IV. Probabilité conditionnelle

Théorème : Soit $\{A_i; i \in I\}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un événement. Alors

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(B/A_i)$$

Cette formule, dite **formule de la probabilité totale**, permet de calculer la probabilité d'un événement B en le décomposant suivant un système complet d'évènements.

IV. Probabilité conditionnelle

Formule de Bayes :

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet et A un évènement de probabilité non nulle. Supposons connues les quantités $P(A|A_n)$ et $P(A_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{F}, P(A_n|A) = \frac{P(A|A_n)P(A_n)}{\sum_{j\in\mathbb{N}} P(A|A_j)P(A_j)}$$

Remarque 10 :

La formule de Bayes est souvent utilisée dans le contexte de la recherche de la cause la plus probable parmi un ensemble de causes responsables d'une conséquence observée.

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

IV. Probabilité conditionnelle

Un individu est tiré au hasard dans une population où l'on trouve une proportion de 10^{-4} de séropositifs. On lui fait passer un test de détection de la séropositivité. Par ailleurs, des expérimentations antérieures ont permis de savoir que les probabilités d'avoir un résultat positif lors de l'application du test, si l'individu est séropositif ou s'il ne l'est pas, sont respectivement égales à 0.99 et 0.001. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité pour que l'individu soit effectivement séropositif?

IV. Probabilité conditionnelle

Un individu est tiré au hasard dans une population où l'on trouve une proportion de 10^{-4} de séropositifs. On lui fait passer un test de détection de la séropositivité. Par ailleurs, des expérimentations antérieures ont permis de savoir que les probabilités d'avoir un résultat positif lors de l'application du test, si l'individu est séropositif ou s'il ne l'est pas, sont respectivement égales à 0.99 et 0.001. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité pour que l'individu soit effectivement séropositif?

Solution :

Soit **A** l'évènement que **le résultat est séropositif**. Soient **B1** l'évènement que **l'individu est séropositif** et **B2** celui que **l'individu n'est pas séropositif**. On alors $P(A|B_1)=0.99$ et $P(A|B_2)=0.001$. D'où

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1)P(B_1)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2)} = \frac{0.99 \times 10^{-4}}{0.99 \times 10^{-4} + 0.001 \times (1 - 10^{-4})} = 0.09$$

V. Définition classique de la probabilité

- La probabilité $P(A)$ d'un événement A est calculée en comptant le nombre de cas favorables observés dans une expérience répétée N fois

- Si le nombre de cas favorables est égale à N_A, alors la probabilité de l'événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Cette définition est valable uniquement dans le cas équiprobable

V. Définition classique de la probabilité

Ex. Une expérience aléatoire consiste à lancer trois fois une pièce équilibrée, qu'elle est la probabilité d'obtenir une face au deuxième jet sachant qu'une face est apparue lors du premier jet?

V. Définition classique de la probabilité

Ex. Une expérience aléatoire consiste à lancer trois fois une pièce équilibrée, qu'elle est la probabilité d'obtenir une face au deuxième jet sachant qu'une face est apparue lors du premier jet?

Solution : Commençons par construire l'espace fondamental Ω

$$\Omega = \{\{f,f,f\},\{f,f,p\},\{f,p,f\},\{p,f,f\},\{p,p,p\},\{p,p,f\},\{p,f,p\},\{f,p,p\}\}$$

V. Définition classique de la probabilité

Ex. Une expérience aléatoire consiste à lancer trois fois une pièce équilibrée, qu'elle est la probabilité d'obtenir une face au deuxième jet sachant qu'une face est apparue lors du premier jet?

Solution : Commençons par construire l'espace fondamental Ω

$$\Omega = \{\{f,f,f\},\{f,f,p\},\{f,p,f\},\{p,f,f\},\{p,p,p\},\{p,p,f\},\{p,f,p\},\{f,p,p\}\}$$

Soit B l'évènement d'avoir une face au premier jet, alors on a

$$B = \{\{f,f,f\},\{f,f,p\},\{f,p,f\},\{f,p,p\}\} \Rightarrow P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

V. Définition classique de la probabilité

Ex. Une expérience aléatoire consiste à lancer trois fois une pièce équilibrée, qu'elle est la probabilité d'obtenir une face au deuxième jet sachant qu'une face est apparue lors du premier jet?

Solution : Commençons par construire l'espace fondamental Ω

$$\Omega = \{\{f,f,f\},\{f,f,p\},\{f,p,f\},\{p,f,f\},\{p,p,p\},\{p,p,f\},\{p,f,p\},\{f,p,p\}\}$$

Soit B l'évènement d'avoir une face au premier jet, alors on a

$$B = \{\{f,f,f\},\{f,f,p\},\{f,p,f\},\{f,p,p\}\} \Rightarrow P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Soit A l'évènement d'avoir une face au deuxième jet, alors on a

$$A = \{\{f,f,f\},\{f,f,p\},\{p,f,f\},\{p,f,p\}\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{\{f,f,f\},\{f,f,p\}\}$$

$$\Rightarrow P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

VI. Modèle d’urne

- En théorie des probabilités, un modèle d’urne ou problème d'urne est une représentation d'expériences aléatoires par un tirage aléatoire uniforme de boules dans une urne.

VI. Modèle d’urne

- En théorie des probabilités, un modèle d’urne ou problème d'urne est une représentation d'expériences aléatoires par un tirage aléatoire uniforme de boules dans une urne.

- Historiquement, ce modèle et le mot « urne » pour le désigner remontent à Bernoulli qui décrit, dans ***Ars Conjectandi*** , un tirage de cailloux colorés dans une urne.

VI. Modèle d’urne

- En théorie des probabilités, un modèle d’urne ou problème d'urne est une représentation d'expériences aléatoires par un tirage aléatoire uniforme de boules dans une urne.

- Historiquement, ce modèle et le mot « urne » pour le désigner remontent à **Bernoulli** qui décrit, dans ***Ars Conjectandi*** , un tirage de cailloux colorés dans une urne.

- L'urne est supposée contenir un certain nombre de **boules indiscernables au toucher**, lorsque l'on tire une boule à l'intérieur le tirage est aléatoire et **chaque boule de l'urne a la même chance d'être tirée.**

VI. Modèle d'urne

- L'urne est supposée contenir un certain nombre de **boules indiscernables au toucher**, lorsque l'on tire une boule à l'intérieur le tirage est aléatoire et **chaque boule de l'urne a la même chance d'être tirée.**

VI. Modèle d'urne

- L'urne est supposée contenir un certain nombre de **boules indiscernables au toucher**, lorsque l'on tire une boule à l'intérieur le tirage est aléatoire et **chaque boule de l'urne a la même chance d'être tirée.**

- **Même si les boules sont identiques, elles sont supposées différentes**

$\Rightarrow$ la probabilité de tirer une boule est la même pour toutes les boules

$\Rightarrow$ une mesure de probabilité uniforme

VI. Modèle d’urne

- L'urne est supposée contenir un certain nombre de **boules indiscernables au toucher**, lorsque l'on tire une boule à l'intérieur le tirage est aléatoire et **chaque boule de l'urne a la même chance d'être tirée.**

- **Même si les boules sont identiques, elles sont supposées différentes**

  ⇒ la probabilité de tirer une boule est la même pour toutes les boules

  ⇒ une mesure de probabilité uniforme

- **Ex. Une urne contenant N boules numérotées de 1 à N ⇒la mesure de probabilité associée est la mesure uniforme :**

$$P(\{\mathrm{i}\}) = \frac{1}{N}$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr | LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

VI. Modèle d’urne

- **Plusieurs types de tirages :**
  - Tirages successifs avec ou sans remise
  - Tirages simultanés
  - Tirages successifs dans plusieurs urnes
  - Aussi, une infinité d'urnes et/ou une infinité de boules dans une urne

VI. Modèle d'urne

- **Tirage successif sans remise**

  - Résultats ordonnés (sans répétition)

VI. Modèle d'urne

❑ Tirage successif sans remise

- Résultats ordonnés (sans répétition)

- **Tirage de $\boldsymbol{k}$ boules parmi $\boldsymbol{N}$:** N possibilités pour la 1ère boule, $N-1$ possibilités pour la 2ème boules, … , $N-k+1$ possibilités pour la $k$ème boule
  ⇒ selon le principe fondamental de l'analyse combinatoire, nous avons au total :

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1) \text{ possibilités}$$

VI. Modèle d'urne

❑ Tirage successif sans remise

- Résultats ordonnés (sans répétition)

- **Tirage de $\boldsymbol{k}$ boules parmi $\boldsymbol{N}$:** N possibilités pour la 1ère boule, $N-1$ possibilités pour la 2ème boules, … , $N-k+1$ possibilités pour la $k$ème boule
  $\Rightarrow$ selon le principe fondamental de l'analyse combinatoire, nous avons au total :

$$N(N-1)(N-2)\ldots(N-k+1) \text{ possibilités}$$

Mais

$$N(N-1)(N-2)\ldots(N-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}=A_k^n$$

Donc **Arrangement de $\boldsymbol{N}$ objet pris $\boldsymbol{k}$ par $\boldsymbol{k}$**

VI. Modèle d'urne

- **Tirage successif avec remise**
  - Résultats ordonnés (avec répétition)

VI. Modèle d'urne

❑ Tirage successif avec remise

- Résultats ordonnés (avec répétition)

- Construire un mot de k lettre dans un alphabet de. N lettre (répétition autorisée) ⇒ selon le principe fondamental de l'analyse combinatoire, nous avons au total :

$$\underbrace{N\times \cdots \times N}_{k\ fois} = N^k \text{possibilités}$$

❑ Tirage simultané

- Résultats non-ordonnés ⇒ combinaison
- Tirage simultané de k boules parmi N:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{possibilités}$$

VI. Modèle d'urne

❑ L'urne de Polya

- Modèle proposé dans le cadre de l'étude des phénomènes de contagion lors d'une épidémie.

George Polya
1889-1985

VI. Modèle d'urne

❑ L'urne de Polya

George Polya
1889-1985

- Modèle proposé dans le cadre de l'étude des phénomènes de contagion lors d'une épidémie.

- **Description :** Considérons une urne initialement remplie de a boules blanches et b boules rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur du boule qui a été tirée. Donc, l'urne au tirage $n + 1$ contiendra $a + b + 1$ boules.

VI. Modèle d'urne

❑ L'urne de Polya

➢ Modèle proposé dans le cadre de l'étude des phénomènes de contagion lors d'une épidémie.

➢ **Description :** Considérons une urne initialement remplie de a boules blanches et b boules rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur du boule qui a été tirée. Donc, l'urne au tirage $n + 1$ contiendra $a + b + 1$ boules.

➢ **Objectif :** Déterminer l'évolution de la propagation de boules d'une couleur définie dans l'urne au bout de n tirage.

George Polya
1889-1985

VI. Modèle d'urne

❑ L'urne de Polya

George Polya
1889-1985

- Modèle proposé dans le cadre de l'étude des phénomènes de contagion lors d'une épidémie.

- **Description :** Considérons une urne initialement remplie de a boules blanches et b boules rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur du boule qui a été tirée. Donc, l'urne au tirage $n+1$ contiendra $a+b+1$ boules.

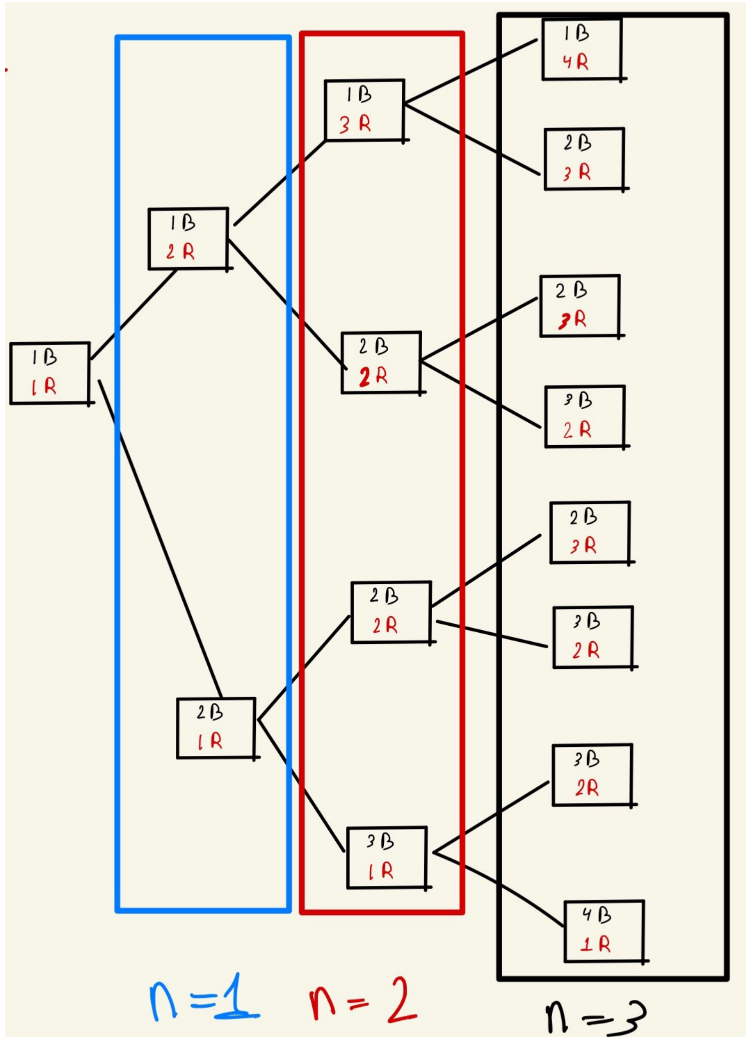
- **Objectif :** Déterminer l'évolution de la propagation de boules d'une couleur définie dans l'urne au bout de n tirage.

- Intéressons par exemple à la couleur blanche ⇒ Notons X_n le nombre de boules blanches dans l'urne au bout de n tirages.

L’urne de Polya

- Arbre pondéré:

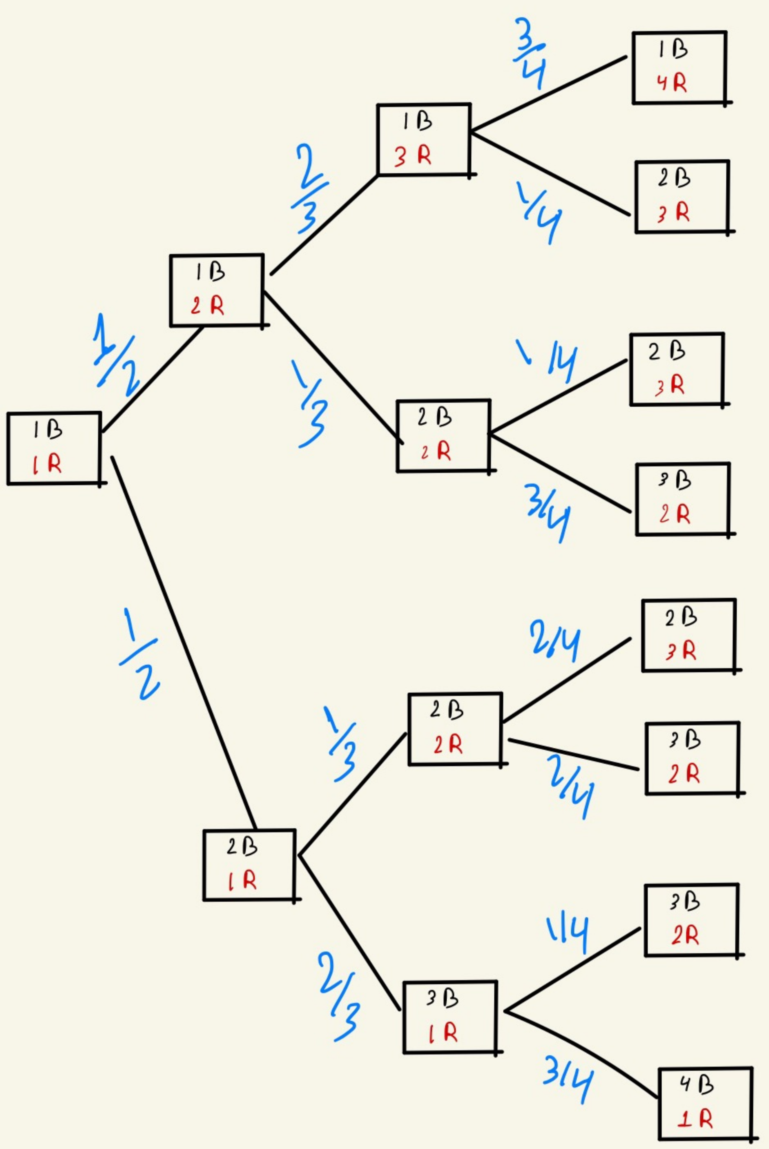
  - $X_0 = a$
  - $P(X_1) = P(X_2) = \frac{1}{2}$



❑ L'urne de Polya

➢ Arbre pondéré:

- $X_0 = a$
- $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$
- $P(X_2 = 2) = ??$
- $P(X_3 = 2) = ??$
- La loi de X_2? de X_3?



VI. Modèle d'urne

❑ L'urne de Polya

➢ On peut démontrer que X_n sui une loi uniforme sur $\{1,2,\cdots,n+1\}$:

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \quad \forall k \in \{1,\cdots,n+1\}$$

Démonstration par récurrence