# Thème 7 – Champ magnétostatique

## I- Champ créé par un fil infini

1- Le plan $(M,\vec{u}_\rho,\vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant donc un plan d'antisymétrie de $\vec{B}(M)$ qui doit être perpendiculaire à ce plan : $\vec{B}(M)=B_\theta(M)\vec{u}_\theta$.

2- On écrit la loi de Biot et Savart sous la forme $\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{P\in(\Gamma)}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{\ell}_P\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ où $\mathrm{d}\vec{\ell}_P=\mathrm{d}z\vec{u}_z$ $(\mathrm{d}z>0)$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}=-z\vec{u}_z+\rho\vec{u}_\rho$ et donc $PM=\sqrt{\rho^2+z^2}$.

3- En remplaçant, on obtient : $\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\rho\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right)\vec{u}_\theta=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{u}_\theta$.

## II- Champ créé par une boucle de courant

1- Tout plan contenant l'axe $(O,\vec{u}_z)$ et donc le point *M* est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ doit appartenir à tous ces plans à la fois : $\vec{B}(M)=B_z(M)\vec{u}_z$.

2- On écrit la loi de Biot et Savart sous la forme $\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\oint_{P\in(\Gamma)}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{\ell}_P\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ où $\mathrm{d}\vec{\ell}_P=R\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$, $\overrightarrow{PM}=z\vec{u}_z-R\vec{u}_\rho$ et donc $PM=\sqrt{z^2+R^2}$.

3- En développant, on obtient : $\mathrm{d}\vec{\ell}_P\wedge\overrightarrow{PM}=R(z\vec{u}_\rho+R\vec{u}_z)\mathrm{d}\theta$. L'intégrale ne peut être calculée en l'état car le vecteur $\vec{u}_\rho$ dépend du point *P*. Comme le champ résultant est orienté selon $\vec{u}_z$, on va se limiter au calcul de sa composante algébrique $B_z$ :

$$B_z(M)=\vec{B}(M).\vec{u}_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{P\in(\Gamma)}\frac{I\mathrm{d}\vec{\ell}_P\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}.\vec{u}_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)^3$$

On introduit $\alpha$ l'angle sous lequel est vue la spire depuis le point *M*. On a alors $\sin\alpha=\dfrac{R}{PM}=\dfrac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}$, d'où : $\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{u}_z$.

## III- Étude d'un solénoïde

1- D'après l'expression établie dans l'exercice précédent pour une boucle de courant, on peut écrire ici que $\mathrm{d}\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}N}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{u}_z$ où $\alpha$ est l'angle orienté sous lequel est vue la tranche depuis le point *M*.

2- Comme $\tan\alpha=\dfrac{R}{z-z'}$ où l'abscisse $z$ du point *M* est fixée, on obtient en différentiant $\mathrm{d}z'=\dfrac{R}{\sin^2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha$ d'où $\mathrm{d}\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0 nI}{2}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\vec{u}_z$. La contribution de l'ensemble du solénoïde est donc :

$$\vec{B}(M)=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\right)\vec{u}_z=\frac{\mu_0 nI}{2}[\cos(\alpha_1)-\cos(\alpha_2)]\vec{u}_z$$

3- Au centre $O$ du solénoïde, on a $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, soit $\cos(\alpha_1) = -\cos(\alpha_2) = \dfrac{L/2}{\sqrt{R^2 + L^2/4}}$. Après simplification, la norme du champ au centre est donc : $B(O) = \dfrac{\mu_0 NI}{\sqrt{4R^2 + L^2}} = 2{,}5 \times 10^{-3}$ T.

## IV- Cas d'un solénoïde infiniment long

1- Dans la limite du solénoïde infiniment long, nous avons $\alpha_1 \to 0$ et $\alpha_2 \to \pi$, d'où $\vec{B}(M) = \mu_0 nI\vec{u}_z$ en tout point $M$ de l'axe du solénoïde. Le champ y est donc bien uniforme.

2- On a une invariance de la distribution de courant par translation selon l'axe $(O, \vec{u}_z)$ et par rotation autour de cet axe, aussi, le champ créé ne dépend que de la distance à l'axe $\rho$. De plus, le plan $(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution donc un plan d'antisymétrie du champ créé qui est perpendiculaire en $M$ à ce plan. Nous avons bien un champ de la forme $\vec{B}(M) = B_z(\rho)\vec{u}_z$.

3- On choisit comme contour d'Ampère $(\Gamma)$ un rectangle orienté noté $ACDE$ dont un des côtés de longueur $\ell$ passe par le point $M$ considéré et un autre est confondu avec l'axe.
Le théorème d'Ampère s'écrit : $\displaystyle\oint_{M \in (\Gamma)} \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M = \mu_0 I_{enlacé}$.

▪ Calcul de la circulation.

En décomposant, $\displaystyle C_{(\Gamma)}(\vec{B}) = \oint_{M \in (\Gamma)} \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M = \int_A^C \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M + \int_C^D \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M + \int_D^E \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M + \int_E^A \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M$ où :

$\displaystyle\int_A^C \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M = \int_A^C B_z(0)\vec{u}_z.\mathrm{d}\ell_M \vec{u}_z = \ell B_z(0) = \ell\mu_0 nI$ ;

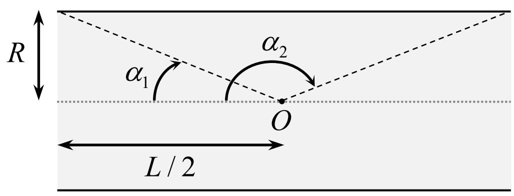
$\displaystyle\int_C^D \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M = \int_E^A \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M = 0$ car $\mathrm{d}\vec{\ell}_M$ selon $\pm\vec{u}_\rho$ perpendiculaire en tout point au champ selon $\vec{u}_z$ ;

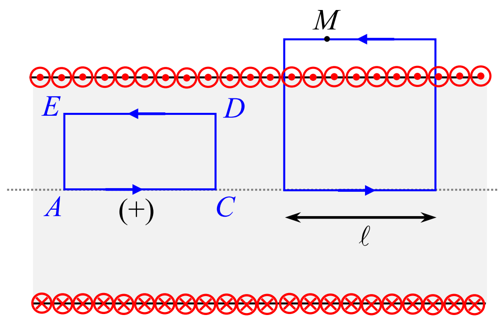
$\displaystyle\int_D^E \vec{B}(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M = \int_D^E B_z(\rho)\vec{u}_z.\mathrm{d}\ell_M(-\vec{u}_z) = -\ell B_z(\rho)$.

Finalement, il reste : $C_{(\Gamma)}(\vec{B}) = \ell(\mu_0 nI - B_z(\rho))$.

▪ Calcul de l'intensité des courants enlacés.

- Si le point $M$ est situé à l'intérieur du solénoïde, alors $I_{enlacé} = 0$ et donc $\vec{B}(M) = \mu_0 nI\vec{u}_z$. Le champ est uniforme en tout point intérieur à un solénoïde considéré comme infiniment long.
- Si le point $M$ est situé à l'extérieur du solénoïde, alors $I_{enlacé} = n\ell I$ (en faisant attention au signe) et donc $\vec{B}(M) = \vec{0}$. Le champ est nul en tout point extérieur à un solénoïde considéré comme infiniment long.



## V- Cavité dans un cylindre

1- Le plan $(M,\vec{u}_\rho,\vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc le champ $\vec{B}_1(M)$ est perpendiculaire à ce plan : il est orienté selon $\vec{u}_\theta$.
Il y a invariances par translation selon $(O,\vec{u}_z)$ et par rotation autour de $(O,\vec{u}_z)$ de la distribution de courants, donc les composantes du champ $\vec{B}_1(M)$ ne dépendent que de $\rho$, distance du point *M* à l'axe.
On en déduit finalement que : $\vec{B}_1(M) = B_{1,\theta}(\rho)\vec{u}_\theta$.

2- On choisit comme contour $(\Gamma)$ un cercle d'axe $(O,\vec{u}_z)$, de rayon $\rho \leq R_1$, orienté positivement dans le sens direct de l'axe $(O,\vec{u}_z)$ et passant par le point *M*.
On a donc $\oint_{M\in(\Gamma)} \vec{B}_1(M).\mathrm{d}\vec{\ell}_M = 2\pi\rho B_{1,\theta}(\rho)$.

Le contour enlace $n\pi\rho^2$ fils, donc $I_{enlacé} = n\pi\rho^2 I$, d'où : $\vec{B}_1(M) = \dfrac{\mu_0 nI}{2}\rho\vec{u}_\theta$.

Puisque $\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{u}_z \wedge (\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z) = \rho\vec{u}_\theta$, on vérifie bien que $\vec{B}_1(M) = \dfrac{\mu_0 nI}{2}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1M}$.

3- On établit comme précédemment que le champ créé par la série de fils occupant le cylindre de rayon $R_2$ s'écrit : $\vec{B}_2(M) = \dfrac{\mu_0 n(-I)}{2}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_2M}$.
On déduit du théorème de superposition le champ dans la cavité :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 nI}{2}\vec{u}_z \wedge \left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right) = \frac{\mu_0 nI}{2}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$$

On constate que ce champ est uniforme.