CIÊNCIAS AMBIENTAIS / BIOLÓGICAS / DA NATUREZA

(BIO)ESTATÍSTICA

Prof^a. Letícia Raposo profleticiaraposo@gmail.com

OBJETIVO DA AULA

- Aprender as diferentes técnicas de amostragem;
- Aprender a generalizar resultados de uma amostra para a população onde ela foi extraída;
- Aprender a testar hipóteses com base em amostras.



População (universo do estudo)

Parâmetros: $\pi=?~\mu=?$



Estimação de parâmetros

Amostra (Dados observados)

Generalizamos resultados da parte (amostra) para o todo (população)

REFORÇANDO ALGUMAS DEFINIÇÕES

- População: conjunto de elementos para os quais desejamos que as conclusões da pesquisa sejam válidas.
- Parâmetro: medida que descreve certa característica dos elementos da população.
- Estatística: alguma medida associada com os dados de uma amostra a ser extraída da população. Quando usada com o objetivo de avaliar (estimar) o valor de algum parâmetro, também é chamada de estimador.
- *Erro amostral*: diferença entre uma estatística e o parâmetro que se quer estimar.
- Estimativa: valor da estatística (estimador), calculado com base na amostra efetivamente observada

EXEMPLO



Para estudar o efeito da merenda escolar, planeja-se acompanhar uma amostra de n=100 crianças. Dentre diversas características de interesse, pretende-se avaliar o parâmetro:

 μ = ganho médio de peso durante o primeiro ano letivo (na população de crianças da rede municipal de ensino).

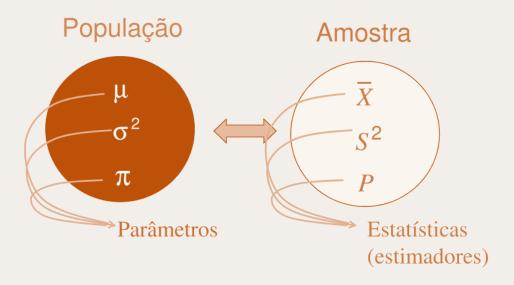
Da amostra de crianças em estudo, pode-se calcular a estatística:

 $\bar{X}=$ ganho médio de peso, durante o primeiro ano letivo, das 100 crianças em observação.

A estatística \bar{X} pode ser usada como um estimador do parâmetro μ , mas devemos ter $\bar{X} \neq \mu$ devido ao erro amostral.

Como determinar a margem de erro que podemos estar cometendo?

- Quando estivermos estudando a <u>incidência</u> de algum atributo numa certa população, geralmente o interesse está na <u>proporção</u>, ou <u>porcentagem</u> de elementos com o atributo.
- Quando estamos pesquisando alguma <u>característica</u> <u>quantitativa</u> é comum o interesse em estimar uma <u>média</u>.



Parâmetros: em geral, números <u>desconhecidos</u> (somente serão conhecidos se for feito um censo - pesquisa de toda a população).

Estatísticas: <u>variáveis aleatórias</u>, pois seus valores dependem dos elementos a serem sorteados na amostragem.

Ao observar efetivamente uma amostra, a estatística se identifica com um valor (<u>resultado do cálculo</u>), chamado de <u>estimativa</u>.

Se na amostra de n=100 crianças encontrarmos um ganho de 180 kg, então temos a seguinte estimativa para o parâmetro μ :

$$\bar{X} = \frac{180}{100} = 1,8 \, kg/criança$$

- Não devemos esperar que este valor coincida com o parâmetro μ , devido ao que chamamos de <u>erro amostral</u>.
- Objetivo: estimar um limite superior provável para o erro amostral. Esse valor será a base para avaliarmos a precisão de nossa estimativa.

Dizemos que uma <u>estimativa é tão mais precisa quanto menor for o limite superior</u> <u>provável</u> de seu erro amostral.

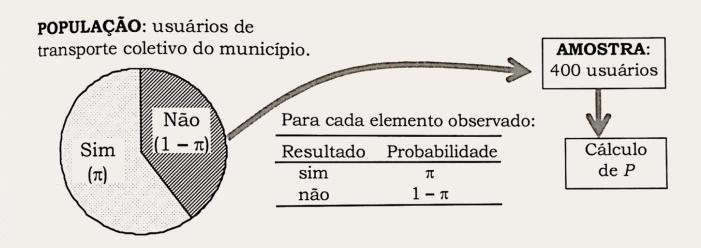
DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL

O valor de P (proporção de favoráveis numa amostra de n=400 usuários do transporte coletivo) vai ser um valor próximo da verdadeira proporção π , a qual se refere a <u>todos</u> os usuários do município?

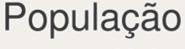
- <u>Diferentes valores de P podem ser obtidos por diferentes</u> <u>amostras de n elementos</u>, extraídas da população de interesse, sob as mesmas condições.
- Para <u>cada amostra observada, temos um valor para P</u>. A distribuição do conjunto de <u>todos os possíveis valores de P</u>, correspondentes às possíveis amostras de tamanho n, forma a chamada <u>distribuição amostral de P</u>.

DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL

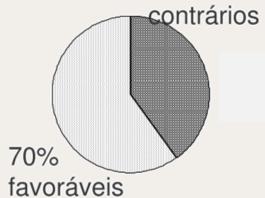
A distribuição amostral de uma estatística é a distribuição dos possíveis valores dessa estatística, se examinássemos todas as possíveis amostras de tamanho n, extraídas aleatoriamente de uma população.



UMA SIMULAÇÃO



30%



Amostra aleatória com n=400 indivíduos

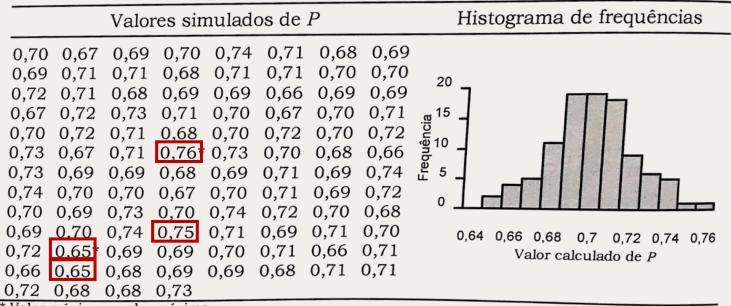


Calcula-se P

Simulou-se 100 amostras desta forma.

Ver link: https://istats.shinyapps.io/SampDist_Prop/

UMA SIMULAÇÃO



Valor máximo e valor mínimo.

O valor mais distante foi 0,76, apontando um erro amostral igual a 0,76 - 0,70 = 0,06.

Observamos que 96 valores de P, dentre os 100 simulados, resultaram em erros amostrais inferiores a 0,05. Assim, podemos afirmar que uma estimativa construída sob um modelo análogo ao da simulação deverá ter um erro amostral inferior a 0,05, com nível de confiança em torno de 96/100 = 96%.

UMA SIMULAÇÃO



Na prática, examinamos <u>apenas uma amostra</u>, resultando em um <u>único</u> <u>valor para a estatística</u> - uma estimativa.

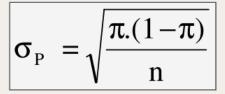
Porém, o conhecimento da <u>distribuição amostral da estatística</u> permite avaliarmos um limite superior para o erro amostral (<u>margem de erro</u>), com certo <u>nível de confiança</u>.

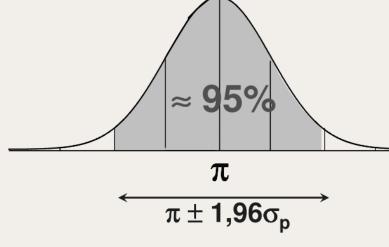
USANDO A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

- Estimação de uma proporção: experimento tipicamente binomial, com parâmetros n e π .
- Se n for grande (n>30, na maioria dos casos), a distribuição binomial se aproxima de uma distribuição normal.

Distribuição Amostral de P







O desvio padrão da distribuição amostral de uma estatística é comumente chamado de erro padrão da estatística.

^{*}Parâmetros da distribuição amostral de P e não da variável aleatória com distribuição binomial.

Suposições:

- Amostra aleatória simples da população de interesse;
- <u>Tamanho</u> da amostra é <u>razoavelmente grande</u>;
- Atributo em observação <u>não seja muito raro ou quase</u> <u>certo</u>, de tal forma que seja válida a aproximação da distribuição binomial para a normal;
- População de onde foi extraída a amostra <u>seja muito</u> grande, não necessitando considerar o seu tamanho nos cálculos.

Com as suposições anteriores, o erro padrão de *P* pode ser estimado com os dados da própria amostra, usando a expressão:

$$S_p = \sqrt{\frac{P \cdot (1 - P)}{n}}$$

em que P é a proporção do atributo, na amostra; e n é o tamanho da amostra.

Nível de Confiança de 95%

Intervalo de 95% de confiança para π

$$P-(1,96)\cdot S_p$$
 $P+(1,96)\cdot S_p$

E = margem de erro para 95% de confiança

https://istats.shinyapps.io/ExploreCoverage/

Suponha que, na amostra de n=400 pessoas, encontramos 60% de favoráveis. Temos, então, P=0,60~(ou~60%), com erro padrão:

$$S_p = \sqrt{\frac{P \cdot (1 - P)}{n}} = \sqrt{\frac{(0,60) \cdot (0,40)}{400}} = 0,0245$$

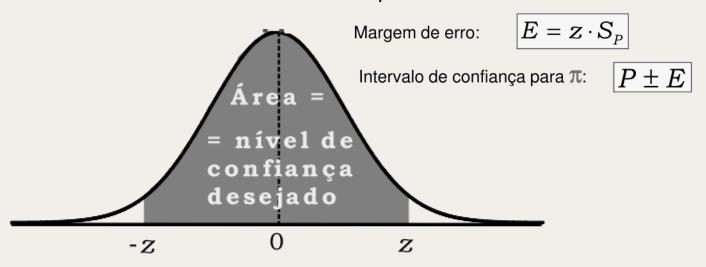
Usando nível de confiança de 95%, temos um limite superior para o erro amostral de:

$$E = (1,96) \cdot S_P = (1,96) \cdot (0,0245) = 0,048 \ (ou\ 4,8\%)$$

 $60,0\% \pm 4,8\% = [55,2\% - 64,8\%]$

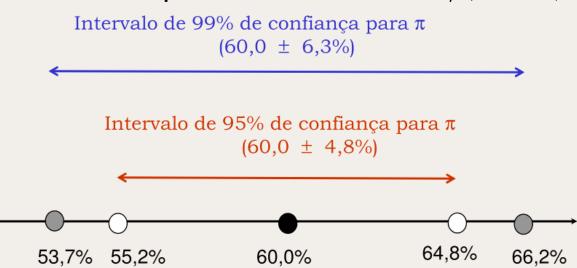
Podemos dizer, com nível de confiança de 95%, que o intervalo $60.0\% \pm 4.8\%$ contém o parâmetro π (proporção de favoráveis em toda população).

Outros Níveis de Confiança



Área	0,800	0,900	0,950	0,980	0,990	0.995	0,998
z	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090

Resultados do exemplo anterior com dois níveis de confiança (99% e 95%)



Para um dado nível de confiança, dizemos que uma <u>estimativa é tão mais precisa</u> quanto <u>menor for a amplitude de seu intervalo de confiança</u>.

A maneira natural de aumentarmos a precisão de uma estimativa é através do aumento do tamanho n da amostra (Ver fórmula do IC).

ESTIMAÇÃO DE UMA MÉDIA

- Quando a variável em estudo é <u>quantitativa</u>, normalmente se tem interesse no parâmetro μ (média).
- Tendo uma AAS da população de interesse, podemos ter uma estimativa de μ através do cálculo da média dos valores da amostra:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

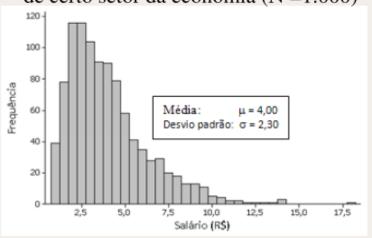
• Como o valor de \bar{X} vai depender da amostra selecionada, podemos falar em erro padrão e em distribuição amostral de \bar{X} . O erro padrão de \bar{X} pode ser estimado com os dados da amostra por:

$$S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

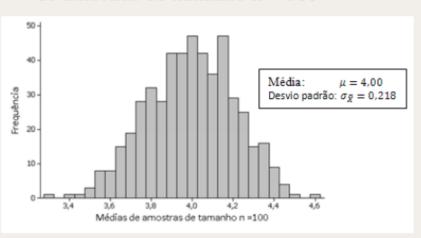
ESTIMAÇÃO DE UMA MÉDIA

Para amostras aleatórias grandes $(n \ge 30)$, a distribuição amostral de \bar{X} é aproximadamente normal.

População dos salários dos empregados de certo setor da economia (N =1.000)



Distribuição de frequências de médias de amostras de tamanho n = 100



ESTIMAÇÃO DE UMA MÉDIA

Amostras Grandes

Se a amostra for grande (n > 30):

$$E = z \cdot S_{\overline{X}}$$

➤ onde z vem da distribuição normal padrão

Amostras Pequenas

Se a amostra for pequena (n < 30):

$$|E = t \cdot S_{\overline{X}}|$$

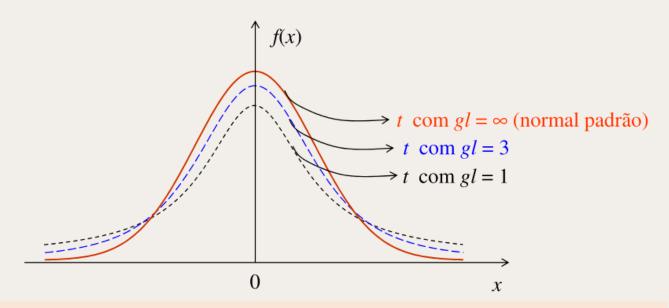
 \triangleright onde t vem da distribuição t com gl = n - 1

<u>Distribuição t de Student</u>

NOTA: Para n > 30, $t \cong z$, assim, pode-se sempre usar t.

AMOSTRAS PEQUENAS

A distribuição t de Student



Tem forma <u>parecida com a normal padrão</u>, sendo um pouco <u>mais dispersa</u>.

Sua dispersão é função de um parâmetro denominado <u>graus de liberdade, gl</u>. No problema de estimação de uma média, tem-se: **gl= n - 1**.

EXEMPLO

- Félix é especialista de controle de qualidade em uma fábrica que pinta peças de carro. Seu processo de pintura consiste em uma primeira demão, revestimento de cor e revestimento transparente. Para uma certa peça, estas camadas têm juntas uma espessura desejada de 150 micrômetros. Felix mediu a espessura de 50 pontos selecionados aleatoriamente em uma das peças para ver se ela estava pintada corretamente. A sua amostra teve uma espessura média de 148 micrômetros e um desvio-padrão de 3,3 micrômetros.
- Um intervalo de confiança de 95% para a espessura média com base nos seus dados é (147,1; 148,9).
- Com base nesse intervalo, é plausível que a espessura média nessa parte corresponda ao valor desejado?

RELEMBRANDO...

- 1. Vimos o que é uma distribuição amostral e como calcular o intervalo de confiança (IC) para um parâmetro.
- 2. Vimos também que para amostras aleatórias com tamanhos grandes $(n \ge 30)$, a distribuição amostral de \overline{X} é aproximadamente normal.

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

- À medida que o <u>tamanho amostral aumenta</u>, a forma das distribuições se aproxima cada vez mais de uma <u>distribuição normal</u>.
- Além disso, à medida que o tamanho amostral aumenta, as distribuições da média amostral tendem para uma distribuição normal com a mesma média da população e desvio-padrão igual à da população dividida pela raiz quadrada do tamanho da amostra.

Esse fato é mostrado pelo **Teorema do Limite Central**, que é um dos principais teoremas da Estatística.

http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/



INTRODUÇÃO



Muitas vezes o pesquisador tem <u>alguma ideia</u> sobre o comportamento de uma <u>variável</u>, ou de uma possível <u>associação entre variáveis</u>.



Neste caso, o planejamento da pesquisa deve ser de tal forma que permita, com os dados amostrais, <u>testar a veracidade de suas ideias sobre a população em estudo</u>.



Adotamos que a <u>população seja o mundo real</u> e as <u>ideias</u> <u>sejam as hipóteses</u> de pesquisa, que poderão ser testadas por técnicas estatísticas denominadas <u>testes de hipóteses</u> <u>ou testes de significância</u>.

INTRODUÇÃO

População / Universo de estudo

Hipóteses que se quer colocar à prova

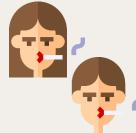
Amostragem

Decisão do teste estatístico

Amostra

Dados que servirão de base para aceitar ou rejeitar uma hipótese

EXEMPLOS



■ Na problemática de verificar se existe relação entre tabagismo e sexo, em certa região, pode-se lançar a seguinte hipótese: Na região em estudo, a propensão de fumar nos homens é diferente da que ocorre nas mulheres.

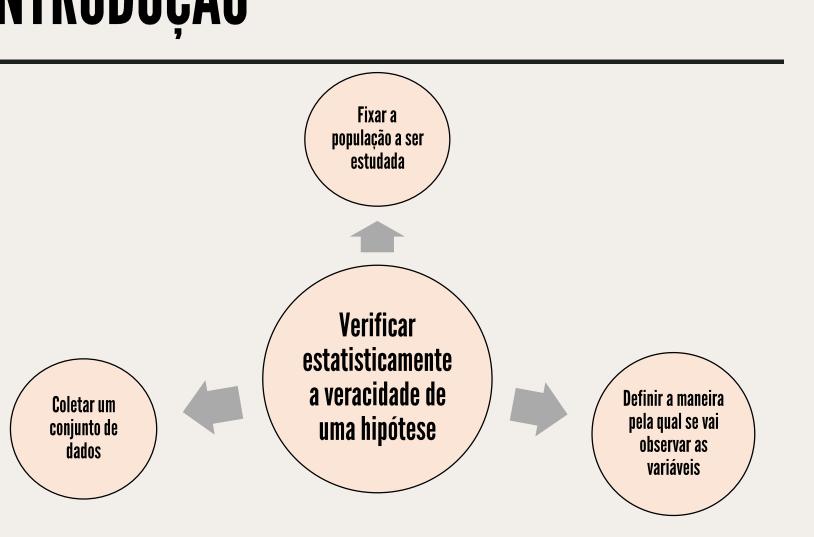


Para se verificar o <u>efeito de uma propaganda nas vendas</u> <u>de certo produto</u>, tem-se interesse em verificar a veracidade da hipótese: a propaganda produz um efeito positivo nas vendas.



Na condução de uma política educacional, pode-se ter interesse em <u>comparar dois métodos de ensino</u>. Hipótese: os métodos de ensino tendem a produzir resultados diferentes de aprendizagem.

INTRODUÇÃO



INTRODUÇÃO



A aplicação de um teste estatístico serve para <u>verificar se os</u> dados fornecem evidência suficiente para que se possa aceitar como verdadeira a hipótese de pesquisa, precavendo-se, com certa segurança, de que as diferenças observadas nos dados não são meramente casuais.

AS HIPÓTESES DE UM TESTE ESTATÍSTICO

- Hipótese nula, HO: descrita em termos de parâmetros populacionais e é, basicamente, uma negação daquilo que o pesquisador deseja provar.
- Sob essa hipótese, as diferenças observadas nos dados são consideradas casuais.
- Podemos ter as seguintes hipóteses nulas para os problemas descritos anteriormente.
 - a) H0: A <u>proporção</u> de homens fumantes e igual à proporção de mulheres fumantes, na população em estudo.
 - b) H0: Em <u>média</u>, as vendas não aumentam com a introdução da propaganda.
 - c) H0: Em <u>média</u>, os dois métodos de ensino produzem os mesmos resultados.

AS HIPÓTESES DE UM TESTE ESTATÍSTICO

- Quando os dados mostrarem evidência suficiente de que a hipótese nula, HO, é falsa, o teste a rejeita; aceitando em seu lugar a chamada <u>Hipótese Alternativa</u>, HA ou H1.
- A <u>hipótese alternativa</u> é, em geral, <u>aquilo que o pesquisador</u> <u>quer provar</u>, ou seja, a própria hipótese de pesquisa, considerando a forma de planejamento da pesquisa.
- As hipóteses alternativas:
 - a) H1: A <u>proporção</u> de homens fumantes é diferente da proporção de mulheres fumantes, na população em estudo.
 - b) H1: Em <u>média,</u> as vendas aumentam com a introdução da propaganda.
 - c) H1: Em <u>média,</u> os dois métodos de ensino produzem resultados diferentes.

AS HIPÓTESES DE UM TESTE ESTATÍSTICO

É comum <u>H0 (hipótese nula)</u> ser apresentada em termos de <u>igualdade</u> de parâmetros populacionais, enquanto <u>H1</u> (hipótese alternativa) em forma de <u>desigualdade</u> (maior, menor ou diferente).

H0: A <u>proporção</u> de homens fumantes e igual à proporção de mulheres fumantes, na população em estudo. $\pi_h=\pi_m$ H1: A proporção de homens fumantes é diferente da proporção de mulheres fumantes, na população em estudo. $\pi_h\neq\pi_m$

HO: Em $\underline{\text{m\'edia}}$, as vendas não aumentam com a introdução da propaganda. $\mu_{c}=\mu_{s}$

H1: Em média, as vendas aumentam com a introdução da propaganda. $\mu_{\scriptscriptstyle C}>\mu_{\scriptscriptstyle S}$

HO: Em <u>média</u>, os dois métodos de ensino produzem os mesmos resultados. $\mu_a=\mu_b$

H1: Em média, os dois métodos de ensino produzem resultados diferentes. $\mu_a
eq \mu_b$

AS HIPÓTESES DE UM TESTE ESTATÍSTICO

Suponha, por exemplo, que se suspeite que uma certa moeda, usada num jogo de azar, é viciada, isto é, <u>há uma tendência de ocorrerem mais caras do que coroas, ou mais coroas do que caras.</u> Entendendo-se como moeda honesta àquela que tem a mesma probabilidade de dar cara e coroa, podemos formular as hipóteses da seguinte maneira:

H0: a moeda é honesta e H1: a moeda é viciada

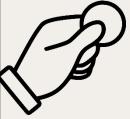
Se chamarmos π à probabilidade de ocorrer cara num lançamento dessa moeda, podemos escrever:

 $H0: \pi = 0.5 \ e \ H1: \pi \neq 0.5$



CONCEITOS BÁSICOS

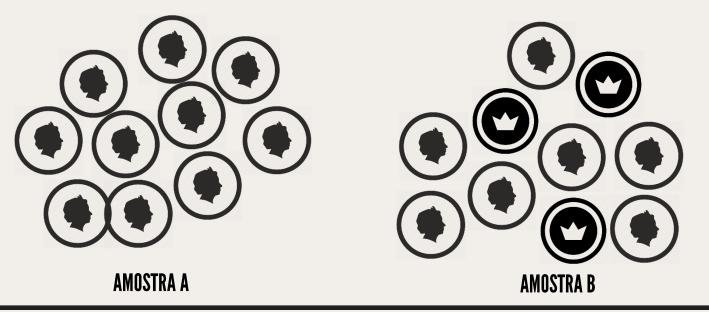
- Suponhamos, <u>inicialmente, H0 como verdadeira</u>.
 - H0 somente vai ser <u>rejeitada em favor de H1 se houver evidência</u> <u>suficiente que a contradiga</u>.
- <u>n lançamentos imparciais da moeda</u> → cada lançamento: cara ou coroa.
- Estatística Y = número total de caras nos n lançamentos.
- A estatística Y poderá ser usada na definição de um critério de decisão: não rejeitar HO ou rejeitar HO em favor de H1.
 - Neste contexto, a estatística <u>Y é chamada de estatística do teste</u>.



CONCEITOS BÁSICOS

Sejam n = 10 lançamentos e as duas seguintes amostras:

- AMOSTRA A Suponha que nos 10 lançamentos observamos *Y* = 10 caras. Podemos rejeitar H0 em favor de H1?
- AMOSTRA B e se tivéssemos observado Y = 7 caras?

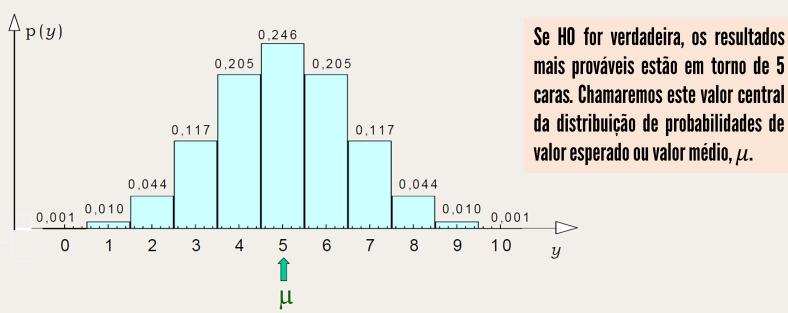


CONCEITOS BÁSICOS

- Para realizar o teste estatístico, é necessário conhecer a probabilidade de ocorrerem $Y = 10 \ caras$ (amostra A), ou $Y = 7 \ caras$ (amostra B), em 10 lançamentos de uma moeda honesta.
- Precisamos da <u>distribuição de probabilidades da</u> <u>estatística do teste Y</u>, supondo HO verdadeira.

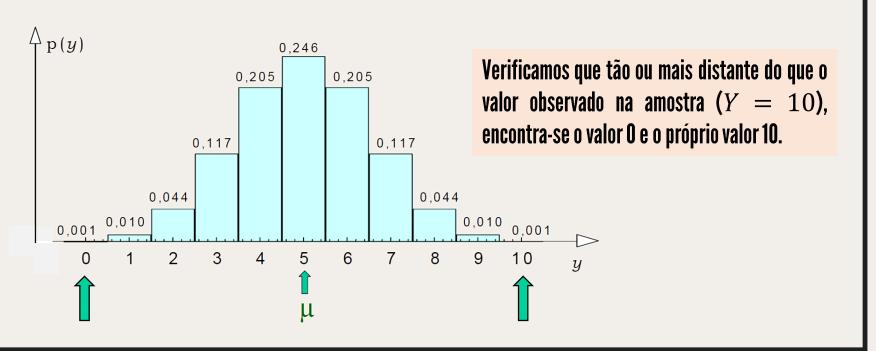
DISTRIBUIÇÃO DE REFERÊNCIA

No exemplo em questão, Y tem distribuição binomial com parâmetros n=10 e $\pi=0.5$ (supondo H0 verdadeira). Esta será a distribuição de referência para o valor calculado da estatística do teste, Y.

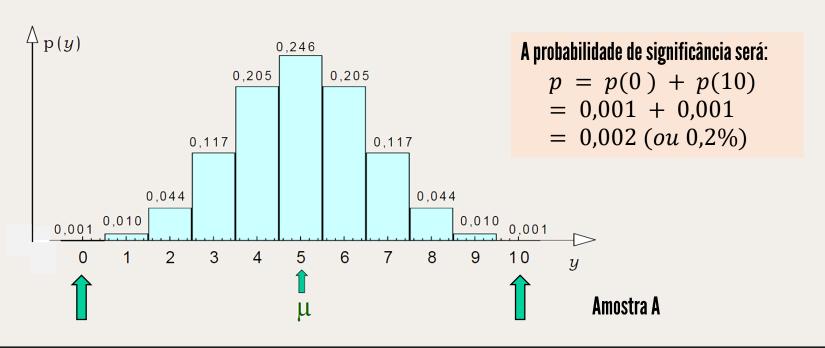


Distribuição da estatística Y = no. de caras em 10 lançamentos da moeda, sob HO (binomial com n=10 e $\pi=0.5$).

Supondo HO verdadeira, a probabilidade de significância, ou <u>valor-p</u>, é a <u>probabilidade de a estatística do teste acusar um resultado tão ou mais distante do esperado por HO</u>, como o resultado da amostra observada.

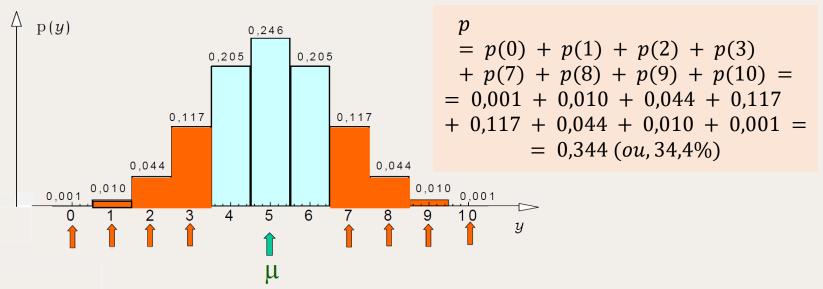


- O valor p aponta o quão estranho foi o resultado da amostra, se supusermos HO a hipótese verdadeira.
- O valor-p é calculado com base na distribuição de referência.



- No caso da moeda, quando consideramos a H0 verdadeira (a moeda é honesta) e ao depararmos com 10 lançamentos iguais a cara, a probabilidade de ocorrer valores tão extremos ou mais (0 ou 10 caras) é tão pequena que a gente acaba rejeitando a H0 de que a moeda é honesta.
- Ou seja, é <u>tão improvável ocorrer 10 caras quando a gente joga</u> <u>a moeda 10 vezes que isso só pode dar indícios de que a moeda</u> <u>é viciada</u>.
- Mas, ao rejeitar H0, é certo de que fizemos a coisa certa? Não, pois pode acontecer 10 caras mesmo a moeda sendo honesta, porém é muito improvável.
- Por isso o pesquisador define um nível de aceitação de erro, ou seja, o quanto ele aceita rejeitar HO sendo ela verdadeira.

Na amostra B, em que observamos Y = 7 caras em n = 10 lançamentos, tão ou mais distante do que o valor Y = 7 são encontrados os valores: 7, 8, 9, 10, 0, 1, 2 e 3.



Distribuição de Y, sob HO. As setas indicam os valores que distam do esperado, $\mu=5$, tão ou mais do que o valor Y=7, observado na amostra.



Quanto menor for o valor-p, maior a evidência para rejeitar HO.

Podemos pensar em probabilidade condicional...

Dada que a hipótese nula é verdadeira, qual é a probabilidade de observar esse padrão dos dados por puro acaso?

- Ainda na fase do planejamento de uma pesquisa, quando desejamos confirmar ou refutar alguma hipótese, é comum estabelecer o valor da probabilidade tolerável de incorrer no erro de rejeitar HO, quando HO é verdadeira.
- Este valor é conhecido como nível de significância do teste e é designado pela letra grega α .
- É muito comum adotar <u>nível de significância de 5%</u>, isto é, α = 0,05. Ou seja, em média, 95 vezes em 100 você terá rejeitado corretamente H0, e 5 vezes em 100 você estará errado.

Estabelecido o nível de significância α , tem-se a seguinte regra geral:

 $p > \alpha \rightarrow$ não rejeita HO;

 $p \leq \alpha \rightarrow$ rejeita HO, em favor de H1.

Seja o nível de significância de 5% ($\alpha = 0.05$).

- Na amostra A, quando observamos dez caras em dez lançamentos, o teste estatístico <u>rejeita HO</u>, em favor de H1 (pois a probabilidade de significância, calculada com base na amostra, foi p=0.002 e, portanto, <u>menor</u> do que o valor adotado para α).
- Na amostra B, quando observamos sete caras em dez lançamentos, o teste estatístico <u>não rejeita HO</u>, porque a probabilidade de significância, calculada com base na amostra, foi p=0.344; que não é menor do que o valor adotado para α .

- Quando o <u>teste rejeita HO</u> em favor de H1 ($p < \alpha$), a <u>probabilidade de se estar tomando a decisão errada é, no máximo, igual ao nível de significância α adotado. Desta forma, temos certa garantia da veracidade de H1.</u>
- Quando o <u>teste não rejeita a HO</u> ($p > \alpha$), podemos dizer que os <u>dados não mostraram evidência suficiente para rejeitá-la</u> e, por isso, continuamos acreditando em sua veracidade.

 $p \leq \alpha \rightarrow$ rejeita HO (os dados mostram evidência que...)

p>lpha não rejeita HO (os dados não mostram evidência que...)

		Realidade	
		HO verdadeira	HO falsa
Decisão	Não rejeitar HO	OK	Erro Tipo II (eta)
	Rejeitar HO	Erro Tipo I (α)	OK

Não é fixada a priori.

TESTES UNILATERAIS E BILATERAIS



Um teste pode ser unilateral ou bilateral, dependendo do problema em estudo. Nos <u>testes unilaterais</u>, a <u>probabilidade de significância</u> é computada em <u>apenas um dos lados</u> da distribuição de referência.

TESTES UNILATERAIS E BILATERAIS

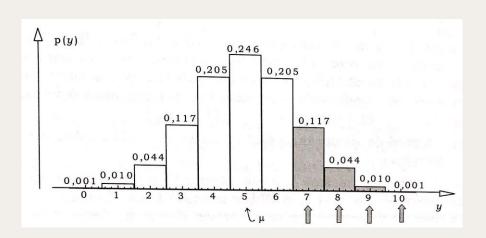
Considere que, para testar H0: $\pi = 0.5$ contra H1: $\pi > 0.5$ tenhamos lançado a moeda $n = 10 \ vezes$ e observado $Y = 7 \ caras$. A probabilidade de significância será:

$$p = p(7) + p(8) + p(9) + p(10) = 0.117 + 0.044 + 0.010 + 0.001$$

= 0.172

que corresponde à metade da probabilidade de significância do teste bilateral.

Com o nível de significância de 5%, o teste não rejeita H0.



RESUMO

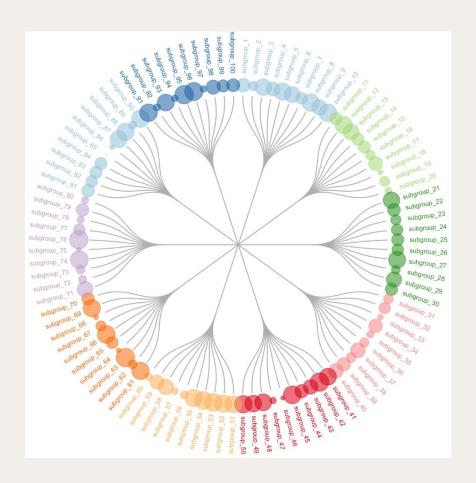


Em geral, na aplicação de um teste estatístico, devemos saber:

- a) formular <u>HO e H1</u> em termos de parâmetros populacionais;
- b) como <u>obter a estatística do teste</u>;
- c) qual é a <u>distribuição de referência</u> para calcular o valor p;
- d) quais as <u>suposições básicas</u> para o uso do teste escolhido.

A decisão do teste estatístico é feita pela <u>comparação do valor p</u> <u>com o nível de significância preestabelecido</u>, mas a implicação do resultado estatístico depende da aplicação em questão.

ARTE DO DIA FEITA EM R



https://www.r-graph-gallery.com/339-circular-dendrogram-with-ggraph.html

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARBETTA, Pedro Alberto. Estatística aplicada às ciências sociais. Ed. UFSC, 2008.
- DANCEY, Christine P.; REIDY, John G.; ROWE, Richard. Estatística Sem Matemática para as Ciências da Saúde. Penso Editora, 2017.
- MAGNUSSON, Willian E. Estatística [sem] matemática: a ligação entre as questões e a análise. Planta, 2003.