Estudo de Erro do Método LU e Refinamento Iterativo

Letícia do Rocio Oliveira
UFPR - CM103 - 2018s2
le_oliv@live.com

PALAVRAS CHAVE. Decomposição LU, Refinamento, Sistemas Lineares.

1. Introdução

Suponha que $A\overline{x} = b$ foi resolvido via Pivoteamento Parcial e temos $PA = LU$. Em decorrência da aritmética de ponto flutuante, pode ser necessário melhorar a precisão da solução $\overline{x}$. Para chegar a um x mais preciso, é necessário calcular o vetor resíduo $r = b - A\overline{x}$ com aritmética de ponto flutuante de precisão estendida e resolver dois novos sistemas, obtendo assim um vetor de correção Δ que é somado à solução $\overline{x}$ e resulta em uma solução mais precisa para o sistema. Este processo pode ser repetido até que a solução tenha precisão julgada suficiente. Tal processo é chamado de *Refinamento Iterativo*.

2. Fatoração LU

Esta técnica consiste em fatorar uma matriz A em um produto de matrizes LU, onde L é uma matriz *Triangular Inferior* com a diagonal unitária e U é uma matriz *Triangular Superior*.
Dados o sistema linear $Ax = b$ e a fatoração LU de A, temos que:

$$Ax = b \iff (LU)x = b$$

Fazendo $y = Ux$, a solução do sistema linear é obtida resolvendo os dois sistemas triangulares a seguir:

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y \end{aligned}$$

2.1. Fatoração LU com Pivoteamento

Dada uma matriz P, identidade de ordem n, onde sus linhas (ou colunas) sofreram permutação, chamamos P de *Matriz de Permutação*.

Ao multiplicar uma matriz A de ordem n por P, obtemos a matriz PA, que nada mais é que a matriz A com suas linhas permutadas e esta permutação é a mesma realizada nas linhas da matriz identidade para obter P.

Seja $A' = PA$, L e U os fatores da matriz A' e $b' = Pb$, então o sistema linear $A'x = b$ é equivalente a $Ax = b$ e como $A' = LU$, temos:

$$A'x = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$$

Para obter a solução do sistema linear original, resolvemos os seguintes sistemas lineares:

$$\begin{aligned} Ly &= Pb \\ Ux &= y \end{aligned}$$

As permutações de linhas realizadas durante a fatoração podem ser representadas por um vetor, denotado por p, e seus elementos são os índices das linhas da matriz de permutação P.

2.2. Análise de Erro

Definição 1. Definimos como *vetor resíduo* o vetor r resultante da operação $b - Ax_0$, onde x_0 é a solução aproximada do sistema $Ax = b$.

Teorema 1. Suponha que $\overline{x}$ seja uma aproximação para a solução de $Ax = b$, que A seja uma matriz não-singular e que r seja o vetor resíduo para $\overline{x}$. Então, para qualquer norma natural

$$\|x - \overline{x}\| \leq \|r\| \cdot \|A^{-1}\|$$

e se $x \neq 0$ e $b \neq 0$,

$$\frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \tag{1}$$

Em geral, o erro relativo (1) é de maior interesse, e este é limitado pelo produto $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ pelo resíduo relativo desta aproximação, $\dfrac{\|r\|}{\|b\|}$.

Definição 2. O *Número de Condicionamento* da matriz não singular A em relação a uma norma $\|\cdot\|$ é:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Para uma matriz não-singular A e uma norma natural $\|\cdot\|$,

$$1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A)$$

Dizemos que uma matriz A é *bem condicionada* se $K(A)$ for próximo de 1, enquanto que, a matriz é dita *mal condicionada* quando $K(A)$ é significativamente maior que 1.

Este *condicionamento* está relacionado à segurança relativa de que o vetor resíduo será pequeno e acarretará em uma solução aproximada correspondente mais precisa.

Como vimos, o número de condicionamento de uma matriz depende das normas da matriz e de sua inversa. O cálculo da inversa pode gerar erros de arredondamento, dependendo da precisão com a qual fazemos este cálculo e do método a ser utilizado.

Se utilizamos t algarismos de precisão, o número de condicionamento aproximado da matriz A é o produto da norma da matriz pela norma da aproximação da inversa de A, obtida com t algarismos de precisão.

A aproximação para o número $K(A)$ com precisão de t algarismos decorre do sistema linear

$$Ay = r$$

A solução aproximada deste sistema satisfaz

$$\overline{y} \approx A^{-1}r = A^{-1}(b - Ax) = A^{-1}b - A^{-1}Ax = x - \overline{x}$$

e então

$$x \approx \overline{x} + \overline{y}$$

3. Refinamento Iterativo

Como visto em [1], ao utilizarmos a estimativa $\overline{y} \approx x - \overline{x}$, onde $\overline{y}$ é a solução aproximado sistema $Ay = r$. Podemos considerar $\overline{y} + \overline{x}$ uma aproximação mais precisa da solução de $Ax = b$ do que a aproximação inicial $\overline{x}$. Tal método é denominado *Refinamento iterativo*, onde são realizadas iterações no sistema $Ay = r$.

Se este processo de refinamento é aplicado utilizando t algarismos de precisão e se $K_\infty(A)$ 10^q, após k iterações do refinamento, a solução tem $min(d, k(d - q))$ digitos corretos.

Caso o sistema seja bem condicionado, com poucas iterações a solução obtida é precisa. Para um sistema mal condicionado, existe a possibilidade de melhora significativa da solução, a menos que $K_\infty(A) > 10^t$; neste caso, deve-se adotar uma precisão maior para realizar os cálculos.

3.1. Processo de refinamento

Roteiro para processo de refinamento baseado em [2]

- Resolver $Ax = b$ pelo método LU, obtendo uma solução x_0 aproximada;
- Δ_0 é um vetor de correção a ser aplicado em x_0 para obter uma solução x_1 mais precisa;
- vetor r_0 é o resíduo entre x_0 e a solução exata, e é obtido realizando a operação $b - Ax_0$;
- Dadas as matrizes L e U obtidas pela decomposição LU e o vetor resíduo r_0, devemos resolver os sistemas

$$\begin{aligned} Ly &= r_0 \\ U\Delta_0 &= y \end{aligned}$$

- Então, $x_1 = x_0 + \Delta_0$ é uma solução para o sistema linear $Ax = b$ mais precisa que x_0;
- Este procedimento pode ser aplicado iterativamente, até que o erro relativo da solução seja considerado pequeno o bastante.

3.2. Código Utilizado

O código utilizado para realizar o refinamento da solução de um sistema linear está descrito a seguir, considerando que as matrizes L e U e o vetor p já foram obtidos por uma função que faz a Decomposição LU com Pivoteamento.

```
function declurefine(A, b)
    p, L, U = declupivot(copy(A))
    c = b[p]
    y = L \ c
    x = U \ y
    println(p)
    println(x)
    println(A*x - b)
    for i = 0:length(b)
        xi = BigFloat.(x)
        ri = b - A * xi
        yi = L \ ri[p]
        i = U \ yi
        x = xi + di
        ei = BigFloat(norm(x - xi))
        println("r$i = $(norm(ri))")
        println("x = $x")
        println("Erro = $ei")
        plot!(ei, c=:black, leg=:topright)
        title!("n = $n")
    end
end
```

A função foi implementada em Julia, utilizando o pacote Plots.

4. Experimentos Numéricos

Os exmplos a seguir foram retirados de [1] e [3]:

Exemplo 1: Dado o sistema a seguir,

$$\begin{bmatrix} 4.0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0 \\ 8 \\ -7 \\ -40 \end{bmatrix}$$

a solução exata do sistema é $x = \begin{bmatrix} 2.0 & -3.0 & 0.0 & 5.0 \end{bmatrix}^t$

O gráfico a seguir mostra a ordem do erro pelo número de iterações realizadas no processo de refinamento.

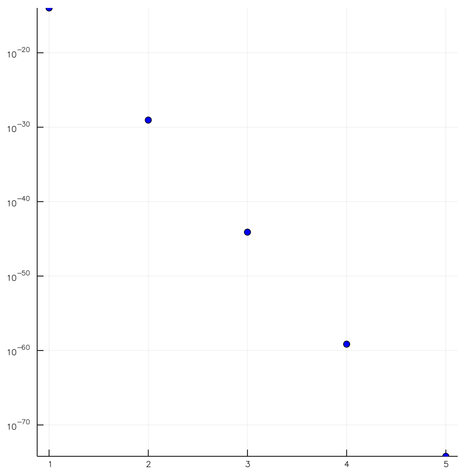

Fig. 1: Exemplo 1 - Erro

Exemplo 2: Dado o sistema a seguir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 & -3 & -1 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 9 & -3 \\ 9 & 3 & 5 & 1 & 0 & 5 & 6 & -5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & -5 & 7 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 0 & 3 & 9 & 9 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 0 & 4 & 3 & 7 & -4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 6 & 8 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 0 & -7 & 7 & -7 & 6 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 8 & 3 & -5 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86 \\ 45 \\ 52.5 \\ 108 \\ 66.5 \\ 90.5 \\ 139 \\ 61 \\ -43.5 \\ 31 \end{bmatrix}$$

temos que a solução exata é $x = \begin{bmatrix} 3.0 & -4.5 & 7.0 & 8.0 & 3.5 & 2.0 & 4.0 & -3.5 & 2.0 & 1.5 \end{bmatrix}^t$

O gráfico a seguir mostra a ordem do erro pelo número de iterações realizadas no processo de refinamento.

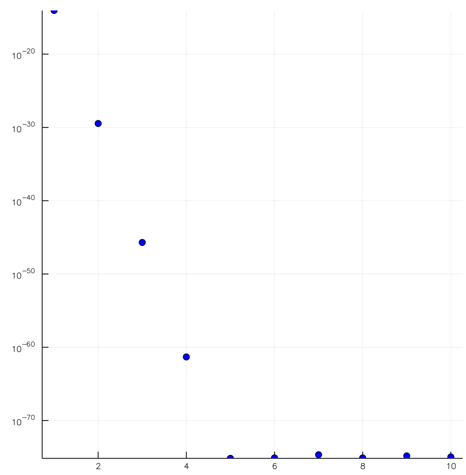

Fig. 2: Exemplo 2 - Erro

5. Conclusão

Como visto no referencial teórico e nos testes numéricos, o refinamento iterativo do método LU apresenta resultados satisfatórios para o erro quando aplicado em aritmética de alta precisão.

Em ambos os casos apresentados, a solução apresenta precisão da ordem de 10^{-60} com quatro iterações do método. No segundo exemplo, a partir da quinta iteração não há melhoria do erro. Já no primeiro, não foi possível observar o erro a partir da quinta iteração, devido à precisão utilizada.

Referências

[1] Burden, R. L. e Faires, J. D. (2013). *Análise Numérica*. Cengage Learning, São Paulo.

[2] Ferreira, J. T. (2013). Notas de aula cálculo numérico. `http://www.decom.ufop.br/bcc760/material_de_apoio/notas_de_aulas/notas_sistemas.pdf`. Acessado: 2018-11-08.

[3] Ruggiero, M. A. G. e da Rocha Lopes, V. L. (1996). *Cálculo Numérico : Aspectos Teóricos e Computacionais*. Makron Books, Rio de Janeiro.