EA614 - Análise de Sinais

Atividade 3 - Filtros Analógicos

Iran Seixas Lopes Neto - RA: 244827
Letícia Lopes Mendes da Silva - RA: 184423

Para resolver os itens da atividade, utilizamos códigos em Python com as bibliotecas e os dados iniciais a seguir, incluindo a rotina fornecida em `calcula_coeficientes.py`:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from calcula_coeficientes import calcula_coeficientes

omega = np.linspace(0, 40, 1_000)
omega_c = 10
w_c = r'$\omega_c$'
```

Filtro de Chebyshev

A função a seguir é responsável por gerar um filtro de Chebyshev:

```
def filtroChebyshev(w, wc, n, e):
    Tn = calcula_coeficientes(w, wc, n)
    Habs = (1 + (e**2) * (Tn**2)) ** (-0.5)
    return Habs
```

Item (a)

```
e = 0.2
Habs_1 = filtroChebyshev(omega, omega_c, 1, e)
Habs_2 = filtroChebyshev(omega, omega_c, 2, e)
Habs_3 = filtroChebyshev(omega, omega_c, 3, e)
Habs_4 = filtroChebyshev(omega, omega_c, 4, e)
Habs_5 = filtroChebyshev(omega, omega_c, 5, e)
```

```
plt.plot(omega, Habs_1, color='tab:red', label=r'$|H_1|$')
plt.plot(omega, Habs_2, color='tab:green', label=r'$|H_2|$')
plt.plot(omega, Habs_3, color='tab:blue', label=r'$|H_3|$')
plt.plot(omega, Habs_4, color='tab:orange', label=r'$|H_4|$')
plt.plot(omega, Habs_5, color='tab:gray', label=r'$|H_5|$')
plt.axvline(x=omega_c, color='tab:purple', linestyle='--', label=w_c)
plt.xlabel(rf'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel(r'$|H_C (j\omega)|$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

No código acima, após fixar o parâmetro $\epsilon = 0.2$, variamos a ordem do filtro para os valores $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e geramos um gráfico com cada resposta em frequência do filtro de Chebyshev correspondente.

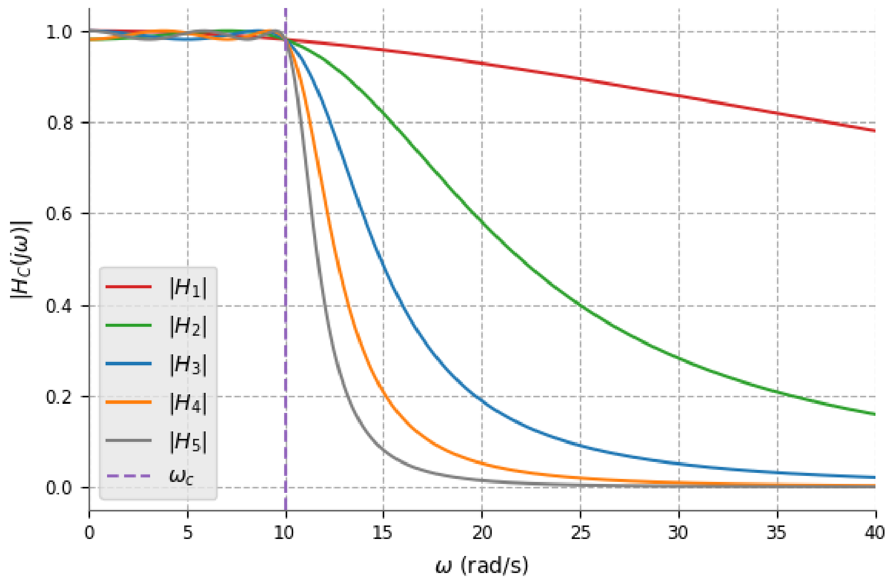

Figura 1: Filtros de Chebyshev $|H_n(j\omega)|$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Da Fig. 1, nota-se que o comportamento do filtro na faixa de passagem é similar para os valores de n analisados, contendo apenas pequenas oscilações. Porém, quanto maior a ordem do filtro, mais drástica é a queda da magnitude após ω_c, aproximando-se de um FPB ideal.

Item (b)

```
n = 3
Habs_01 = filtroChebyshev(omega, omega_c, n, 0.1)
Habs_03 = filtroChebyshev(omega, omega_c, n, 0.3)
Habs_05 = filtroChebyshev(omega, omega_c, n, 0.5)
Habs_07 = filtroChebyshev(omega, omega_c, n, 0.7)
Habs_09 = filtroChebyshev(omega, omega_c, n, 0.9)
```

```
plt.plot(omega, Habs_01, color='tab:red', label=r'$|H_{0.1}|$')
plt.plot(omega, Habs_03, color='tab:green', label=r'$|H_{0.3}|$')
plt.plot(omega, Habs_05, color='tab:blue', label=r'$|H_{0.5}|$')
plt.plot(omega, Habs_07, color='tab:orange', label=r'$|H_{0.7}|$')
plt.plot(omega, Habs_09, color='tab:gray', label=r'$|H_{0.9}|$')
plt.axvline(x=omega_c, color='tab:purple', linestyle='--', label=w_c)
plt.xlabel(rf'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel(r'$H_C (j\omega)|$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Desta vez, fixamos o a ordem do filtro em $n = 3$ e geramos o gráfico contendo a resposta em frequência de outros filtros de Chebyshev, variando o parâmetro $\epsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

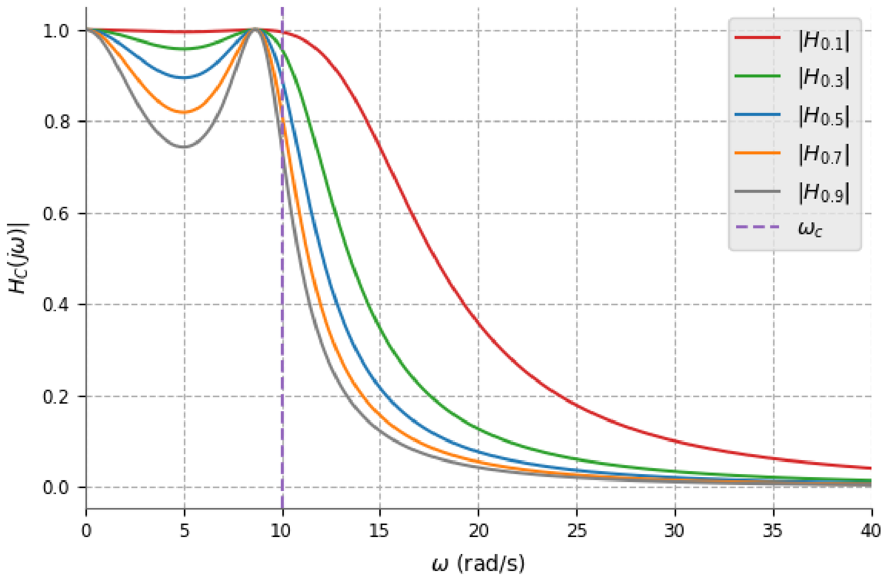

Figura 2: Filtros de Chebyshev $|H_\epsilon(j\omega)|$, para $\epsilon = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

Analisando o gráfico na Fig. 2, nota-se que, na faixa de passagem, o filtro possui um caráter oscilatório mais evidente, apresentando uma queda com mínimo em $\omega = 5$ rad/s, para $n = 3$. Esta oscilação é menor quando ϵ diminui. Além disso, após a frequência de corte ω_c, o filtro transiciona para sua faixa de rejeição e sua magnitude vai a zero. É possível observar que os filtros com maior valor de ϵ são aqueles que possuem uma transição mais abrupta e, portanto, mais se aproximam de um FPB ideal.

Filtro de Butterworth

A seguir, criamos um função que é responsável por gerar um filtro de Butterworth:

```
def filtroButterworth(w, wc, n):
    Habs = (1 + (w/wc) ** (2 * n)) ** (-0.5)
    return Habs
```

Item (c)

```
Habs_1 = filtroButterworth(omega, omega_c, 1)
Habs_2 = filtroButterworth(omega, omega_c, 2)
Habs_3 = filtroButterworth(omega, omega_c, 3)
Habs_4 = filtroButterworth(omega, omega_c, 4)
Habs_5 = filtroButterworth(omega, omega_c, 5)
```

```
plt.plot(omega, Habs_1, color='tab:red', label=r'$|H_1|$')
plt.plot(omega, Habs_2, color='tab:green', label=r'$|H_2|$')
plt.plot(omega, Habs_3, color='tab:blue', label=r'$|H_3|$')
plt.plot(omega, Habs_4, color='tab:orange', label=r'$|H_4|$')
plt.plot(omega, Habs_5, color='tab:gray', label=r'$|H_5|$')
plt.axvline(x=omega_c, color='tab:purple', linestyle='--', label=w_c)
plt.xlabel(rf'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel(r'$|H_B (j\omega)|$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

No código acima, de forma semelhante ao item (a), variamos a ordem do filtro para os valores $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e geramos um gráfico a resposta em frequência de cada filtro de Butterworth correspondente.

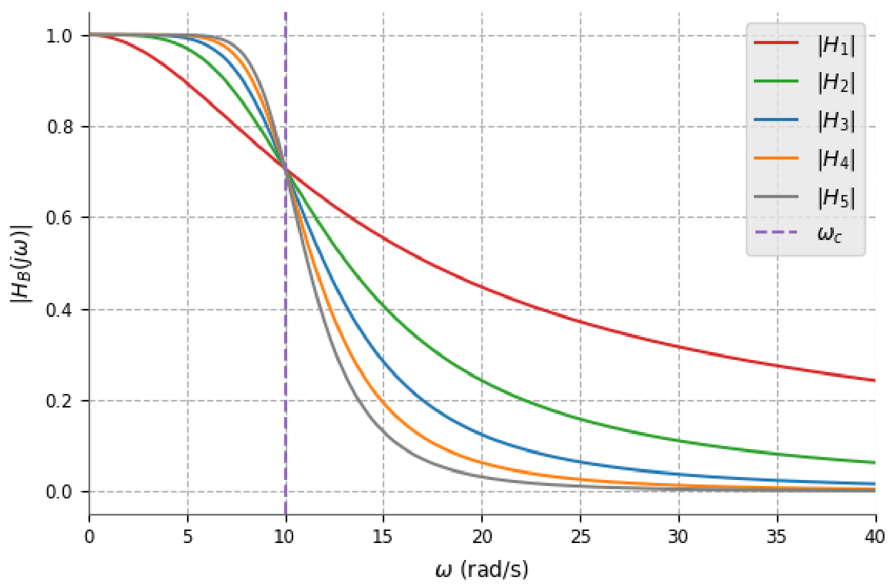

Figura 3: Filtros de Butterworth $|H_n(j\omega)|$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Analisando a Fig. 3, nota-se que os filtros convergem na frequência de corte. Isso pode ser explicado na equação do filtro de Butterworth: quando $\omega = \omega_c$, temos que $(\omega/\omega_c)^{2n} = 1$ para todo n; assim, temos que $|H_B(j\omega_c)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, justamente onde os filtros se encontram. Além disso, é possível observar que quanto maior o valor de n, mais abrupta será a queda próxima a ω_c, se comportando de uma maneira mais próxima a um filtro ideal.

Filtragem de um pulso retangular

Item (d)

Calculando a transformada de Fourier $X(j\omega)$ do sinal retangular $x(t)$ fornecido, de altura igual a 1, largura τ e centrado na origem, temos:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-j\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega}$$

$$X(j\omega) = \frac{2sin(\omega\tau/2)}{\omega} = \tau\frac{sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \boxed{\tau Sa(\omega\tau/2)}$$

Assim, utilizando os valores fornecidos ($\omega_m = 7.5$ rad/s e $\tau = 2\pi/\omega_m$), obtemos a magnitude da transformada $|H(j\omega)|$ e a representamos no gráfico da Fig. 4:

```
def Sa(x):
    return np.sinc(x/np.pi)

omega_m = 7.5
tau = 2 * np.pi / omega_m

Xabs = abs(tau * Sa(omega * tau/2)) # Magnitude da transformada de x(t)

plt.plot(omega, Xabs))
plt.xlabel(rf'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel(r'$|X(j\omega)|$')
plt.grid(True)
plt.show()
```

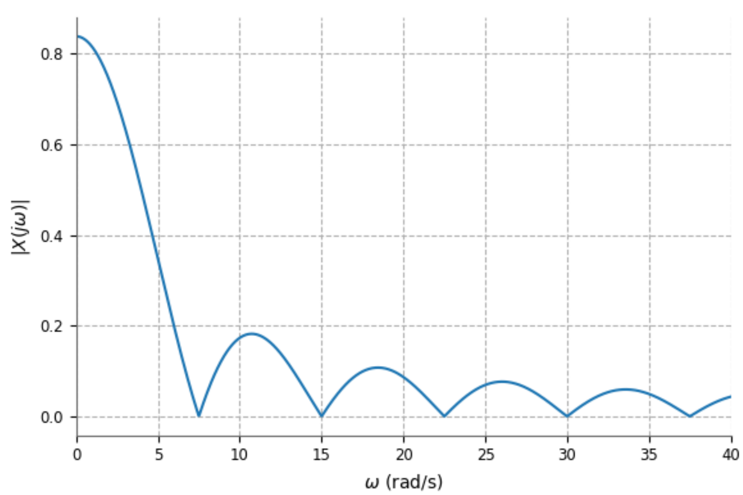

Figura 4: Magnitude da Transformada de Fourier do sinal $x(t)$.

No gráfico, nota-se que $|X(j\omega)| = 0$ apenas nas frequências múltiplas de ω_m, isto é, para $\omega = k \cdot \omega_m$, em que k é qualquer inteiro maior que 0. Isso ocorre pois, nestes valores:

$$Sa(\omega\tau/2) = Sa((k\omega_m) \cdot (2\pi/\omega_m)/2) = Sa(k\pi) = 0$$

e, por consequência, $X(jk\omega_m) = \tau \cdot 0 = 0$.

Item (e)

Para a análise inicial, geramos os módulos das respostas em frequência de cada um dos filtros passa-baixa: o filtro ideal $|H_{ideal}(j\omega)|$, o filtro de Chebyshev $|H_C(j\omega)|$ e o filtro de Butterworth $|H_B(j\omega)|$, para então plotar o gráfico (Fig. 5).

```
# Magnitude dos filtros
H_ideal = np.zeros_like(omega)
H_ideal[abs(omega) <= omega_c] = 1
H_C = filtroChebyshev(omega, omega_c, 4, 0.6)
H_B = filtroButterworth(omega, omega_c, 2)

plt.plot(omega, H_ideal, color='tab:red', label=r'$|H_{ideal}|$')
plt.plot(omega, H_C, color='tab:green', label=r'$|H_C|$')
plt.plot(omega, H_B, color='tab:blue', label=r'$|H_B|$')
plt.xlabel(rf'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel(r'$|H(j\omega)|$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

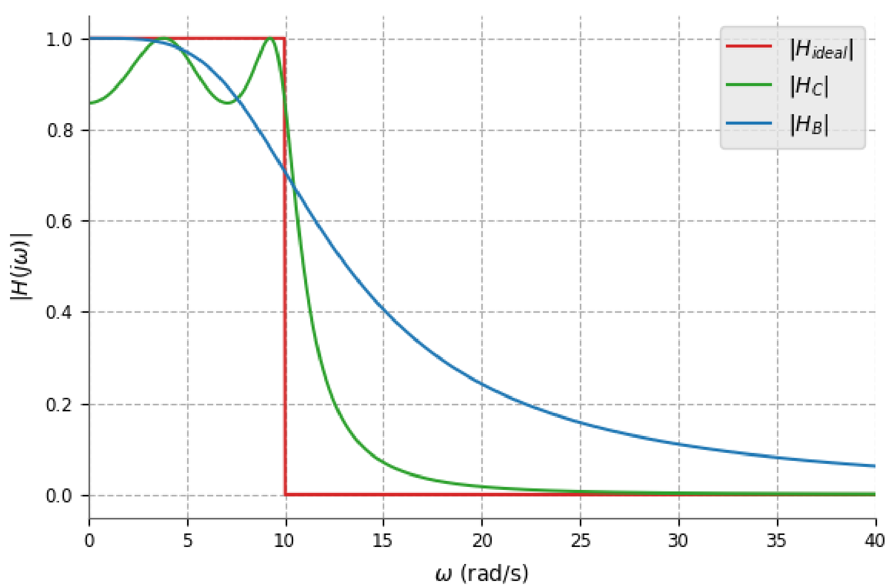

Figura 5: Magnitude das respostas em frequência do FPB ideal (em vermelho), dos filtros de Chebyshev (em verde) e de Butterworth (em azul).

Observe que o filtro de Chebyshev possui uma transição entre as faixas de passagem e de rejeição bem menor se comparado ao filtro de Butterworth, além de ter um declive maior próximo à frequência de corte ω_c. No entanto, o filtro de Butterworth apresenta uma melhor conservação na faixa de passagem se comparado ao filtro de Chebyshev, que tem caráter oscilatório neste intervalo, que se acentua na medida em que o valor de sua ordem (n) cresce.

Depois, calculamos os módulos dos espectros resultantes da filtragem de $X(j\omega)$ com cada um dos FPB calculados, também gerando seu respectivo gráfico (Fig. 6).

```
# Magnitude dos espectros observados na saida dos filtros
Y_ideal = Xabs * H_ideal
Y_C = Xabs * H_C
Y_B = Xabs * H_B

plt.plot(omega, Y_ideal, color='tab:red', label=r'$|Y_{ideal}|$')
plt.plot(omega, Y_C, color='tab:green', label=r'$|Y_C|$')
plt.plot(omega, Y_B, color='tab:blue', label=r'$|Y_B|$')
plt.axvline(x=omega_c, color='tab:purple', linestyle='--', label=w_c)
plt.xlabel(rf'$\omega$ (rad/s)')
plt.ylabel(r'$|Y(j\omega)|$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

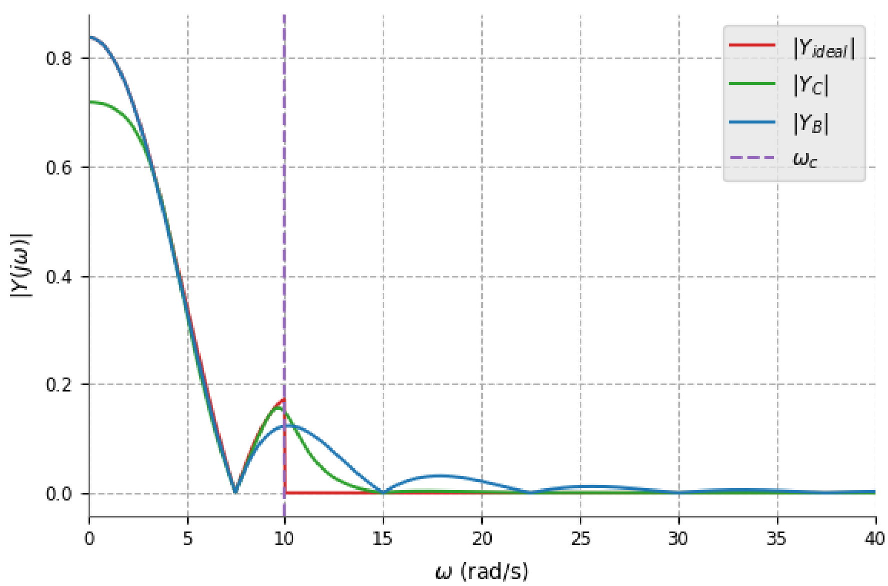

Figura 6: Magnitude dos espectros observados na saída de cada FPB, com suas respectivas cores.

Note que, como previsto na análise dos filtros, o filtro de Butterworth inicialmente conserva melhor o espectro original na faixa de passagem, visto que a curva praticamente coincide com a curva do FPB ideal. Porém, o filtro de Chebyshev consegue ser mais preciso após as primeiras frequências, até superando o filtro de Butterworth nas frequências próximas de ω_c, e consegue reduzir o espectro de saída na faixa de rejeição de forma mais eficiente.