Thème 5 – Théorème de Gauss

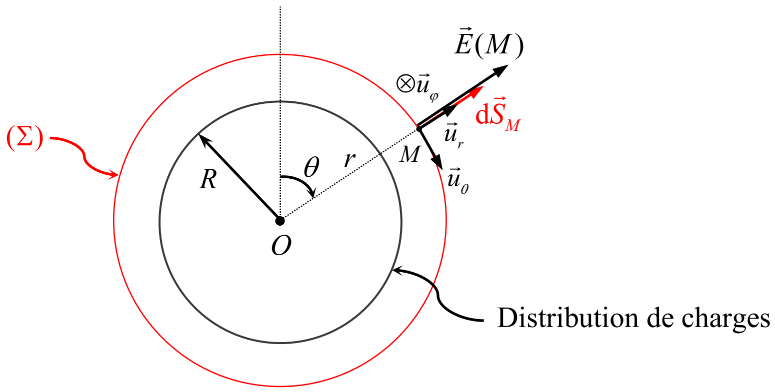
I- Sphère uniformément chargée

1- On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) dans le repère $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$.
Nous avons ici une distribution de charges à symétrie sphérique. En effet, la distribution est invariante par rotation autour de tout axe passant par le centre O, aussi, le champ créé par cette distribution est indépendant des coordonnées θ et φ. Par ailleurs, les plans $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ (le « plan de la feuille ») et $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$ (le « plan perpendiculaire à la feuille » contenant O et M) sont des plans de symétrie de la distribution donc le champ appartient à l'intersection de ces deux plans. Le champ créé au point M est donc de la forme : $\vec{E}(M)=E_r(r)\vec{u}_r$.

Remarque

Le champ en O est nécessairement nul. Il y en effet une infinité de plans de symétrie de la distribution de charges qui contiennent ce point. Le champ ne pouvant appartenir à tous ces plans à la fois, il doit être identiquement nul.

2- On choisit comme surface de Gauss une sphère (Σ) de centre O et de rayon r passant par le point M. Ce choix s'impose par le fait qu'en tout point M de la surface de Gauss, le champ est colinéaire à l'élément de surface $\mathrm{d}\vec{S}_M=\mathrm{d}S_M\vec{u}_r$ et a une norme constante puisque r y est fixé.



Le flux du champ créé par la distribution à travers la sphère (Σ) est :

$$\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E})=\oiint_{(\Sigma)}\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_{(\Sigma)}E_r(r)\vec{u}_r.\mathrm{d}S\vec{u}_r=4\pi r^2E_r(r)$$

Le théorème de Gauss s'écrit : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E})=\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ où Q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface (Σ).

- Pour $r<R$, on a $Q_{int}=0$, d'où $\vec{E}(M)=\vec{0}$.
- Pour $r>R$, on a $Q_{int}=4\pi R^2\sigma=Q_{sphère}$, d'où $\vec{E}(M)=\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r=\dfrac{Q_{sphère}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

On constate que le champ n'est pas continu à la traversée de la surface chargé en $r=R$:

$$\vec{E}(r=R^+)-\vec{E}(r=R^-)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

3- Comme $\mathrm{d}V=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V).\mathrm{d}\vec{\ell}=-\vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell}=-E_r(r)\mathrm{d}r$, le potentiel s'écrit : $V(M)=K$ où K est une constante pour $r\le R$ et $V(M)=\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}+K'$ où K' est une constante pour $r\ge R$. On fixe le potentiel nul à l'infini :

$V(r\to+\infty)=0$. On obtient dans ce cas $V(M)=\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}=\dfrac{Q_{sphère}}{4\pi\varepsilon_0 r}$ pour $r\geq R$ et $V(M)=\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q_{sphère}}{4\pi\varepsilon_0 R}$ pour $r\leq R$.

II- Cylindre uniformément chargé

1- On repère tout point *M* de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) dans le repère $(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. La distribution de charges est invariante par translation selon l'axe $(O,\vec{u}_z)$ et par rotation autour de l'axe $(O,\vec{u}_z)$ donc les composantes du champ $\vec{E}(M)$ créé au point *M* ne dépendent pas des coordonnées θ et z. Par ailleurs, les plans $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ et $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution. Le champ électrostatique appartient à l'intersection de ces deux plans, il est donc orienté selon $\vec{u}_r$: $\vec{E}(M)=E_r(r)\vec{u}_r$.

2- On choisit comme surface de Gauss (Σ) celle d'un cylindre droit d'axe $(O,\vec{u}_z)$, de rayon r, de hauteur quelconque h et passant par le point *M*.
On note :
(Σ_{sup}) la surface supérieure du cylindre ;
(Σ_{inf}) la surface inférieure ;
(Σ_{lat}) la surface latérale.
La surface fermée (Σ) est ainsi définie par : $(\Sigma)=(\Sigma_{sup})\cup(\Sigma_{inf})\cup(\Sigma_{lat})$.
Le flux du champ électrostatique créé par la distribution de charges à travers la surface fermée (Σ) s'écrit de façon générale :

$$\Phi_\Sigma(\vec{E})=\oiint_{(\Sigma)}\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}=\iint_{(\Sigma_{sup})}\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}+\iint_{(\Sigma_{inf})}\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}+\iint_{(\Sigma_{lat})}\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Les flux à travers les surfaces (Σ_{inf}) et (Σ_{sup}), orientées localement selon respectivement $+\vec{u}_z$ et $-\vec{u}_z$, sont nuls car le champ $\vec{E}(M)$ est radial en tout point de ces surfaces, c'est-à-dire orienté selon $\vec{u}_r$.
Le flux total à travers la surface de Gauss (Σ) se limite donc ici au flux à travers la surface latérale (Σ_{lat}) du cylindre : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E})=\iint_{(\Sigma_{lat})}(E_r(r)\vec{u}_r).(\mathrm{d}S\vec{u}_r)=2\pi rhE_r(r)$.

Le théorème de Gauss s'écrit : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E})=\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ où $Q_{int}=\iiint_{M\in(\tau)}\rho(M)\mathrm{d}V_M$ est la charge à l'intérieur du volume noté (τ) que définit la surface (Σ).

- Pour $r\leq R$, on a $Q_{int}=\rho\times\pi r^2h$, soit $\vec{E}(M)=\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}r\vec{u}_r$.
- Pour $r\geq R$, on a $Q_{int}=\rho\times\pi R^2h$ soit $\vec{E}(M)=\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$.

Le champ est continu à la traversée du cylindre en $r=R$: $\vec{E}(r=R^+)=\vec{E}(r=R^-)=\dfrac{\rho R}{2\varepsilon_0}\vec{u}_r$.

3- Dans le cas où $R\to 0$, la distribution de charge tend vers une distribution limite linéique de densité uniforme λ. Sur une hauteur h quelconque, la conservation de la charge implique que $Q_h=\rho\pi R^2h=\lambda h$.
On en déduit ainsi que $\lambda=\rho\pi R^2$.
Dans ces conditions, le champ à l'intérieur du cylindre $(r\leq R)$ tend vers 0 puisque $r\leq R\to 0$. Quant au champ extérieur, il tend vers $\vec{E}(M)=\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$.

Remarque

Nous pouvons retrouver ce résultat de manière directe.

La distribution de charges est désormais un fil infini (l'axe $(O,\vec{u}_z)$), de densité uniforme λ. Les mêmes arguments d'invariances et de symétries impliquent que le champ créé est toujours de la forme $\vec{E}(M)=E_r(r)\vec{u}_r$.
On choisit toujours comme surface de Gauss (Σ) celle d'un cylindre droit d'axe $(O,\vec{u}_z)$, de rayon r, de hauteur quelconque h et passant par le point M : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E})=2\pi rhE_r(r)$.

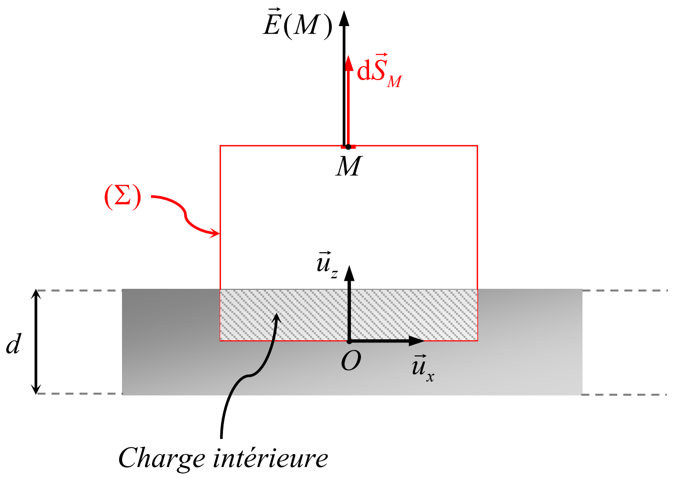
Un seul cas de figure est à considérer : $Q_{int}=\lambda h$. Le théorème de Gauss conduit donc à : $\vec{E}(M)=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$.

III- Nappe plane uniformément chargée

1- La distribution de charges est invariante par translation selon les directions de $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ puisque la nappe plane est considérée comme infinie. Le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend donc pas des coordonnées x et y du point M considéré : $\vec{E}(M)=\vec{E}(z)$. Par ailleurs, les plans $(M,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ et $(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, donc $\vec{E}(M)$ appartient à ces deux plans à la fois. Il est donc nécessairement orienté selon $\vec{u}_z$, à l'intersection des deux plans. Finalement, nous pouvons écrire que $\vec{E}(M)=E_z(z)\vec{u}_z$.

Le plan $(\Pi)=(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ est aussi un plan de symétrie de la distribution. Aussi, si M' est le symétrique de M par rapport à (Π), alors $\vec{E}(M')$ est le symétrique de $\vec{E}(M)$ par rapport à ce plan. On en déduit que $E_z(-z)=-E_z(z)$: la fonction $E_z(z)$ est impaire. Cette parité impose aussi que le champ soit nul en tout point du plan (Π) : $\vec{E}(z=0)=\vec{0}$. Ceci est bien en accord avec le fait que le champ ne peut appartenir à la fois à ce plan et être orienté selon $\vec{u}_z$.

2- On choisit comme surface de Gauss (Σ) un cylindre droit de génératrice selon l'axe $(O,\vec{u}_z)$ et de bases d'aire S quelconque, parallèles au plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$. La base supérieure passe par le point M de coordonnée $z>0$ où on cherche à calculer le champ et la base inférieure est confondue avec le plan $(\Pi)=(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$.
Le flux du champ créé par la distribution à travers la surface (Σ) est la somme des flux à travers la surface latérale et les deux bases.
Le flux à travers la surface latérale est nul car tout élément de surface est orienté selon le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ de la base cylindrique : $\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}_{lat}=E_z\vec{u}_z.\mathrm{d}S\vec{u}_r=0$. Le flux du champ à travers la base inférieure confondue avec le plan (Π) est aussi nul car le champ est nul en tout point de ce plan. Le flux à travers la surface (Σ) se limite donc au flux à travers la base supérieure passant par le point *M*. Comme le champ est uniforme en tout point de cette base (il ne dépend que de la coordonnée z), on obtient finalement : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E})=\oiint_{(\Sigma)}\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S}=E_z(z)S$.



D’après le théorème de Gauss, $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E}) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ où Q_{int} est la charge à l’intérieur de la surface de Gauss.

- Pour $0 \le z \le d/2$, on a $Q_{int} = \rho \times zS$, soit $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} z\vec{u}_z$.

- Pour $z \ge d/2$, on a $Q_{int} = \rho_e \times \dfrac{d}{2} S$, soit $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

- $E_z(z)$ étant une fonction impaire de z, nous en déduisons que $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} z\vec{u}_z$ si $-d/2 \le z \le 0$ et $\vec{E}(M) = -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ si $z \le -d/2$.

Remarque

Nous aurions pu aussi choisir comme surface de Gauss un cylindre droit de génératrice selon l’axe $(O,\vec{u}_z)$ et de bases d’aire S quelconque, parallèles au plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ passant par $M(z)$ et son symétrique par rapport au plan (Π) $M'(-z)$. Dans ce cas, le flux à travers la surface de Gauss s’écrit : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E}) = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = E_z(z)S + E_z(-z)(-S)$ car $\mathrm{d}\vec{S}_{sup} = \mathrm{d}S\vec{u}_z$ et $\mathrm{d}\vec{S}_{inf} = \mathrm{d}S(-\vec{u}_z)$. Compte tenu de la parité de $E_z(z)$, on a $E_z(-z) = -E_z(z)$, soit $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E}) = 2E_z(z)S$. On laisse le soin de calculer la charge intérieure et de retrouver les résultats précédents.

3- Pour une surface S, la charge de la nappe est $Q = \rho dS$. Lorsque $d \to 0$ (avec ρd maintenu constant), la distribution tend vers une distribution surfacique de densité σ donc de charge σS. La conservation de la charge impose que $Q = \rho dS = \sigma S$, d’où $\sigma = \rho d$.

Avec cette distribution limite, le champ à l’intérieur de la nappe tend vers 0, $\vec{E}(z>0) = \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ et $\vec{E}(z<0) = -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$. On retrouve les expressions du champ créé par un plan infini (*Cf.* exercice II du TD3). En particulier, on met en évidence une discontinuité de la composante normale du champ à la traversée de la surface chargée : $\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

IV- Noyaux d’atomes légers

1- $Q = \iiint_{P\in sphère} \rho(P)\mathrm{d}V_P = \int_0^a \rho_0\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r = \dfrac{8\pi}{15}\rho_0 a^3$.

2- *Cf.* exercice 1 : symétrie sphérique donc $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$.

Il y a une infinité de plans de symétrie de la distribution de charges qui contient l’origine *O*. Le champ $\vec{E}(O)$ est donc identiquement nul car ne pouvant appartenir à la fois à tous ces plans.

3- *Cf.* exercice 1 : on choisit comme surface de Gauss une sphère (Σ) de centre *O* et de rayon r passant par le point *M*. Le flux du champ créé par la distribution à travers la sphère (Σ) est : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E_r(r)$.

- Pour $r \le a$, on a $Q_{int} = \int_0^r \rho_0\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r = 4\pi\rho_0\left(\dfrac{r^3}{3}-\dfrac{r^5}{5a^2}\right)$, soit $\vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3}-\dfrac{r^3}{5a^2}\right)\vec{u}_r$.

- Pour $r \ge a$, on a $Q_{int} = Q$, soit $\vec{E}(M) = \dfrac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.