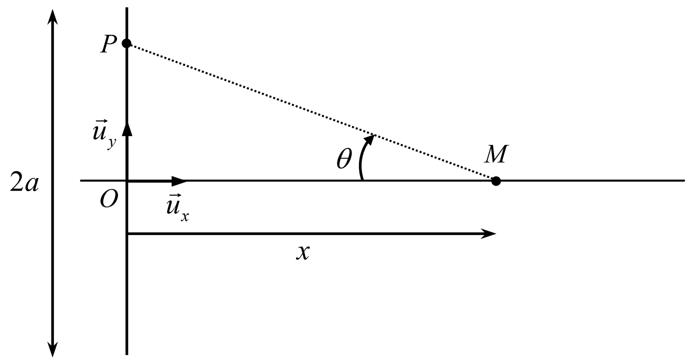
Thème 3 – Champ créé par une distribution continue de charges

I- Champ créé par un fil rectiligne

Une charge électrique $q > 0$ est distribuée uniformément sur un fil de longueur $2a$ porté par l'axe $(O,\vec{u}_y)$, où O est le centre du fil.



1- Quelle est la densité linéique de charge λ portée par le fil ?

2- On cherche à exprimer le champ $\vec{E}(M)$ créé par ce fil en un point M d'abscisse x fixée de l'axe $(O,\vec{u}_x)$.

a- Exprimer le champ électrostatique élémentaire $\mathrm{d}\vec{E}(M)$ créé par l'élément de longueur $\mathrm{d}\ell_P$ entourant le point P du fil d'ordonnée y.

b- Justifier, en invoquant des arguments de symétrie, que le champ résultant $\vec{E}(M)$ est orienté selon $\vec{u}_x$ et donc que seule, la composante $\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_x$ est à considérer pour le calcul du champ total $\vec{E}(M)$ créé par le fil.

c- Exprimer $\mathrm{d}E_x$ en fonction de λ, x et de l'angle $\theta = (\overrightarrow{PM},\vec{u}_x)$. En déduire l'expression de $\vec{E}(M)$ en fonction de λ, x et a.

3- Que devient cette expression lorsque $a \to +\infty$?

4- Le fil forme un carré de côté $2a$ et porte toujours la charge linéique λ. Quelle est la valeur du champ électrique créé par ce carré en son centre ?

II- Condensateur plan

A- Champ créé par un plan infini

On considère un plan infini $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, chargé uniformément avec une densité surfacique $\sigma > 0$. On repère tout point P de ce plan par ses coordonnées cylindriques $(\rho,\theta,z=0)$ dans le repère $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

On cherche l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'axe $(O,\vec{u}_z)$, situé au-dessus du plan à l'ordonnée $z > 0$, par cette distribution de charges.

1- Faire un schéma de la situation on y indiquant en particulier le point *M*, le point *P* et ses coordonnées, ainsi que les vecteurs de la base cylindrique.

2- Soit un élément infinitésimal de surface $\mathrm{d}S_P$ du plan entourant un point *P*. Donner les expressions de $\mathrm{d}S_P$ et $r = PM$ dans le système de coordonnées cylindriques.

3- Soit le vecteur unitaire $\vec{u}_{P/M} = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$. Donner l'expression de $\vec{u}_{P/M}$ dans la base cylindrique.

4- Rappeler l'expression du champ électrostatique élémentaire $\mathrm{d}\vec{E}(M)$ créé par l'élément de surface $\mathrm{d}S_P$. Représenter qualitativement $\mathrm{d}\vec{E}(M)$ sur le schéma précédent.

5- Justifier, en invoquant des arguments de symétrie, que le champ résultant $\vec{E}(M)$ est orienté selon $\vec{u}_z$ et donc que seule, la composante $\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}\vec{E}.\vec{u}_z$ est à considérer pour le calcul du champ total $\vec{E}(M)$ créé par le plan.

6- En déduire que $\vec{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$.

B- Modèle de condensateur plan

Deux plans de surface S, considérés comme infinis, chargés uniformément avec les densités surfaciques $+\sigma > 0$ et $-\sigma < 0$, sont situés respectivement en $z = -d/2$ et $z = +d/2$. On note P_1 et P_2 ces deux plans.

1- Faire un schéma de la situation.

2- Donner les expressions des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ créés par les plans respectivement P_1 et P_2 en $z < -d/2$, $-d/2 < z < d/2$ et $z > d/2$. Représenter qualitativement ces champs sur le schéma précédent.

3- Donner l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ résultant de la superposition de $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ en tout point *M* de l'espace.

4- Comment varie le potentiel électrostatique $V(M)$ en tout point *M* de l'espace ? Représenter $V(z)$. On choisira $V(z=0) = 0$. En déduire la différence de potentiel $\Delta V = V_1 - V_2$ entre les plans P_1 et P_2.

5- Le système étudié modélise un condensateur plan. Les deux plans de surface S et distants de d sont appelés armatures. On définit alors la capacité C (exprimée en farad F) de ce condensateur comme le rapport entre la charge Q portée par l'armature inférieure, de densité surfacique $+\sigma > 0$, et la différence de potentiel ΔV. Montrer que $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$.