Estudo do Erro do Método LU e Refinamento Iterativo

Letícia do Rocio Oliveira
Bacharelado em Matemática Industrial- UFPR
leticia.rocio5@gmail.com

Prof. Dr. Abel Soares Siqueira (Orientador)
Departamento de Matemática - UFPR
abel.s.siqueira@gmail.com

Palavras-chave: Decomposição LU, Refinamento Iterativo, Sistemas Lineares.

Resumo:

A fatoração LU com pivoteamento parcial consiste em transformar uma matriz A com linhas permutadas de acordo com alguma regra, em um produto de matrizes LU, onde L é uma matriz *Triangular Inferior* com a diagonal unitária e U é uma matriz *Triangular Superior*. A permutação da matriz A pode ser descrita definindo uma matriz P pela permutação das linhas da matriz identidade usando as permutações que seriam feitas em A. O resultado é a relação $PA = LU$.

Dado o sistema linear $Ax = b$, multiplicamos por P ao lado esquerdo das duas equações, obtendo

$$PA = Pb.$$

Agora, usando a fatoração LU de A, temos

$$LUx = Pb.$$

Fazendo $y = Ux$, a solução do sistema linear é obtida resolvendo os dois sistemas triangulares

$$\begin{cases} Ly &= Pb, \\ Ux &= y. \end{cases}$$

A resolução de sistemas triangulares é consideravelmente barata, e uma vantagem de fazer uma fatoração matricial é sua reutilização em múltiplos sistemas lineares.

Uma maneira de conseguir uma solução de alta precisão é fazer a fatoração LU em uma precisão computacional menor e utilizar a estratégia de *Refinamento iterativo*. Esta estratégia consiste de calcular o vetor resíduo $r = b - Ax$ com aritmética de ponto flutuante de precisão estendida e resolver o sistema $A\Delta = r$ usando a fatoração LU já calculada. O valor $x + \Delta$ será uma solução melhor para o sistema original, mesmo usando uma fatoração em precisão mais baixa. A estratégia é repetida até que o resíduo fique suficientemente pequeno. Algoritmo 1 descreve o método.

Algorithm 1 Refinamento iterativo

Dado uma tolerância $\epsilon > 0$;
Encontre uma aproximação x para $Ax = b$;
Calcule o resíduo $r = b - Ax$;
while $\|r\| \geq \epsilon$ **do**
    Calcule Δ, solução de $A\Delta = r$;
    Atualize $x \leftarrow x + \Delta$;
    Calcule o resíduo $r = b - Ax$.
end while

Mostraremos a implementação dessa estratégia em Julia e sua comparação com a estratégia mais simples de calcular a fatoração e a solução diretamente na precisão desejada.

Referências:

BURDEN, R. L. e FAIRES, J. D. **Análise Numérica**, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO (UFOP). José Álvaro Tadeu Ferreira. **Notas de aulas Cálculo Numérico** em: <http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/notas_de_aulas/notas_sistemas.pdf> Acesso: 08 nov. 2018.

RUGGIERO, M. A. G. e ROCHA LOPES, V. L. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais, Rio de Janeiro: Makron Books, 1996.