Вопросы к экзамену по дисциплине «Комбинаторика и теория графов»

Лектор Казакевич В.Г.
Группы 0303, 0304, 0381, 0382, 0383.

Вопросы первого этапа

Стр. 1

1. Определение бинарного отношения. Свойства бинарных отношений: рефлексивность — определение. Приведите пример и контрпример.
2. Определение бинарного отношения. Свойства бинарных отношений: арефлексивность — определение. Приведите пример и контрпример.
3. Определение бинарного отношения. Свойства бинарных отношений: симметричность — определение. Приведите пример и контрпример.
4. Определение бинарного отношения. Свойства бинарных отношений: антисимметричность — определение. Приведите пример и контрпример.
5. Определение бинарного отношения. Свойства бинарных отношений: асимметричность — определение. Приведите пример и контрпример.
6. Определение бинарного отношения. Свойства бинарных отношений: транзитивность — определение. Приведите пример и контрпример.

Стр. 2

7. Определение бинарного отношения. Способы задания бинарных отношений: ананлитическое задание. Примеры.
8. Определение бинарного отношения. Способы задания бинарных отношений: задание матрицей. Примеры.
9. Определение бинарного отношения. Способы задания бинарных отношений: задание графом. Примеры.

Стр. 2-3

10. Определение бинарного отношения. Типы бинарных отношений: отношение толерантности — определение. Свойства матрицы и графа такого бинарного отношения.
11. Определение бинарного отношения. Типы бинарных отношений: отношение эквивалентности — определение. Свойства матрицы и графа такого бинарного отношения.
12. Определение бинарного отношения. Типы бинарных отношений: отношение предпорядка — определение. Свойства матрицы и графа такого бинарного отношения.
13. Определение бинарного отношения. Типы бинарных отношений: отношение частичного порядка — определение. Свойства матрицы и графа такого бинарного отношения.
14. Определение бинарного отношения. Типы бинарных отношений: отношение линейного порядка — определение. Свойства матрицы и графа такого бинарного отношения.
15. Определение бинарного отношения. Типы бинарных отношений: отношение строгого порядка — определение. Свойства матрицы и графа такого бинарного отношения.

3-4

16. Определение бинарного отношения. Понятия замыкания относительно свойства — определение. Рефлексивное замыкание.
17. Определение бинарного отношения. Понятия замыкания относительно свойства — определение. Симметричное замыкание.
18. Определение бинарного отношения. Понятия замыкания относительно свойства — определение. Транзитивное замыкание.

4

19. Матрица достижимости — определение, связь с транзитивным замыканием.

5

20. Применим ли к данному бинарному отношению алгоритм topsort? Если да — примените, если нет — обоснуйте.

Стр.

5-6

21. Определение графа. Способы задания графа: бинарное отношение. Проиллюстрируйте примерами для неорграфа и орграфа.

22. Определение графа. Способы задания графа: матрица смежности. Проиллюстрируйте примерами для неорграфа и орграфа.

23. Определение графа. Способы задания графа: матрица инцидентности. Проиллюстрируйте примерами для неорграфа и орграфа.

24. Определение графа. Способы задания графа: список инцидентности. Проиллюстрируйте примерами для неорграфа и орграфа.

6

25. Определение графа. Обход в глубину.

26. Определение графа. Обход в ширину.

7 27. Понятие степени вершины для ориентированного и неориентированного графов.

7

28. Определение пути в графе. Типы путей: открытый, замкнутый. Каждый тип проиллюстрируйте примером.

29. Определение пути в графе. Типы путей: простой путь, цепь, цикл. Каждый тип проиллюстрируйте примером.

7-8 30. Связность для неориентированного графа — определение. Алгоритм выделения компонент связности в неориентированном графе.

8 31. k-связность для неориентирванного графа — определение. Алгоритм выделения мостов в неориентированном графе.

8-9 32. Связность в ориентированном графе: слабая и сильная связность. Примеры. Алгоритм Косарайю и Шарира.

9 33. Граф Герца — определние, свойства. Приведите пример графа, граф Герца для которого будет обладать заданным набором характеристик.

9 34. Эйлеров цикл — определение. Критерий эйлеровости для орграфа и для неорграфа.

10 35. Эйлеров граф — определение. Алгоритм Флери.

10 36. Эйлеров путь — определение. Критерий полуэйлеровости для орграфа и для неорграфа.

11 37. Полуэйлеров граф — определение. Алгоритм на списках инцидентности.

11 38. Граф де Брюина — определение, примеры.

12 39. Гамильтонов цикл — определение. Теорема Оре.

12 40. Полугамильтонов граф — определение. Теорема Дирака.

12 41. Гамильтонов путь — определение. Турнир — определение, пример.

12 42. Гамильтонов граф — определение. Теорема Редеи-Камиона.

12 43. Дерево, лес — определения. Свойства деревьев (не меньше 4).

13 44. Остовное дерево, остовный лес — определения. Код Прюфера. Восстановите дерево по данному коду Прюфера.

14 45. Главный цикл — определение. Разложите данный замкнутый путь в данном графе в сумму главных циклов.

14-15 46. Задача о максимальном потоке в сети — постановка задачи. Постройте максимальный поток в данной сети при помощи данного алгоритма.

15 47. Как связаны задача о максимальном потоке и минимальный разрез? Проиллюстрируйте примером.

15 48. Клика — определение. Приведите пример графа с данной максимальной кликой.

Стр. 15

49. Независимое множество — определение. Приветдите пример графа с данным максимальным независимым множеством.

15

50. Как связаны понятия клики и независимого множества? Приведите пример графа с данными максимальной кликой и независимым множетсвом или докажите, что это невозможно.

16

51. Плоский граф — определение. Приведите примеры: плоского графа, планарного, но не плоского графа, непланарного графа, обоснуйте..

16

52. Двудольный граф — определение. Критерий двудольности. Приведите пример двудольного графа с заданнми характеристиками.

16

53. Максимальное и наибольшее паросочетание — определения, примеры, иллюстрирующие различие между этими понятиями. Приведите пример с заданнми характеристиками.

16-17

54. Метрические характеристики графа — определения. Приведите пример графа с заданным набором метрических характеристик.

17

55. Правильная вершинная раскраска графа — определение. Хроматическое число — определение. Приведите пример графа с данным хроматическим числом (и некоторым заданным набором характеристик).

17

56. Хроматический многочлен графа — определение. Свойства (не меньше 5).

18

57. Дан хроматический многочлен графа. Восстановите максимально возможное количество информации о графе.

18-19

58. Реберно-взвешенный граф — определение. Минимальное остовное дерево — определение. Алгоритм Прима.

59. Реберно-взвешенный граф — определение. Минимальное остовное дерево — определение. Алгоритм Краскаля.

19

60. Сколько минимальных остовных деревьев существует в данном графе? Ответ обоснуйте.

19

61. Крастчайший путь в реберно-взвешенном графе — определение. Критерий корректности задачи о нахождении кратчайшего пути.

19-20

62. Алгоритм Дейкстры — постановка задачи, описание, пример.

20

63. Алгоритм Форда-Беллмана — постановка задачи, описание, пример.

20-21

64. Алгоритм Флойда — постановка задачи, описание, пример.

21

65. Алгоритм Джонсона — постановка задачи, описание, пример.

66. Вопросы типа “приведите пример с указанными параметрами”.

67. Вопросы типа «решение стандартной задачи из рассматривавшихся в курсе».

[1] Первая часть экзамена.

Вопросы 1-6. Определение бин-ого отн-ния и его св-ва.

Во всех 6 вопросах:

Def. M - множество, не пустое

$\mathbb{B} = \{0; 1\}$ - множество решений из 2 элем.

0 - ~~би~~ бинарное отношение на мн-ве неверно

1 - бинарное отношение на мн-ве верно (функция)

$f: M^2 \to \mathbb{B}$ - бинарное отношение на M

где M^2 - декартов квадрат - мн-во упорядоченных пар из мн-ва M.

№1. Рефлексивность:

Если $\forall m \in M: f(m,m) = 1$

Пример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \geq b \Rightarrow$

$\forall m \in M: f(m,m) = 1$, т.к. $m \geq m$

Контрпример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a > b \Rightarrow$

$\forall m \in M: f(m,m) = 0$, т.к. $m \not> m$

№2. Арефлексивность: Если $\forall m \in M: f(m,m) = 0$

Пример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow b > a$

$\forall m \in M: f(m,m) = 0$, т.к. $m \not> m$

Контрпример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow b \geq a$

$\forall m \in M: f(m,m) = 1$, т.к. $m \geq m$

№3. Симметричность: $\forall a, b \in M: f(a,b) = f(b,a)$

Пример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \vdots 2$ и $b \vdots 2$

Контрпример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a > b$

№4. Антисимметричность: $\forall a, b \in M: \begin{cases} f(a,b) = 1 \\ f(b,a) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b$

Пример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \geq b$

Контрпример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \vdots 2$ и $b \vdots 2$

№5. Асимметричность: $\forall a, b \in M: \begin{cases} f(a,b) = 1 \\ f(b,a) = 0 \end{cases}$

Пример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a > b$

Контрпример: $M = \{23, 32, 51\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \geq b$

№6. Транзитивность: $\forall a, b, c \in M: \begin{cases} f(a,b) = 1 \\ f(b,c) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(a,c) = 1$

[2] Пример: $M = \{23, 31, 52\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a > b$

Контрпример: $M = \{23, 31, 52\}$; $f(a,b) = 1 \Leftrightarrow a \geq b$

Вопросы 7-9. Определение бин-ого отн-ния и методы его задания

def. Пусть M - множество, не пусто

$\mathbb{B} = \{0,1\}$ - множество из 2 значений, где

0 - при невыполнении бин-ого отн-ния

1 - при выполнении бин-ого отн-ния

$f: M^2 \to \mathbb{B}$ - бинарное отношение на M

где M^2 - декартов квадрат - мн-во упорядоч. пар из мн-ва M.

№7. Аналитическое задание ~~матрицы~~ бинарного отношения: указание общих свойств, которые характеризуют данное отношение

№8. Матричное задание бинарного отношения

Бинарное отношение матрицей, количество столбцов и строк - количество элементов исходного мн-ва. Элемент матрицы, находящийся на пересечении строки и столбца, равен 1, если бинарное отношение выполнено, и равен 0, если бинарное отношение не выполнено.

№9. Задание графом бинарного отношения

Мн-во вершин графа - множество M.

Если бинарное отношение выполнено, то две вершины соединены ~~ор~~ ориентированным и неориентированным ребром.

Вопросы 10-15. Определение бинарного отношения и особые виды б.о.

def. Пусть M - множество, пустое

$\mathbb{B} = \{0,1\}$ - мн-во из 2 значений, где

0 - при невыполнении бинарного отн-ния

1 - при выполнении бинарного отн-ния

$f: M^2 \to \mathbb{B}$ - бинарное отношение на M,

где: M^2 - декартов квадрат - мн-во упорядоченных пар из мн-ва M.

№10. Бинарное отношение f на множестве M толерантно, когда это отношение рефлексивно и симметрично. Св-ва матр. и графы легко им.

№11. Бинарное отношение f на множестве M эквивалентно, когда это отношение рефлексивно симметрично и транзит.

3 **№12.** Бинарное отношение f на мн-ве M называется отношением предпорядка, когда это отношение рефлексивно и транзитивно

№13. Бинарное отношение f на мн-ве M называется отношением частичного (нестрогого) порядка, когда это отношение рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

№14. Бинарное отношение f на мн-ве M называется отношением линейного порядка, когда это отношение рефлексивно, антисимметрично, транзитивно + возможно сравнить любые 2 элемента.

№15. Бинарное отношение f на мн-ве M называется отношением строгого порядка, когда это отношение рефлексивно, асимметрично и транзитивно

Примеры матриц и графов вполне интуитивны

Вопросы 16-18. Определение б.о. Понятие замыкания б.о.

def. M - не пустое множество

$\mathbb{B} = \{0,1\}$ - мно-во результатов бин. отн-ния, где 0 - бин-ное отношение на M не выполнено

1 - бин-ное отношение на M выполнено

$f: M^2 \rightarrow \mathbb{B}$ - бинарное отношение на M, где M^2 - декартов квадрат - мн-во упорядоченных пар из M.

def. $(M \neq \emptyset,\ f: M^2 \rightarrow \mathbb{B})$

Замыкание бинарного отношения f относительно свойства $*$:

$f^*: M^2 \rightarrow \mathbb{B}$

1) f^* и f - согласованы
2) f^* выполнено свойство $*$
3) f^* выполняются остальные свойства f, причём f^* - min с этими св-ми.

№16. Соответственно, рефлексивное замыкание - замыкание относительно свойства рефл-ти, то есть $\forall a \in M: f^*(a,a) = 1$

$\boxed{4}$ Пример: $M \neq \varnothing$, $f: M^2 \to \mathbb{B}$; $f(a,b)=1 \Leftrightarrow a > b$

$$f^*(a,b)=1 \Leftrightarrow a \geq b$$

В матричной форме – 1 на главной диагонали

В графе – петли у каждой вершины

№17. Соответственно, симметричное замыкание – замыкание относительно св-ва симметричности: т.е. $\forall a,b \in M$: $f(a,b)=f(b,a)$

Пример: $M \neq \varnothing$, $f: M^2 \to \mathbb{B}$; $f(a,b)=1 \Leftrightarrow a-b=b-a$

$$f^*(a,b)=1 \Leftrightarrow |a-b|=|b-a|$$

В матричной форме – $\begin{array}{|ccc}1 & 1 & 0 \\ & 0 & \ddots\end{array}$ гл. диаг.

В графе – неориентированное ребро

№18. Соответственно, транзитивное замыкание – замыкание относительно св-ва транзитивности: т.е. $\forall a,b,c \in M$: $f(a,b)=1$ и $f(b,c)=1 \Rightarrow f(a,c)=1$

Пример: $M \neq 0$, $f: M^2 \to \mathbb{B}$; ~~$f(a,b)=1 \Leftrightarrow$~~

Пусть $M=\{1,2,3,4\}$, $f=\{(1,2),(3,4),(4,2)\}$

$$f^*=\{(1,2),(3,4),(4,2);(3,2)\}$$

Вопрос 19. Матрица достижимости

def. Матрица достижимостей $E=[f_{ij}]$ определяется следующим образом:

$$f_{ij}=\begin{cases}1, \text{если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i \\ 0, \text{если иначе}\end{cases}$$

т.е. в матрице достижимости содержатся сведения о существовании „путей" между элементами мн-ва, на котором задано бинарное отн-ние

Связь с транзитивным замыканием: матрицу достижимости ориентированного графа еще называют бинарной матрицей замыкания по транз-ти отношения A, заданного матрицей смежности

Вопрос 20. Алгоритм топологической сорт.

Алгоритм топологической сортировки (top sort) применяется для дополнения бинарного отношения частичного порядка до отношения линейного порядка. Т.е.

до top. sort: бинарное отн-ние рефлексивно, антисимметрично и транзитивно

после top. sort: бинарное отношение рефлексивно, антисимметрично и транзитивно + + можно сравнить любые 2 элемента.

Суть: Расставляем у каждой вершины номера в зависимости от кол-ва исходящих ребёр: чем больше ребер, тем меньше номер.

Затем ~~соединяем~~ проводим ориентированные рёбра из вершин с меньшим номером в вершину с большим номером, если такого ребра ещё не было.

Вопросы 21-24. Опр-ние графа. Методы задания.

def. Граф — совокупность вершин, связанных или нет рёбрами.

$G(V, E)$ - граф

№21. Задание графа бин-ным отношением

$V = M$ - то есть вершины = члены мн-ва на котором определено бин-ное отношение

E - мн-во ребёр $= f(a,b) = 1$ - все верные бин-ные отношения на мн-ве

Пример составить легко.

№22. Задание графа матрицей смеж-ти

В строку и столбец вносятся вершины $v_i \in V$, $i \in [1; k]$

На пересечении строки и столбца ставится 0, если ребра из строки в столбец нет, и 1, если такое ребро есть

	v_1 …	v_k
v_1		
v_2	$\boxed{e}$	
⋮		
v_k		

$e = \overline{v_2 v_1}$ - ребро из v_2 в v_1

№23. Задание графа матрицей инцидентности

В строках оглавления - все рёбра графа

В столбце оглавления - все вершины графа

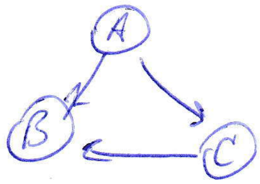
На пересечении строки и столбца могут быть

4 значения:

0, если ребро не связано с вершиной
1, если ребро выходит из вершины
-1, если ребро входит в вершину (только для орграфа)
2, если петля

№24 Задание графа списком инцидентности

Задание списком инцидентности происходит следующим образом: выписываются в столбик или любым другим удобным для размещения образом и затем через стрелку записываются все вершины, в которые идёт ребро из этой вершины.



A → B → C
B
C → B

Вопросы 25-26. Опр-ние графа, обходы

def. Граф — совокупность вершин, связанных рёбрами

$G(V,E)$ — граф

№25. Обход в глубину

1. Выбрана начальная вершина
2. Движемся в произвольную смежную вершину
3. Из новой вершины обходим все пути до смежных вершин
4. Если нет смежных вышестоящих вершин, то достигнута вершина-конец. Откатываемся на предыдущую вершину, из которой попали в конечную. Исследуем все пути из предыдущей вершины
5. Алгоритм выполняется, пока не будут исследованы все вершины

№26. Обход в ширину

1. Выбираем непройденную вершину
2. Проверяем все рёбра из этой вершины
3. Запоминаем вершины на концах этих ребер
4. Выбираем непройденную вершину на конце ребра
5. Повторяем, пока остались непройденные верш.

7

Вопрос 27. Степень вершины

def. Степень вершины — количество рёбер, инцидентных данной вершине (вершин, которые являются началом или концом ребра)

NB. 1. Ребро-петля при подсчёте учитывается 2 раза

2. Для ориентированного графа различают

исход. степень $\delta^+(v)$ — количество исходящих рёбер из v

входящ. степень $\delta^-(v)$ — количество входящих рёбер из v

3. Для неориентированного графа существует просто степень

Вопросы 28-29. Путь в графе и его типы

def. Путь — непрерывная, согласованная с ориентацией последовательность рёбер

№28. Открытый путь — путь, в котором не совпадают начальная и конечная вершина

Замкнутый путь — путь, в котором совпадают начальная и конечная вершина

№29. Простой путь — путь, в котором отсутствуют повторяющиеся рёбра.

Цепь — простой путь, в котором отсутствуют повторяющиеся вершины

Цикл — замкнутый (начальная верш. = конечная) путь, в котором отсутствуют повторяющиеся вершины

Примеры легко приводимы на основании определений.

Вопрос 30. Связность в неографе

def. Связность в неографе = наличие пути, инцидентного паре вершин графа

Алгоритм выделения компонент связности в графе

[Компонента связности — максимально связный подграф в графе

1. Выбираем вершину
2. При помощи обхода в ширину обойдём все возможные вершины. Эти вершины образуют 1-ую компоненту связности
3. Выбираем вершину, не вошедшую в к.с. и повторяем шаг 2.

4. Если вершин, не вошедших в к.с. не осталось, то алгоритм завершён.

Вопрос 31. К-связность в неографе

def К-связность неографа – минимальное количество рёбер в графе, чтобы в нём оставался путь между любыми 2-мя вершинами.

Алгоритм поиска мостов в неографе

Мост – ребро, при удалении которого увеличивается количество компонент связности.

1. Запускаем 1 поиск в глубину
   - При 1-ом посещении вершины вносим её в специальный список L
   - Меняем ориентацию ребра, если прошли по нему
2. Запускаем 2 поиск в глубину
   - Обходим по порядку в L
   - Закрашиваем вершины, в которые можем пройти за один поиск

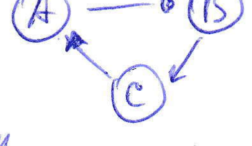
Рёбра, инцидентные вершинам разных цветов, и есть мосты.

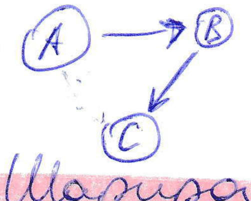
Вопрос 32. Связность в Орграфе

def Связность в графе = наличие пути между любыми 2 вершинами графа

сильная = с учётом ориентации рёбер

слабая = без учёта ориентации рёбер





Алгоритм Косарайю и Шарира.

1. Запуск поиска в глубину со случайной вершины с нумерацией по возрастании на всех пройдённых вершинах
2. Замена на всех используемых рёбрах

$\boxed{9}$ 3. Запуск нового поиска в глубину с вершины с наибольшим номером и с учётом изменённой ориентации

Вопрос 33. Граф Герца

def. Пусть $G(V,E)$ – ориентированный граф, причём $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$, где G_i – компоненты сильной связности

Граф Герца – граф, вершины которого – компоненты сильной св-ти, а рёбра – ~~мосты~~ не входят в к.с.с. и соединяют их

Собственно, свойства графа Герца:

1. Ацикличность, т.к. если бы был цикличный, то упущена компонента связности
2. Вершины = компоненты сильной связности
3. Рёбра = мосты ?

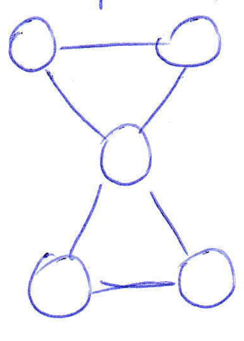
Вопрос 34. Эйлеров цикл

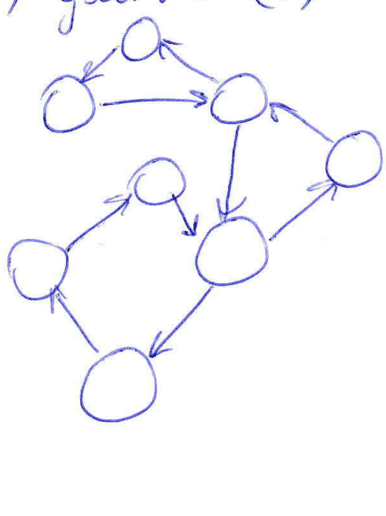
def. Эйлеров цикл – замкнутый путь в графе, который проходит по всем вершинам по 1 разу. (кроме начальной. Там мы оказываемся в начале цикла и в конце, по определению замкнутого пути.

Критерий Эйлеровости:

1. Для неографа:
   - $\exists$ 1 к.с., содержащая все рёбра
   - Степень всех вершин кратна 2
     $\forall v \in V: deg(v) \vdots 2$
2. Для орграфа:
   - $\exists$ 1 к.с., содержащая рёбра
   - $\delta^+(v) = \delta^-(v)$ для $\forall v \in (V)$

Примеры:





10

Вопрос 35. Эйлеров граф

def. Граф называется Эйлеровым, если он содержит эйлеров цикл

Алгоритм Флёри.

NB Данный алгоритм применяется только если есть дешёвый способ проверить является ли ребро мостом

1. Начинаем с любой вершины нечётной степ.
2. Проходим по рёбрам с этой вершины последовательно, причём по мостам можно пройти только если не осталось других рёбер у вершины, которые не являются мостами

Если алгоритм завершился в той же вершине, в которой был начат, то обнаружен эйлеров цикл

Если удалось пройтись по всем рёбрам, но завершён алгоритм не в той вершине, с которой начался, обнаружен эйлеров путь

Если не удалось пройтись по всем рёбрам, то ни цикл, ни путь не обнаружен.

Вопрос 36. Эйлеров путь

def. Эйлеров путь — незамкнутый простой путь, проходящий по всем рёбрам.

Критерий полуэйлеровости

1. В орграфе:

$$\exists u, v \in V(G): \delta^+(u) = \delta^-(u) + 1, \quad \delta^-(v) = \delta^+(v) + 1$$

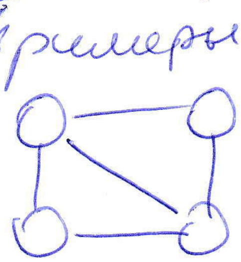
\+ Существует ровно 1 к.с.

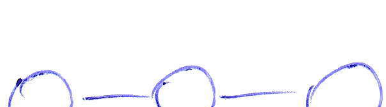
2. В неорграфе:

а) Существует ровно 1 к.с.

б) Ровно 2 вершины нечётной степени

Примеры:





11

Вопрос 37 Полуэйлеров граф

def. Полуэйлеров граф — граф, который содержит эйлеров путь.

Алгоритм на списках инцидентности

1. Составляем список инцидентности
2. Выбираем начальную вершину
   а) Если Эйлеров граф, то любую
   б) Если Полуэйлеров, то любую вершину нечёт. степ.
3. Со стартовой вершины строим путь, идя по ещё не пройденным рёбрам, параллельно вычёркивая в списке инцидентности соответствующие рёбра
4. Если из текущей вершины не идёт никаких рёбер, которые ещё не были пройдены, то „откатываемся" в последовательном списке вершин, который составляем во время 3шага, к вершине, которая имеет непройденные рёбра.
5. Алгоритм завершает работу, если все рёбра пройдены, или нет возможности их пройти.

Вопрос 38. Граф де Брюина

def. Пусть $\exists$ алфавит $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, T^k - все слова длины k, T^* - все слова.
Граф де Брюина для слов длины k в алфавите T: $B(T,k)$, где вершины графа - T^k, а рёбра $\forall u, v \in V: e = uv$, если $\begin{cases} u = u_1 \boxed{u_2 \dots u_k} \\ v = \boxed{u_2 \dots u_k} u_{k+1} \end{cases}$

Свойства графа де Брюина:

1. Могут быть петли
2. Рёбра могут быть и направлены, и ненаправлены
3. Эйлеров граф
4. Биекция между парами вершин и рёбрами

19

Вопрос 39. Гамильтонов цикл. Теорема Оре

def. Гамильтонов цикл — замкнутый путь, который содержит единожды каждую вершину, кроме начальной.

Теорема Оре (достаточное условие гамильтоновости)
Если $|V| \geq 3$ и $\forall u, v \in V$: $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$, то граф гамильтонов

Вопрос 40. Полугамильтонов граф. Т. Дирака

def. Полугамильтонов граф — граф, содержащий Гамильтонов путь.

Теорема Дирака (достаточное условие гамильтоновости)
Если в $G(V,E)$ - неорграф $|V| \geq 3$ и $\forall u \in V$: $\deg(u) \geq \frac{|V|}{2}$, то граф гамильтонов

Вопрос 41. Гамильтонов путь. Турнир.

def. Гамильтонов путь — открытый путь, который содержит каждую вершину графа по 1 разу

def. Турнир — полный граф, в котором все рёбра направленные

Вопрос 42. Гамильтонов граф. Т. Редеи-Камиона

def. Гамильтонов граф — граф, который содержит гамильтонов путь

Теорема Редеи-Камиона.
Любой сильно связный турнир (полный граф, где все рёбра направлены) — гамильтонов граф

Вопрос 43. Дерево, лес. Свойства деревьев

def. Дерево — неориентированный связный ациклический граф.

def. Лес - объединение деревьев

Свойства деревьев

1. $|V| = n$, $|E| = n-1$
2. Любое дерево — двудольный граф
3. Любые две вершины дерева соединены единственным простым путём
4. При добавлении ребра между любыми несмежными вершинами перестаёт быть деревом
5. Ациклический
6. Связный
7. Цикломатическое число $\mu(G) = |E| - |V| + 1 = 0$

19

Вопрос 44. Остовное дерево, остовный лес. Код Прюфера

def. Остовное дерево — дерево, проходящее по всем вершинам графа, который связан.

$G(V,E)$ - связный граф

$T(V,\tilde{E})$ - остовное дерево, где $\hat{E} \subseteq E$

def. Остовный лес — дерево, проходящее по всем вершинам графа, который не связан, но есть компоненты связности

$G(V,E) = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$, где G_i - к.с.

$T(V,\hat{E}) = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$

Код Прюфера.

Способ взаимно однозначного
деревьев на n вершинах с помощью посл-ти из $n-2$ чисел.

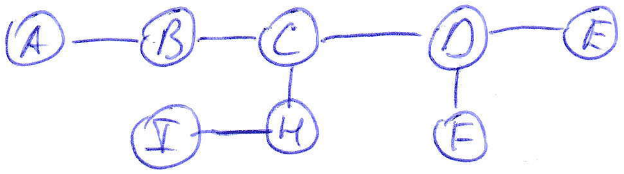
$Pruf(T) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}\}$, где $\alpha_i \in V$ и $T(V,E)$; $|V| = n$

Пример: $Pruf(G) \longmapsto G$

$Pruf(G) = \{B, C, D, D, C, H\}$

$L = \{\cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D}, \cancel{E}, \cancel{F}, H, I\}$

1 6 5 3 4



Алгоритм построения к. Прюфера.

1. Нумеруем все вершины
2. Выбираем вершину с минимальным номером и при этом являющуюся листом. Обрезаем
3. Повторить второй шаг, пока не останется 1 вершина. В $Pruf(G)$ заносим предков отрезанных листов.

Вопрос 45. Главный цикл.

def. Главный цикл — цикл, получающийся при добавлении в остовное дерево T какой-либо хорды $\hat{e}$ (ребра, которое не вошло в остовное дерево)

Теорема

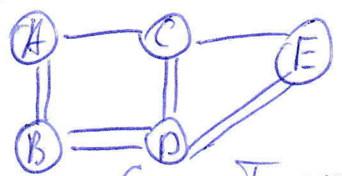
Пусть $G(V,E)$ - неорграф, $T(V,\hat{E})$ - остовное дерево
$C_1, \dots, C_k$ — полный набор главных циклов, порожд. T.
Тогда любой простой путь Z в G можно представить как симметрическую сумму главных циклов

$$Z = C_{i_1} \oplus \dots \oplus C_{i_k}$$

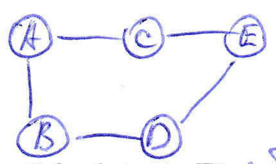
Алгоритм разложения

Если Z - главный цикл, то разл.-ние построено
Пусть Z - не главный цикл
Рассмотрим $\hat{e}_i$, входящую в Z и главный цикл.
Когда все такие хорды рассмотрены: $Z = C_{i_1} \oplus \dots \oplus C_{i_k}$

Пример разложения



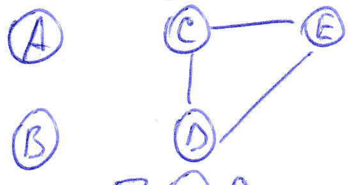
граф G и T-остовное дерево



замкнутый путь

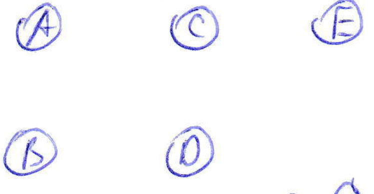
главные циклы:
$C_1 = (ABDCA)$
$C_2 = (CDEC)$
Хорды: AC и CE

1. Хорда AC



$Z \oplus C_1$

2. Хорда CE



$Z \oplus C_1 \oplus C_2$

$\Rightarrow Z = C_1 \oplus C_2$

Вопрос 46. Задача о максимальном потоке.

Задача о максимальном потоке состоит в определении максимального количества, которое можно провести через сеть из истока в стоке.

def. Сеть — орграф, в котором есть сток (точка, куда идём без исходящих рёбер) и исток (точка, откуда идём без входящих рёбер)

15 **def.** Путь в Сети G: $f: E \to \mathbb{Z}$ (либо $\mathbb{R}$), такая что

1) $\forall e \in E$: $0 \le f(e) \le C(e)$ (G - взвешенный граф, $C: E \to \mathbb{Z}$ (либо $\mathbb{R}$), $\forall e \in E \mapsto C(e) \ge 0$)

2) $\forall u \in V \setminus \{S, F\}$ $\sum\limits_{v \in P(u)} f(v,u) - \sum\limits_{v \in ch(u)} f(u,v) = 0$ - эксцесс

Пример решается по Форду - Фалкерсону

Вопрос 47. Как связаны з. о максим. потоке и min разрез

def. Разрез в сети $G(V,E)$: $\tilde{E} \subseteq E$ такой, что $G(V, E \setminus \tilde{E})$ перестаёт быть связным, причём $\tilde{E}$ - минимальный по включению набор рёбер

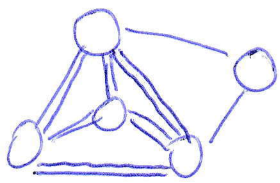
Сумма минимальных разрезов = максимальный поток

Вопрос 48. Клика - определение.

def. Клика - полный подграф $\tilde{G}$ графа G

$\tilde{G} \subset G$ - клика $\Longleftrightarrow$ $\tilde{G}$ - полный подграф в G

Пример:



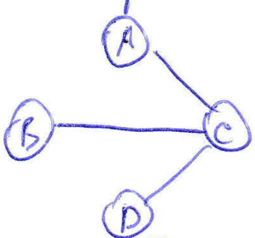
= ~~max~~ max клика

Вопрос 49. Максимальное независимое мн-во.

def. Независимое множество - максимальный набор вершин в графе, в котором никакие 2 вершины не соединены ребром

$W \subseteq V: \forall u, v \in W: \nexists\ e = uv \in E$

Примеры:



$W = \{A, B, D\}$

Вопрос 50. Как связаны понятия клики и нез-ого мн-ва

Полный граф = Независимое мн-во + Max клика

или Полный граф = Граф + граф-дополнение

16

Вопрос 51. Плоский граф.

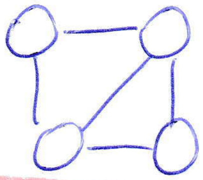
def. $G(V,E)$ — плоский, когда никакие рёбра в этом графе не пересекаются

def. G_1 и G_2 изоморфны, когда $\exists$ согласованная биекция: $f_V: V_1 \to V_2$
$f_E: E_1 \to E_2$

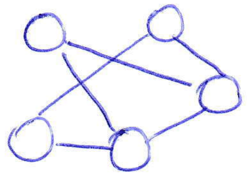
def. Планарный граф — граф изоморфный плоскому

Пример:

Плоский



Планарный



Вопрос 52. Двудольный граф

def. Граф называется двудольным, если мн-во его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества, в котором каждая из точек одного мн-ва инцидентна единственной точке другого мн-ва

$G(V,E)$: $V = V_1 \sqcup V_2$, т.к. $\forall e \in E: e = \overline{v_1 v_2}$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$

Критерий двудольности.

Если в графе есть цикл нечётной степени, то такой граф не является двудольным.

Вопрос 53. Максимальное и наибольшее паросочет.

def. Максимальное пар-ние — паросочетание, в которое нельзя добавить ни одно ребро

def. Наибольшее пар-ние — паросочетание, в котором количество рёбер — наибольшее

Вопрос 54. Метрические хар-ки графа.

def. Эксцентриситет вершины — максимальное расстояние от нашей вершины (фикс. верш.) до какой-то вершины графа

$exc(v) = \max dist(v,w)$, где — фиксир.

def. Радиус графа — минимальный эксцентриситет в графе

def. Диаметр графа — максимальный экс-тет в графе

17

def. Центр графа — подмножество вершин графа, для которых эксцентриситет минимален

Вопрос 55. Правильная вершинная р-ка графа.

def. Правильная вершинная раскраска графа.
Любые смежные вершины разного цвета.
$\forall u, v \in V$ в $G(V,E)$: u и v — разный цвет.

def. Хроматическое число $\chi(G)$ — минимальное число цветов, в которые граф можно раскрасить правильно

Вопрос 56. Хроматический многочлен графа G

def. $P_G(x) := \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ (x — количество цветов, в которые будем красить)
$\forall \lambda \in \mathbb{N}$: $P_G(\lambda)$ — количество различных правильных вершинных раскрасок в λ цветов.

Свойства хр-ого многочлена

1. $P_G(x)$ — многочлен
2. $\deg(P_G(x)) = n$, n — количество вершин
3. $a_n = 1$ — старший коэффициент
4. Если G — несвязный, то $G = G_1 \sqcup G_2 \sqcup \ldots \sqcup G_k \Rightarrow$
$\Rightarrow P_{G(x)} = P_{G_1}(x) \cdot P_{G_2}(x) \cdot \ldots P_{G_k}(x)$
5. $P_G(0) = 0$
6. $P_G(x) = x^k \cdot g(x)$, где k — # к.с., $g(x)$ — мн-н
7. $|a_{n-1}|$ = коэффициент $n-1$
8. a_i — знакочередующиеся

Примеры: $G(V,E)$, $|V| = n$

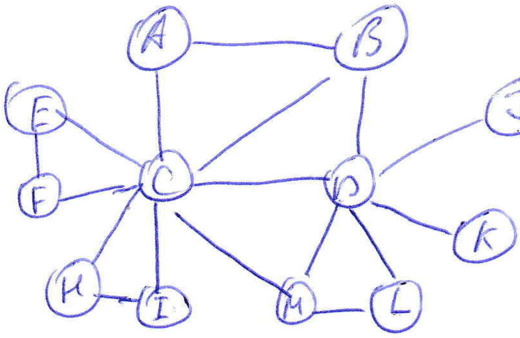
1. Россыпь изолированных вершин
$P_G(x) = x^n$
2. Цепь незамкнутая: $P_G(x) = x(x-1)^{n-1}$
3. Полный граф K_n: $P_G(x) = x(x-1)\ldots(x-(n-1)) = \frac{x!}{(x-n)!}$
4. Цикл: $P_G(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1)$

18

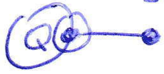
Вопрос 57. Восстановите граф по хр-му мн-ну

$$P_G(x) = x(x-1)^5(x-2)^6 = (x-1)^4(x-2)^5 \cdot P_{K_3} = (x-1)^2(x-1)^2(x-2$$

$\cdot P_{Q(x)}$



Лемма 1.

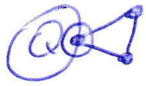


$$P_G(x) = P_{Q(x)} \cdot (x-1)$$

Лемма 2.

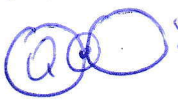
$$P_G(x) = P_{Q(x)} \cdot (x-2)$$

~~Лемма~~ Лемма 3.



$$P_G(x) = P_{Q(x)}(x-1)(x-2)$$

Лемма 4.



дерево на 5+1 верш.

$$P_G(x) = P_{Q(x)} \cdot (x-1)^5$$

Вопросы 58–59. Рёберно-взвешенный граф. Минимальное остовное дерево. Алгоритмы Прима и Краскаля.

def. Рёберно-взвешенный граф — граф, у которого каждое ребро имеет вес.

def. Остовное дерево называется минимальным, когда сумма весов рёбер, входящих в остовное дерево минимален.

№ 58. Алгоритм Прима

V	E	Σ

Начало:
1. Составляем список выбр. вершин
2. Составляем список выбр. рёбер
3. Сумма весов рёбер

Шаг:
- $\exists\, V_k$ — мн-во уже выбранных вершин
- добавляем $w \in V \setminus V_k : \varphi(w\tilde{v}_j) \to \min(\tilde{v}_j \in V_k)$

Завершение алгоритма, когда пройдены все вершины

№ 59. Алгоритм Краскаля

V	E	Σ

Начало:
1. Составляем список выбр. вершин
2. Составляем список выбр. рёбер
3. Сумма весов рёбер

Шаг: Добавляем в список рёбер ребро мин. веса, вершины ребра вписываем в список вершин, если это вершина еще не внесена

Алгоритм завершается, когда пройдены все вершины

Вопрос 60. Сколько минимальных остовных деревьев в данном графе

В неорграфе: ~~если составить~~ • если каждое ребро имеет уникальный вес, то минимальное остовное дерево
• если есть несколько минимальных рёбер, то для каждого из них можно предъявить min. остовное дерево

√ Применим модифицированный алг. Краскала
√ При запуске алг-ма $|T_{(G)}| = 1$
√ При каждом шаге, если невозможно добавить все рёбра с min весом, то умножаем $|T_{(G)}|$ на кол-во возможных выборов таких рёбер

$\left(C^{n(r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\right.$, где n - количество рёбер, r - количество выбр. рёбер)

Вопрос 61. Кратчайший путь в р-в. графе.

def. Кратчайший путь — путь с минимальным весом входящих рёбер.

Критерий корректности задачи о нахождении кратчайшего пути.

Кратчайшие пути от фиксированной вершины до остальных должны выстраиваться по возрастанию, если можно от фиксированной вершины попасть в данную через какую-то промежуточную вершину.

Вопрос 62. Алгоритм Дейкстры

NB. Применяется только для графов с неотрицательными весами рёбер.

Начало. 1. Выбираем начальную вершину
2. Прописываем метки всем вершинам — текущую длину мин. путей

Шаг: ∃ Ω - мн-во обработанных вершин
• Выбираем $w \in (V \setminus \Omega)$, такую, что метка w - min
• Просматриваем все рёбра из w в $ch(w)$
$\forall e = wu$, где $u \in ch(w)$
• Сравниваем текущую метку $ch(w) = \delta(u)$

20

• Если $\sigma(u) > \sigma(w) + \varphi(wu)$, то $\sigma(u) := \sigma(w) + \varphi(wu)$

• После просмотра всех $ch(w)$

$$\Omega := \Omega \cup \{w\}$$

Алгоритм завершается, если рассмотрены все вершины

Вопрос 63 Алгоритм Форда — Беллмана

Начало: 1. Составляем табл. 1, в которой 1 столбик — все рёбра, 2 столбик — веса рёбер

2. Составляем табл. 2, в которой будем записывать кратчайшие пути от фикс. вершины, которую выбрали, до всех остальных вершин.

3. Уставливаем в табл. 2 длины кратч. путей ∞, кроме самой вершины

Шаг: • Проходимся по табл. 1 — рёбер с весами

• Если текущая длина кр. пути в табл. 2 меньше чем сумма длины ребра в эту точку и длины кратчайшего пути ~~в~~ начальной точке ребра, то текущая длина кр. пути в табл. 2 заменяется на эту сумму

• После прохождения всех рёбер переходим на следующий шаг

Алгоритм завершается, если при прохождении табл. 1 значения кр. путей в табл. 2 не меняются

NB. Для корректной работы алгоритма не должны существовать в графе циклы отрицательного суммарного веса.

Вопрос 64 Алгоритм Флойда

Начало: строим матрицу смежности для графа

$$A^0 = \begin{bmatrix} \alpha^0_{ij} = p_{ij}, \text{ если } \exists\, e = v_i v_j \\ \alpha^0_{ij} = \infty, \text{ если иначе} \end{bmatrix}$$

α_{ij} — элемент матр.
p_{ij} — вес ребра между v_i и v_j

Шаг:] мн-во вершин как-то упорядочено

• На i-ом шаге v_i — ведущая вершина

• Для каждой вершины построен какой-то кратчайший путь: $\ell^{i-1}_{m_1 m_2}$ — min длина пути из m_1 в m_2 на данный момент

21 • Сравниваем уже построенный путь с суммой путей через i-ую вершину:
$$\text{if } l^{i-1}_{m_1 m_2} > l^{i-1}_{m_1 i} + l^{i-1}_{i m_2} \Rightarrow l^{i}_{m_1 m_2} := l^{i-1}_{m_1 i} + l^{i-1}_{i m_2}$$

Алгоритм завершается, когда сделано $n = |V|$ шагов.

Вопрос 65. Алгоритм Джонсона

Задача: $G(V, E)$, $\varphi: E \to \mathbb{R}$

Найти $dist(v_i, v_j)$, где v_i и $v_j \in V$

Новая задача: $\tilde{G}(V, E)$, $\tilde{\varphi}: E \to \mathbb{R} \geq 0$, набор кратчайших путей сохранён

Суть алгоритма Джонсона перейти от задачи к новой задаче и затем воспользоваться алгоритмом Дейкстры к каждой вершине

def. Джонсоновский потенциал на G.

$h: V \to \mathbb{R}$ такая, что: $\tilde{\varphi}(u, v) = \varphi(u, v) + h(u) - h(v)$

$\forall u, v \in V: \tilde{\varphi}(u, v) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} h(u) = 0, \ \forall \text{пути, ведущего в } u: \varphi(\alpha) \geq 0 \\ h(u) = \min c, \text{ где } c = \varphi(\alpha) < 0 \end{array}\right.$$

где α – путь, ведущий в u

Чтобы найти h, достроим фиктивную верш. S и воспользуемся алг. Форда-Беллмана от S