

7 Théorème d'Ampère

De la même façon qu'avec le champ électrostatique, la détermination en tout point de l'espace du champ magnétique créé par une distribution de courant à partir des formules (10) et (11) n'est pas chose aisée, mais il existe des méthodes pour simplifier les calculs. Dans cette partie, nous allons voir une de ces méthodes, le théorème d'Ampère.

7.1 Surface s'appuyant sur un contour

Dans le cas du champ électrostatique, on avait déjà établi une convention d'orientation pour les surfaces fermées (convention de la normale sortante). Nous allons maintenant avoir besoin d'une convention pour orienter des surfaces non fermées, dont on dit qu'elles s'appuient sur un contour, comme sur le schéma figure 21.

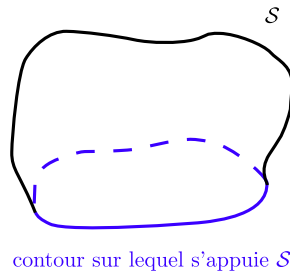


FIGURE 21 – Surface s'appuyant sur un contour.

On n'a qu'une direction possible pour $d\vec{S}(M)$, le vecteur surface élémentaire en M , qui est la direction orthogonale à S en M . Le sens de $d\vec{S}(M)$ est ensuite choisi en prenant en compte l'orientation du contour (qu'on commence donc par orienter si il n'est pas orienté). Pour cela, on utilise la fameuse *règle du tire-bouchon* : on imagine qu'on fait tourner un tire-bouchon dans le sens de l'orientation du contour, et le sens de progression de ce tire-bouchon imaginaire indique le sens de $d\vec{S}(M)$, comme sur la figure 22.

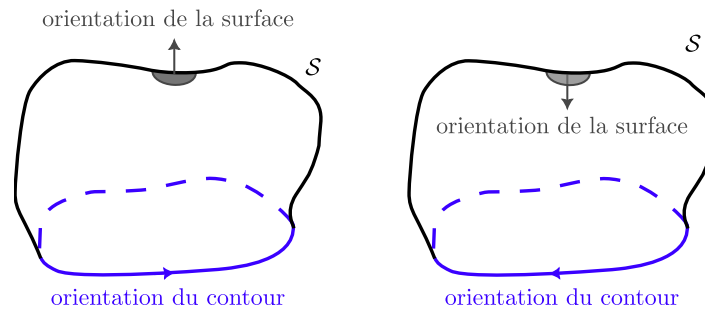


FIGURE 22 – Surface orientée, règle du tire-bouchon.

7.2 Notion de courants entrelacés

Soit \mathcal{C}_f un contour fermé orienté. On considère N fils parcourus par des courants électriques d'intensité I_k , $k \in [1, N]$. On nomme *somme des courants entrelacés par \mathcal{C}_f* , et on note $\sum_k \varepsilon_k I_k$ la quantité :

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k I_k,$$

où :

- $\varepsilon_k = 0$ si le fil numéro k ne passe pas dans \mathcal{C}_f ,
- $\varepsilon_k = +1$ si le fil numéro k passe dans \mathcal{C}_f et si l'orientation du fil k est la même que celle du vecteur surface élémentaire au point où s'intersectent le fil et toute surface s'appuyant sur \mathcal{C}_f ,
- $\varepsilon_k = -1$ si le fil numéro k passe dans \mathcal{C}_f et si le fil k est orienté dans le sens opposé à celle du vecteur surface élémentaire au point où s'intersectent le fil et toute surface s'appuyant sur \mathcal{C}_f .

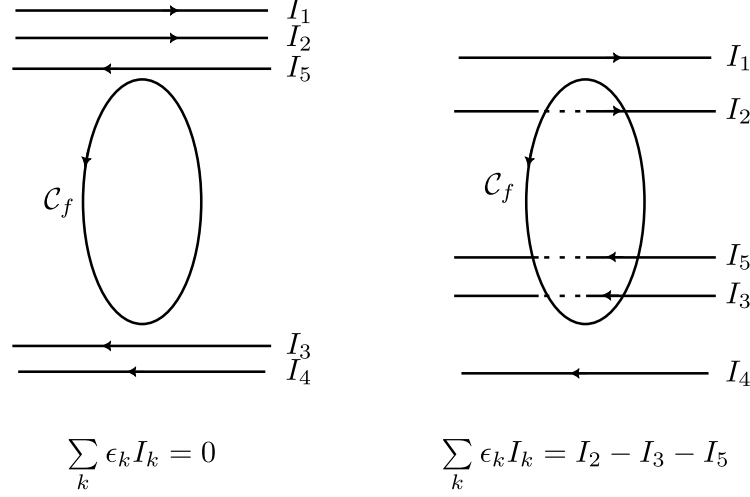


FIGURE 23 – Calcul de la somme des courants entrelacés.

7.3 Énoncé du théorème

Soit \mathcal{C}_f un contour fermé orienté. Le théorème d'Ampère affirme que la circulation, le long de \mathcal{C}_f , du champ magnétique créé par une distribution de courants est égale à la somme des courants entrelacés par \mathcal{C}_f , multipliée par μ_0 :

$$(12) \quad \oint_{P \in \mathcal{C}_f} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k.$$

7.4 Méthode générale d'application

Le théorème d'Ampère, comme le théorème de Gauss pour le champ électrostatique, va nous permettre de calculer le champ magnétique en tout point de l'espace pour des distributions de courant présentant beaucoup de symétries.

La méthode à suivre pour appliquer le théorème d'Ampère est la suivante :

1. Étudier les plans de symétrie et d'antisymétrie de la distribution de charge qui passent par le point M de l'espace où on cherche à calculer le champ. Cela nous permettra de déterminer la direction du champ.
2. Étudier les invariances de la distribution de charges. Cela nous permettra de déterminer les variables d'espace dont dépend le champ.
3. Utiliser le théorème d'Ampère :
 - Choisir un *contour d'Ampère* : il s'agit d'un contour \mathcal{C}_A fermé et orienté, passant par le point M de l'espace où on cherche à calculer le champ, et qui entoure tout ou partie de la distribution de courants. Généralement, il faut choisir un contour qui respecte les symétries de la distribution de courants, et on se trouve souvent dans un des deux cas

de figure suivant : soit $d\vec{\ell}(P)$ et $\vec{B}(P)$ sont colinéaires, soit ils sont orthogonaux. Dans les deux cas, le produit scalaire $\vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P)$ s'évalue facilement. Il ne faut pas oublier d'orienter ce contour !

- Calculer $\oint_{P \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P)$, ce qui sera facilité par le choix du contour d'Ampère.
- Calculer $\mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k$ la somme des courants entrelacés par \mathcal{C}_A .
- Écrire que $\oint_{P \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k$.
- Conclure.

Le théorème d'Ampère est un résultat important de magnétostatique, qu'il faut connaître et savoir appliquer via la méthode d'application décrite.

7.5 Exemple : champ créé par un fil infini

On considère un fil infini, confondu avec l'axe (O, \vec{u}_z) , parcouru par un courant électrique d'intensité $I > 0$ constante orientée selon \vec{u}_z . On cherche à déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la circulation du courant dans ce fil en tout point M de l'espace.

Pour utiliser le théorème d'Ampère, on commence par faire l'étude des symétries et invariances de la distribution de charges. Pour cela, on pose nos notations avec un schéma.

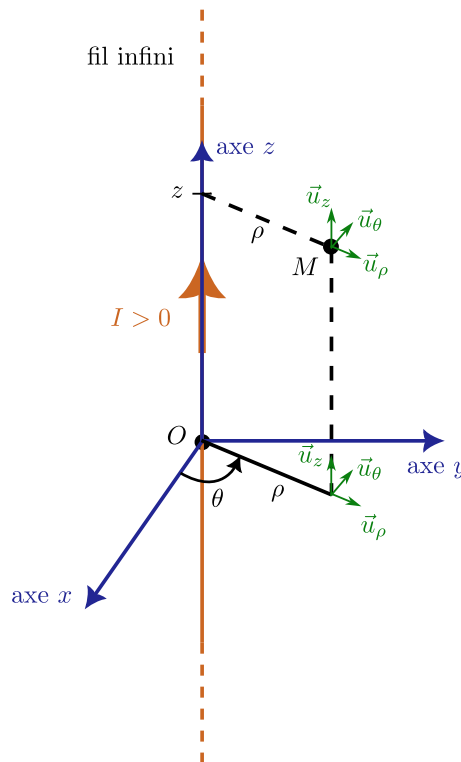


FIGURE 24 – Fil infini parcouru par un courant d'intensité I constante.

- Le plan Π passant par M et contenant $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc $\vec{B}(M) \perp \Pi$:

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_\theta.$$

- Le point M est repéré par (ρ, θ, z) , donc a priori $\vec{B}(M) = \vec{B}(\rho, \theta, z)$. Cependant, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ et par translation le long de l'axe z , donc $\vec{B}(M)$ ne dépend ni de θ ni de z : $\vec{B}(M) = \vec{B}(\rho)$.

Ainsi, par étude des symétries et des invariances de la distribution, on sait au final que

$$\vec{B}(M) = B(\rho) \vec{u}_\theta.$$

Le théorème d'Ampère nous dit que pour \mathcal{C}_f un contour fermée orienté, on a

$$\oint_{P \in \mathcal{C}_f} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k.$$

On choisit comme contour d'Ampère \mathcal{C}_A un cercle passant par M , contenu dans un plan perpendiculaire au fil, et dont le centre H est repéré par $(0, 0, z)$ et donc appartient au fil. On oriente ce contour, de façon arbitraire, et on verra que quel que soit le choix d'orientation on retrouve le même résultat, ce qui est heureux !

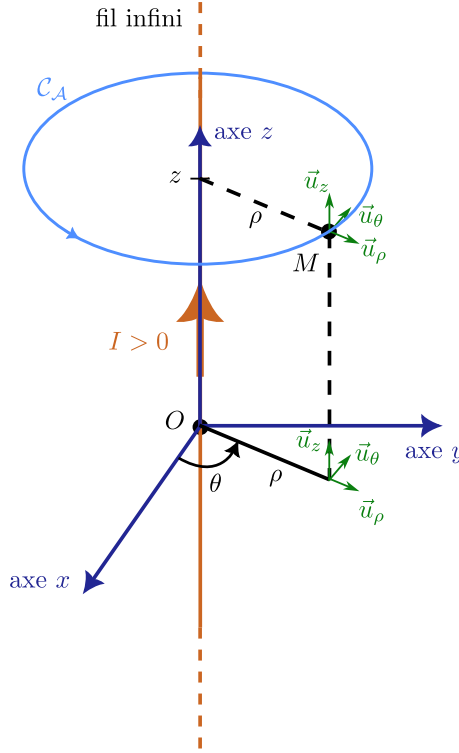


FIGURE 25 – Contour d'Ampère avec son orientation, choisie arbitrairement.

Dans un premier temps, on calcule $\oint_{P \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P)$.

$$\begin{aligned} \oint_{P \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) &= \int_{P \in \mathcal{C}_A} B(\rho) \vec{u}_\theta \cdot \rho d\theta \vec{u}_\theta \\ &= \rho B(\rho) \int_{\mathcal{C}_A} d\theta \\ &= \rho B(\rho) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \rho B(\rho). \end{aligned}$$

Dans ce calcul, il est important de comprendre que le choix de l'orientation de \mathcal{C}_A influence le résultat du calcul. En effet, on a orienté \mathcal{C}_A de façon à avoir $d\vec{\ell}$ orienté selon $+\vec{u}_\theta$, c'est-à-dire $d\vec{\ell} \cdot \vec{u}_\theta > 0$. Comme $d\vec{\ell} \cdot \vec{u}_\theta = \rho d\theta$ et que $\rho > 0$ par définition, cela impose $d\theta > 0$, autrement dit, on parcourt le contour dans le sens des θ croissants. C'est ce qui impose les bornes d'intégrations croissantes lorsqu'on écrit

$$\int_{\mathcal{C}_A} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta.$$

Dans un second temps, on calcule la somme des courants entrelacés par \mathcal{C}_A . On n'a qu'un seul fil, donc

$$\sum_k \varepsilon_k I_k = \varepsilon_1 I_1,$$

où $I_1 = I$ est l'intensité du courant du seul fil dont est constituée la distribution de courants, et il nous faut déterminer si $\varepsilon_1 = -1, 0$ ou 1 en utilisant la définition donnée à la section 7.2.

On sait déjà que $\varepsilon_1 \neq 0$, puisque le fil passe dans \mathcal{C}_A . Reste à déterminer si $\varepsilon_1 = -1$ ou $+1$. Pour cela, il nous faut savoir comment sont orientées les surfaces qui s'appuient sur le contour d'Ampère \mathcal{C}_A . On prend pour cela la surface la plus simple, le disque \mathcal{S}_A , comme illustré sur la figure 26. La règle du tire-bouchon nous dit que $d\vec{S}_A$ est orientée selon $+\vec{u}_z$. Comme c'est également l'orientation du fil, alors on a $\varepsilon_1 = 1$. Ainsi, on a

$$\sum_k \varepsilon_k I_k = I.$$

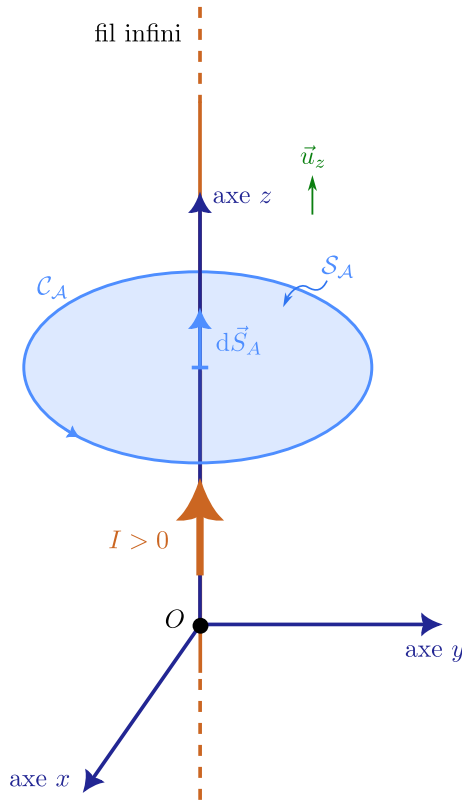


FIGURE 26 – Calcul des courants entrelacés.

On écrit ensuite que le théorème d'Ampère nous dit que

$$\oint_{P \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k,$$

ce qui donne

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I,$$

c'est-à-dire

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

Au final, cela nous donne

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta.$$

Que se passe-t-il si on oriente le contour d'Ampère dans l'autre sens ? On a alors :

$$\begin{aligned} \oint_{P \in \mathcal{C}_A} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) &= \int_{P \in \mathcal{C}_A} B(\rho) \vec{u}_\theta \cdot \rho d\theta \vec{u}_\theta \\ &= \rho B(\rho) \int_{\mathcal{C}_A} d\theta \\ &= \rho B(\rho) \int_0^{-2\pi} d\theta \\ &= -2\pi\rho B(\rho). \end{aligned}$$

En effet, on a dans ce cas $d\vec{\ell}$ orienté selon $-\vec{u}_\theta$, c'est-à-dire $d\vec{\ell} \cdot \vec{u}_\theta < 0$. Comme $d\vec{\ell} \cdot \vec{u}_\theta = \rho d\theta$ et que $\rho > 0$ par définition, cela impose $d\theta < 0$, autrement dit, on parcourt le contour dans le sens des θ décroissants. C'est ce qui impose les bornes d'intégrations décroissantes lorsqu'on écrit

$$\int_{\mathcal{C}_A} d\theta = \int_0^{-2\pi} d\theta.$$

On a également :

$$\sum_k \varepsilon_k I_k = -I,$$

en refaisant le raisonnement précédent avec la nouvelle orientation. On a donc bien au final : Au final, cela nous donne

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta.$$

Les lois de la physique ne sont pas impactées par nos choix arbitraires, ouf !