EA614 - Análise de Sinais

Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 3 – Filtros Analógicos
Turma B – 2º semestre de 2024
Prof: Levy Boccato   Email: `lboccato@unicamp.br`

1 Introdução

Nesta atividade, estudaremos alguns filtros passa-baixas (FPBs) práticos, *i.e.*, não-ideais, tendo como objetivo analisar como eles se comportam nas bandas de passagem e de rejeição e, também, na transição entre estas duas regiões. Toda a análise será conduzida no domínio da frequência, considerando somente a magnitude da transformada de Fourier dos sinais e dos filtros.

2 Atividades

2.1 Filtro de Chebyshev

O primeiro filtro a ser estudado é o filtro de Chebyshev, cuja resposta em magnitude é dada por:

$$|H_C(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 T_n^2(\frac{\omega}{\omega_c})}}, \tag{1}$$

onde $T_n(\cdot)$ identifica o polinômio de Chebyshev do primeiro tipo e de ordem n, definido pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \end{aligned} \tag{2}$$

ou, equivalentemente, pelas seguintes expressões:

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = cos\left(n.\text{arccos}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right), \text{ para } 0 \leq \omega \leq \omega_c \tag{3}$$

e

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = cosh\left(n.\text{arccosh}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right), \text{ para } \omega > \omega_c \tag{4}$$

A construção de um filtro de Chebyshev envolve a definição de três parâmetros: (i) a frequência de corte ω_c, em rad/s; (ii) a ordem n do filtro; e (iii) ϵ, que controla o ganho na frequência de corte $\left(|H(j\omega_c)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}\right)$.

(a) Fixe $\omega_c = 10$ rad/s e $\epsilon = 0{,}2$ e varie a ordem do filtro desde $n = 1$ a $n = 5$ (n inteiro). Exiba, em um mesmo gráfico e com cores diferentes, o módulo da resposta em frequência obtida para cada um dos valores de n e comente as mudanças observadas. Neste item, utilize a rotina fornecida `calcula_coeficientes(w,wc,n)`, que recebe como argumentos um vetor de frequências `w`, a frequência de corte `wc` e a ordem do filtro `n`, e retorna o vetor `Tn` (do mesmo tamanho que `w`) com os valores do polinômio de Chebyshev necessários para determinar a resposta do filtro, segundo a Equação (1).

Sugestão: para implementar o filtro de Chebyshev, crie uma função que receba como parâmetros o vetor `w`, a frequência de corte `wc`, a ordem desejada `n` e o parâmetro ϵ, e que retorne um vetor `Habs` com o módulo da resposta em frequência do filtro. Desta maneira, será possível utilizar este mesmo trecho de código em outras partes desta atividade.

(b) Ainda com $\omega_c = 10$ rad/s, fixe a ordem do filtro em $n = 3$ e adote os seguintes valores para ϵ: 0,1; 0,3; 0,5; 0,7 e 0,9. Plote em um mesmo gráfico, com cores diferentes, a resposta em frequência obtida para cada um dos valores de ϵ e comente o comportamento observado.

2.2 Filtro de Butterworth

O segundo filtro estudado é o filtro de Butterworth, que possui a seguinte magnitude de resposta em frequência:

$$|H_B(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}. \tag{5}$$

Para o projeto deste tipo de filtro, devemos especificar dois parâmetros: (i) a frequência de corte ω_c, em rad/s, e (ii) a ordem n do filtro.

(c) Com $\omega_c = 10$ rad/s, considere $n = 1, 2, 3, 4$ e 5. Plote em um mesmo gráfico, com cores diferentes, a resposta em magnitude obtida para cada um dos valores de n e comente as mudanças observadas. Novamente, crie uma função que receba como parâmetros ω_c e n e retorne um vetor com os valores de $|H_B(j\omega)|$.

2.3 Filtragem de um pulso retangular

Considere o sinal $x(t)$ correspondente ao pulso retangular, no domínio do tempo, cuja expressão é dada por:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

e cuja forma de onda é mostrada na Figura 1.

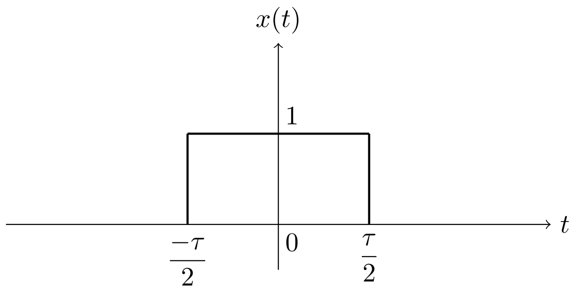

Figura 1: Pulso retangular.

(d) Calcule a transformada de Fourier $X(j\omega)$ do sinal $x(t)$, considerando $\tau = 2\pi/\omega_m$. Apresente, então, o gráfico de $|X(j\omega)|$, com o eixo das frequências variando de 0 a 40 rad/s, com $\omega_m = 7{,}5$ rad/s e comente acerca dos pontos em que $|X(j\omega)| = 0$.

(e) Considere, por fim, os três FPBs especificados a seguir:

- FPB ideal com frequência de corte $\omega_c = 10$ rad/s.

$$H_{\text{ideal}}(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

- Filtro de Chebyshev com $\epsilon = 0{,}6$, $n = 4$ e $\omega_c = 10$ rad/s.
- Filtro de Butterworth com $n = 2$ e $\omega_c = 10$ rad/s.

Realize, então, a filtragem do sinal $x(t) \Longleftrightarrow X(j\omega)$ com cada um destes FPBs. Para facilitar a análise, plote em um **primeiro** gráfico, com cores distintas, as magnitudes das respostas em frequência dos três filtros ($|H_{\text{ideal}}(j\omega)|$, $|H_C(j\omega)|$ e $|H_B(j\omega)|$). Em um **segundo** gráfico, plote o módulo do espectro observado na saída dos filtros (ou seja, $|Y_{\text{ideal}}(j\omega)|$, $|Y_C(j\omega)|$ e $|Y_B(j\omega)|$), novamente com cores distintas.

Comente as semelhanças e diferenças entre as respostas em frequência dos filtros e como isto se reflete no espectro das saídas obtidas, para frequências inferiores e superiores à frequência de corte.