4 Propriétés du champ et du potentiel électrostatiques

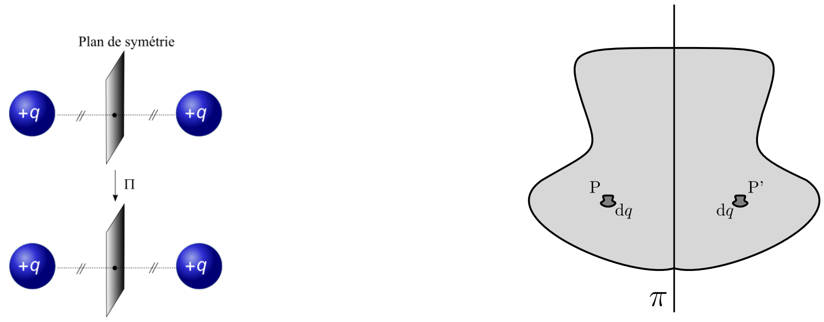
Comme on vient de le voir, il n'est pas toujours facile d'évaluer le potentiel ou le champ électrique à partir des lois élémentaires et du théorème de superposition. Cependant, il est souvent possible de décrire qualitativement leurs propriétés à l'aide de considérations très simples.

4.1 Symétries et invariances des distributions de charges

4.1.1 Plan de symétrie

Définition. Un plan Π constitue un plan de symétrie pour une distribution de charges $\mathcal{D}$ si, pour tout point P de la distribution, son symétrique $P^{'}$ par rapport à Π appartient à $\mathcal{D}$ et porte la même charge que P. Cette définition est à connaitre.

Exemples. Un petit schéma vaut mieux qu'un long discours !



(a) Plan de symétrie dans le cas d'une distribution discrète de deux charges.

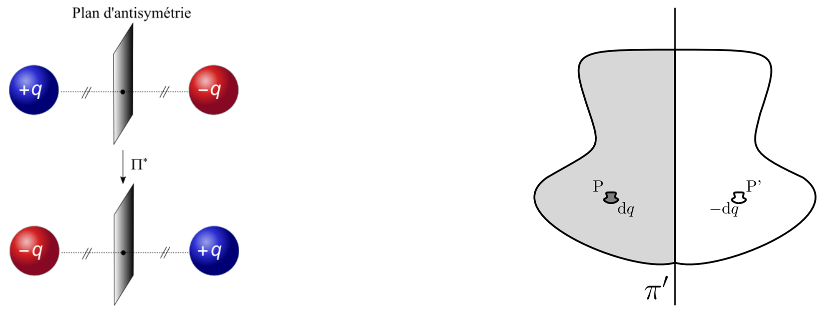
(b) Plan de symétrie dans le cas d'une distribution continue de charges.

Figure 6 – Exemples de plans de symétries.

4.1.2 Plan d'antisymétrie

Définition. Un plan Π^* constitue un plan d'antisymétrie pour une distribution de charges $\mathcal{D}$ si, pour tout point P de la distribution, son symétrique $P^{'}$ par rapport à Π^* appartient à $\mathcal{D}$ et porte la charge opposée à celle de P. Cette définition est à connaitre.

Exemples.



(a) Plan d'antisymétrie dans le cas d'une distribution discrète de deux charges.

(b) Plan d'antisymétrie dans le cas d'une distribution continue de charges.

Figure 7 – Exemples de plans d'antisymétries.

4.1.3 Invariances

Définition. On dit d'une distribution de charges $\mathcal{D}$ qu'elle est invariante par une transformation T de l'espace si le résultat $T(\mathcal{D})$ de la transformation appliquée à $\mathcal{D}$ est $\mathcal{D}$. Cette définition est à connaitre.

Dans ce cours, on se restreindra aux invariances par translation et rotation.

Exemples. À gauche : une distribution de charges réparties de façon homogène dans un cylindre infini. La distribution est invariante par translation le long de l'axe z et par rotation d'angle θ. À droite, une distribution de charges réparties de façon homogène dans une boule. La distribution est invariante par rotation d'angle θ et par rotation d'angle ϕ : c'est une symétrie sphérique.

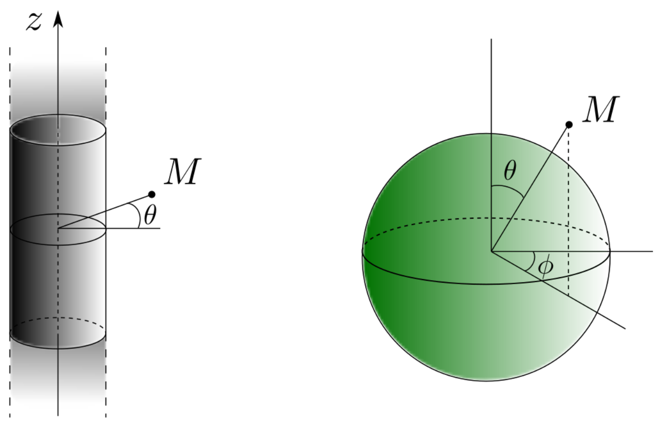
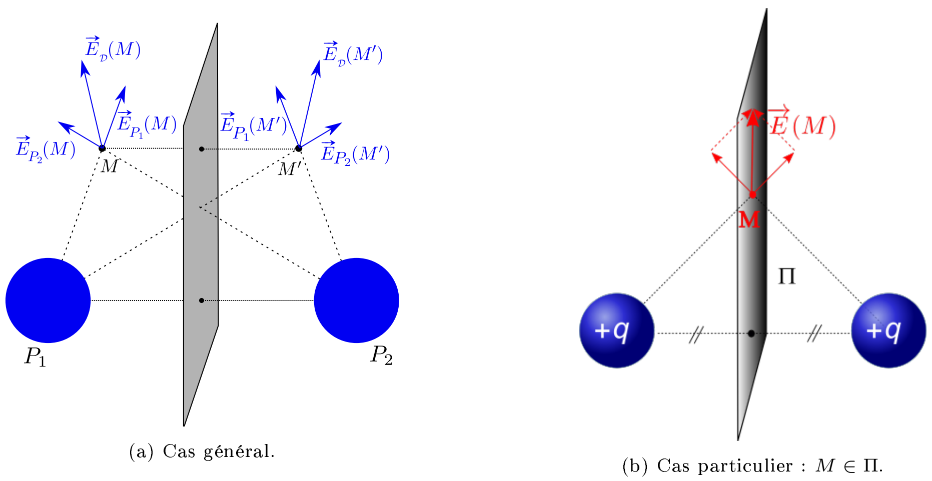


FIGURE 8 – Quelques exemples d'invariances.

4.2 Conséquences sur le champ et le potentiel

Existence d'un plan de symétrie. Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charges et Π un plan de symétrie de $\mathcal{D}$. Si M et $M^{'}$ sont symétriques par rapport à Π, alors le champ électrostatique $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M^{'})$ créé par $\mathcal{D}$ en $M^{'}$ est le symétrique par rapport à Π du champ $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)$ créé par $\mathcal{D}$ en M :

$$\text{si } M^{'} = \text{sym}_{\Pi}(M), \text{ alors } \vec{E}_{\mathcal{D}}(M^{'}) = \text{sym}_{\Pi}\left(\vec{E}_{\mathcal{D}}(M)\right).$$



(a) Cas général.

(b) Cas particulier : $M \in \Pi$.

FIGURE 9 – Conséquences de l'existence d'un plan de symétrie d'une distribution de charges.

En particulier, le champ électrostatique $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M \in \Pi)$ créé par une distribution de charges $\mathcal{D}$ en un point M appartenant à un plan Π de symétrie de $\mathcal{D}$ appartient à ce plan.

Pour le potentiel, on a :

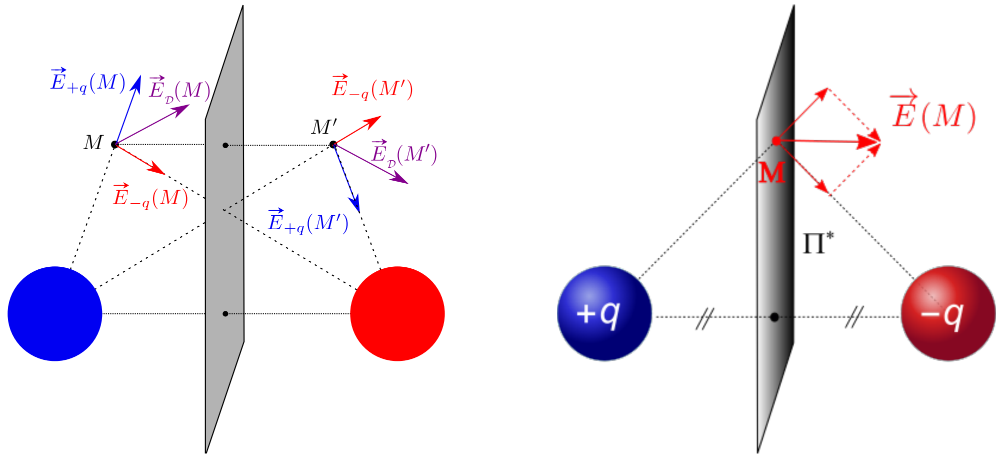
$$\text{si } M^{'} = \text{sym}_{\Pi}(M), \text{ alors } V(M^{'}) = V\left(M\right).$$

Ces propriétés sont à connaitre et à savoir utiliser.

Existence d'un plan d'antisymétrie. Soit $\mathcal{D}$ une distribution de charges et Π^* un plan d'antisymétrie de $\mathcal{D}$. Si M et $M^{'}$ sont symétriques par rapport à Π^*, alors le champ électrostatique $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M^{'})$ créé par $\mathcal{D}$ en $M^{'}$ est l'opposé du symétrique par rapport à Π^* du champ $\vec{E}_{\mathcal{D}}\left(M\right)$ créé par $\mathcal{D}$ en M :

$$\text{si } M^{'} = \text{sym}_{\Pi^*}(M), \text{ alors } \vec{E}_{\mathcal{D}}(M^{'}) = -\text{sym}_{\Pi^*}\left(\vec{E}_{\mathcal{D}}\left(M\right)\right).$$

En particulier, le champ électrostatique $\vec{E}_{\mathcal{D}}(M \in \Pi)$ créé par une distribution de charges $\mathcal{D}$ en un point M appartenant à un plan Π^* d'antisymétrie de $\mathcal{D}$ est orthogonal à ce plan.



(a) Cas général.   (b) Cas particulier : $M \in \Pi^*$.

FIGURE 10 – Conséquences de l'existence d'un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges.

Pour le potentiel, on a :

$$\text{si } M^{'} = \text{sym}_{\Pi^*}(M), \text{ alors } V(M^{'}) = -V\left(M\right).$$

Ces propriétés sont à connaitre et à savoir utiliser.

Existence d'une invariance. Si une distribution est invariante par une translation selon un axe (par exemple l'axe Oz, avec une position le long de cet axe repéré par la variable z) ou une rotation autour d'un axe (par exemple toujours l'axe Oz, avec un angle autour de cet axe repéré par la variable θ), alors les composantes du champ électrostatique ne dépendront pas de la variable z, ou de la variable θ. De même pour le potentiel électrostatique.

Ces propriétés sont à connaitre et à savoir utiliser.

4.3 Exemple d'application

Considérons un cylindre de rayon a, de hauteur h, contenant une densité volumique de charge ρ constante, et un point M quelconque de l'espace (cf figure 11). En utilisant les propriétés de symétries et d'invariances, exprimer le champ $\vec{E}(M)$ créé en M par le cylindre.

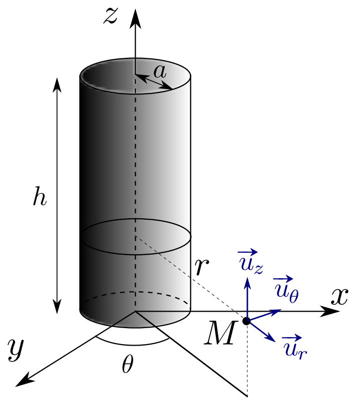


FIGURE 11 – Distribution de charge cylindrinque.

Le plan Π passant par M et contenant $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de charge, donc $\vec{E}(M) \in \Pi$:

$$\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u}_r + E_z(M)\vec{u}_z.$$

Remarque. Il n'y a pas d'autre plan de symétrie qui puisse contenir tout point quelconque de l'espace. Si M appartient au plan médiateur du cylindre, alors on a une contrainte additionnelle sur $\vec{E}(M)$ qui nous permet de déduire que $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u}_r$.

Le point M est repéré par (r, θ, z), donc a priori $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z)$. Cependant, la distribution de charge est invariante par rotation d'angle θ, donc $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ. Au final, on a :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{u}_r + E_z(r, z)\vec{u}_z.$$

Dans le cas où le cylindre a une hauteur infinie ($h \to +\infty$), on a :

- le plan passant par M et orthogonal au cylindre, c'est-à-dire le plan $(\vec{u}_r, M, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u}_r$,
- la distribution est invariante par translation selon (Oz), donc $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de z.

Au final, on a $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$.

Ce genre de raisonnement est à avoir compris et à savoir refaire dans les différentes situations qui seront abordées.

4.4 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Définitions.

- Une *ligne de champ* est une courbe tangente au champ en tout point de l'espace. On les oriente en indiquant le sens du champ.
- Une *équipotentielle* ou *surface équipotentielle* est une surface S sur laquelle le potentiel électrostatique est une constante, c'est-à-dire qu'en tout point M de S on a $V(M) = \text{constante}$. Une équipotentielle réalise donc une cartographie du potentiel électrostatique, de la même manière que les courbes de niveau réalisent une cartographie de l'altitude d'une région sur une carte IGN.

Propriétés.

- Les lignes de champ sont symétriques par rapport à un plan de symétrie d'une distribution. Les lignes de champ non orientées sont symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie d'une distribution. Elles coupent les plans d'antisymétrie orthogonalement. Ces deux propriétés se démontrent facilement à partir des propriétés de symétrie du champ électrostatique et de la définition des lignes de champ.
- Une ligne de champ électrostatique ne peut pas être fermée.

- Deux lignes de champ ne peuvent pas se couper (sauf en un point où le champ électrostatique est nul ou non défini). En effet, si deux lignes de champ se coupaient en un point M, le champ électrique aurait deux directions différentes en ce point, puisqu'il serait tangent aux deux lignes de champ.
- Les lignes de champ coupent les surfaces équipotentielles orthogonalement et sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

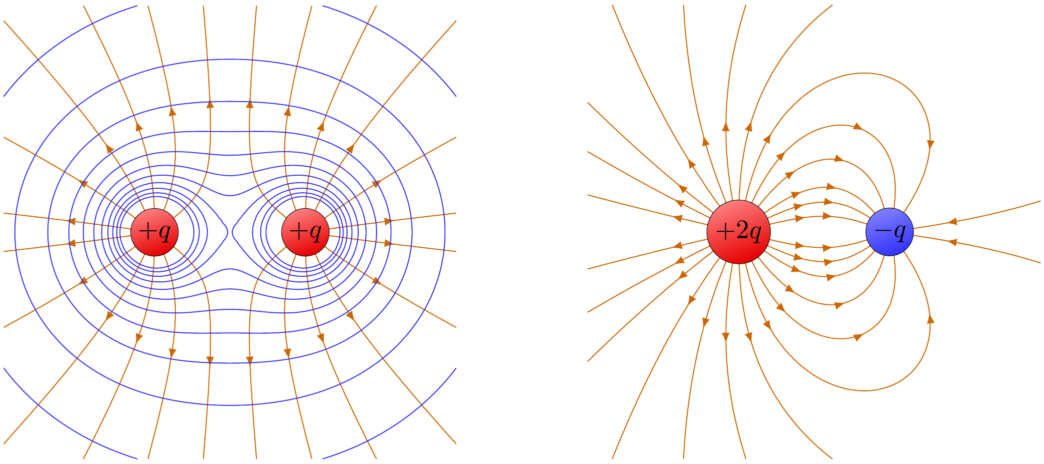


FIGURE 12 – Exemples de lignes de champ (en orange) et d'équipotentielles (en bleu).