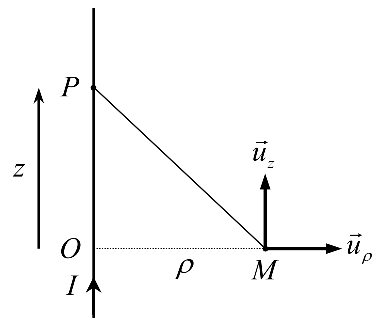
Thème 7 – Champ magnétostatique

I- Champ créé par un fil infini

Un fil rectiligne infini (Γ), confondu avec l'axe $(O,\vec{u}_z)$, est parcouru par un courant d'intensité I constante selon $\vec{u}_z$. On souhaite déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé en un point *M* situé à la distance ρ du fil dans le plan $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$. On repère tout point *P* du fil par son ordonnée z.



1- Justifier par des arguments de symétrie que le champ magnétostatique créé en *M* est de la forme : $\vec{B}(M) = B_\theta(M)\vec{u}_\theta$.

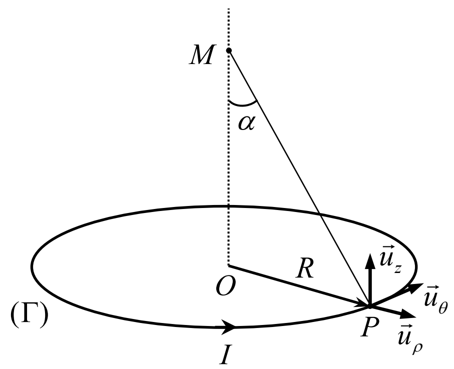
2- L'expression générale de ce champ est donnée par la loi de Biot et Savart : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P\in(\Gamma)} \dfrac{I\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$.

Exprimer les quantités $\mathrm{d}\vec{\ell}_P$, $\overrightarrow{PM}$ et PM en fonction des coordonnées des points *P* et *M* dans le repère $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

3- En déduire que $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{u}_\theta$. On donne : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z}{\rho^2\sqrt{\rho^2+z^2}}$.

II- Champ créé par une boucle de courant

On considère une spire circulaire (Γ), de centre *O* et de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I constante dans le sens direct de l'axe $(O,\vec{u}_z)$ de la spire. On souhaite déterminer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé en un point *M* d'ordonnée $\overline{OM} = z$ de l'axe de la spire. On repère tout point *P* de la spire par ses coordonnées polaires (R,θ) dans le repère $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$. La spire est vue depuis le point *M* sous un angle α.



1- Justifier par des arguments de symétrie que le champ magnétostatique créé en *M* est de la forme : $\vec{B}(M) = B_z(M)\vec{u}_z$.

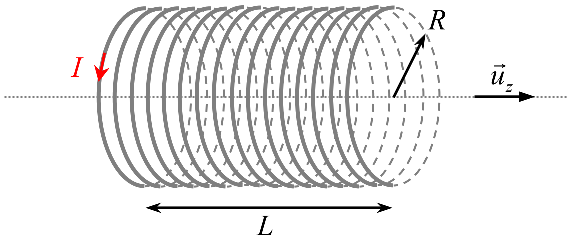
2- L'expression générale de ce champ est donnée par la loi de Biot et Savart : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P\in(\Gamma)} \dfrac{I\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$.

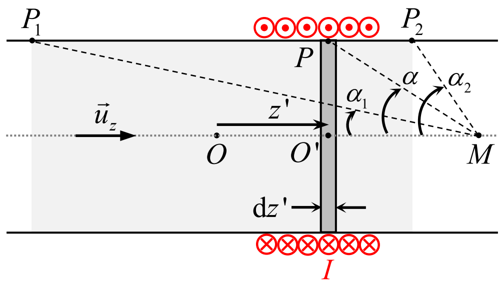
Exprimer les quantités $\mathrm{d}\vec{\ell}_P$, $\overrightarrow{PM}$ et PM en fonction des coordonnées des points P et M dans le repère $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

3- Calculer $B_z(M) = \vec{B}(M).\vec{u}_z$. En déduire que $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{u}_z$.

III- Étude d'un solénoïde

Un solénoïde de révolution est un enroulement régulier d'un fil conducteur, isolé électriquement, sur une surface cylindrique d'axe $(O,\vec{u}_z)$, de rayon R et de longueur L. Le fil, parcouru par un courant d'intensité I, décrit une hélice dont on néglige le pas devant son rayon. Dans ces conditions, un solénoïde peut être modélisé par un ensemble de N spires jointives circulaires d'épaisseur négligeable.





1- On considère une tranche élémentaire de solénoïde, centrée en un point O' d'abscisse z', comportant donc $\mathrm{d}N = n\mathrm{d}z'$ spires où $n = N/L$ est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. À partir de l'expression établie dans l'exercice précédent du champ magnétostatique créé par une spire sur son axe, donner celle du champ $\mathrm{d}\vec{B}(M)$ créé par la tranche de solénoïde considérée en un point M de son axe d'abscisse z.

2- En déduire le champ total $\vec{B}(M)$ créé en M par le solénoïde en fonction notamment des angles orientés α_1 et α_2 sous lesquels sont vues les deux faces du solénoïde depuis le point M.

3- Calculer la norme du champ $\vec{B}(O)$ au centre O d'un solénoïde de 50 cm de longueur, comportant 500 spires de 2,5 cm de rayon parcourues par un courant de 2 A.

IV- Cas d'un solénoïde infiniment long

Le solénoïde de l'exercice précédent est désormais considéré comme infiniment long $(L \gg R)$.

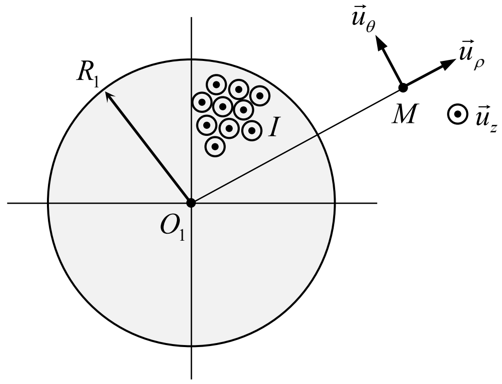
1- Montrer que le champ est uniforme en tout point de l'axe à l'intérieur du solénoïde en négligeant les effets de bord.

2- On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) dans le repère $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par le solénoïde est de la forme : $\vec{B}(M) = B_z(\rho)\vec{u}_z$.

3- À l'aide du théorème d'Ampère, montrer que le champ est nul à l'extérieur du solénoïde et uniforme à l'intérieur.

V- Cavité dans un cylindre

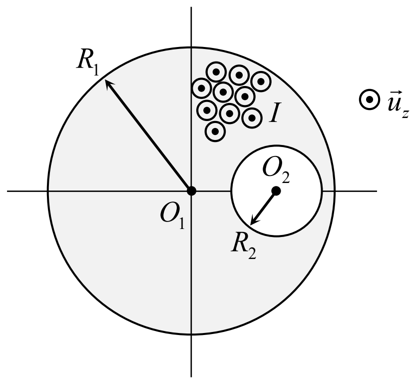
Des fils infinis rectilignes parallèles à un axe $(O_1,\vec{u}_z)$, tous parcourus par un courant stationnaire d'intensité I positive dans le sens de $\vec{u}_z$, sont réunis sous la forme d'un cylindre d'axe $(O_1,\vec{u}_z)$ et de rayon R_1 avec une densité n de fils par unité de surface uniforme. On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) dans le repère $(O_1,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.



1- Établir par des arguments de symétrie la direction du champ magnétostatique $\vec{B}_1(M)$ créé en un point quelconque M par la distribution de courant. De quelle(s) coordonnée(s) la norme de $\vec{B}_1(M)$ dépend-elle ? Justifier.

2- Déduire du théorème d'Ampère l'expression du champ $\vec{B}_1(M)$ créé en tout point M intérieur au cylindre de rayon R_1 par cette distribution de courant. Vérifier que $\vec{B}_1(M) = \dfrac{\mu_0 n I}{2}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O_1M}$.

On enlève maintenant quelques fils du cylindre précédent qui présente alors une cavité cylindrique vide « décentrée » de rayon R_2 dont l'axe $(O_2, \vec{u}_z)$ est parallèle à l'axe $(O_1, \vec{u}_z)$.



3- On considère cette nouvelle distribution de courant comme la superposition de deux séries de fils de même densité surfacique n , l'une occupant le cylindre de rayon R_1 avec un courant d'intensité I positive dans le sens de $\vec{u}_z$, l'autre occupant le cylindre de rayon R_2 avec un courant d'intensité I positive dans le sens de $-\vec{u}_z$. En utilisant le principe de superposition, exprimer le champ $\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$ créé en tout point M de la cavité vide en fonction de I , n et $\overrightarrow{O_1O_2}$. Que dire de ce champ ?