

Proposition - Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Définition - Proposition - Soient E et F deux ensembles non vides et soit $f : E \to F$ une application.

1. L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que
$$\boxed{g \circ f = Id_{|E} \text{ et } f \circ g = Id_{|F}.}$$
2. L'application g est alors appelée application réciproque de f et notée f^{-1}.

Proposition -

1. Si l'application $f : E \to F$ est bijective, alors sa réciproque f^{-1} l'est aussi et on a
$$\boxed{(f^{-1})^{-1} = f.}$$
2. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications bijectives, alors $g \circ f$ l'est aussi et on a
$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.}$$