2 Interlude mathématique : notions de différentielle, gradient

2.1 Notations et cadre de travail

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et du produit scalaire usuel. On a :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tout point x de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

et le produit scalaire entre deux points de $\mathbb{R}^3$ vaut :

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

En particulier,

$$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit donc que $x_i = x \cdot e_i$. On a ainsi :

$$x = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{(x \cdot e_i)}_{\in \mathbb{R}} e_i \; \in \mathbb{R}^3.$$

Remarque. On rappelle que la norme de $x \in \mathbb{R}^3$ est $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$, et que la distance de $x \in \mathbb{R}^3$ à $y \in \mathbb{R}^3$ est $||x - y||$.

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Comme on fait de la physique et en plus de la physique de première année, Ω est “gentil” et f aussi, c'est-à-dire que f est continue, dérivable, de dérivée continue, toutes les dérivées qu'on a envie d'écrire existent et sont continues.

2.2 Dérivées directionnelles et partielles

Soient $x \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^3$. La fonction $t \mapsto f(x + tv)$ est bien définie autour de 0, et sa dérivée en 0 est appelée *dérivée directionnelle de f en x dans la direction v* (voir schéma figure 4). La dérivée directionnelle de f en x dans la direction v est un nombre réel.

Si $v = e_i$, cette dérivée est la *i-ième dérivée partielle de f en x*, notée $\partial_i f(x)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ (et c'est évidemment encore un nombre réel).

Si $i = 1$ par exemple, c'est la dérivée en $t = 0$ de $t \mapsto f(x_1 + t, x_2, x_3)$, ou la dérivée en $t = x_1$ de $t \mapsto f(t, x_2, x_3)$.

On note

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \partial_i f : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \partial_i f(x). \end{aligned}$$

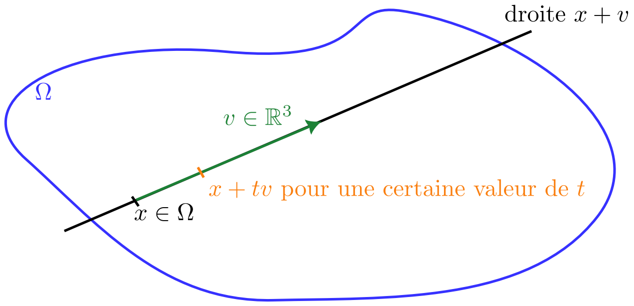

Figure 4 – Illustration de la notion de dérivée directionnelle.

Exemple. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto 3x_1^2 + \sin(x_2) + \exp(x_3)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = 6x_1 + \sin(x_2) + \exp(x_3),\\
\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + \cos(x_2) + \exp(x_3), \text{ et}\\
\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + \sin(x_2) + \exp(x_3).
\end{aligned}$$

2.3 Différentielle

La fonction f peut varier dans une infinité de directions différentes. La différentielle est l'analogue de la dérivée en dimension supérieure à 1. Elle contient l'information de toutes les dérivées directionnelles (dans toutes les directions).

Pour tout $x \in \Omega$, la *différentielle* $\mathrm{d}f_x$ *de* f *en* x est la fonction $\mathrm{d}f_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$v = (v_1, v_2, v_3) \mapsto \partial_1 f(x)\, v_1 + \partial_2 f(x)\, v_2 + \partial_3 f(x)\, v_3,$$

c'est-à-dire

$$v = (v_1, v_2, v_3) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\, v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\, v_3.$$

On note $\mathrm{d}x_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $v = (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_i$, c'est-à-dire la projection sur la i-ième coordonnée. On a alors l'égalité

$$\mathrm{d}f_x = \sum_{i=1}^{3} \partial_i f(x)\, \mathrm{d}x_i, \text{ ou encore } \mathrm{d}f_x = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \mathrm{d}x_i.$$

Il s'agit d'une égalité en tant que fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

La *différentielle de* f est l'application

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f : \Omega \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\
(x, v) &\longmapsto \mathrm{d}f_x(v) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, v_i.
\end{aligned}$$

2.4 Règle de la chaine

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\gamma : I \to \Omega$ une fonction "gentille". La fonction γ est un paramétrage de chemin ou de trajectoire : elle mange la variable t, qui est un réel et à laquelle on pensera comme étant le temps, et retourne une position $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ dans Ω. On a :

$$\forall t \in I,\ (f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\ \gamma_i'(t).$$

Pour $\gamma : t \mapsto x + tv$, en $t = 0$ on obtient

$$\underbrace{(f \circ \gamma)'(0)}_{\substack{\text{dérivée directionnelle de } f \\ \text{en } x \text{ dans la direction } v \\ \text{(cf section 2.2)}}} = \mathrm{d}f_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = \mathrm{d}f_x(v)$$

Ainsi, on voit bien que $\mathrm{d}f_x$ contient l'information de toutes les dérivées directionnelles.

Remarque. $\mathrm{d}f_x$ est totalement déterminée par 3 informations, les $\partial_i f(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, qui sont égales aux $\mathrm{d}f_x(e_i)$ comme on l'a vu à la section 2.3. On se ramène donc d'une infinité non dénombrable d'informations à seulement trois.

2.5 Gradient

La différentielle $\mathrm{d}f$ est un objet compliqué, par sa nature. On lui préfère le gradient de f, dont on comprend mieux le type.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}f_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est "linéaire", c'est-à-dire ici qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathrm{d}f_x : v \mapsto a \cdot v.$$

Cet unique vecteur a est appelé le *gradient de f en x*. On le notera $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x)$ dans ce cours, mais on peut trouver également la notation $\vec{\nabla} f(x)$ ou $\nabla f(x)$.

Pour tout $x \in \Omega$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) \in \mathbb{R}^3$. Le *gradient de f* est l'application

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f : \Omega &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x). \end{aligned}$$

Par définition,

$$\forall x \in \Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3,\ \mathrm{d}f_x(v) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) \cdot v.$$

Soit (u_1, u_2, u_3) un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) = \sum_{i=1}^{3} \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) \cdot u_i\right) u_i.$$

Il s'agit tout simplement de la décomposition sur une base orthonormée directe. En particulier, dans la base canonique on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) \cdot e_i\right)}_{=\mathrm{d}f_x(e_i)} e_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, e_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'opérateur gradient est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre. Il agit sur une fonction scalaire, et renvoie un champ de vecteurs qui indique à la fois la direction de la plus grande variation de cette fonction et l'intensité de cette variation, pour chaque point de l'espace. La figure 5 montre un exemple de gradient d'une fonction de deux variables.

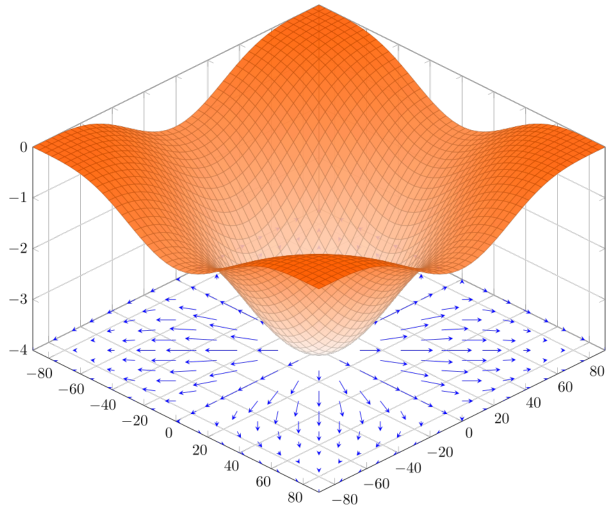

FIGURE 5 – Un exemple de gradient tiré de Wikipedia. Le champ scalaire $f(x,y) = -\left(\cos^2 x + \cos^2 y\right)^2$ est représenté par la nappe orange. Le gradient de f est un champ vectoriel, représenté par les flèches bleues. Chacune pointe dans la direction où f croit le plus vite.

À partir de l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f\,(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on peut déterminer l'expression du gradient de toute fonction scalaire $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dans les systèmes de coordonnées usuels. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z && \text{en coordonnées cartésiennes,}\\
\overrightarrow{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z && \text{en coordonnées cylindriques,}\\
\overrightarrow{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{u}_\phi && \text{en coordonnées sphériques.}
\end{aligned}$$

On remarque que dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, on a des expressions un peu plus compliquées. Cela est dû au fait qu'on a caché un changement de variables quelque part. L'obtention de ces formules résulte d'un calcul technique qui n'est pas l'ojet de ce cours. Il faudra connaitre ces formules, mais il ne sera pas demandé de les retrouver.

Remarque. Tout ce qu'on a vu précédemment s'adapte au cas d'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y && \text{en coordonnées cartésiennes et}\\
\overrightarrow{\text{grad}}\, f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta && \text{en coordonnées polaires.}
\end{aligned}$$

Ces formules sont également à connaitre, mais on ne demandera pas de les retrouver.

De tout cet interlude, les choses les plus importantes à retenir sont :

- la nature du gradient, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dépendant de $x \in \Omega$, et donc que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est un champ de vecteurs,
- les formules donnant le gradient de f en fonction des différents systèmes de coordonnées,
- les rappels autour du produit scalaire.

Complément

Détaillons le cas des coordonnées polaires. Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par :

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

On définit $\tilde{f} : \varphi^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ comme $\tilde{f} = f \circ \varphi$, c'est-à-dire que $\tilde{f}$ est définie par :

$$\tilde{f} : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,.$$

On a donc

$$\mathrm{d}\tilde{f}_{(r,\theta)} = \mathrm{d}f_{\varphi(r,\theta)} \circ \mathrm{d}\varphi_{(r,\theta)}$$

par la règle de la chaine. En notation matricielle, cela donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) & \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

et

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = r\left(-\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right).$$

Comme $e_r = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y$ et $e_\theta = -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot e_r &= \mathrm{d}f_{(r\cos\theta, r\sin\theta)}(e_r) \text{ par définition,} \\ &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot e_\theta &= \mathrm{d}f_{(r\cos\theta, r\sin\theta)}(e_\theta) \text{ par définition,} \\ &= -\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)\,. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f &= \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot e_r\right) e_r + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot e_\theta\right) e_\theta \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} e_\theta, \end{aligned}$$

ce qui est ce qu'on voulait.