La Geometria nelle Piramidi Egizie

La matematica egizia

Nel mondo ellenistico l’Egitto era considerato la culla della scienza.

Secondo Erodoto le avanzate capacità matematiche egizie derivavano dalla loro pratica dell’agrimensura.

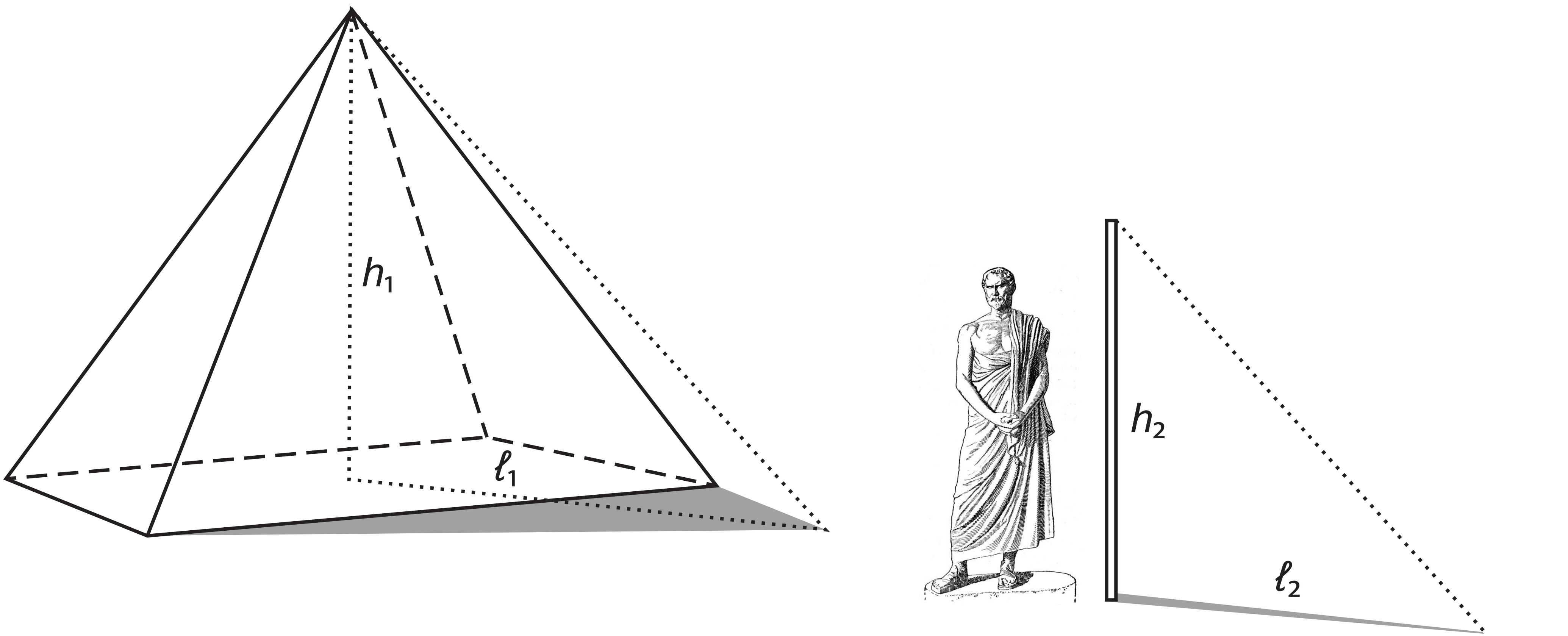
E Diodoro Siculo, nella sua *Bibliotheca*, descrive gli Egizi come gli inventori della geometria.

Clemente Letizia
Tresca Nina

ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin

La misurazione di Talete dell’altezza della Piramide



Clemente Letizia
Tresca Nina

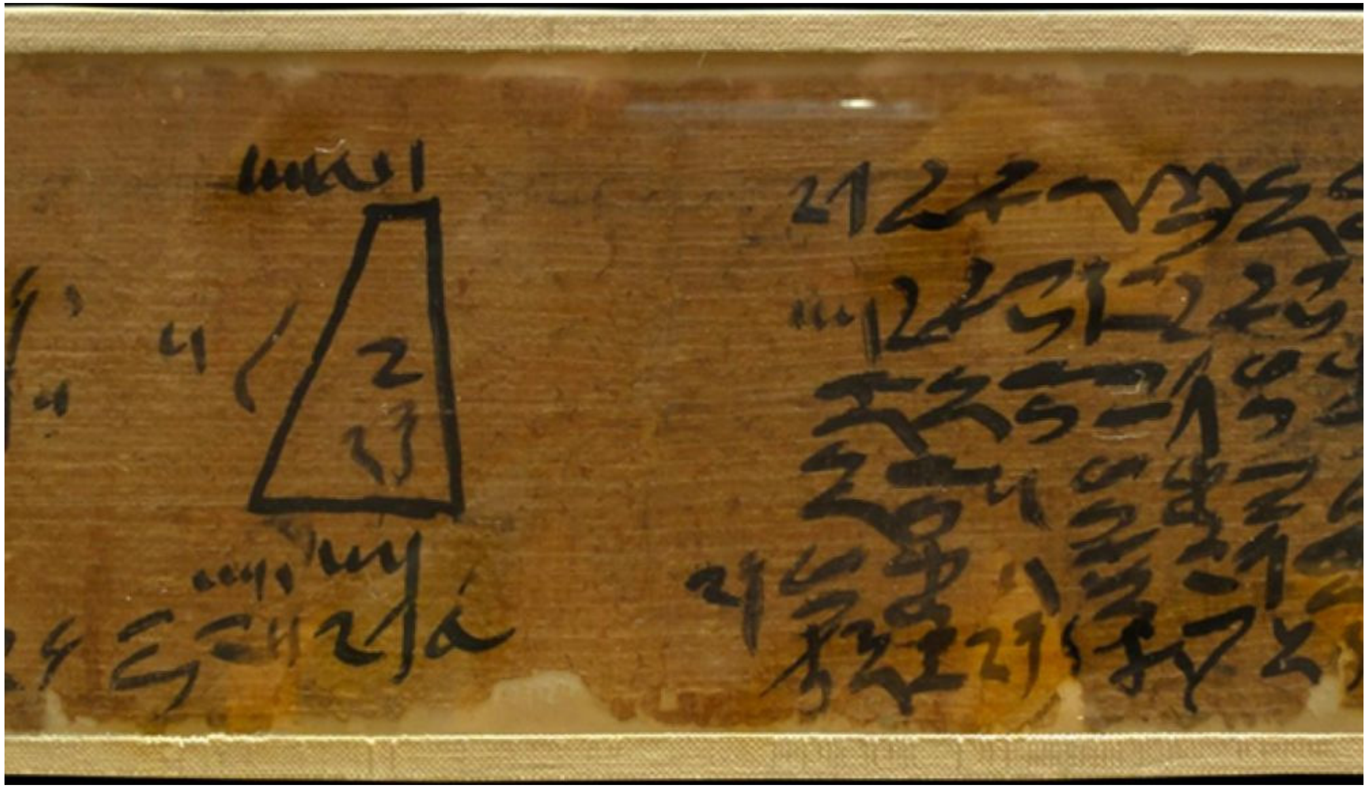
ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin

Il Papiro di Mosca

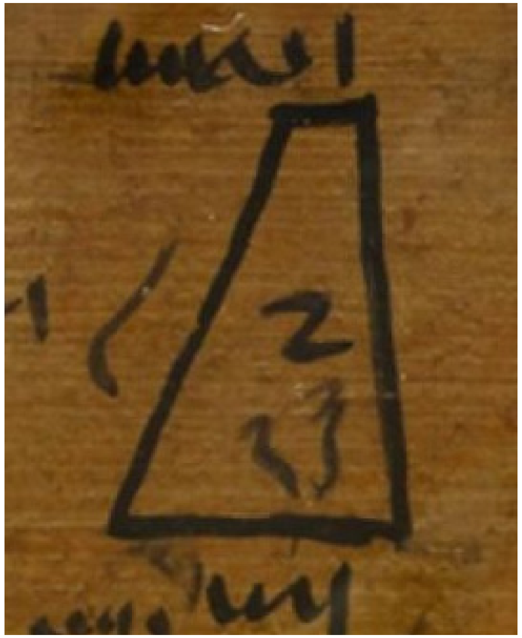
Composto da 25 problemi matematici

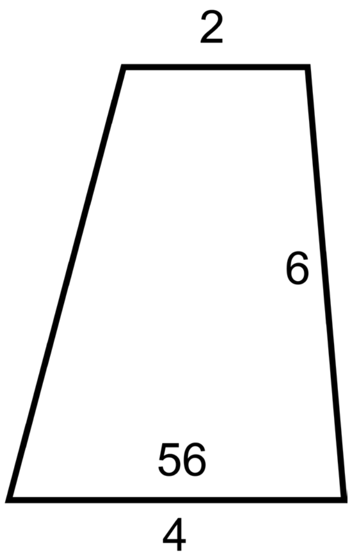
Il reperto, anche detto Papiro di Goleniščev, è un testo matematico egizio, risalente al 1850 a.C. circa e di autore ignoto.

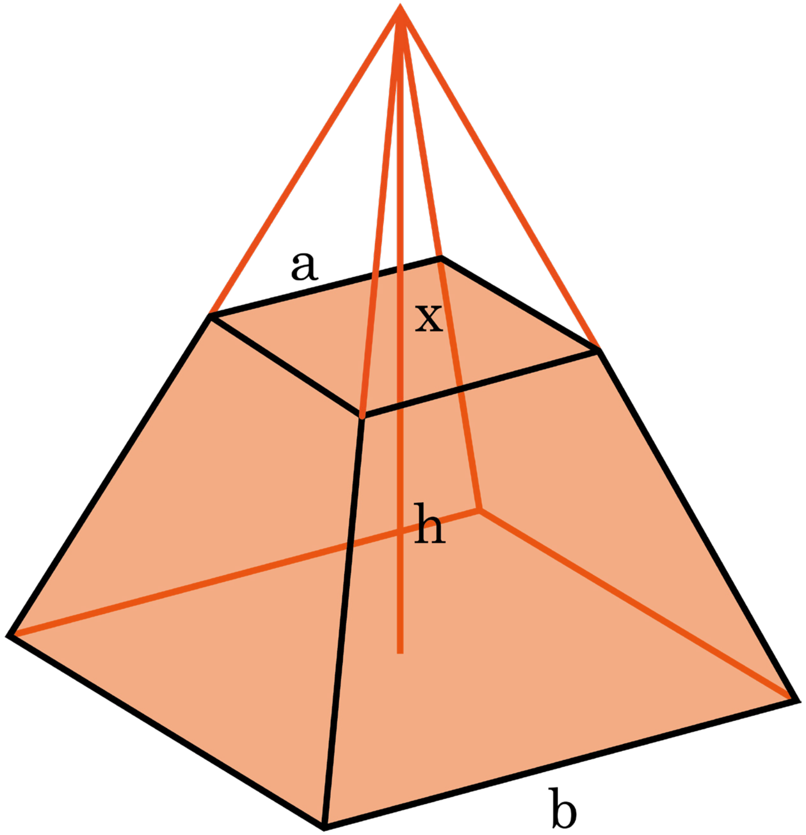


Problema 14

Trovare il volume di un tronco di Piramide quadrata alto 6 unità, se la base superiore e quella inferiore sono rispettivamente 2 e 4 unità







$$V = \frac{h \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right)}{3}$$

“Vedi, è 56; lo hai trovato esattamente”

Clemente Letizia
Tresca Nina

ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin

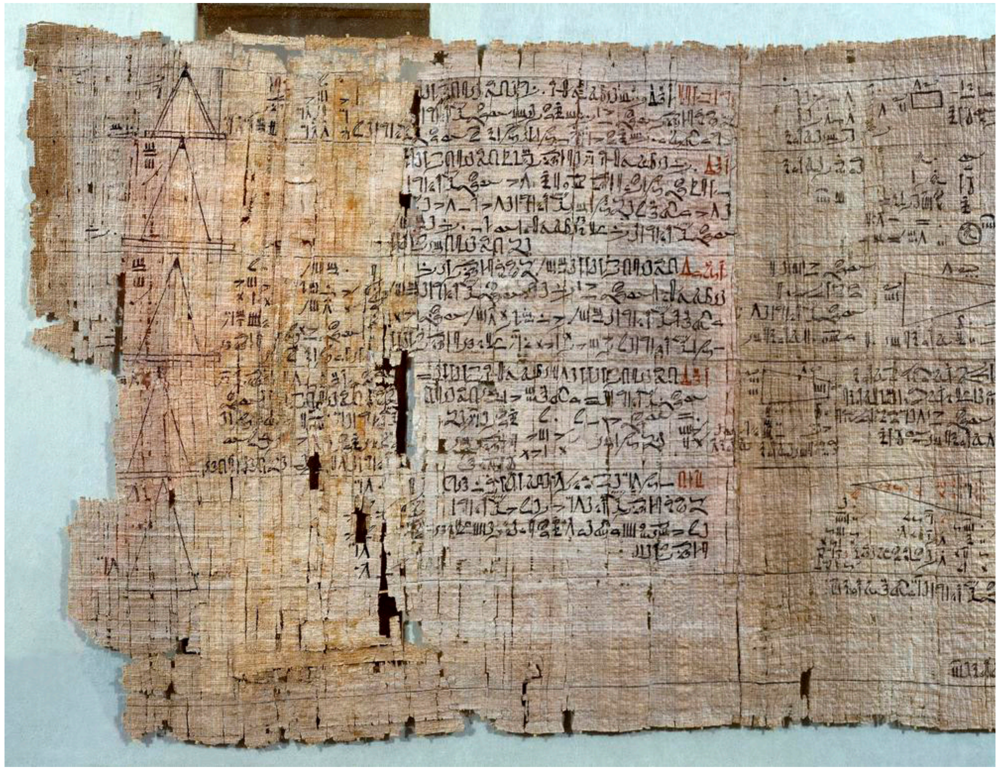
Il Papiro di Rhind

Contiene tabelle di frazioni e 84 problemi aritmetici, algebrici e geometrici e soluzioni

Il papiro di Rhind è il più esteso documento egizio di argomento matematico giunto fino a noi.

Fu trascritto dallo scriba Ahmes in ieratico

Risale al 1650 a.C. circa



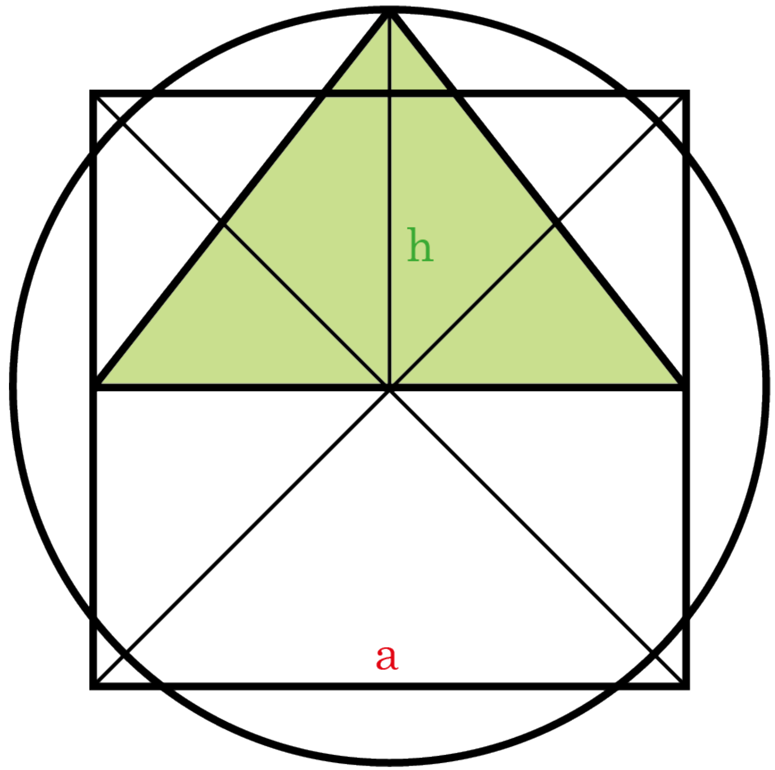
Clemente Letizia
Tresca Nina

ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin

Circonferenza e π nella Piramide

E’ stato scoperto che
il perimetro della base è
uguale alla circonferenza
con come raggio l’altezza
della Piramide



Clemente Letizia
Tresca Nina

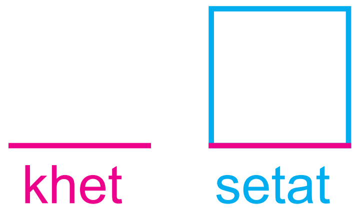
ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

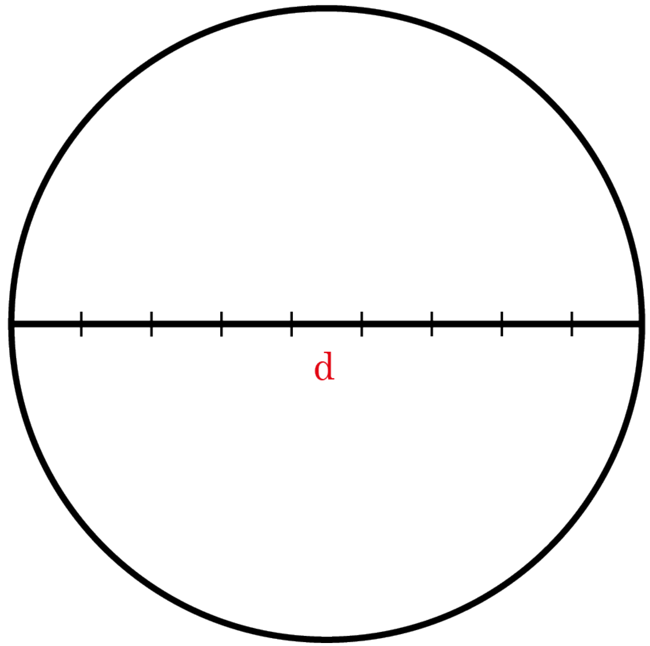
corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin

Problema 50

Lo scopo dell'esercizio è quello di trovare l'area di un cerchio con diametro 9 khet tramite la **quadratura del cerchio**

d = 9 khet



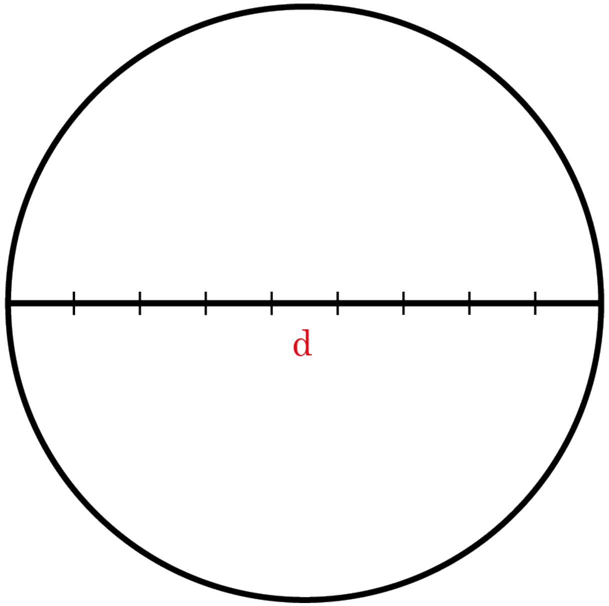


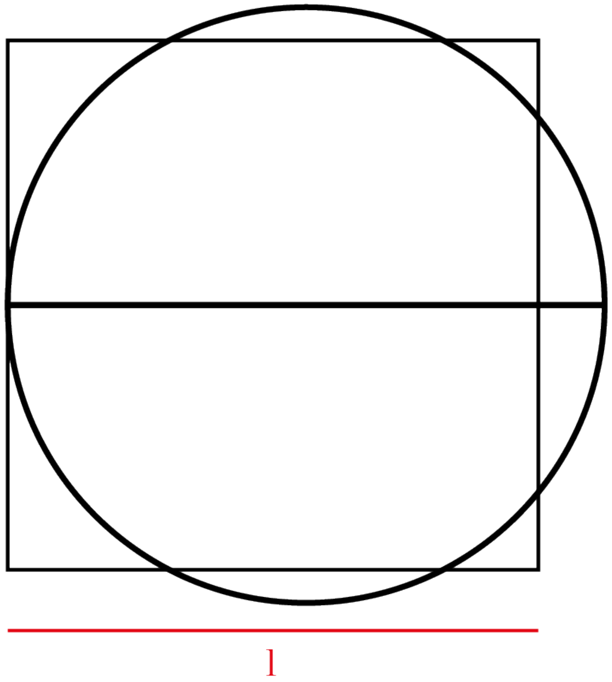
"Togli 1/9 a un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio" soluzione= 64 setat

Clemente Letizia
Tresca Nina

ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin





d = 9 khet

l = 8 setat

$$A = (d - \frac{d}{9})^2$$

$$A = (\frac{8}{9}d)^2$$

$$A = (\frac{8}{9} \cdot 9)^2 = 8^2 = 64\, setat$$

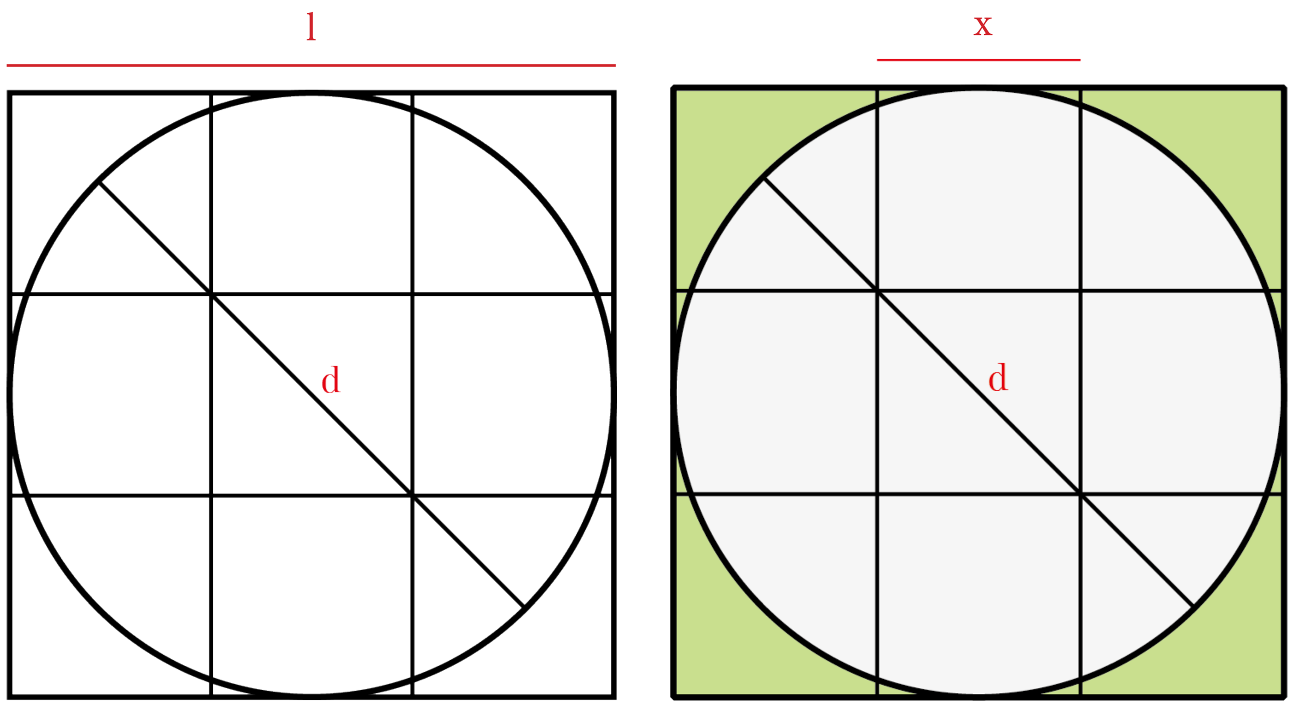
Clemente Letizia
Tresca Nina

Il procedimento dietro la soluzione

$$d = l$$

$$x = \frac{1}{3}d$$

$$A_x = x^2 = \frac{1}{9}d^2$$



$$A_c = 7A_x = 7(\frac{1}{9}d^2) = \frac{63}{81}d^2 = (\frac{8}{9}d)^2$$

Il pi egiziano

Confrontando la formula dell'Area della Circonferenza trovata dagli egizi con quella odierna si può trovare la più antica approssimazione del pi greco.

formula odierna

$$A = \pi r^2$$

formula egiziana

$$A = (\frac{8}{9}d)^2$$

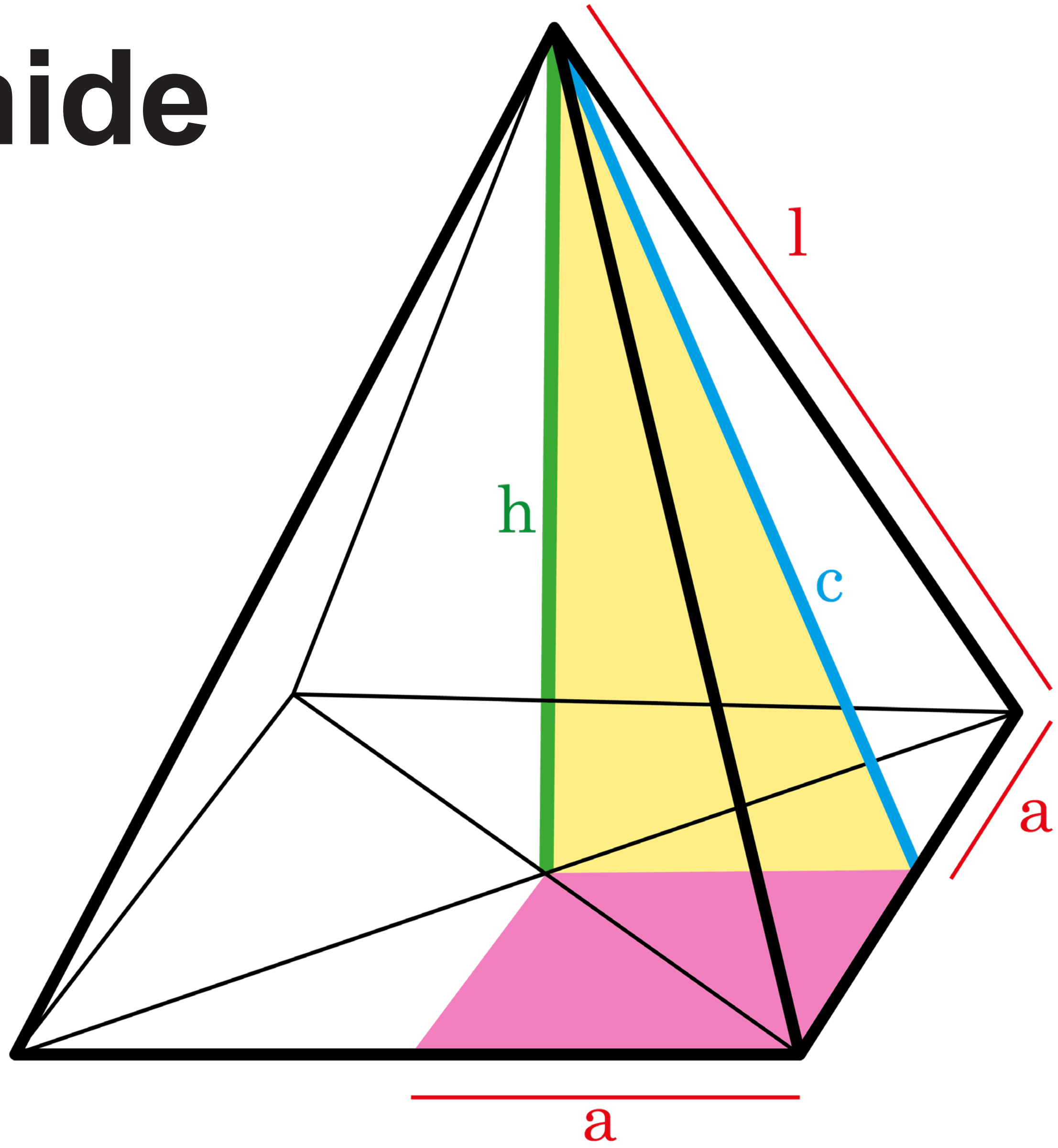
$$(\frac{8}{9}2r)^2 = \pi r^2$$

$$(\frac{16}{9}r)^2 = \pi r^2$$

$$(\frac{16}{9})^2 = \pi$$

$$\pi = \frac{256}{81} = \underline{3,1604938272}$$

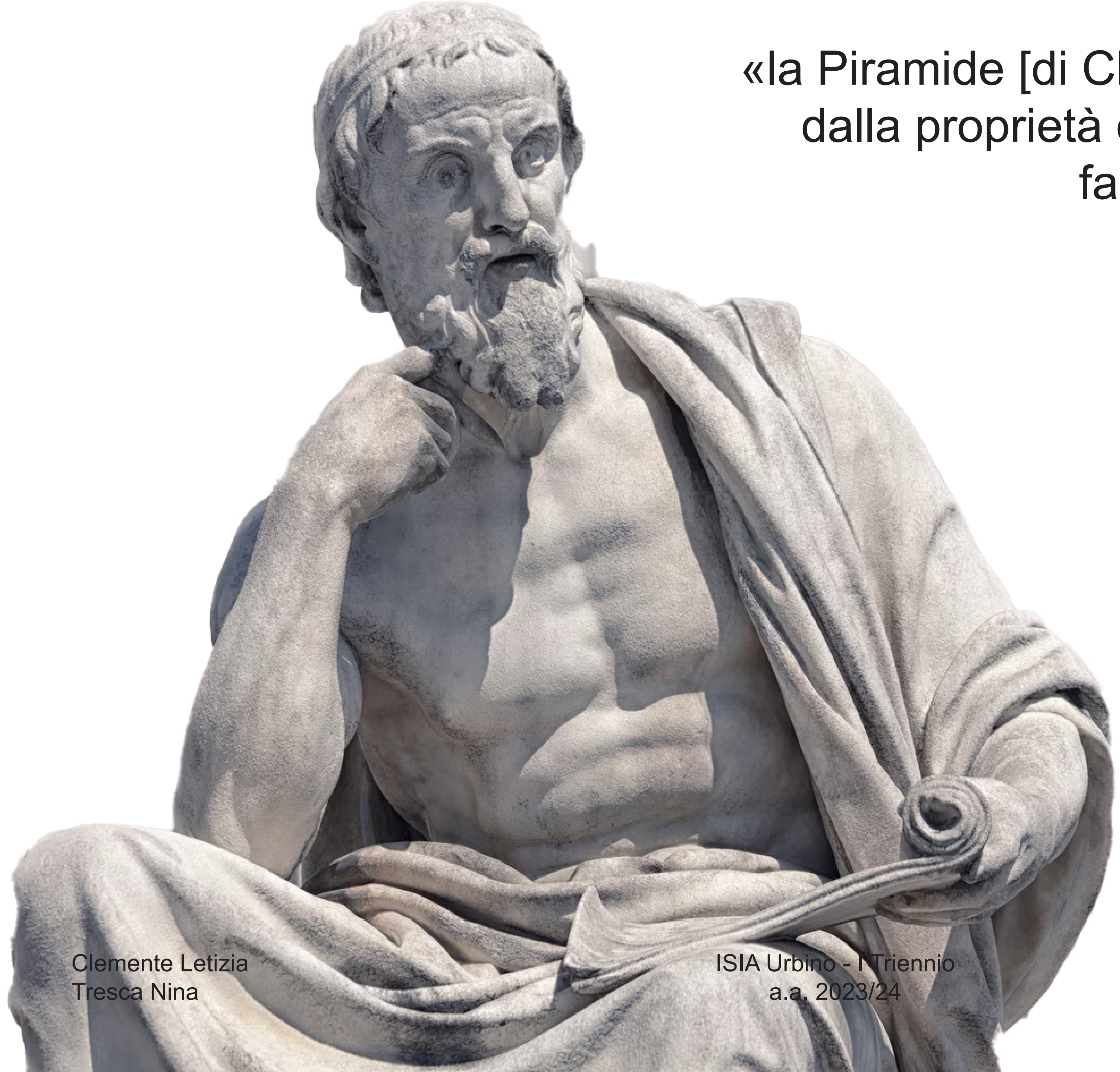
Phi nella Grande Piramide



Clemente Letizia
Tresca Nina

ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin



«la Piramide [di Cheope] è caratterizzata dalla proprietà di avere ciascuna delle facce uguale al quadrato costruito sull'altezza»

Erodoto di Alicarnasso

Clemente Letizia
Tresca Nina

ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin

Area della faccia triangolare:

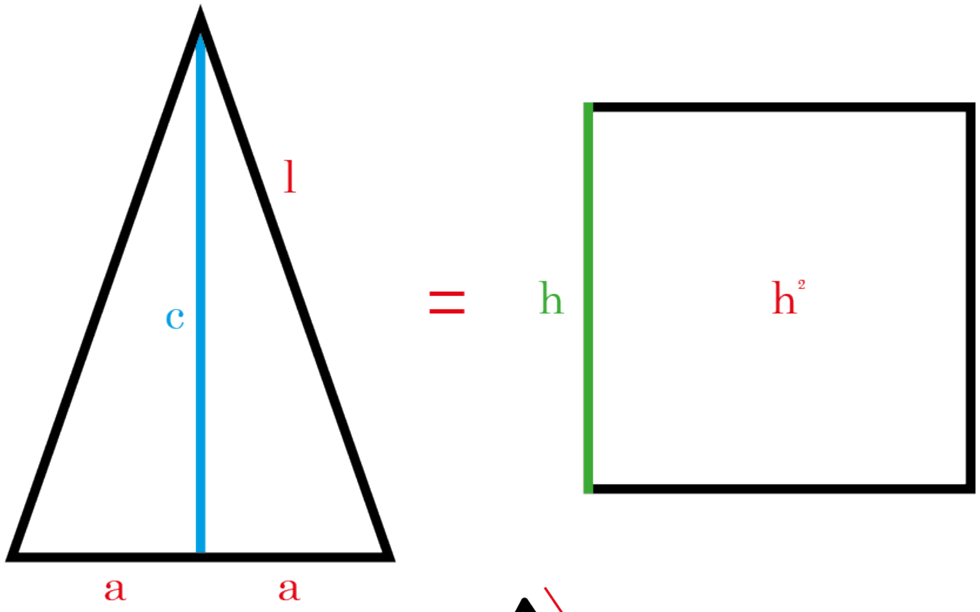
$$At = \frac{2a \cdot c}{2} = a \cdot c$$

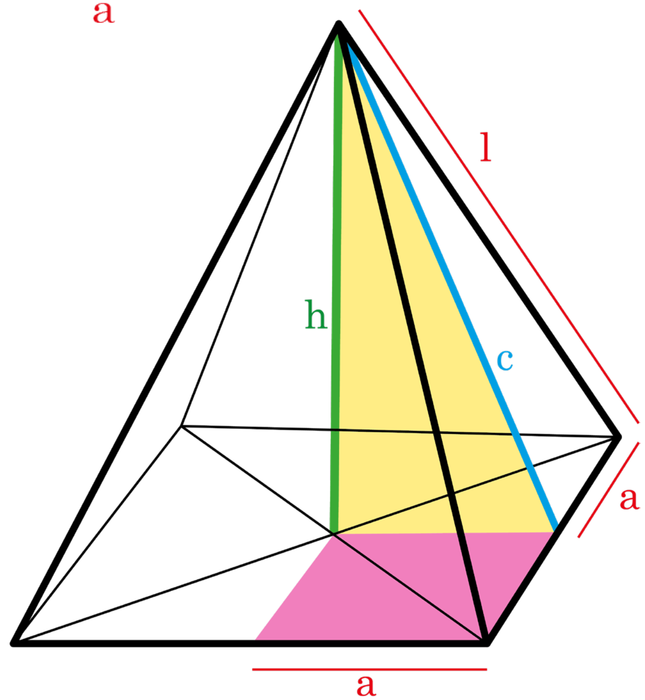
Area del quadrato costruito sull'altezza

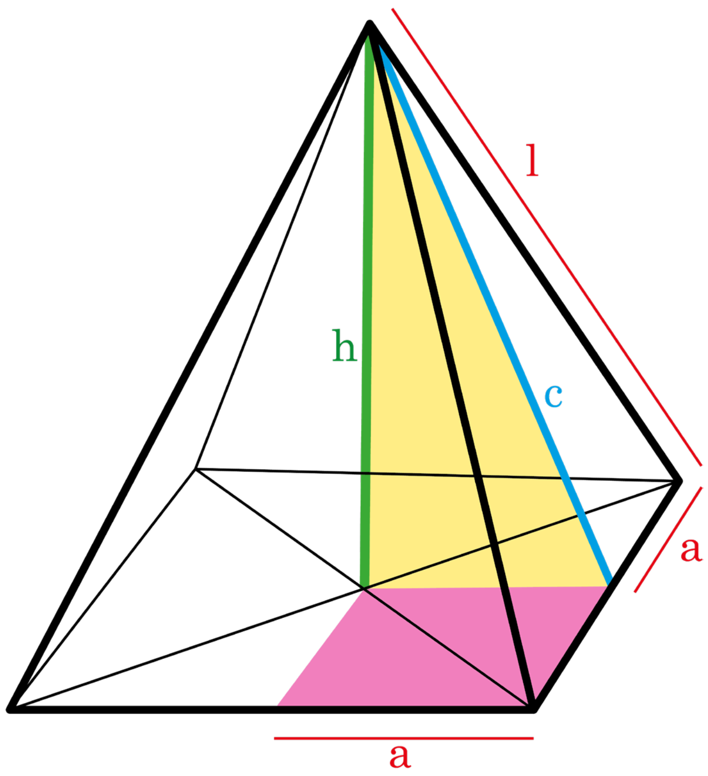
$$Aq = h^2$$

Con il teorema di pitagora ricavo h²

$$h^2 = c^2 - a^2 = Aq$$







Metto a sistema

$$\begin{cases} Aq = c^2 - a^2 \\ At = a \cdot c \end{cases}$$

$$c^2 - a^2 = a \cdot c$$ Ricaviamo c

$$c^2 - ac - a^2 = 0$$

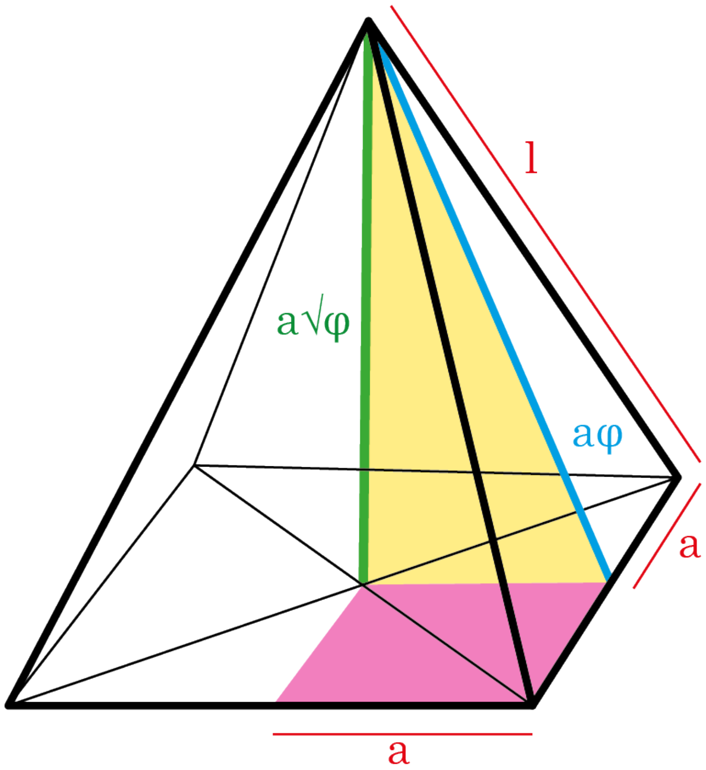
$$c_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = a\frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2} =$$

$$c = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$c = a\phi$$

$$\frac{c}{a} = \phi = 1,618...$$ **Rapporto aureo**

Clemente Letizia
Tresca Nina



Ricordiamo che l’area della faccia triangolare è uguale a quella del quadrato di lato h

$$h^2 = a \cdot c$$

Sostituiamo la c e ricaviamo h

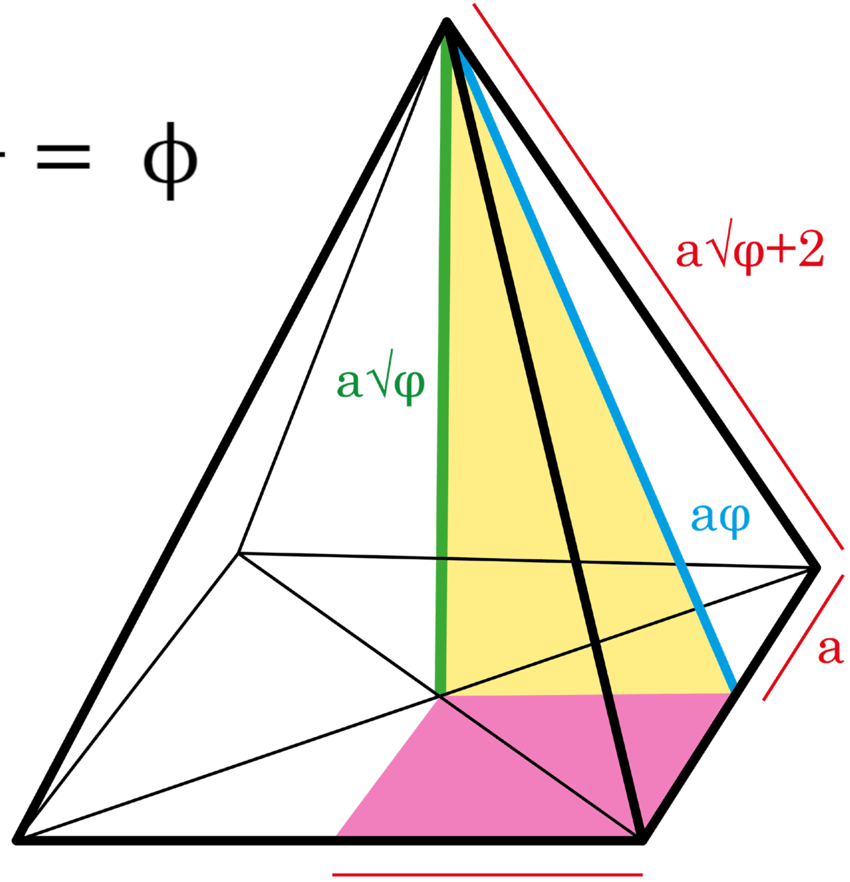
$$h^2 = a \cdot a\phi = a^2\phi$$

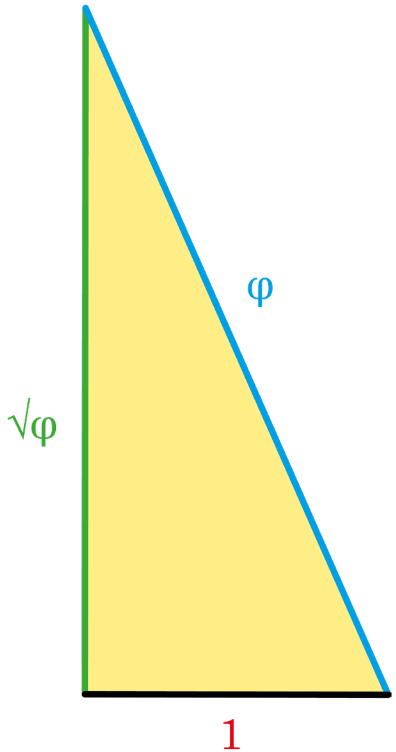
$$h = a \cdot \sqrt{\phi}$$

Il triangolo retto aureo

Triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa e il cateto siano in rapporto aureo

$$\frac{c}{a} = \phi$$





$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{4+2+2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

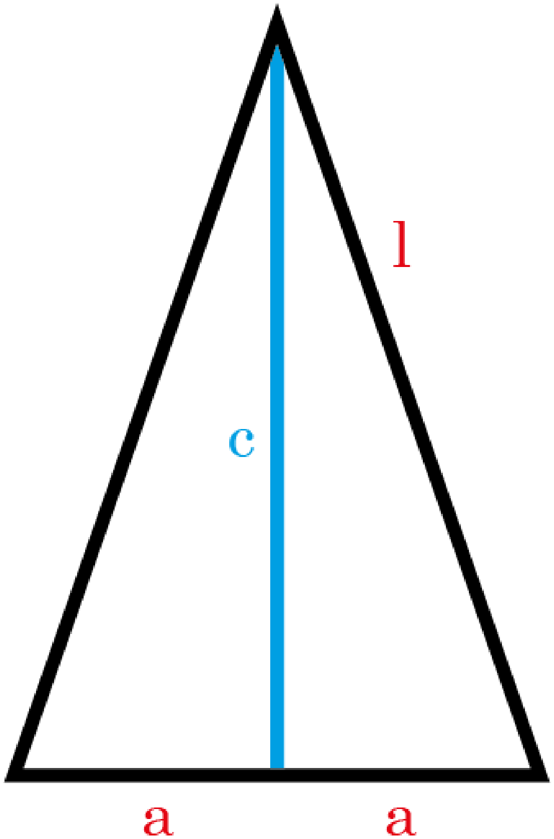
Clemente Letizia
Tresca Nina

ISIA Urbino - I Triennio
a.a. 2023/24

corso Matematica per il design
professore Andreas Gysin

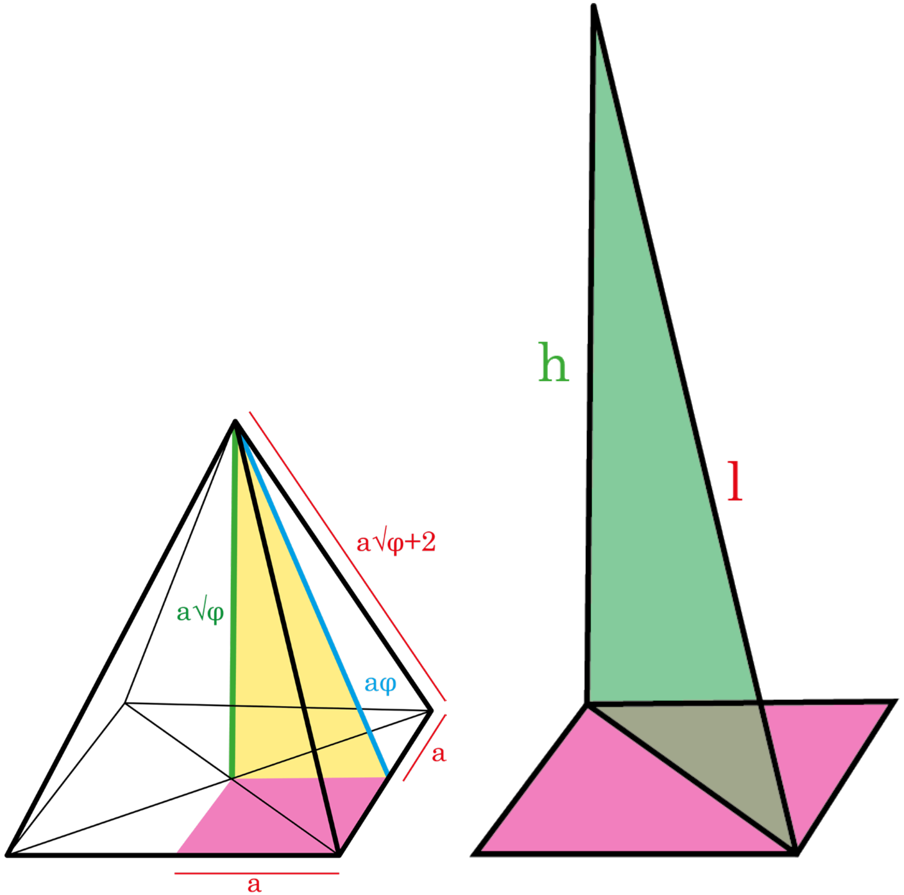
Ci manca da trovare l

Metodo 1



$$l^2 = a^2 + c^2 =$$
$$= a^2 + (a\phi)^2 =$$
$$= a^2 + a^2\phi^2 =$$
$$= a^2\left(1 + \phi^2\right)$$
$$l = a\sqrt{1 + \phi^2}$$

Metodo 2

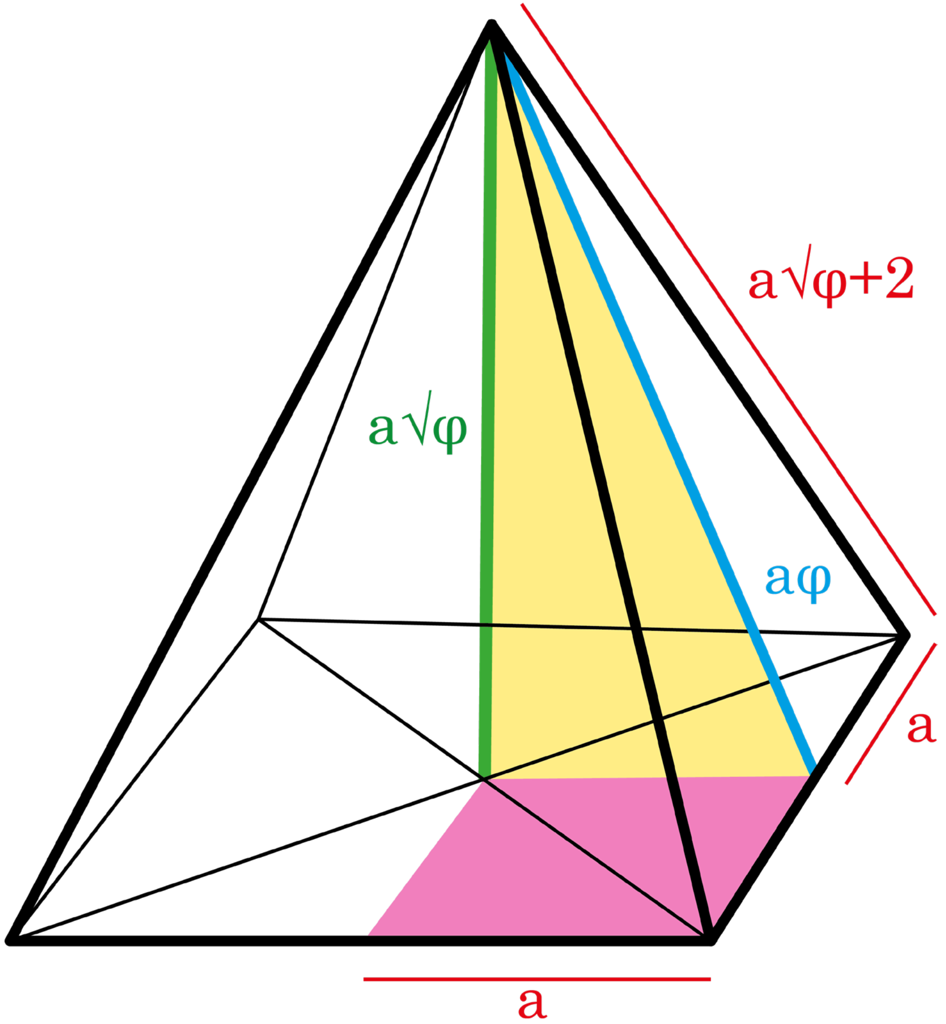


base = diagonale del quadrato = $a \cdot \sqrt{2}$

$$l^2 = \left(a\sqrt{\phi}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$$
$$= a^2\phi + 2a^2$$
$$= a^2(\phi + 2)$$
$$l = a\sqrt{\phi + 2}$$

Clemente Letizia
Tresca Nina

Ricapitolando



a = semilato della base

$h = a\sqrt{\phi}$

$c = a\phi$

$l = a\sqrt{\phi + 2}$

Clemente Letizia
Tresca Nina

Cos’è Phi?

Numero aureo

$$\phi = 1{,}6180339887\ldots$$

Clemente Letizia
Tresca Nina

Consideriamo il segmento AB e prolunghiamolo fino al punto C, in modo che sia vera la proporzione

AC:AB=AB:BC

Se questa proporzione è soddisfatta allora AB sarà la proporzione aurea del segmento AC

Rinominiamo
AB=a
AC=x

la proporzione diventa quindi

$$x : a = a : (x - a)$$

$$a \cdot a = x \cdot (x - a)$$

$$a^2 = x(x - a)$$

$$a^2 = x^2 - ax$$

Clemente Letizia
Tresca Nina

Ricaviamo la x

Otteniamo la seguente
equazione di secondo grado

$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = a \pm \frac{\sqrt{a^2+4a^2}}{2}$$

$$x_1 = a \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ora definiamo il **rapporto aureo** è $\phi = \frac{x}{a}$

e se $x = a \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

allora $\phi = \frac{x}{a} \Rightarrow \phi = \frac{\cancel{a} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\cancel{a}}$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ovvero $\boxed{\phi = 1,618}$

Conclusioni

Invece che conoscere le effettive rappresentazioni decimali di pi e phi come le comprendiamo oggi, gli antichi egizi potrebbero aver usato **approssimazioni** di numeri interi che raggiungevano le stesse relazioni e risultati nella progettazione.

il fatto che la piramide li utilizzi dimostra che probabilmente c’era una certa comprensione e intenzione della loro importanza matematica nella loro applicazione.

Bibliografia

- *“Storia della Matematica”* di Carl B. Boyer (Cap.II)
- conferenza *“La Matematica dei Greci”* di Piergiorgio Odifreddi
- *“The Great Pyramid of Giza, Pi and The Goldern Ratio”* di Miguel R. Ramirez
- *“Il Turista Matematico”* di Piergiorgio Odifreddi x LaRepubblica
- “Rhind Mathematical Papyrus” di Wikipedia
- “*La sezione aurea in geometria: rettangolo e triangolo aureo*” di Weschool