Вопросы к экзамену выч. мат.

① Предмет вычислительной математики. Общий метод вычислительной математики.

Область математики, которая призвана разрабатывать методы доведения до числового результата основных задач математического анализа, алгебры и геометрии и пути использования для этой цели современных вычислительных средств.

Общий метод: Пусть R_1, R_2 – функц. метрические пространства. A – оператор, заданный на пространстве R_1 со значениями из пространства R_2; $x \in R_1$ $A(x) = y \in R_2$. Заменим пространства R_1 и R_2 и оператор A некоторыми другими пространствами $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ и $\bar{A}$. Отсюда $x \in \bar{R}_1$, $y \in \bar{R}_2$, $A = \bar{A}$ т.е. $\bar{A}(\bar{x}) = \bar{y}$, $\rho(y, \bar{y}) \le \varepsilon$

② Источники и классификация погрешностей результатов численного решения задачи. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Правила записи приближенных чисел.

а) Неточность математической модели процесса или явления

б) Неточность исходных данных x^* – исх. данные

в) Погрешность методов решения задачи

г) Погрешности вычислений.

$$\delta y^* = \delta_н y^* + \delta_м y^* + \delta_в y^*$$

$\delta_н y^*$ – неустранимая погрешность

$\delta_м y^*$ – погрешность метода

$\delta_в y^*$ – погрешность вычислений

$\delta_м y^* < 10^{-1} \delta_н y^*$

$\delta_в y^* < 10^{-1} \delta_м y^*$

$\Delta(a^*) = |a - a^*|$ – абс. погр.

$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$ – относ. погр.

a^* – приближенное знач. Если $\bar{\Delta}(a^*)$ известна, то в качестве

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{|a|} \approx \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{|a^*|}$$

Запись прибл. чисел $a^* = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_0 , \beta_1 \ldots \beta_m$ $\alpha_i \beta_i$ – дес. числа

③ Погрешности арифметических операций над приближенными числами

Пусть a^* и b^* — приближенные значения чисел a и b.

Теорема 1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы или разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых, т.е. $\Delta(a^* \pm b^*) \le \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

Док-во: Имеем $\Delta(a^* \pm b^*) = |(a \pm b) - (a^* \pm b^*)| = |(a - a^*) \pm (b - b^*)| \le \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$ ■

Следствие. В силу неравенства 2.8 (выше) естественно положить $\bar{\Delta}(a^* \pm b^*) = \bar{\Delta}(a^*) + \bar{\Delta}(b^*)$

Теорема 2. Пусть a и b ненулевые числа одного знака. Тогда справедливы неравенства

$$\delta(a^* + b^*) \le \delta_{max}, \quad \delta(a^* - b^*) \le \nu \delta_{max}, \quad (2.10)$$

где $\delta_{max} = \max\{\delta(a^*), \delta(b^*)\}$, $\nu = \frac{|a+b|}{|a-b|}$. Используя неравенства $\delta(a^*) = \frac{|a - a^*|}{|a|} = \frac{\Delta(a^*)}{|a|}$ и $\Delta(a^* \pm b^*) \le \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$, имеем: $|a \pm b|\,\delta(a^* \pm b^*) = \Delta(a^* \pm b^*) \le \Delta(a^*) + \Delta(b^*) = |a|\,\delta(a^*) + |b|\,\delta(b^*) \le (|a| + |b|)\,\delta_{max} = |a + b|\,\delta_{max}$. Из полученных неравенства следуют оценки 2.10

Следствие. В силу неравенства 2.10 естественно положить

$\bar{\delta}(a^* + b^*) = \bar{\delta}_{max}$, $\bar{\delta}(a^* - b^*) = \nu \bar{\delta}_{max}$, где $\bar{\delta}_{max} = \max\{\bar{\delta}(a^*), \bar{\delta}(b^*)\}$ $\nu = \frac{|a+b|}{|a-b|}$

Первое из неравенств значает, что при суммировании чисел одного знака не происходит потери точности, если точность оценивать в относ. единицах. При вычитании граница относ. погрешности возрастает в $\nu > 1$ раз. и возможна существенная потеря точности. Если числа a и b близки настолько, что $|a + b| \gg |a - b|$, то $\nu \gg 1$ и не исключена полная или почти полная потеря точности. (происходит катастрофическая потеря точности). Вывод: при построении численного метода решения задачи следует избегать вычитания близких чисел одного знака. Если такое вычитание неизбежно, то следует вычислять аргументы с повышенной точностью учитывая её потерю $\approx$ в $\frac{|a+b|}{|a-b|}$ раз

Теорема 3. Для относительных погрешностей произведения и частного приближенных чисел верны оценки: $\delta(a^* b^*) \le \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*)$ 2.12.

$\delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right) \le \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}$ в последней из которых считается что $\delta(b^*) < 1$.

Док-во: Выполним преобразования: $|ab|\,\delta(a^* b^*) = \Delta(a^* b^*) = |ab - a^* b^*| = |(a - a^*)b + (b - b^*)a - (a - a^*)(b - b^*)| \le |b|\Delta(a^*) + |a|\Delta(b^*) + \Delta(a^*)\Delta(a^*) = |ab|(\delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*))$, т.е. $|ab|\,\delta(a^* b^*) \le |ab|(\delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*))$. Разделив обе части на $|ab|$, получим искомую оценку 2.12

Для второй оценки: $|b^*| = |b + (b^* - b)| \ge |b| - \Delta(b^*) = |b|(1 - \delta(b^*))$. Тогда

$\delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \frac{\left|\frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*}\right|}{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{|ab^* - ba^*|}{|ab^*|} = \frac{|a(b^* - b) + b(a - a^*)|}{|ab^*|} \le \frac{|a|\,\Delta(b^*) + |b|\,\Delta(a^*)}{|ab|(1 - \delta(b^*))} = \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}$ ■. Следствие. Если $\delta(a^*) \ll 1$ и $\delta(b^*) \ll 1$ то для оценки границ относительных погрешностей можно использовать след. приближенные равенства $\bar{\delta}(a^* b^*) \simeq \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)$, $\bar{\delta}(a^*/b^*) \simeq \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)$

Именно эти равенства чаще всего и используют для практической оценки погрешности.

4) Погрешность функции одной и нескольких переменных

Расм. задачу:

$y = f(x) \in [a, b]$

$x = (x_1 \dots x_m) \quad x \in \mathbb{R}^m, \ y \in \mathbb{R}^1$

$y^* = f^*(x)$ – приближ. знач.

$|y - y^*| = \Delta(y^*)$

Пусть $[x, x^*]$ – отрезок в $\mathbb{R}^m$.

$x \approx x^* \quad f(x) \approx f(x^*)$

$y - y^* = f(x) - f(x^*) = \sum_{j=1}^{m} f'_{x_j}(\tilde{x}) \cdot \Delta(x_j^*)$ где $\tilde{x} \in [x, x^*]$

$\Delta(y^*) = |y - y^*| \le \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(\tilde{x})| \Delta(x_j^*) \le \sum_{j=1}^{m} \max_{[a,b]} |f'_{x_j}(\tilde{x})|$

Если $x^* \approx x$, то

$\bar{\Delta}(y^*) = \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x)| \cdot \bar{\Delta}(x_j^*)$

$\bar{\Delta}(y^*) = \sum_{j=1}^{m} |f'_{x_j}(x^*)| \bar{\Delta}(x_j^*)$

$\delta(y^*) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{|f'_{x_j}(x)||x_j|}{|f(x)|}}_{= D_j} \cdot \underbrace{\frac{\bar{\Delta}(x_j^*)}{|x_j|}}_{= \delta(x_j^*)} = \sum_{j=1}^{m} D_j \, \delta(x_j^*)$

$\bar{\delta}(y^*) = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\frac{|f'_{x_j}(x^*)| |x_j|}{|f(x^*)|}}_{= D_j^*} \cdot \bar{\delta}(x_j^*) = \sum_{j=1}^{m} D_j^* \bar{\delta}(x_j^*)$

Частный случай: $m = 1$

$\bar{\Delta}(y^*) \approx |f'(x)| \cdot \bar{\Delta}(x^*)$

$\bar{\Delta}(y^*) \approx |f'(x^*)| \cdot \bar{\Delta}(x^*)$

$\bar{\delta}(y^*) \approx \frac{|f'(x)| \, |x|}{f(x)} \, \bar{\delta}(x^*)$

$\delta(y^*) \approx \frac{|f'(x^*)| \, |x^*|}{f(x^*)} \cdot \delta(x^*)$

⑤ Корректность вычислительной задачи. Примеры корректных и некорректных задач.

опр Вычислительная задача называется корректной, если

1. $\forall x \in X$, $\exists$ решение $y \in Y$
2. Решение y - единственное
3. Устойчивость решения

$ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ ф-ла непрерывна $\to$ задача устойчива

задача корректна

$f(x)$ $[a;b]$

$u(x)=f'(x)$ $[a;b]$

Будем считать $f(x)\approx f^*(x)$

$u^*(x)=(f^*)'(x)$

$\Delta(u^*)$, $\Delta(f^*)$

$\Delta(u^*)=\max\limits_{[a,b]}|f(x)-f^*(x)|$

$\Delta(u^*)=\max\limits_{[a,b]}|u(x)-u^*(x)|$

Рассм. $f^*(x)=f(x)+\alpha\cos\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)$,

$\Delta(f^*)\to 0$

$u^*(x)=f'(x)+\frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)$

$|u(x)-u^*(x)|=\frac{1}{\alpha}\left|\sin\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)\right|\to\frac{1}{\alpha}\to\infty$

$(\alpha\to 0)$

Решение неустойчиво относительно малых погрешностей, следовательно задача некорректна.

⑥ Обусловленность вычислительной задачи. Примеры хорошо и плохо обусл. задач.

Обусловленность вычислительной задачи это чувствительность результата решения задачи к конечным малым погрешностям исходных данных.

D_Δ – абс. число. обусл.

$\delta(y^*) \le D_\delta \cdot \delta(x^*)$, то D_δ – относ. число обусл.

Говорят что задача хорошо обусловлена, если $D_\Delta << \infty$, $D_\delta << \infty$.

Пусть $\Delta(x^*) \le 10^{-5}$ – исх. информация, требуется решить задачу с $\Delta(y^*) \le 10^{-3}$

$D_\Delta - ?$ $D_\Delta < 100$ – задача хорошо обусловлена.

$f(x) = e^x$ $D_\Delta = |(e^x)'| = e^x$

$D_\delta = \frac{|e^x||x|}{|e^x|} = |x|$ – растет линейно

$x \approx 100$

$D_\delta = 100 = 10^2$ $\delta(x^*) = 10^{-6} \longrightarrow \delta(f^*) = 10^{-4}$

Потеря двух значащих цифр плохо обусл.

⑦ Классификация вычислительных методов. Вычислительные алгоритмы. Корректность и обусловленность вычислительных алгоритмов.

1) Методы эквивалентных преобразований.
2) Итерационные методы
3) Методы аппроксимации.

Вычислительные алгоритмы – точное предписание действий над входными данными, задающее вычислительный процесс, направленный на преобразование произвольных данных в полностью определенный этими данными результат.

Вычисл. алгоритм называется корректным, если:
1. Он приводит к результату $y \in Y$ для заданного $x \in X$ за конечное число элементарных для ЭВМ операций
2. Устойчив по отношению к малым погрешностям исходных данных
$\Delta(x^*) \to 0 \longrightarrow \Delta(y^*) \to 0$
3. Алгоритм вычислительно устойчив если $\varepsilon_m \to 0$, то и $\Delta(y^*) \to 0$

Вычисл метод (алгоритм) называется хорошо обусловленным если малым погрешностям исходных данных соответствуют малые погрешности результатов вычисления.

8) Постановка задачи решения нелинейных уравнений. Основные этапы решения задачи

$f(x)=0$ – нелинейное уравнение.

$\tilde{x}$ – корень уравнения $f(x)=0$ если $f(\tilde{x})=0$

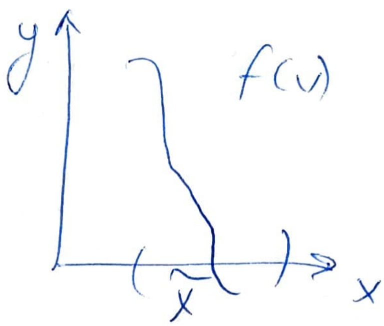
$\tilde{x}$ – простой, если $f(\tilde{x})=0$, $f'(\tilde{x})\neq 0$

$\tilde{x}$ – кратный, если $f(\tilde{x})=f'(\tilde{x})= \dots f^{(m-1)} \neq 0$
(кратности m)

$f^{(m)}(\tilde{x}) = f^{(m+1)}(\tilde{x}) = \dots \neq 0$

I этап – локализация корня

а) графический метод



б) табличный

x_0	x_1	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_n)$

$[x_{i-1}, x_i]$ отрезок, где $f(x_{i-1})f(x_i) < 0$

в) начальное условие

II этап – итерационное уточнение корня.

$[a, b]$ – отрезок локализации корня. Выбираем начальное приближение $\tilde{x} \approx x^{(0)}$. Выбираем итерационную функцию $\varphi(x)$ и строим итер. послед.

$x^{(1)} = \varphi(x^{(0)})$

$x^{(2)} = \varphi(x^{(1)})$

$(x^{(n)}) = \varphi(x^{(n-1)})$

Если $x^{(n)} \to \bar{x}$

$\bar{x} = \varphi(\bar{x})$ и $f(\bar{x})=0$ то $x^{(n)}$ – корень нелин. уравн.

$\varphi(x) = x - \psi(x) f(x)$, где $\psi(x)$ может быть

$\psi(x) = \alpha = const$ – метод прост. итерации.

$\psi(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$ – метод Гаусса.

Итерационный метод может быть одношаговым $(x^{(n)} = \varphi(x^{(n-1)}))$ или многошаговым $(x^{(n)}) = \varphi(x^{(n-k)}, x^{(n-k+1)}, \dots, x^{(n-1)})$

k – шаговым

⑨ Скорость сходимости итерационных методов уточнения решения

Для количественной оценки скорости сходимости сравнивают последовательность решений, полученных на каждой итерации с убывающей геометрической прогрессией по зависимости

$|x_i - x^*| \le a q^i$

В этом случае скорость сходимости метода (p) рассчитывается из условия:

$|x_{i+1} - x^*| \le a|x_i - x^*|^p$

При этом $a > 0$; $p \ge 1$ константы, независящие от x.

p=1 – линейная сходимость в окрестности корня x^*

p=2 – квадратичная

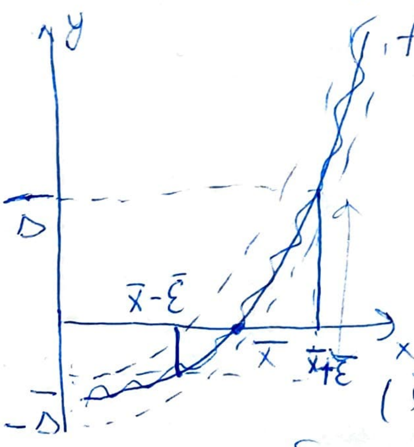
p=3 – кубическая

⑩ Обусловленность задачи решения нелинейных уравнений. ~~Скорость сходимости. Критерий окончания.~~ Понятие об интервале неопределенности. Правило Гарвика

$f(x)=0$ $\quad \bar{x}: f(\bar{x})=0 \quad x \in [a;b]$

$f^*(x) \approx f(x)$

обозначим $\max\limits_{[a;b]} |f(x)-f^*(x)| = \bar{\Delta}(f^*)$



Если функция f(x) непрерывна, то найдется такая малая окрестность $(\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ корня $\bar{x}$, имеющая радиус ε, в которой выполняется неравенство $|f(x)| < \bar{\Delta}$. Это означает, что $x \in [\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon]$ знак вычисленного значения $f^*(x)$ не обязан совпадать со знаком f(x) и становится невозможным определить, какое именно значение x из интервала обращает функцию f в нуль

$(\bar{x}-\bar{\varepsilon}, \bar{x}+\bar{\varepsilon})$ – интервал неопределённости

Требуется найти $\bar{\varepsilon}$: $(\bar{x}-\bar{\varepsilon}, \bar{x}+\bar{\varepsilon})$ – интервал. неопр.

Если f(x) – непрерывная по близи корня $\bar{x}$ [illegible] что $f(x) < \bar{\Delta}$

Пусть $\bar{x}$ простой корень. $f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi)(x-\bar{x})$, где $\xi \in [x;\bar{x}]$

$|f(x)| = |f'(\xi)|\,|x-\bar{x}| \le \bar{\Delta}$

$|x-\bar{x}| \le \frac{1}{|f(\xi)|}\bar{\Delta}(f^*)$

$\nu_\Delta = \frac{1}{|f(\xi)|}$

Если $x \approx \bar{x}$, то $\nu_\Delta = \frac{1}{|f'(\bar{x})|}$

$\bar{\varepsilon} = \bar{\Delta}(\bar{x}^*) = \nu_\Delta \cdot \bar{\Delta}(f^*)$. (плохо обусловлена)

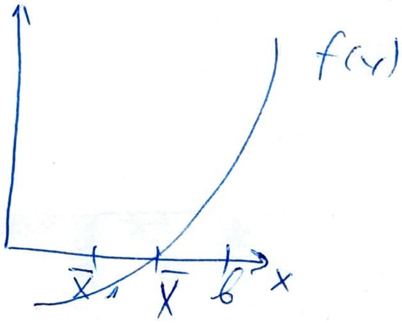
Правило Гарвика:

Последовательные итерации выполняются до тех пор пока они далеки от интервала неопределенности, т.е. пока $\dfrac{x^{(k)}-x^{(k-1)}}{x^{(k-1)}-x^{(k-2)}}=q^{(k)}$ остается меньше 1. Как только $q^{(k)}$ становится больше 1, следует прекратить вычисления, исследовать причину увеличения $q^{(k)}$ и если устранить её не удается, положить приближенное значение корня равным $x^{(k-1)}$, полученное таким способом решение - наилучшее из возможных.

⑪ Метод бисекции решения нелинейных уравнений. Скорость сходимости. Критерий окончания (метод половинного деления отрезка)

$f(x)$ $x\in[a,b]$ - отрезок локализации

$f(a)\,f(b)<0$



шаг 1: $a^{(0)}=a$

$b^{(0)}=b$

$f(a^{(0)})f(b^{(0)})<0$

$x^{(1)}=\dfrac{a^{(0)}+b^{(0)}}{2}$

$|x^{(1)}-\bar{x}|<\dfrac{b^{(0)}-a^{(0)}}{2}$

шаг 2. $f(a^{(0)})f(x^{(0)})<0 \Rightarrow a^{(1)}=a^{(0)}$, $b^{(1)}=x^{(0)}$

$f(x^{(0)})f(b^{(0)})<0 \Rightarrow a^{(1)}=x^{(0)}$, $b^{(1)}=b^{(0)}$

$x^{(2)}=\dfrac{a^{(1)}+b^{(1)}}{2}$, $|x^{(2)}-\bar{x}|=\dfrac{b^{(1)}-a^{(1)}}{2^2}$

шаг n: $x^{(n)}=\dfrac{a^{(n-1)}+b^{(n-1)}}{2}$, $|x^{(n)}-\bar{x}|<\dfrac{b-a}{2^n}$

при $n\to\infty$ $\Delta(x^{(n)})\to 0$

Скорость сходимости $q=\frac{1}{2}$.

Критерий окончания: $\dfrac{|b-a|}{2^n}<\varepsilon$

⑫ Метод простой итерации. Априорная оценка погрешности.

$f(x)=0$ заменяется на эквивалентное

$x=\varphi(x)$ $\bar{x}$ - корень, то $f(\bar{x})=0$

$\bar{x}=\varphi(\bar{x})$

Приведение уравнения $f(x)=0$ к виду $x=\varphi(x)$ рассмотрим отдельно

$x\in[\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

x^{0} - нач. приближение

(12) - продолж.

Если итерационная послед. $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ сходится к $\bar{x}$, то

$\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, т.е. $\bar{x}$ - корень

$x^{(1)} = \varphi(x^{(0)})$

$x^{(2)} = \varphi(x^{(1)})$

$\vdots$ Условие сходимости $- |\varphi'(x)| < 1$

$x^{(n)} = \varphi(x^{(n-1)})$

Априорная оценка погрешности: $|x^{(n)} - \bar{x}| \le q^n |x^0 - \bar{x}|$

$\bar{x} = \varphi(\bar{x})$ Док-во

$x^{(n)} - \bar{x} = \varphi(x^{(n-1)}) - \varphi(\bar{x}) = (\varphi(\xi^{(n)})$

$(x^{(n-1)} - \bar{x})$, где $\xi^{(n)} \in [x^{(n-1)}, \bar{x}]$

$|x^{(n)} - \bar{x}| \le |\varphi'(\xi^{(n)})| |x^{(n-1)} - \bar{x}| \le q |x^{(n-1)} - \bar{x}|$ т.е.

метод сходится линейно со скор. Г.П. со знам. q. ч.т.д.

(13) Апостериорная оценка погрешности (критерий окончания)

В условиях теоремы 1 (будет в некоторой окрестности $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$

$|\varphi'(x)| \le q < 1 \longrightarrow \forall x^{(0)} \in (\bar{x} - \sigma', \bar{x} + \sigma')$

1) Итерационная последовательность не выходит за $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in (\bar{x} - \sigma', \bar{x} + \sigma')$.

2) Метод простой итерации сходится со скор. Г.П. со знам. q

3) $|x^{(n)} - \bar{x}| \le q^n |x^0 - \bar{x}|$) верна след. оценка погрешности:

$$\boxed{|x^{(n)} - \bar{x}| \le \frac{q}{1-q} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|}$$

ε задано $\longrightarrow |x^{(n)} - \bar{x}| \le \frac{q}{1-q}$

$|x^{(n)} - (x^{(n-1)})| < \varepsilon$

(Точность достигнута когда $|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon$

Д) $x^{(n)} - \bar{x} = \varphi(x^{(n-1)}) - \varphi(\bar{x}) = \varphi'(\xi^{(n)})(x^{(n-1)} - \bar{x}) = \varphi'(\xi^{(n)}) \cdot (x^{(n-1)} - x^{(n)} -$

$- \bar{x}) = \varphi'(\xi^{(n)}) \cdot (x^{(n-1)} - x^{(n)}) + \varphi'(\xi^{(n)})(x^{(n)} - \bar{x})$ приведем подобные

$[1 - \varphi'(\xi^{(n)})](x^{(n)} - \bar{x}) = \varphi'(\xi^{(n)}) \cdot (x^{(n-1)} - x^{(n)})$,

$$x^{(n)} - \bar{x} = \frac{\varphi'(\xi^{(n)})}{1 - \varphi'(\xi^{(n)})} (x^{(n-1)} - x^{(n)})$$

$$|x^{(n)} - \bar{x}| = \frac{|\varphi'(\xi^{(n)})|}{|1 - \varphi'(\xi^{(n)})|} \cdot |x^{(n)} - x^{(n-1)}| \le \frac{q}{1-q} \cdot |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$$

ч.т.д.

Критерий окончания.

Задан $\varepsilon > 0$

$|x^{(n)} - \bar{x}| < \varepsilon$

$\bar{x} \approx x^{(n)}$

$\frac{q}{1-q}|x^{(n)}-x^{(n-1)}|<\varepsilon \to |x^{(n)}-x^{(n-1)}|<\frac{1-q}{q}\cdot\varepsilon$ ↙ критерий

$|x^{(n)}-x^{(n-1)}|<\varepsilon$ – всегда ли можно? – не всегда

если $q<\frac{1}{2} \to \frac{1-q}{q}>1 \to \frac{1-q}{q}\varepsilon>\varepsilon \to$ можно исп. критерий.

$q>\frac{1}{2} \to$ преждевременная остановка вычислений.

Если q неизвестно:

$|x^{(n)}-\bar{x}|\le\frac{q}{1-q}|x^{(n)}-x^{(n-1)}|$

$x^{(n)}-x^{(n-1)}=\varphi(x^{(n-1)})-\varphi(x^{(n-2)})=\varphi'(\xi^{(n-1)})(x^{(n-1)}-x^{(n-2)})=$

$=\alpha^{(n-1)}\cdot(x^{(n-1)}-x^{(n-2)})$. В окрестности корня $\varphi'(x)\approx\varphi'(\bar{x})\approx\alpha^{(n)}\to$

$\to\alpha^{(n-1)}\approx\frac{x^{(n)}-x^{(n-1)}}{x^{(n-1)}-x^{(n-2)}}$ – эту величину можно принять за

q: $\alpha^{(n-1)}=q$. Критерий остановки: $|x^{(n)}-x^{(n-1)}|\le\frac{1-\alpha^{(n)}}{\alpha^{(n)}}\cdot\varepsilon$

(14) Приведение исходного нелинейного уравнения к виду, удобному для итераций. Выбор оптимального значения коэффициента уравнения

$f(x)=0\to x=\varphi(x)$

Итерац. функцию $\varphi(x)$ найдем в виде $\varphi(x)=x-\alpha f(x)$, $\alpha>0$ ↙ неизвестно

Надо выбрать оптимальные α:

q – наименьший

Пусть: $\varphi(x)=x-\alpha f(x)$

$x\in(\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta)$.

Пусть в окрестн. δ-окр. $f'(x)>0$ (если $f'(x)<0$ переходим к $-f'(x)$). $\exists\; m\ge0, M>m$ т.ч. $0\le m<f'(x)<M$

$\varphi'(x)=1-\alpha f'(x)\to$

$1-\alpha M<\varphi'(x)<1-\alpha m$

$|\varphi'(x)|<\max\{|1-\alpha M|, |1-\alpha m|\}<1$

$1-\alpha M=-1+\alpha m$

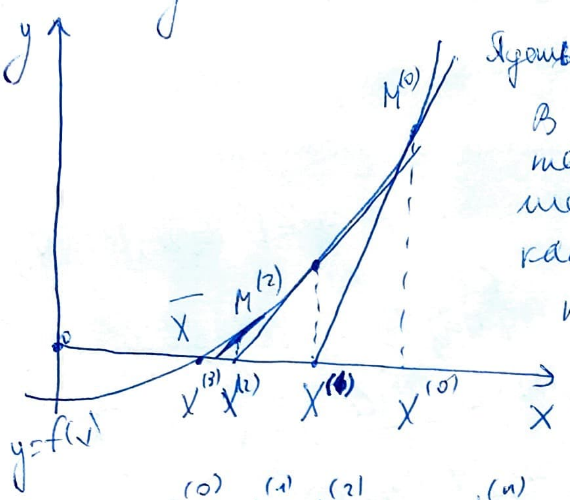
$\boxed{\alpha_{опт}=\frac{2}{M+m}}\to$

$q=1-\alpha_{опт}\cdot m=1-\frac{2m}{M+m}=$

Получаем наиболее быстро сходящийся итер. процесс $=\frac{M-m}{M+m}<1$

(15) Метод Ньютона. Вывод итерационной формулы метода Ньютона

1. Метод касательных.



Пусть $x^{(0)}$ — заданное начальное приближение к корню $\bar{x}$. В точке $M^{(0)}$ с координатами $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ проведем касательную к графику функции $y=f(x)$ и за новое приближение $x^{(1)}$ примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox. Аналогично за приближение $x^{(2)}$ примем абсциссу точки пересечения с осью Ox касательной, проведенной к графику в точке $M^{(1)}$ с координатами $(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$. Продолжая...

$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \dots$ приближение к корню $\bar{x}$.

$y = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)})$ — ур-ние кас.

$y = 0 \Rightarrow$ при выполнении условия $f'(x^{(n)}) \neq 0$ абсцисса $x^{(n+1)}$ точки пересечения касательной с осью Ox удовл. равенству

$$0 = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \quad n \geq 0$$ — расчетная формула метода Ньютона

2. Метод линеаризации (можно рассматривать как итерационный метод)
Пусть приближение $x^{(n)}$ уже получено. Представим функцию в окрестности точки $x^{(n)}$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x^{(n)})^2$$

ξ — некоторая точка, расположенная между x и $x^{(n)}$. Заменяя в уравнении $f(x)=0$ функцию $f(x)$ главной линейной частью, получим линейное ур-ние

$$f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) = 0$$

Принимая решение уравнения за новое приближение $x^{(n+1)}$ приходим к формуле. $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$ $n \geq 0$

(16) Априорная оценка погрешности метода Ньютона (Теор. о скорости сходимости)

Теорема. Пусть $\bar{x}$ — простой корень уравнения $f(x)=0$, в некоторой окрестности которого функция f дважды непрерывно дифференцируема. Тогда найдется такая малая σ-окрестность корня $\bar{x}$, что при произвольном выборе начального приближения $x^{(0)}$ из этой окрестности итерационная последовательность метода Ньютона не выходит за пределы этой окрестности и справедлива оценка $|x^{(n+1)} - \bar{x}| \leq C|x^{(n)} - \bar{x}|^2$, $n \geq 0$, где $C = \sigma^{-1}$, означающая что метод сходится с квадратичной скоростью

Следствием оценки является априорная оценка погрешности

$|x^{(n)}-\bar{x}| \le \sigma q^{2^n}$, $n \ge 0$ в которой $q=\sigma^{-1}|x^{(0)}-\bar{x}|$

□ Т.к. $f'(\bar{x}) \ne 0$ (по опр. простого корня), то в силу непрерывности функций f' и f'' найдется δ_0 – окрестность корня в которой при некоторых постоянных α и β выполнены неравенства $0<\alpha \le |f'(x)|$, $|f''(x)| \le \beta$.

Пусть $x^{(n)} \in (\bar{x}-\sigma; \bar{x}+\sigma)$, где $\sigma = \min\{\delta_0, \frac{2\alpha}{\beta}\}$. Подставляя $x=\bar{x}$ в формулу $[f(x)=f(x^{(n)})+f'(x^{(n)})(x-x^{(n)})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^{(n)})^2]$, получим равенство $0=f(x^{(n)})+f'(x^{(n)})(\bar{x}-x^{(n)})+\frac{f''(\xi)}{2}(\bar{x}-x^{(n)})^2$, в котором $\xi \in (\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$. Вычитая из него р-ство $[0=f(x^{(n)})+f'(x^{(n)})\cdot(x^{(n+1)}-x^{(n)})]$, имеем $f'(x^{(n)})(x^{(n+1)}-\bar{x})=\frac{f''(\xi)}{2}(\bar{x}-x^{(n)})^2$.

Приравнивая модули обеих частей этого равенства и используя условия ограниченности $|f'(x)|$ и $|f''(x)|$, приходим к неравенству $\alpha|x^{(n+1)}-\bar{x}| \le \frac{\beta}{2}(\bar{x}-x^{(n)})^2$, откуда следует справедливость оценки

Справедливость оценки $[|x^{(n+1)}-\bar{x}| \le C|x^{(n)}-\bar{x}|^2, n \ge 0]$.

⑰ Апостериорная оценка погрешности. (критерий окончания) Правило выбора начального приближения на отрезке локализации корня, гарантирующего сходимость метода.

$[|x^{(n)}-\bar{x}| \le \sigma q^{2^n}, n \ge 0]$ устанавливается методом индукции

$|x^{(n)}-\bar{x}| \le |x^{(n)}-x^{(n-1)}|$

<u>Теорема</u> Пусть выполнены условия теоремы выше (вопр 16). и $x^{(0)} \in (\bar{x}-\sigma/2, \bar{x}+\sigma/2)$. Тогда для всех $n \ge 1$ верна оценка выше..

□. Из оценки $|x^{(n)}-\bar{x}| \le \sigma q^{2^n}$, $n \ge 0$ ~~$|x^{(n+1)}-\bar{x}| \le C|x^{(n)}-\bar{x}|^2$, $n \ge 0$~~ следует, что $(x^{(n-1)}-\bar{x}) \le \le \sigma q^{2^{n-1}} \le \sigma q = |x^{(0)}-\bar{x}| < \sigma/2$. Поэтому, применяя неравенство $|x^{(n+1)}-\bar{x}| \le C|x^{(n)}-\bar{x}|^2$, $n \ge 0$, получим цепочку неравенств

$2|x^{(n)}-\bar{x}| \le 2\sigma^{-1}|x^{(n-1)}-\bar{x}|^2 \le |x^{(n-1)}-\bar{x}| \le |x^{(n-1)}-x^{(n)}|+|x^{(n)}-\bar{x}|$,

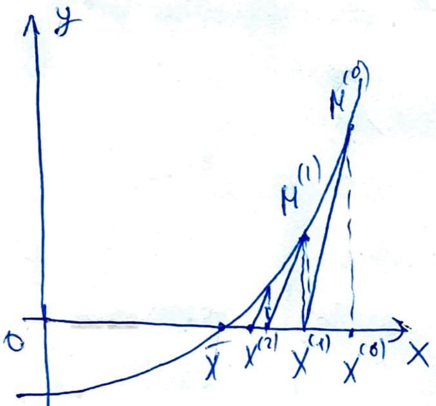
из которой $\rightarrow$ оценка $|x^{(n)}-\bar{x}| \le |x^{(n)}-x^{(n-1)}|$

Правило выбора: если F' и F'' одного знака на отрезке $[a;b]$, то начальное приближение — правый конец отрезка, если F' и F'' — разных знаков — то левый.

(18) Модификация метода Ньютона. Упрощенный метод Ньютона. Метод хорд.

1) Упрощенный метод Ньютона

$x^{(0)}$ — нач. прибл. $\longrightarrow x^{(n+1)} = x^{(n)} - \dfrac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(0)})}$ метод простой итерации

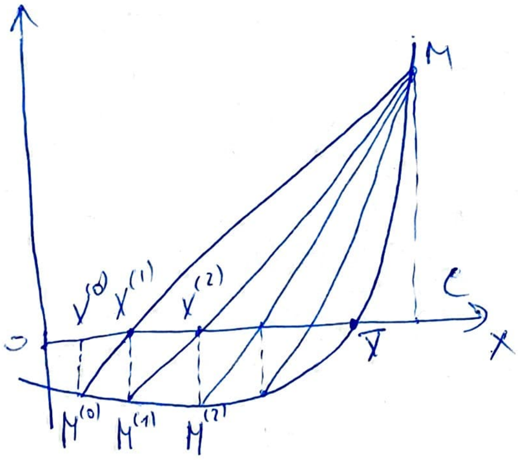


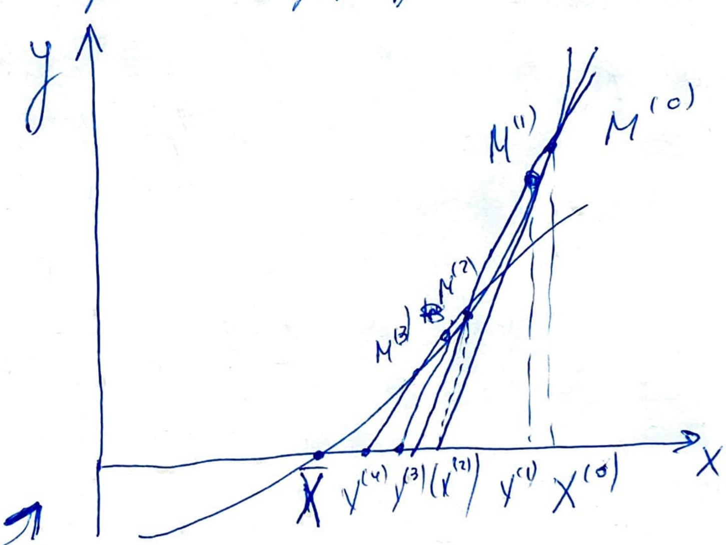
2) Метод хорд

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$f'(x^{(n)}) = \frac{f(c)-f(x^{(n)})}{c-x^{(n)}}$$, где c — фикс. точка $c \approx \bar{x}$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{c-x^{(n)}}{f(c)-f(x^{(n)})} f(x^{(n)})$$ — расчетная формула метода хорд





3) Метод секущих требует $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$, т.к. двухшаговый. Если вычислены $f(x^{(n-1)})$, $f(x^{(n)})$, то $f'(x^{(n)}) \simeq \dfrac{f(x^{(n-1)})-f(x^{(n)})}{x^{(n-1)}-x^{(n)}}$

(19) Метод секущих. (см. вопр (18)). Скорость сходимости метода

Теорема. Пусть $\bar{x}$ — простой корень уравнения $f(x)=0$, в некоторой окрестности которого функция f дважды непрерывно дифференцируема, причём $f''(\bar{x}) \neq 0$. Тогда существует σ — окрестность корня $\bar{x}$ такая, что при произвольном выборе приближений $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ из этой σ — окрестности метод сходится с порядком $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$, т. е. для $n \geq 1$ справедлива оценка $|x^{(n+1)} - \bar{x}| \leq C|x^{(n)} - \bar{x}|^p$, $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(20). Решение систем линейных алгебраических уравнений. Постановка задачи.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm} = b_m \end{cases}$$

$Ax = b$, $\det A \neq 0$

Задача решения СЛАУ — по заданному вектору $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$ найти

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Вместо x получаем вектор x^*

$L = x - x^*$, L — погрешность

Задача — минимизировать L.

Невязка $r = b - Ax^* = A(x - x^*)$. Погрешность и невязка связаны равенством $e = x - x^* = A^{-1}r$

(21) Решение СЛАУ. Определение понятия нормы вектора. Абсолютная и относительная погрешности вектора

def. Нормой вектора x в пространстве R^m называется величина $\|x\|$, такая что:

1. $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in R^m$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$; $\alpha = const$
3. $\forall x, y \in R^m$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Абсолютная и относительная погрешности вектора x^*

$\Delta(x^*) = \|x - x^*\|$

$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{\|x\|}$

(x, x^* — приб. знач. вектора у
$\|x - x^*\|$ — расстояние между x и x^*)

(22) Решение СЛАУ. Определение понятия нормы матрицы, подчиненной норме вектора. Геом. интерпретация нормы матрицы.

Величина $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ называется нормой матрицы A, подчиненной норме векторов, введенной в R^m.

Св-ва: 1) $\|A\| \geq 0$, причем $\|A\| = 0$ тогда и только тогда когда $A = 0$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$ для любой матрицы A и любого числа α

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ для любых матриц A и B.

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для любых матриц A и B

5) Для любой матрицы A и любого вектора x справедливо неравенство $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Для того чтобы привести геом. интерпретацию заметим, что операцию умножения матрицы на вектор можно рассматривать как преобразование, которое переводит вектор x в новый вектор $y = Ax$. Если значение $\|x\|$ интерпретируется как длина вектора x, то величина $\|Ax\| / \|x\|$ есть коэфф. растяжения вектора под действием матрицы A. Таким образом величина

$K_{max} = \|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ представляет собой максимальный коэф. растяжения вектора x под матрицей A.

$$K_{min} = \|A^{-1}\|^{-1} = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

При $\|A\| < 1$ происходит сжатие вектора под действием матрицы

(23) Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений для приближенно заданной ~~первой~~ правой части. Количественная мера обусловленности системы линейных алгебраических уравнений. Геометрическая интерпретация числа обусловленности

Теорема. Пусть x^* — точное решение системы $Ax^* = b^*$, в которой правая часть b^* является приближением к b. Тогда верны следующие оценки абсолютной и относ. погрешностей:

$$\Delta(x^*) \leq D_\Delta \, \Delta(b^*)$$

$$\delta(x^*) \leq D_\delta \, \delta(b^*), \text{ где } D_\Delta = \|A^{-1}\|, \quad D_\delta = \|A^{-1}\| \frac{\|b\|}{\|x\|}$$

В рассматриваемом случае $r = b - Ax^* = b - b^*$ и неравенство $\Delta(x^*) \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$ принимает вид $\Delta(x^*) \leq D_\Delta \, \Delta(b^*)$.

Разделив обе части неравенства на $\|x\|$ и записав его в виде $\frac{\Delta(x^*)}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|b\|}{\|x\|} \cdot \frac{\Delta(b^*)}{\|b\|}$ приходим к оценке $\delta(x^*) \leq D_\delta \, \delta(b^*)$. ∎

Замечание 1. Величина $D_\Delta = \|A^{-1}\|$ для задачи $Ax = b$ играет роль абсолютного числа обусловленности.

Замечание 2. Величина $D_\delta = \|A^{-1}\| \frac{\|b\|}{\|x\|}$ называется естественным числом обусловленности. Она зависит от погрешности решения x и характеризует коэффициент возможного возрастания относительной погрешности этого решения, вызванного погрешностью задания правой части. Это означает, что $D_\delta(x)$ для задачи вычисления решения x системы $Ax = b$ играет роль относ. числа обусловленности.

Вычислим максимальное значение естественного числа обусловленности, используя определения нормы матрицы:

$$\max_{x \neq 0} D_\delta(x) = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A \cdot x\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

Полученную величину принято называть стандартным числом обусловленности (или просто числом обусловленности) матрицы A и обозначать через $D(A)$ или $cond(A)$. Таким образом, $D(A) = cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$

Следствие. В условиях теорема справедлива оценка

$$\delta(x^*) \leq cond(A)\,\delta(b^*)$$

Для её доказательства достаточно воспользоваться оценкой $\delta(x^*) \leq D_\delta\,\delta(b^*)$ и заметить, что в силу опр. $\max_{x \neq 0} D_\delta(x) = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}\|\|A \cdot x\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ верно неравенство $D_\delta \leq cond(A)$

Величина $cond(A)$ является широко используемой количественной мерой обусловленности системы $Ax = b$. В частности, систему и матрицу A принято называть плохо обусловленной, если $cond(A) >> 1$.

Пользуясь приведенной в §5.2 геометрической интерпретацией нормы матрицы A и A^{-1} $\left(k_{max} = \|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \text{ и } k_{min} = \|A^{-1}\|^{-1} = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$ число обусловленности можно интерпретировать как отношение максимального коэффициента растяжения векторов под действием матрицы A к минимальному коэффициенту: $cond(A) = \frac{k_{max}}{k_{min}}$

24 Обусловленность задачи решения СЛАУ для приближенно заданных матрицы и правой части.

<u>Теорема</u>. Пусть x^* – точное решение системы $A_* x^* = b$ с приближенно заданной матрицей A. Тогда верна следующая оценка относительной погрешности: $\delta^*(x^*) \le \mathrm{cond}(A)\cdot\delta(A_*)$, где $\delta^*(x^*) = \|x - x^*\| / \|x^*\|$,

$\delta(A_*) = \|A - A_*\| / \|A\|$

В случае когда с погрешностью заданы как правая часть системы так и матрица доказано что справедливо неравенство (пред. вопр 23 док-во).

$$\delta(x^*) \le \mathrm{cond}(A)\cdot(\delta(A_*) + \delta(b^*)).$$

25 Метод Гаусса решения СЛАУ. Схема единственного деления. LU-разложение. Свойства метода.

1) Схема единственного деления.

<u>Прямой ход</u>.

Полагаем, что $a_{11} \ne 0$ (ведущий элемент)

Вычисляем множители 1-го шага:

$\mu_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = 2, 3, \ldots, m$.

Из уравнения с $i = 2, 3, \ldots$, вычитаем уравнение с $i = 1$, умноженное на множ. μ_{i1}, $i = 2, 3, \ldots, m$.

$$\boxed{\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - \mu_{i1} a_{1j}; \quad i = 2, 3, \ldots, m \\ b_i^{(1)} &= b_i - \mu_{i1} b_1 \quad i = 2, \ldots, m \end{aligned}}$$

Приходим к системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \cancel{a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m = b_2^{(1)}} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2^{(1)} \\ a_{m3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{mm}^{(1)}x_m = b_m^{(1)} \end{cases}$$

$Ax = b \longrightarrow A^{(1)}x = b^{(1)}$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \ldots & a_{2m}^{(1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} \ldots & a_{mm}^{(1)} \end{pmatrix} \qquad b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mu_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\mu_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -\mu_{m1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} A^{(1)} = M_1 \cdot A \\ b^{(1)} = M_1 \cdot b \end{matrix}$$

Выбираем ведущ. элемент 2-го шага $a_{22}^{(1)} \neq 0$

Вычисл. множ 2-го шага.

$\mu_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \; i = 3, 4, \dots, m$ вычитаем 2-ое, умнож. на $\mu_{i2}; \; i = 3, 4, \dots, m$

Приводим к системе $A^{(2)}x = b^{(2)}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots & a_{mm}^{(2)} \end{pmatrix}$$

В матричной записи:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\mu_{m2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(2)} = M_2 \cdot A^{(1)}, \; b^{(2)} = M_2 \cdot b^{(1)}$$

После $(m-1)$ шага получаем

$$A^{(m-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m-1} & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2m-1}^{(1)} & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1,m-1}^{(m-1)} & a_{m-1\,m}^{(m-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m,m}^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

$A^{(m-1)} = M_{m-1} \cdot A^{(m-2)}$, где $M_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\mu_{m-1,m} & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(m-1)} = M_{m-1} \cdot M_{m-2} \dots M_1 \cdot A$

$A = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \dots M_{m-1}^{-1} \cdot A^{(m-1)}$

$A^{(m-1)} = U$ – верхняя треуг.

$M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{m-1}^{-1} = L$

$$M_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \mu_{31} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mu_{m2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$L = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{m-1}^{-1}$ имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \mu_{m3} & \dots & \mu_{m-1,m} & 1 \end{pmatrix}$$

Обратный ход

Из последнего уравнения:

$$x_m = \frac{b_m^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}}$$

Из последнего уравнения находим x_{m-1}

$$x_k = \left(b_k^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)} x_{k+1} - \dots - a_{km}^{m-1} x_m\right) / a_{kk}^{k-1} \quad (k = m-1, \dots, 1)$$

Схема единственного деления неустойчива/некорректна.

26 Метод Гаусса решения СЛАУ. Схемы частичного и полного выбора ведущих элементов. Свойства метода.

Схема частичного выбора.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = A$$

Пусть $|a_{ik1}| = \max\limits_{\forall i} |a_{i1}| \to a_{ik1}$ – главный элемент

переставляются местами

1 и k строки $\to |\mu_{i1}| \le 1$

$$|a_{ij}^{(k)}| \le |a_{ij}^{(k-1)}| + |a_{kj}^{(k-1)}|$$

max рост элементов матрицы

$A^{(m-1)}$ – в 2 раза.

Общий рост – в $2^{(m-1)}$ раз. $\varphi(m) = 2^{m-1}$ коэф. роста

Схема полного выбора

В качестве ведущего элемента выбираем

$|a_{i_1 j_1}| = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

далее:

1. меняются местами строки 1 и i
2. исключение неизвестных x_{i1}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i1} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots a_{2m} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & 0 & \dots a_{mm} \end{pmatrix}$$

$\varphi(m) = 1{,}8m^{0{,}25 \ln(m)} \ll 2^{m-1}$

• гарантия экспонент обусловленности достигается здесь ценой значительных затрат на выбор главных элементов. Общая трудоемкость порядка m^3 операций.

27 Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление решений системы уравнений с несколькими правыми частями.

$Ax = d_{(1)}, Ax = d_{(2)}, \dots, Ax = d_{(p)}$; одна матрица A и различные правые части.

При непосредственном применении метода Гаусса: $A_{m\times n}$

$O(p) = \frac{2}{3} m^2 p + 2m^2 p$

Если A приводится к треуг. виду один раз

$O(p) = \frac{2}{3} m^3 + 2m^2 p$

(28) Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление обратной матрицы.

Обозначим $A^{-1} = V \longrightarrow AV = E$

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ — столбцы V;

$e_1, e_2, \ldots, e_m$ — столбцы E

$$\begin{cases} Av_1 = e_1 \\ Av_2 = e_2 \\ \ldots \\ Av_m = e_m \end{cases}$$

$O(m) = \frac{2}{3}m^3 + 2m^3 = \frac{8}{3}m^3$ с учётом специального вида

$e_i - O(m) = 2m^3$

(29) Применение метода Гаусса к решению задач линейной алгебры. Вычисление выражений вида $v = B^{-1}CA^{-1}WD^{-1}\cdot w$. Вычисление определителя матрицы.

$$v = A^{-1}B\underbrace{C^{-1}\cdot w}_{y}$$

$C^{-1}w = y, \quad Cy = w$

$x = By$

$v = A^{-1}x \longrightarrow Av = x$

отсюда находим v.

Вычисление $\det(A)$

$$A^{(m-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2m}^{(1)} \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mm}^{(m-1)} \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = (-1)^s \det(A^{(m-1)}) =$$

$= (-1)^s a_{11} a_{22}^{(1)} \ldots a_{mm}^{(m-1)}$; S — число перестановок строк.

Воспользуемся формулой $\det A = a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}$; получим

$\det A = (-1)^s a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} \ldots a_{mm}^{(m-1)}$, где $a_{11}^{(0)} = a_{11}$.

30 Метод Холецкого решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Свойства метода.

Пусть требуется решить систему линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с симметрично положительно определенной матрицей A.

В основе метода лежит алгоритм построения специального LU-разложения матрицы A, в результате чего она приводится к виду $A=LL^T$

В разложении $A=LL^T$ нижняя треугольная матрица

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix}$$

уже не обязательно должна иметь на главной диагонали единицы, как это было в методе Гаусса, а требуется только чтобы диагональные элементы были положительными.

Если разложение $(A=LL^T)$ получено, то решение системы $Ax=b$ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами: $Ly=b$, $L^Tx=y$ $(O(m)=2m^2)$

Найдем элементы матрицы L. Для этого вычислим элементы матрицы LL^T и приравняем их соответствующим элементам матрицы A. В результате получим систему уравнений.

$l_{11}^2=a_{11}$

$l_{i1}l_{11}=a_{i1}$, $i=2,3,\dots,m$

$l_{21}^2+l_{22}^2=a_{22}$

$l_{i1}l_{21}+l_{i2}l_{22}=a_{i2}$, $i=3,4,\dots,m$

$\vdots$

$l_{k1}^2+l_{k2}^2+\dots+l_{kk}^2=a_{kk}$

$l_{i1}l_{k1}+l_{i2}l_{k2}+\dots+l_{ik}l_{kk}=a_{ik}$; $i=k+1,k+2,\dots,m$

$\vdots$

$l_{m1}^2+l_{m2}^2+\dots+l_{mm}^2=a_{mm}$

Решая систему последовательно находим

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}}{l_{11}};\quad i=2,3,\dots,m$$

$$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}$$

$$l_{i2}=\frac{(a_{i2}-l_{i1}l_{21})}{l_{22}};\quad i=3,4,\dots,m$$

. . . .

$$l_{kk}=\sqrt{a_{kk}-l_{k1}^2-l_{k2}^2-\dots-l_{k,k-1}^2}$$

$$l_{ik}=\frac{(a_{ik}-l_{i1}l_{k1}-l_{i2}l_{k2}-\dots-l_{i,k-1}l_{k,k-1})}{l_{kk}};\quad i=k+1,\dots,m$$

. . . .

$$l_{mm}=\sqrt{a_{mm}-l_{m1}^2-l_{m2}^2-\dots-l_{m,m-1}^2}$$

Метод Холецкого называют методом квадратных корней, т.к. для вычисления диагональных элементов используется операция извлечения квадратного корня.

- При больших m метод Холецкого требует вдвое меньше вычислительных затрат по сравнению с методом Гаусса.
- Гарантированная устойчивость

(31) Метод прогонки решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами.

$Ax=b$, A – 3-х диагональная матрица.

$$\begin{cases} b_1x_1+c_1x_2=d_1 \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=d_2 \\ \dots \\ a_mx_{m-1}+b_mx_m=d_m \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_m & b_m \end{pmatrix}$$

I ~~Прямая прогонка~~ Вывод расчетных формул

$$x_1=\alpha_1x_2+\beta_1$$

$$\alpha_1=-\frac{c_1}{b_1};\quad \beta_1=\frac{d_1}{b_1}$$

$a_2(\alpha_1 x_2+\beta_1)+b_2 x_2+c_2 x_3=d_2.$

представим $x_2=\alpha_2 x_3+\beta_2$

$$\alpha_2=\frac{-c_2}{b_2+a_2\alpha_1};\quad \beta_2=\frac{d_2-a_2\beta_1}{b_2+a_2\alpha_1}$$

на след. шаге (m-м шаге)

$x_{m-1}=\alpha_{m-1}x_m+\beta_{m-1}$

$a_m(\alpha_{m-1}x_m+\beta_{m-1})+b_m x_m=d_m.$

Откуда можно определить значение x_m:

$$x_m=\beta_m=\frac{(d_m-a_m\beta_{m-1})}{b_m+a_m\alpha_{m-1}}$$

Алгоритм прогонки - прямая (состоит в вычислении прогоночных коэф.)

$\alpha_i\ (1\le i<m)$ и $\beta_i\ (1\le i\le m)$

При $i=1$ коэффициент вычисляется по формулам

$$\alpha_1=-\frac{c_1}{y_1},\ \beta_1=\frac{d_1}{y_1};\quad y=b_1,$$

а при $i=2,3,\dots,m-1$ – по рекуррентным формулам

$$\alpha_i=-\frac{c_i}{y_i};\ \beta_i=\frac{(d_i-a_i\beta_{i-1})}{y_i};\ y_i=b_i+a_i\alpha_{i-1}$$

При $i=m$ прямая прогонка завершается вычислением

$$\beta_m=\frac{(d_m-a_m\beta_{m-1})}{y_m};\quad y_m=b_m+a_m\alpha_{m-1}$$

Обратная прогонка дает значение неизвестных. Сначала полагают $x_m=\beta_m$. Затем значения остальных неизвестных вычисляют по формуле $x_i=\alpha_i x_{i+1}+\beta_i$; $i=m-1,m-2,\dots,1$. Вычисления ведут в порядке убывания значений i от $m-1$ до 1.

Свойства: Для подсчета по формулам для СЛАУ с 3-х диагональной матрицей требуется $8m$ арифм. операций.

Существование и единственность решения (самая первая система)

(Ни один из знаменателей y_i не обр. в 0) – условие

При выполнении нек. усл. коэф. α_i при всех i удовл. равенству $|\alpha_i|\le 1$, обратная прогонка устойчива к входным данным.

Теор. Пусть коэф. системы (первой) удовлетворяют след. условиям диагонального преобладания $|b_k|\ge|a_k|+|c_k|$, $|b_k|>|a_k|$ $(1\le k\le m)$. Тогда $y_i\ne 0$ и $|\alpha_i|\le 1$ для всех $i=1,2,\dots,m$. Теорема доказывается методом мат. индукции.

(32) Постановка задачи приближения функций. Приближение функций обобщенными методами.

Вычисление $f(x)$, $x \in [a, b)$

1. $F(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$

$f(x)$: $x \neq x_i$ (вычисления проводятся в точках, не совпадающих с табличными)

2) $f(x)$ — трудновычислимая

3. $f(x_i) = y_i^*$ — результат эксперимента; $f(x)$: $x \neq x_i$

y_i^* отлич. от y_i, т.к. заведомо содержат ошибки эксперимента

$\tilde{\Phi}_m(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_m \varphi_m(x)$ — линейная комбинация фиксированного набора некоторых базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$. Функцию $\Phi_m(x)$ называют обобщенным многочленом по системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$, а число m — его степенью. a_i — коэф., $\varphi_i(x)$ — базисные функции

Если $f(x)$ — гладкая плавно изменяющаяся

$\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \dots, m$

$\Phi_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

Если $f(x)$ — периодичная, то

$\varphi_k(x) = e^{2\pi i k x}$, $x \in [0, 1]$

$S_m(x) = \sum\limits_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} e^{2\pi i k x}$

(33). Приближение методом интерполяции. Интерполяция обобщ. многочл.: Назовем обобщенный многочлен интерполяционным, если он удовлетворяет условию $\Phi_m(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \dots n)$ или, что то же самое, системе лин. ал. уравнений

$$\begin{cases} \varphi_0(x_0) a_0 + \varphi_1(x_0) a_1 + \dots + \varphi_m(x_0) a_m = y_0 \\ \varphi_0(x_1) a_0 + \varphi_1(x_1) a_1 + \dots + \varphi_m(x_1) a_m = y_1 \\ \dots \\ \varphi_0(x_n) a_0 + \varphi_1(x_n) a_1 + \dots + \varphi_m(x_n) a_m = y_n \end{cases}$$

относительно коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_m$

Систему уравнений можно записать в виде $Pa = y$, где

$$P = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Обозначим $\varphi_j = \begin{pmatrix} \varphi_j(x_0) \\ \varphi_j(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_j(n) \end{pmatrix}$, $j = 0, 1, \dots, m$

Будем говорить, что система функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ линейно зависима в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, если один из векторов φ_j системы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов этой системы:

$$\varphi_j = \sum_{k=0, k \neq j}^{m} \alpha_k \varphi_k$$

В противном случае линейно независимой в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Утв 1. Если $m \le n$ система функций $1, x, x^2, \ldots, x^m$ линейно независима в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, если они попарно различны.

Д. От противного, т. е. система степ. функций является линейно зависимой

$$x_i^j = \sum_{k=0,\, k \ne j}^{m} \alpha_k x_i^k, \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

Положив $\alpha_j = -1$ получим, что многочлен

$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^k$ степени m обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, число которых равно $(n+1)$ и следовательно больше m.

Однако в силу основной теоремы алгебры многочлен степени m, тождественно не равный 0 не может иметь более m корней →

34) Понятие линейно-независимой системы функций на заданном множестве точек. Теорема о существовании единственного решения задачи интерполяции.

Опр. Система функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ является линейно независимой в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, тогда и только тогда когда $m \le n$ и определитель Грама $\det \Gamma$ отличен от нуля.

Док-во от противного.

Положим, что система степ. функций линейно зависима. Тогда:

$$x_i^j = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_i^k, \quad i = 0, 1, \dots, m \rightarrow \text{положим } \alpha_j = -1$$

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_i^k, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$ т.е. многочлен степени m имеет $(m+1)$ корней, но $m+1 > m$, что неверно. Значит система степенных функций линейно независима.

Теорема Если $m = n$, то решение задачи интерполяции обобщенным многочленом существует и единственно при любом наборе данных $y_0, y_1, \dots, y_n$ тогда и только тогда, когда система функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно независима в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$

Если $m > n$ система переопределена и имеет не единств. решение

$m < n \rightarrow$ не всегда имеет решение.

Задачу интерполяции решают при $m = n$

(для начала вопроса)

35) Понятие ортогональности системы функций на заданном множестве точек. Утверждение о существовании единственного решения задачи интерполяции с помощью ортогональной системы функций. Решение задачи интерполяции для этого случая.

Опр. Назовем систему функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ортогональной на множестве точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, если $(\varphi_k, \varphi_j) = 0$ при $k \neq j$ и $(\varphi_k, \varphi_j) \neq 0$ при $k = j$ для всех $k = 0, 1, \ldots, m$; $j = 0, 1, \ldots, m$

Утв. Система функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, где $\varphi_k(x) = e^{2\pi i k x}$ на множестве точек $x_l = \frac{l}{N}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$, ортогональна

Док-во: Нужно установить справедливость равенства i — мнимая единица.

$(\varphi_k, \varphi_j) = N\delta_{kj}$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$, где

$\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$ и $\delta_{kj} = 1$ при $k = j$. Введем обозначение $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

Тогда $\varphi_k(x_l) = e^{\frac{2\pi i k l}{N}} = \omega^{kl}$. и согласно формуле

$y_{jk} = (\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_k(x_i) \overline{\varphi_j(x_i)}$ (формула для вычисл. элемента матрицы Грама)

$(\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{kl} \omega^{-jl} = \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{(k-j)l}$

При $k = j$ правая часть равенства, очевидно, равна N. При $k \neq j$, используя формулу суммы членов геометрической прогрессии и равенство $\omega^{(k-j)N} = e^{2\pi i (k-j)} = 1$, имеем $(\varphi_k, \varphi_j) = \frac{(1 - \omega^{(k-j)N})}{1 - \omega^{k-j}} = 0$

Таким образом равенство $(\varphi_k, \varphi_j) = N\delta_{kj}$ и ортогональность системы функций $\varphi_k(x) = e^{2\pi i k x}$ доказаны ■

Решение задачи:

Система уравнений $Pa = y$ после умножения на матрицу P^* преобразуется к виду $\Gamma a = b$, $b = P^* y$

Заметим, что элементы вектора $b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$ вычисляются по формуле $b_j = (y, \varphi_j) = \sum_{l=0}^{n} y_l \overline{\varphi_j(x_l)}$, $j = 0, 1, \ldots, m$

Так как матрица Γ диагональная, то решение системы $\Gamma a = b$, $b = P^* y$ — находится в явном виде:

$a_j = \frac{(y, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}$ $j = 0, 1, \ldots, m$

(36) Полиномиальная интерполяция. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Для заданной таблицы $y_i = f(x_i)$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ степени n называется интерполяционным многочленом, если он удовлетворяет условиям

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Можно записать в виде системы

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (6.22)$$

(система плохо обусловлена и не используется на практике) относительно коэффициентов многочлена.

Эта система однозначно разрешима, так как система функций $1, x, x^2, \dots, x^n$ (см. вопр. № 33 утв 1) и № 34 теор) линейно независима в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Таким образом верна след. теорема:

<u>Теорема 6.2</u> Существует единственный интерполяционный многочлен степени n, удовлетворяющий условиям $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \dots, n)$

<u>Многочлен Лагранжа</u>:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \, l_{nj}(x), \text{ где } l_{nj}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

$l_{nj}(x)$ — многочлен степени n, удовлетворяющий условию $l_{nj}(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$

Таким образом, степень многочлена L_n равна n и при $x = x_i$ в сумме (6.22) обращаются в ноль все слагаемые, кроме слагаемого с номером $j = i$, равного y_i. Поэтому многочлен Лагранжа действительно является интерполяционным. $\longleftrightarrow$ $L_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

37 Погрешность интерполяции.

Теорема 6.3 Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда для погрешности интерполяции в точке $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \text{ где } \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots$$

$\dots(x-x_n)$, а ξ – некоторая точка, принадлежащая интервалу (a, b).

Часто исп. следствие:

В условиях теоремы (6.3) справедлива оценка погрешности интерполяции в точке $x \in [a, b]$, имеющая вид

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \text{ где } M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{[a, b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a, b]} |\omega_{n+1}(x)|$$

Пусть теперь $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и пусть $h_i = x_i - x_{i-1}$ – i-ый шаг таблицы, а $h_{max} = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$. Несколько огрубляя оценку выше получим:

$$\max_{[x_0, x_n]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h_{max}^{n+1}.$$

Это позволяет утверждать, что для достаточно гладкой функции f при фиксированной степени интерполяционного многочлена погрешность интерполяции на отрезке $[x_0, x_n]$ при $h_{max} \to 0$ стремится к нулю не медленнее, чем некоторая величина, пропорциональная h_{max}^{n+1}. Этот факт принято формулировать так: интерполяция многочлена степени n имеет $(n+1)$-ый порядок точности относительно h_{max}. В частности, линейная и квадратичная интерполяция имеют второй и третий порядок точности соответственно

(38) Интерполяционный многочлен с кратными узлами. Погрешность интерполяции с кратными узлами.

$f(x)$ задана в $x_0, x_1, \dots, x_m$ вместе с производными

$f(x_i)=y_i$

$f'(x_i)=y_i'$

$f''(x_i)=y_i''$ .... $f^{(k_i-1)}(x_i)=y_i^{(k_i-1)}$ до некоторого порядка k_i-1. В этом случае узел x_i называют кратным, а число k_i, равное количеству заданных значений, — кратностью узла. Пусть $n=k_0+k_1+\dots+k_{m-1}$ →

→ ∃ единственный интерп. многочлен степени n, удовл. условиям

$P_n(x_i)=y_i$, $P_n'(x_i)=y_i'$, ..., $P_n^{(k_i-1)}(x_i)=y_i^{(k_i-1)}$ для всех $i=0,1,\dots,m$

Этот многочлен называют интерполяционным многочленом с кратными узлами

Частные случаи:

1) Кубический интерполяционный многочлен Эрмита

Пусть на концах отрезка $[x_0,x_1]$ заданы значения y_0, y_1, y_0', y_1'. Тогда $m=1$, $k_0=2$, $k_1=2$, $n=3$ и интерполяционный многочлен $P_3(x)$ удовлетворяющий условиям $P_3(x_0)=y_0$, $P_3(x_1)=y_1$, $P_3'(x_0)=y_0'$, $P_3'(x_1)=y_1'$, может быть представлен в следующем виде:

$$P_3(x)=y_0\frac{(x_1-x)^2(2(x-x_0)+h)}{h^3}+y_0'\frac{(x_1-x)^2(x-x_0)}{h^2}+y_1\frac{(x-x_0)^2(2(x_1-x)+h)}{h^3}+$$

$$+y_1'\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{h^2},\ \text{где } h=x_1-x_0.$$

2) Пусть в точке x_0 заданы значения $y_0, y_0', \dots, y_0^{n}$. Тогда многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям $P_n(x_0)=y_0$, $P_n'(x_0)=y_0', \dots, P_n^{(n)}(x_0)=y_0^{(n)}$, представляется в виде $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_0^{(k)}\frac{(x-x_0)^k}{k!}$ (отрезок ряда Тейлора)

Теорема 6.4 Пусть функция f дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[a,b]$, содержащем узлы интерполяции x_i $(i=0,1,\dots,m)$. Тогда для погрешности интерполяции с кратными узлами в точке $x\in[a,b]$ справедливы равенство $f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$ и неравенство

$|f(x)-P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$ и $\max\limits_{[a,b]}|f(x)-P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|$

в которых $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_m)^{k_m}$, а ξ — некоторая точка, принадлежащая интервалу (a,b).

Для формулы Тейлора ($m=0$, $k_0=n+1$) теорема 6.4 даёт известную формулу остаточного члена в форме Лагранжа. Для кубического многочлена Эрмита ($m=0$, $k_0=2$, $k_1=2$) неравенство

$\max\limits_{[x_0,x_n]}|f(x)-P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{4(n+1)}h_{max}^{n+1}$ приводит к следующей оценке:

$\max\limits_{[x_0,x_1]}|f(x)-P_3(x)| \le \frac{M_4}{384}h^4$. Здесь учтено, что максимум функции $\omega_4(x)=(x-x_0)^2(x-x_1)^2$ на отрезке $[x_0,x_1]$ достигается в точке $x=\frac{(x_0+x_1)}{2}$ и равен $\frac{h^4}{16}$.

39 Минимизация оценки погрешности интерполяции. Многочлены Чебышева и их свойства. Применение для решения задач минимизации погрешности.

Пусть значение заданной на отрезке $[a,b]$ функции f можно вычислить в произвольной точке x. Однако по некоторым причинам ($f(x)$ — трудоёмкая операция) целесообразнее заменить прямое вычисление функции f вычисл. значений её интерполяц. мн-на P_n → нужно 1 раз получить таблицу значений функции f в точках x_i, $i=0,1,\dots,n$ на $[a,b]$. При этом естественно стремиться к такому выбору узлов интерполяции, который позволит сделать минимальной величину $\Delta(P_n)=\max\limits_{[a,b]}|f(x)-P_n(x)|$ — погрешность интерполяции на отрезке $[a,b]$.

Пусть f непрерывно диф. $n+1$ раз на $[a,b]$. Тогда из нер-ва

$\max\limits_{[a,b]}|f(x)-P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|$ получим верхнюю оценку погрешности интерполяции:

$\bar{\Delta}(P_n)=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|$

Задача выбрать узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$ так, чтобы ~~$\Delta(P_n)$ min~~ величина $\bar{\Delta}(P_n)$ была минимальна.

Многочлены Чебышева.

При $0 = n$ и $n = 1$ определяются явными формулами:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \qquad (6.34)$$

при $n \geq 2$ рекуррентной формулой

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad (6.35)$$

$$T_2(x) = 2x T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x T_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x T_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2x T_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Св-ва: 1) При четном n многочлен $T_n(x)$ содержит только четные степени x и является четной функцией, а при нечетном n многочлен $T_n(x)$ содержит только нечетные степени x и явл. нечетной функцией.

2) При $n \geq 1$ старший коэф многочлена $T_n(x)$ равен 2^{n-1}, т.е. $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$

Справедливость свойств 1 и 2 следует из ф-л. 6.34 и 6.35

3) Для $x \in [-1, 1]$ справедлива формула $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ (6.36)

Док-во: При $n = 0$ и $n = 1$ формула 6.36 верна, т.к. $\cos(0 \cdot \arccos x) = 1$, $\cos(1 \cdot \arccos x) = x$. Покажем для $n \geq 0$: нужно показать, что функции $C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ удовлетворяют такому же, как и мн-ны Чебышева, рекуррентному соотношению: $C_n(x) = 2x C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$. (6.37.)

Соотнош. 6.37. получится если в легко проверяемом тригонометрическом тождестве $\cos[(m+1)\varphi] + \cos[(m-1)\varphi] = 2\cos\varphi \cos m\varphi$ положить $m = n-1$ и $\varphi = \arccos x$

4) При $n \geq 1$ многочлен $T_n(x)$ имеет ровно n действительных корней, располож. на $[-1, 1]$ и вычисл. по формуле

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (6.38)$$

5) При $n \geq 0$ справедливо равенство $\max\limits_{[-1,1]} |T_n(x)| = 1$. Если $n \geq 1$, то этот максимум достигается ровно в $n+1$ точках, находящихся по формуле

$$x_m = \cos\frac{\pi m}{n}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

При этом $T_n(x_m) = (-1)^m$, т.е. максимумы и минимумы многочлена Чебышева чередуются.

По формуле 6.36: н-п. в силу этой формулы корни мн-на $T_n(x)$ на $[-1, 1]$ совпадают с корнями $\cos(n \cdot \arccos x) = 0$. Эквивалентные преобразования этого уравнения дает $n \cdot \arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Т.к. $0 \le \arccos x \le \pi$ $\rightarrow$ имеется n корней x_k, отвечающих значениям $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ и удовл. равенствам $\arccos x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, эквивалентным формуле 6.38.

б) $\max\limits_{[-1,1]} |P_n(x)|$ — уклонение многочлена $P_n(x)$ от нуля. Эта величина характеризует максимальное отклонение графика многочлена P_n от графика функции $y = 0$ на $[-1, 1]$.

Утв Среди всех многочленов фиксированной степени n со старшим коэф. a_n, равным 1, наименьшее уклонение от нуля (равное 2^{1-n}) имеет многочлен $\overline{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$

$\Updownarrow$

для любого многочлена вида $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ отличного от $\overline{T}_n(x)$, справедливо неравенство $2^{1-n} = \max\limits_{[-1,1]} |\overline{T}_n(x)| < \max\limits_{[-1,1]} |P_n(x)|$

Решение задачи.

Выберем в качестве узлов интерполяции корни многочлена Чебышева:

$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $k = 0, 1, \dots, n$

Положим $[a, b] = [-1, 1] \rightarrow \overline{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max\limits_{[-1,1]} |\omega_{n+1}(x)| =$

$= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} 2^{-n}$

Пусть $[a, b]$ — произвольный $\rightarrow x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k$, где $t_k \in [-1, 1]$.

$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k$

$\omega_{n+1}(x) = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$

$\overline{\Delta}(P_n) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)! \, 2^n} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$

10. Интерполяционная формула Ньютона для неравных промежутков. Разделенные разности и их свойства

Рассмотрим некоторую функцию f и систему узлов интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$. Для этой функции и узлов образуем всевозможные отношения

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f(x_0; x_1)$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f(x_1; x_2), \dots, \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} = f(x_{n-1}; x_n). \quad (6.42)$$

Такие отношения называют разделенными разностями первого порядка.

Из разностей первого порядка можно образовать отношения

$$\frac{f(x_1; x_2)-f(x_0; x_1)}{x_2-x_0} = f(x_0; x_1; x_2)$$

$$\frac{f(x_2; x_3)-f(x_1; x_2)}{x_3-x_1} = f(x_1; x_2; x_3), \dots, \frac{f(x_{n-1}; x_n)-f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}} = f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) \quad (6.43).$$

Эти отношения называют разделенными разностями второго порядка.

Для $k+1$:

$$\frac{f(x_i; x_{i+1}; \dots, x_{i+k})-f(x_{i-1}; x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_{i-1}} = f(x_{i-1}; x_i; \dots, x_{i+k})$$

~~Для вывода~~ формула Ньютона

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0; x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \dots +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n)$$

11. Вывод формулы Ньютона для неравных промежутков с помощью разделенных разностей.

$f(x)$ — заданная функция, $x_0, x_1, \dots, x_n$ — узлы интерполирования, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a, b]$ и $L_k(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный для этой функции по узлам $x_0, x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \dots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)].$$

Разности в правой части.

Рассм. $L_k(x) - L_{k-1}(x)$. Это многочлен степени k. Обращается в нуль в $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$, т.к. в этих точках $L_k(x_i) = f(x_i)$ и $L_{k-1}(x_i) = f(x_i)$.

Поэтому $L_k(x) - L_{k-1}(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})$ (A_k — постоянная).

Для определения A_k положим $x = x_k$. Получим:

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_k (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}). \longrightarrow$$

$$\rightarrow A_k = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})} - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j) \frac{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{j-1})(x_k - x_{j+1})\dots(x_k - x_{k-1})}{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_{k-1})}}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_k)} = f(x_0; x_1; \dots; x_k)$$

Отсюда: $L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \dots +$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_n)$$

(12) Остаточный член формулы Ньютона для неравных промежутков.

$$f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x)(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n)} + \dots +$$

$$+ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}.$$ Отсюда:

$$f(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} + \dots + f(x_n) \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)$$

Итак, $f(x) = L_n(x) + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)$

Таким образом, $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)$ (6.5)

В частности, если $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$, то получим:

$f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Заметим, что так как вообще $f(x)$ нам неизвестна, формула 6.51 имеет только теоретическое значение, а именно, она может быть использована для оценки погрешности, даваемой интерполяционной формулой Ньютона для заданной функции $f(x)$

(43) Интерполяционная формула Ньютона для равных промежутков. Конечные разности и их связь с разделенными разностями.

Пусть для значений x: $x_0, x_0+h, x_0+2h, \dots, x_0+nh$ (h – шаг таблицы), нам известны значения функции $f(x)$: $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Назовем разности $y_1-y_0, y_2-y_1, \dots, y_n-y_{n-1}$ конечными разностями первого порядка.

Будем обозначать их следующим образом:

$$y_{i+1}-y_i = f^1_{i+\frac{1}{2}}$$

Из разностей первого порядка можно образовать конечные разности второго порядка:

$$f^1_{\frac{3}{2}} - f^1_{\frac{1}{2}} = f^2_1;\ f^1_{\frac{5}{2}} - f^1_{\frac{3}{2}} = f^2_2; \dots;\ f^1_{\frac{(2i+1)}{2}} - f^1_{\frac{(2i-1)}{2}} = f^2_i; \dots \quad (6.53)$$

Установим связь между конечными и разделенными разностями для случая когда $x_i - x_{i-1}$ постоянны. Будем иметь:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i} = \frac{f^1_{i+\frac{1}{2}}}{h},\quad f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2}-x_i} =$$

$$= \frac{f^1_{i+\frac{3}{2}} - f^1_{i+\frac{1}{2}}}{2h\cdot h} = \frac{f^2_{i+1}}{2h^2}.\quad \text{Вообще, } f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{f^k_{i+\frac{k}{2}}}{k!\,h^k}$$

Док-во по индукции: предполагая формулу справедливой для $k \le l$, докажем ее справедливость для $k = l+1$. Действительно,

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+l+1}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+l+1}) - f(x_i, x_{i+1}; \dots; x_{i+l})}{x_{i+l+1}-x_i} =$$

$$= \cancel{\frac{f^l_{i+1+\frac{l}{2}} - f^l_{i+\frac{(l+1)}{2}}}{(l+1)h\cdot l!\,h^l}}\ \frac{f^l_{i+1+\frac{l}{2}} - f^l_{i+\frac{l}{2}}}{(l+1)h\cdot l!\,h^l} = \frac{f^l_{i+\frac{(l+1)}{2}}}{(l+1)!\,h^{l+1}}$$

Интерполяция вперед:

$$L_n(x_0+ht) = f_0 + t f^1_{\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_1 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!} f^n_{\frac{n}{2}}$$

Интерполяция назад:

$$L_n(x_0+ht) = f_0 + t f^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+(n-1))}{n!} f^n_{-\frac{n}{2}}$$

где $t = \dfrac{x-x_0}{h}$

44) Вывод формул Ньютона для интерполирования вперед и назад. Остаточные члены интерполяционных формул Ньютона.

Возьмём интерполяционную формулу для неравных промежутков, взяв в ней в качестве узлов интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ точки $x_0, x_0+h, x_0+2h, \dots, x_0+nh$. При этом заменяя разделенные разности их выражениями через конечные разности получим

$$L_n(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} f^1_{\frac{1}{2}} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} f^2_1 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n!\,h^n} f^n_{\frac{n}{2}}$$

Обозначим $\frac{(x-x_0)}{h} = t$, тогда наша формула будет выглядеть так:

$$L_n(x_0+ht) = f_0 + t f^1_{\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_1 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-(n-1))}{n!} f^n_{\frac{n}{2}}$$

Опять будем использовать интерполяционную формулу Ньютона для неравных промежутков, взяв в ней в качестве узлов интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$ точки $x_0, x_0-h, x_0-2h, \dots, x_0-nh$. При этом получим:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0; x_0-h) + (x-x_0)(x-x_0+h) f(x_0; x_0-h; x_0-2h) + \dots +$$
$$+ (x-x_0)(x-x_0+h)\dots(x-x_0+(n-1)h) f(x_0; x_0-h; \dots; x_0-nh)$$

Но в силу симметрии разделенных разностей относительно своих аргументов будем иметь:

$f(x_0; x_0-h; \dots; x_0-ih) = f(x_0-ih; x_0-ih+h; \dots; x_0-h; x_0)$. Снова заменим разделенные разности конечными

$f(x_0-ih; x_0-ih+h; \dots; x_0-h; x_0) = \frac{f^i_{-\frac{i}{2}}}{i!\,h^i}$. Отсюда:

$$L_n(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} f^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)}{2!\,h^2} f^2_{-1} + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_0+h)\dots(x-x_0+(n-1)h)}{n!\,h^n} f^n_{-\frac{n}{2}}$$

Заменяя как и прежде $t = \frac{x-x_0}{h}$, получим:

$$L_n(x_0+ht) = f_0 + t f^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+(n-1))}{n!} f^n_{-\frac{n}{2}}$$

Ост. члены: для первой формулы:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = (x-x_0)(x-x_0-h)\dots(x-x_0-nh)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$$
$$= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t-1)\dots(t-n)$$

Для второй: $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = (x-x_0)(x-x_0+h)\dots(x-x_0+nh)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} =$

$$= \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} t(t+1)\dots(t+n)$$

(45) Проблемы глобальной полиномиальной интерполяции. Понятие о кусочно-полиномиальной интерполяции.

Пусть функция интерполируется на отрезке $[a, b]$. Метод решения этой задачи единым для всего отрезка многочленом $P_n(x)$ называют глобальной полиномиальной интерполяцией.

1) Сходимость при увеличении числа узлов.

Постановка задачи — чтобы реализовать процесс интерполяции многочленами возрастающей степени n, необходимо указать стратегию выбора узлов интерполяции $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$. Такая стратегия задается указанием интерполяционного массива — треугольной таблицы:

$$x_0^{(0)}$$
$$x_0^{(1)}, x_1^{(1)}$$
$$\dots$$
$$x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$$

в каждой строке которой все $x_i^{(n)}$ различны и $x_i^{(n)} \in [a, b]$. Будем говорить, что при заданной стратегии выбора узлов метод интерполяции сходится, если $\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Стратегию равномерного распределения на отрезке $[a,b]$ узлов интерполяции, т. е. выбор $x_i^{(n)} = a + ih$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, где $h = \frac{(b-a)}{n}$. Пример когда не может обесп. сход.:

Пример Рунге

$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ $[-1; 1]$. Вычисления показывают, что при больших n интерполяция дает превосходные результаты в центральной части отрезка. В то же время вопреки ожиданиям последовательность $P_n(x)$ расходится для $0{,}73 < |x| \le 1$. Таким образом, равномерное распределение узлов интерполяции для функции Рунге оказалось неудачным.

Т. 6.6. (Фабера). Какова бы ни была стратегия выбора узлов интерполяции, найдется непрерывная на $[a, b]$ функция f, для которой $\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Теорема отрицает существование единой стратегии выбора узлов интерполяции для всех непрерывных функций.

Можно выбрать чебышевские узлы, но на практике очень редко и просто не возможно, когда имеем дело с заданной таблицей значений функции.

2) Чувствительность интерполяционного мн-на к погрешностям входных данных.

Пусть заданные в узлах x_i значения y_i^* содержат погрешности ε_i. Тогда вычисляемый по этим значениям многочлен $P_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j^* l_{nj}(x)$ содержит погрешность $P_n(x) - P_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j l_{nj}(x)$ (6.61)

Н-п. при линейной интерполяции по приближенно заданным значениям справедливо равенство $P_1(x) - P_1^*(x) = \varepsilon_0 l_{10}(x) + \varepsilon_1 l_{11}(x)$, где $l_{10}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$, $l_{11}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Воспользуемся тем, что $|l_{10}(x)| + |l_{11}(x)| = 1$ для $x \in [x_0, x_1]$

Следовательно, $\max_{[x_0, x_1]} |P_1(x) - P_1^*(x)| \le \max\{|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|\}$.

→ при линейной интерполяции погрешность возникающая вследствие погрешности значений функции, не превосходит верхней границы погр. значений

Общий случай: Пусть верхняя погрешность значений y_i^* равна $\bar{\Delta}(y^*)$ т.е. $|\varepsilon_i| \le \bar{\Delta}(y^*)$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда $\bar{\Delta}(P_n^*) = \max\limits_{[a,b]} |P_n(x) - P_n^*(x)|$. в силу равенства 6.61. справедлива оценка $\bar{\Delta}(P_n^*) \le \Lambda_n \bar{\Delta}(y^*)$

$\Lambda_n = \max\limits_{[a,b]} \sum\limits_{j=0}^{n} |l_{nj}(x)|$ — постоянная Лебега. (роль абс. числ. обусл.)

При выборе (оптимальном) в качестве узлов интерполяции корней мн-на Чебышева $\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + 1$.

С рассматриваемой точки зрения крайне неудачным при больших n является выбор равноотстоящих узлов интерполяции. При таком выборе

$\Lambda_n > \frac{2^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{n}}$ для $n \ge 4$ обусловленность задачи резко ухудш. с $\uparrow n$.

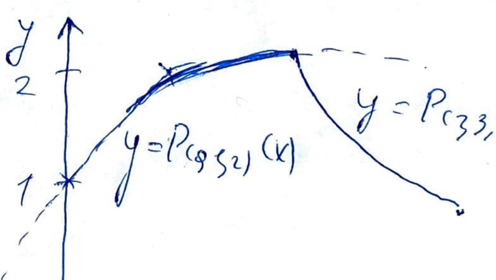
Вывод: в вычислениях не следует использовать интерполяционные многочлены высокой степени с равноотстоящими узлами.

Пример(1) Функция задана

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
y_i	1,0	1,8	2,2	1,4	1,0

Используем кусочно-полиномиальную интерполяцию. На [0; 2] аппроксимируем функцию многочленом $P_{(0,1,2)}(x)$, а на отрезке [2, 4] многочленом $P_{(2,3,4)}(x)$.

Заметим, что результирующая аппроксимирующая функция непрерывна, но в точке $x=2$ график ее имеет излом соответств. разрыву первой производной.



Заметим, что интерполяцию "движущимся" полиномом можно рассматривать как частный случай кусочно-полиномиальной интерполяции при использовании многочленов фиксированной степени и имеет $(m+1)$-ый порядок точности.

Опр | Интерполяция многочленом Лагранжа или Ньютона на отрезке $[a, b]$ с использованием большого числа узлов приводит к увеличению степени интерполяционного многочлена, что затрудняет вычисления и увеличивает погрешности. Для решения этой проблемы отрезок $[a, b]$ разбивают на части и на каждой из них приближенно заменяют функцию $y(x)$ многочленом некоторой, обычно не слишком большой степени. Такой подход к решению задачи интерполяции называется кусочно-полиномиальной интерполяцией.

(16) Интерполяция сплайнами. Определение сплайна. Интерполяционный сплайн

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.

Сплайном степени m называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) функция $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со всеми своими производными $S_m^{(1)}(x), S_m^{(2)}(x), \ldots, S_m^{(p)}(x)$, до некоторого порядка p.

2) на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ функция $S_m(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом $P_{m,i}(x)$ степени m.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Сплайн $S_m(x)$ называется интерполяционным, если $S_m(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$. Значение $s_i = S_m^{(1)}(x_i)$ назыв. наклоном сплайна в точке x_i.

Заметим, что на $[x_{i-1}, x_i]$ интерполяционный кубический сплайн однозначно определяется заданием значений $y_{i-1}, y_i, s_{i-1}, s_i$. В самом деле из равенства

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x_1 - x)^2 (2(x - x_0) + h)}{h^3} + y_0' \frac{(x_1 - x)^2 (x - x_0)}{h^2} + y_1 \frac{(x - x_0)^2 (2(x_1 - x) + h)}{h^3} + y_1' \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)}{h^2}$$

$h = x_1 - x_0$ (кубич. интерп. многоч. Эрмита)

вытекает:

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = \frac{(x - x_i)^2 (2(x - x_{i-1}) + h_i)}{h_i^3} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2 (2(x_i - x) + h_i)}{h_i^3} y_i + \frac{(x - x_i)^2 (x - x_{i-1})}{h_i^2} s_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)}{h_i^2} s_i \qquad h_i = x_i - x_{i-1} \quad (6.64)$$

(17) Интерполяция сплайнами. Построение локального кубического интерполяционного сплайна.

Если в точках x_i известны значения производной $y_i' = f'(x_i)$, то естественно положить $s_i = y_i'$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$. Тогда на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в соответствии с формулой (6.64) сплайн однозначно определяется значениями $y_{i-1}, y_i, y_{i-1}', y_i'$ (поэтому его и называют локальным сплайном). Заметим, что он совпадает с кубическим интерполяционным многочленом Эрмита для отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Из неравенства $\max\limits_{[x_0, x_1]} |f(x) - P_3(x)| \le \frac{M_4}{384} h^4$ для погрешности интерполяции с кратными узлами получается следующая оценка погрешности интерполяции локальным кубическим сплайном.

$\max\limits_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \le \frac{M_4}{384} h^4_{max}$, $h_{max} = \max\limits_{1\le i\le n} h_i$ - максимальная из длин частичных отрезков.

Для построенного указанным образом сплайна можно гарантировать непрерывность на отрезке [a, b] только функции $S_3(x)$ и её первой производной $S_3'(x)$, т.е. его дефект равен 2.

(48) Интерполяция сплайнами. Глобальные способы построения кубического интерполяционного сплайна. Погрешность приближения кубическими сплайнами.

Для того, чтобы сплайн $S_3(x)$ имел непрерывную на [a, b] вторую производную $S_3''(x)$ необходимо выбирать наклоны s_i так, чтобы в точках x_i стыка многочленов $P_{3,i}$ и $P_{3,i+1}$ совпадали значения их вторых производных:

$P''_{3,i}(x_i) = P''_{3,i+1}(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$ (6.66). Пользуясь ф. 6.64 найдем значение:

$$P''_{3,i}(x_i) = \frac{2s_{i-1}}{h_i} + \frac{4s_i}{h_i} - 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2} \qquad 6.67.$$

Из подобной формулы, записанной для многочлена $P_{3,i+1}$ имеем:

$$P''_{3,i+1}(x_i) = -\frac{4s_i}{h_{i+1}} - \frac{2s_{i+1}}{h_{i+1}} + 6\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2} \qquad 6.68$$

Равенство 6.66. приводит к следующей системе уравнений относ. коэф. s_i:

$$h_i^{-1} s_{i-1} + 2(h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1}) s_i + h_{i+1}^{-1} s_{i+1} = 3[h_i^{-2}(y_i - y_{i-1}) + h_{i+1}^{-2}(y_{i+1} - y_i)], \quad (6.69)$$

Система недоопределена, т.к. число уравнений системы $i = 1, \dots, n-1$ (n−1) меньше числа неизвестных (n+1). Выбор двух оставшихся уравнений обычно связывают с некоторыми доп. условиями, накладываемыми на сплайн в граничных точках a и b. (граничные условия).

1) Если в граничных точках известны значения первой производной $f'(a)$ и $f'(b)$, то естественно положить $s_0 = f'(a)$, $s_n = f'(b)$. (6.70)

Дополняя систему 6.69 уравнениями 6.70 приходим к системе уравнений с трехдиагональной матрицей, которая легко решается методом прогонки. Полученный таким образом сплайн называют фундаментальным кубическим сплайном.

2) Если в граничных точках известны значения второй производной $f''(a)$ и $f''(b)$, то можно наложить на сплайн граничные условия $S_3''(a) = P''_{3,1}(x_0) = f''(a)$, $S_3''(b) = P''_{3,n}(x_n) = f''(b)$, что приводит к уравнениям:

$$-\frac{4s_0}{h_1} - \frac{2s_1}{h_1} + 6\frac{y_1 - y_0}{h_1^2} = f''(a)$$

$$\frac{2s_{n-1}}{h_n} + \frac{4s_n}{h_n} - 6\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2} = f''(b)$$

6.71, 6.72

достаточно в равенстве 6.68 взять $i = 0$, а в равенстве 6.67 $i = n$.

3) Полагая в уравнениях 6.71, 6.72 $f''(a)=0$, $f''(b)=0$ (независимо от выполнения условий для интерполируемой функции), придем к системе уравнений, определяющих так называемый естественный кубический сплайн.

4) Если f — периодическая функция с периодом, равным $b-a$, то систему 6.69 следует дополнить условиями.

$$S_0 = S_n$$

$$h_n^{-1}(s_{n-1}+2s_n)+h_1^{-1}(2s_0+s_1)=3\left[h_n^{-2}(y_n-y_{n-1})+h_1^{-2}(y_1-y_0)\right].$$

Погрешности.

Доказано, что если функция f имеет на $[a,b]$ непрерывную производную четвертого порядка, и $M_4=\max\limits_{[a,b]}|f^{(4)}(x)|$, то для интерполяционного кубического сплайна $S_3(x)$ справедлива следующая оценка погрешности:

$$\max_{[a,b]}|f(x)-S_3(x)|\le C M_4 h_{max}^4.$$

Заметим, что сплайн $S_3(x)$ не только сам аппроксимирует функцию $f(x)$, но и его производные $S_3'(x)$, $S_3''(x)$ и $S_3^{(3)}(x)$ приближают соответствующие производные функции f. В частности, справедливы неравенства.

$$\max|f^{(k)}(x)-S_3^{(k)}(x)|\le C_k M_4 h_{max}^{4-k}$$

49. Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление первой производной. Погрешность формул.

Пусть в окрестности x функция f дифференцируема достаточное число раз.

Из определения производной: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ можно использовать для её вычисления простейшие приближенные формулы:

$$f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad 7.1$$

$$f'(x)\approx\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad 7.2 \qquad \Delta x=h,\ \Delta x=-h$$

$h>0$ — малый параметр (шаг)

Разностные отношения в 7.1 и 7.2 справа называют правой и левой разностными производными.

Для оценки погрешностей

$$r_+(x,h)=f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\qquad r_-(x,h)=f'(x)-\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

Введенных формул численного дифференцирования воспользуемся формулами Тейлора:

$$f(x\pm h)=f'(x)h+\frac{f''(\xi_\pm)}{2}h^2 \quad (7.3)$$

ξ_+, ξ_- — некоторые точки, расположенные на интервалах $(x,x+h)$ и $(x-h,x)$.

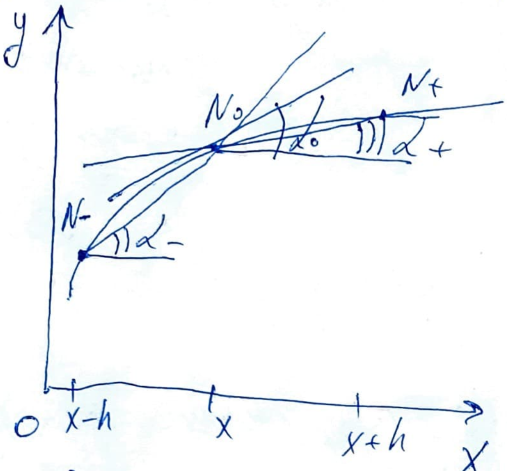
Подставляя разложения 7.3 в выражения для $r_\pm$, получаем

$$r_+(x,h)=-\frac{1}{2}f''(\xi_+)h,\qquad r_-(x,h)=\frac{1}{2}f''(\xi_-)h$$

Следовательно, $|r_+(x,h)|\le\frac{1}{2}M_2h$, $M_2=\max\limits_{[x,x+h]}|f''(\xi)|$ 7.4

$|r_-(x,h)|\le\frac{1}{2}M_2h$, $M_2=\max\limits_{[x-h,x]}|f''(\xi)|$ 7.5

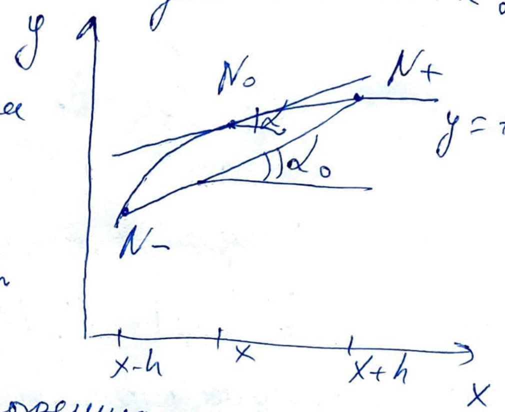
Таким образом, 7.1 и 7.2 имеют первый порядок точности по h. Иначе говоря, правая и левая разностные производные аппроксимируют производную $f'(x)$ с первым порядком точности.



$y = f(x)$

N_0, N_-, N_+ — расположенные на графике функции $y = f(x)$ точки с координатами $(x, f(x))$, $(x-h, f(x-h))$ и $(x+h, f(x+h))$.

Естественно предположить, что лучшим по сравнению с $tg\alpha_+$ и $tg\alpha_-$ приближением к $f'(x) = tg\alpha$ является тангенс угла наклона α_0 секущей, проведенной через точки N_- и N_+.



Соответствующая приближенная формула имеет вид $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

Величину в правой части называют центральной разностной производной.

Подставляя в это выражение для погрешности

$$r_0(x,h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

соответствующее разложение по формуле Тейлора

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(\xi_\pm)}{6}h^3,$$ получим

$$r_0(x,h) = -\frac{f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)}{12}h^2.$$ Следовательно, справедлива оценка погрешности

$$|r_0(x,h)| \le \frac{1}{6}M_3h^2, \quad M_3 = \max_{[x-h,\,x+h]}|f^{(3)}(\xi)|.$$ Таким образом, центральная разностная производная аппроксимирует производную $f'(x)$ со вторым порядком точности относительно h.

Н-п. четвертый порядок точности.

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}.$$

50) Простейшие формулы численного дифференцирования. Вычисление второй производной. Погрешность формул.

Распространённая формула: $f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$ 7.9.

Величину в правой части этого приближенного равенства часто называют второй разностной производной.

Подставляя в выражение для погрешности $r(x,h) = f''(x) - \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$

соответствующее разложение по формуле Тейлора

$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_\pm)}{24}h^4$, получим

$r(x,h) = -\frac{f^{(4)}(\xi_+) + f^{(4)}(\xi_-)}{24}h^2$.

Следовательно, $|r(x,h)| \le \frac{M_4}{12}h^2$, $M_4 = \max\limits_{[x-h, x+h]} |f^{(4)}(\xi)|$.

Таким образом формула 7.9. имеет второй порядок точности.

Для вычисления $f''(x)$ можно получить формулы любого порядка точности. Н-п.

$$f''(x) \approx \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2}$$

имеет четвертый порядок точности.

51) Общий подход к выводу формул численного дифференцирования.

Пусть в окрестности точки x функция f аппроксимируется некоторой другой функцией g, причем производная $g^{(k)}$ в точке x легко вычисляется. В такой ситуации воспользоваться приближенной формулой

$f^{(k)}(x) \approx g^{(k)}(x)$

1) Формулы численного дифференцирования, основанные на интерполяции алгебраическими многочленами.

Пусть $P_n(x)$ - интерполяционный многочлен степени n с узлами интерполяции $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и $x \in [x_0, x_n]$. В этом случае формула $f^{(k)}(x) \approx g^{(k)}(x)$ принимает вид $f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)$, $0 \le k \le n$ 7.13

При этом справедлива следующая оценка погрешности формулы 7.13

$|f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \le C_{n,k} M_{n+1} h_{max}^{n+1-k}$, $0 \le k \le n$ 7.14

Здесь $C_{n,k}$ - положительные числа а $M_{n+1} = \max\limits_{[x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Замечание 1. Порядок точности формулы 7.13. относительно h_{max} равен разности между числом узлов интерполяции и порядком вычисляемой производной.

Замечание 2. Если формула 7.13 применяется для вычисления производной в точке, относительно которой узлы таблицы расположены симметрично, и число $n-k$ четно, то порядок точности формулы повышается на единицу по сравнению с порядком $n+1-k$, гарантируемым оценкой 7.14

7) Подход, основанный на использовании сплайнов

Применение формулы 7.13 для вычисления производной фактически основано на кусочно-полиномиальной интерполяции. Полученная таким образом производная в точке стыка двух соседних многочленов может иметь разрывы. Поэтому если требуется глобально на отрезке $[a, b]$ аппроксимировать производную гладкой функцией, то целесообразно использовать сплайны. Производная $S_m^{(k)}(x)$ сплайна $S_m(x)$ при $k \le m-r$ (r - дефект сплайна) дает гладкую глобальную аппроксимацию для $f^{(k)}(x)$

5.2 Обусловленность формул численного дифференцирования.

Чтобы погрешность аппроксимации была малой, требуется использовать таблицу с малым шагом h. Но появляется плохая обусловленность и появл. неустранимая ошибка.

На примере формулы $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 7.1. Полная погрешность $r^*(x,h) = f'(x) - \frac{f^*(x+h)-f^*(x)}{h}$ реально вычисляемого значения правой разностной производной представляет собой сумму погрешностей аппроксимации $r_+(x,h) = f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ и неустранимой погрешности $r_H(x,h) = \frac{1}{h}((f(x+h)-f^*(x+h))-(f(x)-f^*(x)))$.

Пусть $\bar{\Delta}$ - верхняя граница абсолютной погрешности $\Delta(f^*(x)) = |f(x)-f^*(x)|$ используемых значений функции. Тогда погрешность оценивается:

$|r_H| \le \frac{2\bar{\Delta}}{h}$ (7.15), что означает, что чувствительность формулы 7.1 к погрешностям входных данных характ. абс. числом обусл. $D_\Delta = \frac{2}{h}$. Т.к. $D_\Delta \to \infty$ при $h \to 0$, то формула 7.1 при малых h становится очень плохо обусл. Поэтому, когда погрешность аппроксимации стремится к нулю при $h \to 0$ (см. оценку 7.4), следует ожидать, что полная погрешность будет неограниченно возрастать при $h \to 0$. Так ведет себя верхняя граница полной погрешности $\bar{r}(h) = \frac{1}{2} M_2 h + \frac{2\bar{\Delta}}{h}$. При оптимальном h $\bar{r}(h)$ достигает макс. значения. Приравнивая производную $\bar{r}'(h) = \frac{1}{2} M_2 - \frac{2\bar{\Delta}}{h^2}$ к нулю, получаем значение $h_{опт} = 2\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{M_2}}$, которому отвечает величина $\bar{r}_{min} = \bar{r}(h_{опт}) = 2\sqrt{\bar{\Delta} M_2}$. Таким образом, при использовании формулы 7.1 для производной функции f, заданной с погрешностью, следует обратить внимание на выбор шага h. Однако даже при оптимальном выборе шага полная погрешность окажется величиной, пропорциональной лишь $\sqrt{\bar{\Delta}}$

(53) Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула прямоугольников. Погрешность формулы.

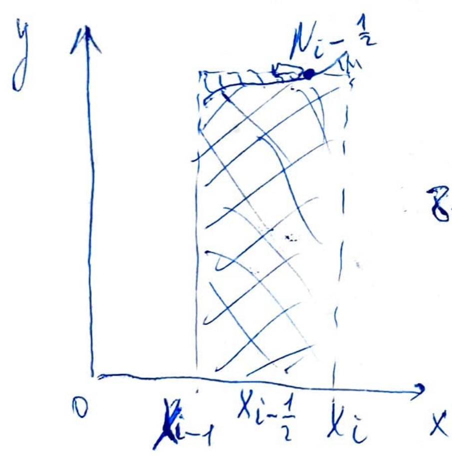
Заменим приближенно площадь элементарной криволинейной трапеции площадью прямоугольника, основанием которого является отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а высота равна значению $f_{i-\frac{1}{2}}$ (на рис. 8.2 (а) через $N_{i-\frac{1}{2}}$ обозначена точка с координатами $(x_{i-\frac{1}{2}}, f_{i-\frac{1}{2}})$). Т.к. мы приходим к элементарной квадратурной формуле прямоугольников:

$I_i \approx h f_{i-\frac{1}{2}}$.

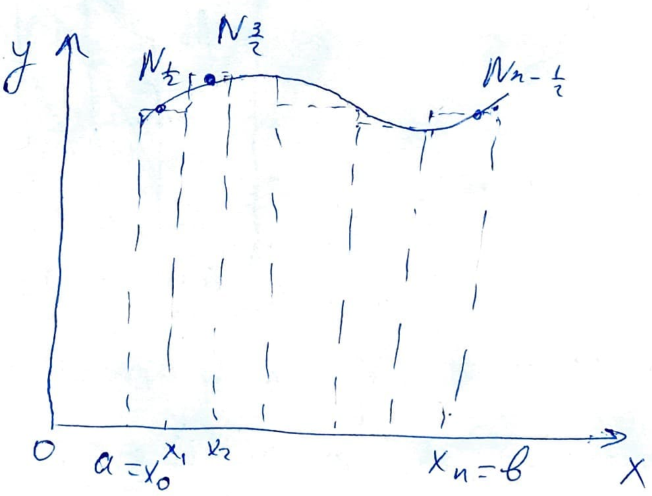
Производя такую замену для всех элементарных криволинейных трапеций, получаем составную квадратурную формулу прямоугольников:

$$I \approx I^h_{пр} = h(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \dots + f_{n-\frac{1}{2}}) = h\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}}$$

Эта формула соответствует приближенной замене площади исходной криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры, изобр на рис. 8.2 б.



8.2 а



8.2 б.

Вывод формулы в (54)

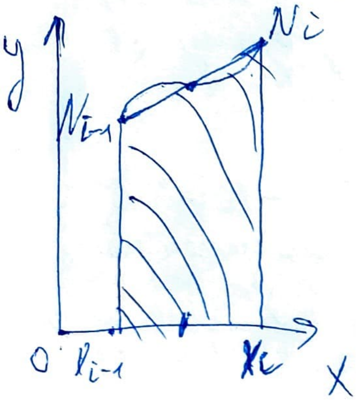
(54) Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула трапеций. Погрешность формулы.

Соединив отрезком точки $N_{i-1}(x_{i-1}, f_{i-1})$ и $N_i(x_i, f_i)$ на графике функции $y = f(x)$, получим трапецию (рис. 8.3 а). Заменим теперь приближенно площадь элементарной криволинейной трапеции площадью построенной фигуры. Тогда получим элементарную квадратурную формулу трапеций: $I_i \approx \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)$

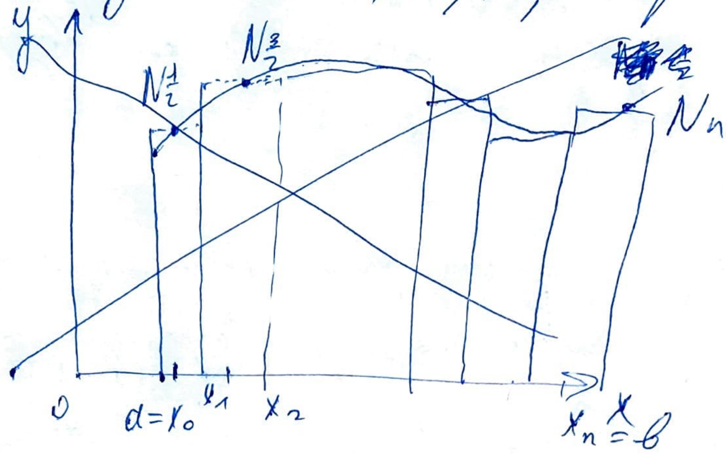
Пользуясь этой формулой для $i=1,2,\dots,n$ выводим составную квадратурную формулу трапеций:

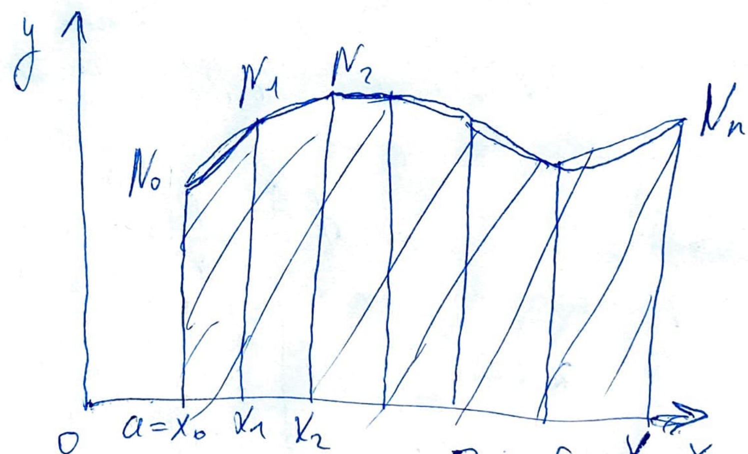
$$I \approx I^h_{тр} = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right) = h\left(\frac{f_0+f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right).$$

Эта формула соответствует приближенной замене площади исходной криволинейной трапеции площадью фигуры, ограниченной ломаной линией, проходящей через точки $N_0, N_1, \dots, N_n$ (рис. 8.3 б)



8.3а





8.3 б.

Оценка погрешности: Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для составных квадратурных формул прямоугольников и трапеций справедливы следующие оценки погрешности:

$$|I - I^h_{пр}| \le \frac{M_2(b-a)}{24} h^2, \quad |I - I^h_{тр}| \le \frac{M_2(b-a)}{12} h^2 \quad (8.11, 8.12)$$

Выведем 8.11: представим погрешность $R = I - I^h_{пр}$ формулы прямоугольников в виде $R = \int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^n f_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-\frac{1}{2}}))dx$

Используя формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_{i-\frac{1}{2}}) + f'(x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2,$$

где $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $\xi = \xi(x) \in [x_{i-1}, x_i]$, имеем

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-\frac{1}{2}}))dx = \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi(x))(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 dx,$$

$$|R_i| \le \frac{M_2}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 dx = \frac{M_2}{24}h^3$$

~~Т.к.~~ $\cancel{R = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-\frac{1}{2}})^2 dx}$

Т.к. $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$, то $|R| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{M_2}{24}h^3 = \frac{M_2}{24}h^3 n$, Замечая, что $nh = b - a$,

приходим к оценке 8.11.

Для вывода оценки 8.12 воспользуемся тем, что отрезок, соединяющий точки N_{i-1} и N_i, представляет собой график интерполяционного многочлена первой степени:

$$y = P_1(x) = f_{i-1}\frac{x_i - x}{h} + f_i\frac{x - x_{i-1}}{h}$$

Поэтому для элементарной формулы трапеции верно равенство:

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - P_1(x))dx$$

Используя оценку погрешности линейной интерполяции, имеем:

$$|R_i| \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{M_2}{2}(x - x_{i-1})(x_i - x)dx = \frac{M_2}{12}h^3$$

Следовательно, для $R = I - I^h_{тр}$ справедлива оценка:

$$|R| \le \sum_{i=1}^{n} |R_i| \le \frac{M_2}{n}h^3 = \frac{M_2(b-a)}{12}h^2 \quad \blacksquare$$

55 Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы. Формула Симпсона. Погрешность формулы.

Если площадь элементарной криволинейной трапеции заменить площадью фигуры, расположенной под параболой, проходящей через точки N_{i-1}, $N_{i-\frac{1}{2}}$, N_i, то получим приближенное равенство $I_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x)dx$

Здесь $P_2(x)$ – интерполяционный многочлен второй степени с узлами $x_{i-1}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_i$. Верна формула:

$$P_2(x) = f_{i-\frac{1}{2}} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}(x - x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}}(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2$$

Её интегрирование приводит к равенству

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_2(x)\,dx = hf_{i-\frac{1}{2}} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-\frac{1}{2}})\,dx + \frac{f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-\frac{1}{2}})^2\,dx = hf_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h}{6}(f_i - 2f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i-1}) =$$

$$= \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i)$$

Таким образом, выведена элементарная квадратурная формула Симпсона: $I_i \approx \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i)$.

Применяя эту формулу на каждом элементарном отрезке, выводим составную квадратурную формулу Симпсона:

$$I \approx I_c^h = \frac{h}{6}(f_0 + 4f_{\frac{1}{2}} + 2f_1 + 4f_{\frac{3}{2}} + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + 4f_{n-\frac{1}{2}} + f_n) =$$

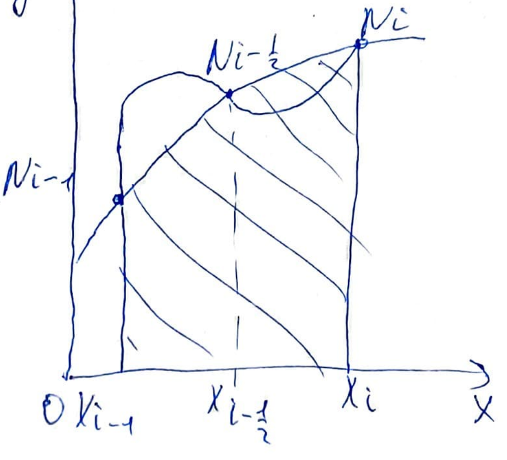
$$= \frac{h}{6}\left(f_0 + f_n + 4\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}} + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right) \quad 8.10$$

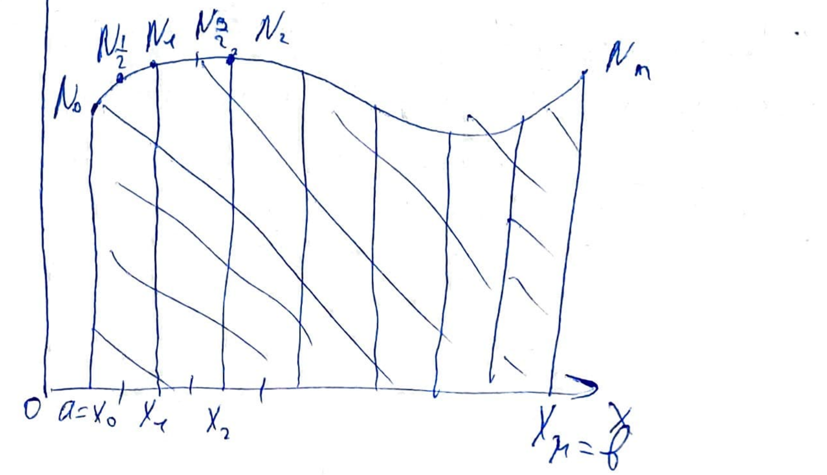
(иногда назыв. формулой парабол)

Погрешность: Пусть функция f имеет на отрезке непрерывную производную четвертого порядка $f^{(4)}$. Тогда для формулы Симпсона 8.10 справедлива оценка погрешности:

$$|I - I_c^h| \le \frac{M_4(b-a)}{2880}h^4$$

<u>Замечание</u> ~~...~~ Оценки для трёх формул означают, что формулы прямоугольников и трапеций имеют второй порядок точности относительно h, а формула Симпсона – четвертый порядок точности. Из тех же ~~многочленов~~ оценок следует, что формулы прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, а формула Симпсона – для многочленов третьей степени.





(56) Апостериорные оценки погрешности квадратурных формул. Правило Рунге.

Применение неравенств из вопр 54, 55 на практике не эффективно, поэтому используют иные подходы:

1) Главный член погрешности.

Пусть I^h – приближенное значение интеграла $I=\int_a^b f(x)\,dx$, вычисленное по некоторой квадратурной формуле и использующее разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки длины h. Предположим, что для погрешности этой формулы справедливо представление $I - I^h = Ch^k + o(h^k)$ 8.14, где $C \neq 0$ и $k > 0$ – величины, не зависящие от h. Тогда величина Ch^k называется главным членом погрешности квадратурной формулы, а число k является порядком точности квадратурной формулы.

В силу 8.14 для погрешности квадратурной формулы при достаточно малом справедливо приближенное равенство

$I - I^h \approx Ch^k$ Выводы →

а) уменьшение шага h в M раз приводит к уменьшению погрешности квадратурной формулы $\approx$ в M^k раз. При $h_1 = \frac{h}{M}$ имеем:

$I - I^{h_1} \approx Ch_1^k = \frac{1}{M^k}Ch^k \approx \frac{1}{M^k}(I - I^h)$ 8.16

В частности, уменьшение шага h в два раза приводит к уменьшению погрешности примерно в 2^k раз: $I - I^{\frac{h}{2}} \approx \frac{1}{2^k}Ch^k \approx \frac{1}{2^k}(I - I^h)$

2) Правило Рунге практической оценки погрешности.

Вычитая первое равенство из второго получим (выше)

$I^{\frac{h}{2}} - I^h \approx \frac{1}{2^k}Ch^k(2^k - 1)$

Учитывая приближенное равенство 8.16, приходим к следующей приближённой формуле: $I - I^{\frac{h}{2}} \approx \frac{I^{\frac{h}{2}} - I^h}{2^k - 1}$ 8.17

Использование этой формулы для приближенной оценки погрешности значения $I^{\frac{h}{2}}$ принято называть правилом Рунге (или правилом двойного пересчета).

Замечание. Заменяя h на $2h$ формулы 8.17. приводятся к виду

$$I - I^h \approx \frac{I^h - I^{2h}}{2^k - 1} \qquad 8.18.$$

Для формул прямоугольников и трапеций $k=2$, а для формулы Симпсона $k=4$. Поэтому для этих квадратурных формул ~~нер-во~~ р-во 8.18. примет вид:

$$I - I^h_{пр} \approx \frac{1}{3}\left(I^h_{пр} - I^{2h}_{пр}\right)$$

$$I - I^h_{тр} \approx \frac{1}{3}\left(I^h_{тр} - I^{2h}_{тр}\right)$$

$$I - I^h_{c} \approx \frac{1}{15}\left(I^h_{c} - I^{2h}_{c}\right)$$