MATHS-S1
CUPGE – ESIR
Analyse combinatoire

Ahmad Karfoul

ECOLE SUPERIEURE
D'INGENIEURS DE RENNES

ahmad.karfoul @univ-rennes1.fr

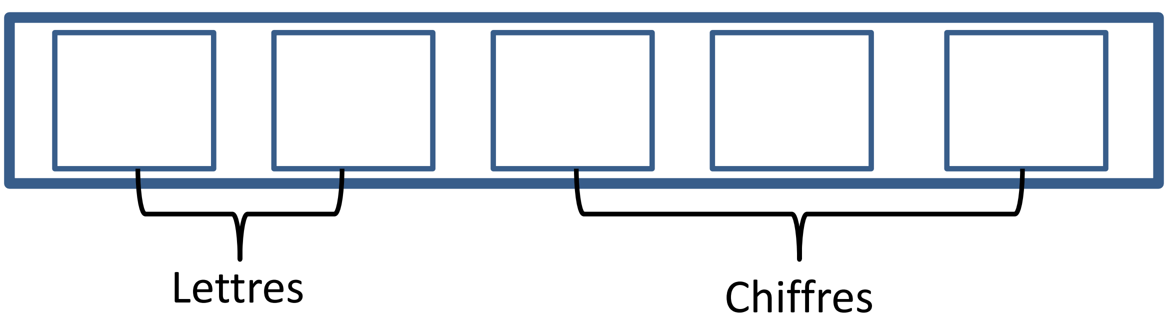
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Principe fondamental de l'analyse combinatoire

- **Objectif :** Développer quelques techniques permettant de déterminer, sans dénombrement direct, le nombre de résultats possibles d'une expérience particulière, ou ecnore le nombre d'éléments d'un ensemble particulier.

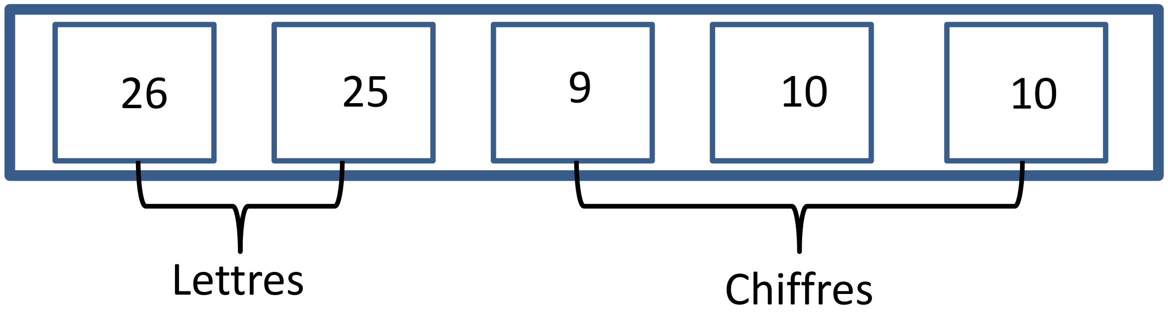
- **Principe fondamental de l'analyse combinatoire:** Si un procédure quelconque peut être représenté de n_1 façons différentes et si après cette procédure une seconde procédure peut être représentée de $n_2$façons différentes, et si ensuite une troisième procédure peut être représentée de n_3 façons différentes et ainsi de suite, alors le nombre de façons différentes permettant d'exécuter les procédures dans l'ordre indiqué est égal au produit $n_1 n_2 n_3 \cdots$

- **Exemple :** Une plaque d'immatriculation contient 2 lettres distinctes suivies de 3 chiffres dont le premier est différent de zéro. Le nombre de plaques différentes que l'on peut imprimer est :



ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

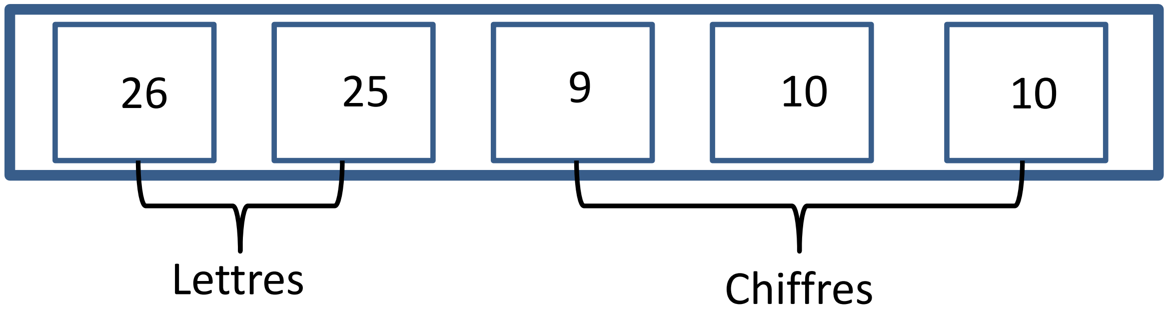
Principe fondamental de l’analyse combinatoire



No. de plaques = $26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Principe fondamental de l'analyse combinatoire



No. de plaques = $26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000$

- **Notation factorielle (!):**
  - $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$
  - Pour des raisons de commodité, on définit $0! = 1$

- **Exemple :**
  - $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
  - $\frac{8!}{6!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6!} = \frac{8\times7\times6!}{6!} = 56$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Arrangement et Permutation

- **Permutation :** un arrangement de n objets considérés en même temps et pris dans un ordre donné.

- L'arrangement de r de ces n objets $(r \leq n)$ dans un ordre donné s'appelle **arrangement d'indice r** ou encore arrangement de n objets pris r à r.

- **Exemple :** Considérons l'ensemble des lettres a, b, c et d. Alors :
  1. $bdca, dcba$ et $acdb$ sont des permutations de 4 lettres.
  2. bad, adb, cbd et bca sont des arrangements des 4 lettres prises 3 à 3.
  3. ad, cb, da et bd sont des arrangement des 4 lettres prises 2 à 2.

- On note $\mathcal{A}_n^r$ le nombre d'arrangements de n objets pris r à r. Il est défini par :

$$\mathcal{A}_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Permutation avec répétition

- Permutation avec répétition est définie lorsque on s'intéresse à connaître le nombre de permutations qu'il y a parmi des objets dont certaines sont semblables.

- **Théorème :** Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables, …., n_r sont semblables est :

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

- **Exemple :** Combien de mots différents peut-on former à partir des lettres du mot LILLE?.

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20 \text{ mots différents}$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Echantillonnage (Tirage)

- La notion de l'échantillonnage est abordé dans des situations semblables au tirage de bulles dans une urne.

- Un échantillon aléatoire de taille r est une collection de r objets (ex. boules) tirés de l'urne l'un après l'autre.

- **Echantillonnage avec remise (non-exhaustif) :** Pour une urne contenant n boules et d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire, il existe n^r échantillons différents de taille r.

- **Echantillonnage sans remise (exhaustif) :** Pour une urne contenant n boules et d'après le principe fondamental de l'analyse combinatoire, il existe $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ échantillons exhaustifs de taille r. Alors :

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \mathcal{A}_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Combinaisons

- Pour une collection donnée de n objets, on appelle **combinaison** de n objets pris r à r (ou combinaison de r objets), un sous ensemble quelconque de r éléments. En d'autres termes, une combinaisons de r objets est un choix quelconque de r objets parmi les n donnés sans tenir en ne tenant pas compte de l'ordre.

- **Exemple :** les combinaisons de lettres a, b, c, d prises 3 à 3 sont $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}$.

- On désigne par C_r^n le nombre de combinaisons de n objets pris r à r.

- C_r^n est aussi connu sous le nom "Coefficient du binôme"

- **Exemple :** le nombre de combinaisons de quatre lettres a, b, c, d pris 3 à 3 est :

Combinaisons	Permutations
abc	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$
abd	$abd, adb, bad, bda, dab, dba$
acd	$acd, adc, cad, cda, dac, dca$
bcd	$bcd, bdc, cdb, cbd, dcb, dbc$

Combinaisons

- **Exemple :** le nombre de combinaisons de quatre lettres a, b, c, d pris 3 à 3 est :

Combinaisons	Permutations
abc	$abc, acb, bac, bca, cab, cba$
abd	$abd, adb, bad, bda, dab, dba$
acd	$acd, adc, cad, cda, dac, dca$
bcd	$bcd, bdc, cdb, cbd, dcb, dbc$

  - Chaque combinaison engendre $3!$ permutations
  - $\Rightarrow$ le nombre de combinaisons $\times$ 3! = le nombre de permutations

❑ De manière générale : $\mathcal{C}_r^n \times r! = \mathcal{A}_r^n \Rightarrow \mathcal{C}_r^n = \frac{\mathcal{A}_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$\mathcal{C}_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- **Exemple :** le nombre de combinaisons, sans répétition, de quatre lettres a, b, c, d pris 3 à 3 est :

$$\mathcal{C}_3^4 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1} = 4$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Combinaisons

❖ **Lemme :** Soient $a, b \in \mathbb{N}$, si $a + b = n \Rightarrow \binom{n}{a} = \binom{n}{b}$. En d'autre terme: $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$.

- **Exemple :** $\binom{3}{2} = \binom{3}{1}$.

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{6}{2} = 3$$

- $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!}$

- $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$

- $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

- $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5^{ieme} étage, campus de Beaulieu

Partitions ordonnées

- On suppose qu'une urne, A, contient 7 boules numérotées de 1 à 7 (cad. $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. On calcul le nombre de possibilités de tirer d'abord 2 boules puis 3 boules puis 2 boules.

  - Il y a $\binom{7}{2}$ possibilités de tirer 2 boules en premier.
  - Il y a $\binom{5}{3}$ possibilités de tirer 3 boules en deuxième.
  - Il y a $\binom{2}{2}$ possibilités de tirer 2 boules en troisième.
  - Donc, il y a $\binom{7}{2} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2} = 210$ partitions ordonnées différente de $A = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\}$ avec $A_1 = \{.,.\}$, $A_2 = \{.,.,.\}$ et $A_3 = \{.,.\}$.

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr
LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu

Partitions ordonnées

❖ **Théorème :** Si A contient n éléments et si $n_1, n_2, \cdots, n_r$ sont des entiers positifs tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, alors il existe $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ partitions ordonnées différentes de A de la forme $(A_1, A_2, \cdots, A_r)$ où $A_1, A_2, \cdots, A_r$ contiennent respectivement $n_1, n_2, \cdots n_r$ éléments.

- **Exemple :** De combien de manières différentes peut-on partager 9 jouets entre 4 enfants sachant que le plus jeune enfant doit recevoir 3 jouet et les autres enfants 2 jouets?

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560 \text{ partitions}$$

ahmad.karfoul@univ-rennes1.fr

LTSI, Bat 22, 5ieme étage, campus de Beaulieu