Thème 1 – Outils mathématiques

I- Produits scalaires et vectoriels

1- Pour que 2 vecteurs aient leur produit scalaire nul, il suffit :
(a) qu'ils soient colinéaires ; (b) qu'ils soient orthogonaux ; (c) que l'un au moins soit nul.
2- Pour que 2 vecteurs aient leur produit vectoriel nul, il suffit :
(a) qu'ils soient colinéaires ; (b) qu'ils soient orthogonaux ; (c) que l'un au moins soit nul.

Dans un repère orthonormé, d'origine O et de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs : $\vec{A}=5\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{C}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

3- Évaluer $\vec{A}.\vec{B}$; $\vec{A}\wedge\vec{B}$; $\vec{B}\wedge\vec{A}$; $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|$.
4- Que représente géométriquement la norme de $\vec{A}\wedge\vec{B}$?
5- Calculer le plus petit angle θ formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$ à l'aide des produits vectoriel, puis scalaire.
6- Calculer le produit mixte $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$.
7- Vérifier que $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}.\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$.

II– Éléments de surface et de volume

1- Établir l'expression du volume d'un cylindre droit de hauteur h et de rayon R.
2- Calculer l'aire de la portion de surface d'un cylindre droit de rayon $R=2$ m et de hauteur $h=5$ m, limitée à $30°\leq\theta\leq 120°$.
3- Calculer la surface de la bande découpée sur la sphère de rayon R et définie par $\alpha\leq\theta\leq\beta$. Que devient ce résultat quand $\alpha=0$ et $\beta=\pi$?

III- Intégrale d'une fonction radiale

On considère en coordonnées sphériques un champ scalaire $f(r)$. Montrer que son intégrale sur tout l'espace s'écrit : $\int_0^{+\infty}4\pi r^2 f(r)\mathrm{d}r$.

IV- Circulation

Soit un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ dans un espace à trois dimensions et (Γ) une courbe joignant deux points P et Q. On appelle circulation du champ $\vec{a}(M)$ le long de la courbe (Γ) de P à Q la quantité :

$$C(\vec{a})=\int_P^Q \vec{a}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M .$$

Lorsque le champ vectoriel considéré est un champ de force, on appelle travail $W_{P\to Q}$ sa circulation.

1- On considère un champ de force uniforme, c'estàdire tel que $\vec{F}(M)=\vec{F}_0=\overrightarrow{C^{ste}}$. Exprimer son travail en fonction des normes de $\vec{F}_0$, $\overrightarrow{PQ}$ et de l'angle $\theta=(\vec{F}_0,\overrightarrow{PQ})$.
2- On considère un champ électrique $\vec{E}(M)=E_r(r)\vec{u}_r$ purement radial. Montrer que sa circulation le long de tout cercle de centre O est nulle.