Thème 3 – Champ créé par une distribution continue de charges

I- Champ créé par un fil rectiligne

1- $\lambda = \dfrac{q}{2a}$.

2-a- $\mathrm{d}\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q_P}{PM^2}\vec{u}_{P/M}$ où $\mathrm{d}q_P = \lambda \mathrm{d}\ell_P$.

2-b- Considérer les contributions des charges $\mathrm{d}q_P$ (de l'élément de longueur $\mathrm{d}\ell_P$ entourant le point *P*) et $\mathrm{d}q_{P'}$ (de l'élément de longueur $\mathrm{d}\ell_{P'}$ entourant le point P' symétrique du point *P* par rapport au point *O*) : le champ résultant $\mathrm{d}\vec{E}_P(M) + \mathrm{d}\vec{E}_{P'}(M)$ est orienté selon $\vec{u}_x$, les composantes selon $\vec{u}_y$ se compensant.

2-c- $\mathrm{d}E_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda \mathrm{d}\ell_P}{PM^2}\vec{u}_{P/M}.\vec{u}_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda \mathrm{d}\ell_P}{PM^2}\cos\theta$ avec $PM = \dfrac{x}{\cos\theta}$ et $y = x\tan\theta$ soit $\mathrm{d}\ell_P = \mathrm{d}y = x\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$.

On en déduit que $E_x(M) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\displaystyle\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta \mathrm{d}\theta = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\theta_0$ où $\sin\theta_0 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

On a donc finalement : $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\vec{u}_x$.

3- Lorsque $a \to +\infty$ (donc $\theta_0 \to +\pi/2$), on a $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{u}_x$.

4- Le champ au centre est nul, les contributions de deux côtés opposés se compensant.

II- Condensateur plan

A- Champ créé par un plan infini

2- $\mathrm{d}S_P = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$ et $r = PM = \sqrt{\rho^2+z^2}$.

3- $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$ d'où $\vec{u}_{P/M} = \dfrac{-\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$.

4- $\mathrm{d}\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q_P}{PM^2}\vec{u}_{P/M}$ où $\mathrm{d}q_P = \sigma \mathrm{d}S_P$.

5- Considérer les contributions des charges $\mathrm{d}q_P$ (de l'élément de surface $\mathrm{d}S_P$ entourant le point *P*) et $\mathrm{d}S_{P'}$ (de l'élément de surface $\mathrm{d}S_{P'}$ entourant le point P' symétrique du point *P* par rapport au point *O*) : le champ résultant $\mathrm{d}\vec{E}_P(M) + \mathrm{d}\vec{E}_{P'}(M)$ est orienté selon $\vec{u}_z$, les composantes selon $\vec{u}_\rho$ se compensant.

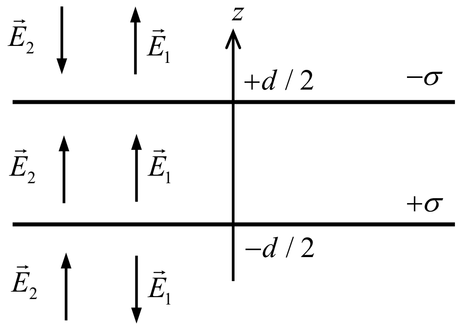
6- $\mathrm{d}E_z = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma \mathrm{d}S_P}{PM^2}\vec{u}_{P/M}.\vec{u}_z = \dfrac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$.

On en déduit que $E_z(M) = \dfrac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\rho \mathrm{d}\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \dfrac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[-(\rho^2+z^2)^{-1/2}\right]_0^{+\infty} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ pour $z > 0$.

On a donc finalement : $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

De façon plus générale, on écrit que : $\vec{E}(M) = \text{sgn}(z)\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ où $\text{sgn}(z)$ signifie « signe de z » : $\text{sgn}(z) = +1$ si $z > 0$, et $\text{sgn}(z) = -1$ si $z < 0$.

B- Modèle de condensateur plan



2- $z < -d/2$: $\vec{E}_1 = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ et $\vec{E}_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

$-d/2 < z < d/2$: $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

$z > d/2$: $\vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$ et $\vec{E}_2 = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

3- On a $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$ entre les armatures $(-d/2 < z < d/2)$, et $\vec{E}(M) = \vec{0}$ à l'extérieur ($z < -d/2$ et $z > d/2$).

4- On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z$.

Pour $-d/2 < z < d/2$, $E_z = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, soit $V(M) = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}z$ avec $V(z=0) = 0$.

Pour $z < -d/2$, $E_z = 0$, soit $V(M) = \dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$ par continuité.

Pour $z > d/2$, $E_z = 0$, soit $V(M) = -\dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0}$ par continuité.

On en déduit que : $\Delta V = V_1 - V_2 = V(z = -d/2) - V(z = +d/2) = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$.

5- $C = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{\sigma S}{\dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$.